§9. РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть $A(m,n)$ — произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать ее столбцы как систему векторов пространства $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы векторов назовем ***рангом матрицы*** $A(m,n)$:

$$\operatorname{rank}(A).$$

Напомним, что размерность образа оператора $\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$,

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}) = \{y \in \mathbf{Y}_m : y = \mathcal{A}x,\ x \in \mathbf{X}_n\},$$

называется *<u>рангом</u>* оператора $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{rank}(\mathcal{A}).$$

.

<u>Теорема.</u> Пусть

$$\mathcal{A} : \mathbf{X}_n \to \mathbf{Y}_m$$

A_{eq} — матрица оператора $\mathcal{A}$ относительно произвольным образом фиксированных базисов

$$\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathbf{X}_n, \quad \{q_k\}_{k=1}^m \subset \mathbf{Y}_m.$$

Тогда

$$\operatorname{rank}(A_{eq}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}).$$

.

Доказательство. Пусть

$$x = \mathcal{E}_n \xi \in \mathbf{X}_n.$$

Тогда

$$\mathcal{A}x = \mathcal{Q}_m \eta,$$

где

$$\eta = A_{eq} \xi.$$

Обозначим

$$L_r \subset \mathbb{C}^m$$

подпространство, натянутое на столбцы матрицы A_{eq}. Тогда

$$\eta = A_{eq}\xi \in L_r,$$

кроме того,

$$\dim(L_r) = \mathrm{rank}(A_{eq}).$$

.

Имеем

$$\eta \in L_r,$$

$$\mathcal{Q}\eta = \mathcal{A}x \in \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

Следовательно,

$$\mathcal{Q} : L_r \to \mathrm{Im}(\mathcal{A}).$$

.

Линейный оператор

$$\mathcal{Q} : L_r \to \mathrm{Im}(\mathcal{A})$$

обратим, следовательно, подпространство L_r **изоморфно** $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, **и**

$$\dim\,(L_r) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})).$$

.

Итак,

$$\dim\left(L_r\right) = \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})),$$

но

$$\dim(L_r) = \mathrm{rank}(A_{eq}), \quad \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}),$$

следовательно,

$$\mathrm{rank}(A_{eq}) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}). \ \square$$

Таким образом, ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, и можно было бы дать эквивалентное определение *ранга оператора* как ранга его матрицы.

Матрицу $A(m, n)$ можно трактовать и как систему строк из пространства $\mathbb{C}^n$. Ранг этой системы строк обозначим через r_s.

<u>Теорема.</u> Для любой матрицы $A(m, n)$ выполнено равенство

$$r_s = \operatorname{rank}(A),$$

т. е. ранг системы ее строк равен рангу системы ее столбцов.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что первые r_s строк матрицы $A(m,n)$ линейно независимы, а каждая из последующих линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m,n)$.

.

Пусть $A(r_s, n)$ — матрица, состоящая из первых r_s строк матрицы $A(m, n)$. Используем для преобразования матрицы $A(r_s, n)$ алгоритм, совпадающий, фактически, с прямым ходом метода Гаусса.

.

Выберем в первой строке матрицы $A(r_s, n)$ ненулевой элемент. Это возможно, так как ни одна строка матрицы $A(r_s, n)$ не может быть нулевой.

Переставим столбцы матрицы $A(r_s, n)$ так, чтобы столбец, содержащий указанный ненулевой элемент оказался первым. Сохраним за преобразованной таким образом матрицей прежнее обозначение.

Умножим первую строку на $-a_{21}/a_{11}$ и сложим со второй:

$$\widetilde{a}^2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} a^1 + 1 \cdot a^2.$$

.

Затем аналогичные преобразования проделаем со всеми последующими строками матрицы $A(r_s, n)$.

.

В результате получим матрицу, у которой все элементы первого столбца, кроме элемента a_{11}, равны нулю, причем $a_{11} \neq 0$.

.

Вторая строка преобразованной матрицы есть нетривиальная линейная комбинация первых двух (линейно независимых) строк, поэтому она отлична от нуля:

$$\widetilde{a}^2 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}a^1 + 1 \cdot a^2 \neq 0.$$

Поменяв местами при необходимости второй столбец с одним из последующих, мы получим матрицу, у которой

$$a_{22} \neq 0.$$

Умножим вторую строку на $-a_{32}/a_{22}$ и сложим с третьей:

$$\widetilde{a}^3 = -\frac{a_{32}}{a_{22}} a^2 + 1 \cdot a^3.$$

.

Аналогичные преобразования проделаем и с последующими строками матрицы $A(r_s, n)$.

Продолжая такие преобразования, мы, в результате, придем к матрице, которую можно представить в блочном виде

$$(\widetilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)),$$

где $\widetilde{A}(r_s, r_s)$ — верхняя треугольная матрица с ненулевыми элементами на главной диагонали.

.

Описанные выше преобразования не могут «сорваться», так как в ходе указанных вычислений каждый раз возникает строка, которая является нетривиальной линейной комбинацией предыдущих (линейно независимых) строк матрицы $A(r_s, n)$, и потому не может оказаться нулевой.

Очевидно, что, не ограничивая общности рассуждений, можно считать что первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ таковы, что выполняя описанные выше преобразования и не прибегая к перестановке столбцов, мы придем к матрице вида

$$(\widetilde{A}(r_s, r_s), B(r_s, n - r_s)).$$

Ясно, что $\det(\widetilde{A}(r_s, r_s)) \neq 0$, поэтому первые r_s столбцов исходной матрицы $A(r_s, n)$ линейно независимы. Но тогда, и первые r_s столбцов матрицы $A(m, n)$ линейно независимы.

.

Покажем, что добавление к ним любого столбца матрицы $A(m,n)$ приводит к линейно зависимой системе.

.

Пусть Δ_{r_s} — главный минор порядка r_s матрицы $A(m,n)$. Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\Delta_{r_s} \neq 0.$$

Итак, $\Delta_{r_s} \neq 0$, поэтому система линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r_s}x_{r_s} = a_{1k},$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r_s}x_{r_s} = a_{2k},$$

$$\ldots$$

$$a_{r_s1}x_1 + a_{r_s2}x_2 + \cdots + a_{r_sr_s}x_{r_s} = a_{r_sk}$$

имеет решение при любом $k = 1, 2, \ldots, n$.

.

Каждая строка матрицы $A(m,n)$ с номером, большим r_s, линейно выражается через первые r_s строк матрицы $A(m,n)$:

$$a_{pk} = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Пусть вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_s})$ есть решение системы

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij} x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, r_s, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} \sum_{j=1}^{r_s} a_{ij} x_j = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n,$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{r_s} \left(\sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{r_s} \alpha_{ip} a_{ik}, \quad p = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Равенства

$$\sum_{j=1}^{r_s}\left(\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ij}\right)x_j=\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ik},\quad p=r_s+1,\,\ldots,\,m,\quad k=1,\,\ldots,\,n,$$

учитывая

$$a_{pk}=\sum_{i=1}^{r_s}\alpha_{ip}a_{ik},\quad p=r_s+1,\,\ldots,\,m,\quad k=1,\,\ldots,\,n,$$

можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{r_s}a_{pj}x_j=a_{pk},\quad p=r_s+1,\,\ldots,\,m,\quad k=1,\,\ldots,\,n.$$

Итак, если вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{r_s})$ есть решение системы

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, r_s, \quad k = 1, \ldots, n,$$

то он удовлетворяет и равенствам

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = r_s + 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n.$$

.

Равенства
$$\sum_{j=1}^{r_s} a_{ij}x_j = a_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n,$$
означают, что каждый столбец матрицы $A(m, n)$ есть линейная комбинация ее первых r_s столбцов, следовательно,
$$\operatorname{rank}(A(m, n)) = r_s. \ \square$$

.

Квадратная матрица порядка n невырождена тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}(A) = n.$$

Любая перестановка строк или столбцов матрицы, очевидно, не меняет ее ранга.

.

Теорема. Пусть $A(m,n)$ — произвольная матрица, а $B(m,m)$ и $C(n,n)$ — квадратные невырожденные матрицы. Тогда

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA),$$

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AC).$$

Доказательство. Для проверки равенства

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA),$$

достаточно заметить, что если матрица B невырождена, то для линейной независимости системы столбцов

$$Ba^1, \ \ldots, \ Ba^p$$

необходимо и достаточно линейной независимости столбцов

$$a^1, \ \ldots, \ a^p$$

Действительно, если матрица B невырождена, то

$$Ax = 0 \iff BAx = 0.$$

.

Имеем

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(BA).$$

Следовательно,

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A^T B^T).$$

Обозначим

$$D = A^T, \quad C = B^T.$$

Тогда

$$\operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(DC). \ \square$$

Упражнение. **Показать, что для любых допускающих умножение прямоугольных матриц A, B справедливо неравенство**

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$