§3. Образ оператора
Ядро оператора. Ранг матрицы

Пусть $A: X \to Y$ – линейный оператор. Мн-во всех в-ов y из пр-ва Y таких, что

$y = Ax$, для некоторого $x \in X$, называется **областью значений** или **образом оператора** ($Im(A)$). Множество $Im(A)$ – линейное подпространство пр-ва Y.

Размерность под-ва $Im(A)$ наз-ся **рангом** оператора A ($rank(A)$)

Мн-во всех в-ов $x \in X$ таких, что $Ax = 0$, называется **ядром оператора** A ($Ker(A)$).

Это мн-во – линейное под-во пр-ва X. Размерность под-ва $Ker(A)$ называется **дефектом оператора** A ($def(A)$)

Для любого линейного оператора $A: X_n \to Y_m$

$$rank(A) + def(A) = n$$

Пусть в пр-ве X дана некоторая система в-ов $\{a^i\}_{i=1}^m$. Будем считать, что не все эти векторы этой системы нулевые. Тогда указанная система обязательно содержит линейно независимую подсистему в-ов. В частности она сама может быть линейно независимой.

Подсистема в-ов $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r \in \{a^i\}_{i=1}^m$, состоящая из линейно независимых в-ов, наз-ся **максимальной**, если добавление к ней любого в-ра из $\{a^i\}_{i=1}^m$ приводит к линейно зависимой системе.

Любые две максимальные линейно независимые подсистемы данной системы содержат одно и то же количество векторов. Рангом системы в-ов наз-ся кол-во в-ов её максимальной ли линейно независимой подсистемы

Пусть $A(m,n)$ - произвольная прямоугольная матрица. Будем трактовать её столбцы как систему в-ов пр-ва $\mathbb{C}^m$. Ранг этой системы в-ов назовем рангом матрицы $A(m,n)$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\operatorname{rank}(A)$

Матрицу $A(m,n)$ можно трактовать и как систему строк из пр-ва $\mathbb{C}^n$. Для любой матрицы $A(m,n)$ ранг этой системы строк равен рангу системы её столбцов.

Пусть $A: X_n \to Y_m$, A_{eq} - матрица оператора A относительно произвольных образцов фиксированных базисов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset X_n$ и $\{q_k\}_{k=1}^m \subset Y_m$. Тогда $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{eq})$

Ранг матрицы оператора инвариантен по отношению к выбору базисов, выбираемых при её построении, и можно было бы дать эквивалентное определение ранга оператора как ранга его матрицы

Упражнения

№1.

$\operatorname{Ker}(A) = \{x \in X;\ Ax = 0\}$.

Пусть x, y - произвольные векторы из $\operatorname{Ker}(A)$, α, β - любые числа.

Тогда $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0$.

т.е. линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ принадлежит множеству $\operatorname{Ker}(A)$

№2.

Обозначим $C = AB$. Столбцы матрицы C линейно выражаются через столбцы матрицы A, которые в свою очередь линейно выражаются через максимальную подсистему линейно независимых столбцов матрицы A. Число столбцов в этой подсистеме равно $\operatorname{rank}(A)$. Назовем столбцы этой подсистемы базисными. Можно сказать, что столбцы матрицы C принадлежат под-ву, натянутому на базисные столбцы матрицы A. Следовательно, число линейно независимых столбцов матрицы C не может превышать $\operatorname{rank}(A)$. С другой стороны, строки матрицы C линейно выражаются через строки матрицы B. Проводим аналогично $\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(C) \leq \operatorname{rank}(B)$.

№3. Р/м систему в-ов пространства $\mathbb{R}^3$

$$a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a^4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В-ры a^1, a^2 линейно независимы. Они образуют максимально линейную независимую подсистему, так как определители, сост. из a^1, a^2, a^3, и a^1, a^2, a^4 соответственно равны 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно в-ры a^1, a^2, a^3 и a^1, a^2, a^4 линейно зависимы. Это не ед-ное максимальное линейно независимая подсистема. Так же св-ом обл. a^1, a^3 и a^1, a^4.

Любая из указанных пар в-ов образует базис под-ва, натянутого на a^1, a^2, a^3, a^4.

Ранг этой систем в-ов равен 2.

№4 Пусть $y \in Im(A)$. Тогда $y = Ax$, для некоторого в-ра $x \in X_n$

$$y = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) \in L(Ae^1 \dots Ae^n)$$

С другой стороны, если $y \in L(Ae^1 \dots Ae^n)$, то

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (Ae^i) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i\right) = Ax,$$

где $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e^i$, т. е $y \in Im(A)$, Значит,

$$Im(A) = L(Ae^1, \dots Ae^n)$$

№5. Построим Ai^1, Ai^2, Ai^3.

Найдем ~~мак~~ среди них максимально линейно независимую подсистему

a) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3; x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

$rank(A) = 1$. базис образа $- (1, 1, 1)$

$def(A) = 2$

в) $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 - x_3; x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$

$rank(A) = 2$, базис образа $= (2, 1, 1), (-1, -2, 1),$

$def(A) = 1$

c) $A(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 - x_3)$

$\operatorname{rank}(A) = 3$, базис образа — $(-1,1,1)(1,-1,1),(1,1,-1)$

$\operatorname{def}(A) = 0$.

№6. Каждому эл-ту пр-ва P_n опр-р D ставит в соответствие полином из P_{n-1}. Поэтому $\operatorname{Im}(D) = P_{n-1}$ и можно считать, что: $D: P_n \to P_{n-1}$.

Любой полином нулевой степени (вещ. число) оператор D обращает в 0.

Полином более высоких степеней в р-те дифференцирования не могут обратиться в ф-цию, тождественно равную 0. $\Rightarrow \operatorname{Ker}(D) = P_0$.

№7. $\operatorname{Im}(P) = L_1$, $\operatorname{Ker}(P) = L_2$

№8. $\operatorname{Im}(R) = X$, $\operatorname{Ker}(R) = \{0\}$

№9 Образ — плоскость $(x, a) = 0$, ядро — прямая $[x, a] = 0$. ~~[illegible]~~

$Ax = [x, a]$, a — фикс. ненулевой в-р.

Построим базис в V_3 с a и $e^1 \perp a$. и $e^2 = [e^1, a]$

Вектора $[e^1, a]$ ортогонален $[e^2, a]$,

тогда мы можем через полож коорди-нат натянуть на них плоскость.

№10. Последние $n-r$ столбцов матрицы A_e нулевые, первые r — линейно независимы

№11 Метод окаймляющих миноров, применяемый для вычисления ранга матрицы.

1. Просматр. эл-ты матрицы. Если все - нули, полагаем ранг = 0 и останавливаем процесс

2. Если найден эл-т матрицы, отл. от 0, то окаймляем его. т.е. составляем определители второго порядка - нули, то, очевидно, у матриц только один линейно независимый столбец (и одна линейно независимая строка). Значит ранг матр = 1.

3. Если обнаружен ненулевой опр. 2 порядка, то путем окаймления строим опр. 3 порядка, пока не получим среди них определитель, отличный от 0 и т.д. Если на k-ом шаге получен опр., не равный 0, а все опр. порядка k+1 - нули, то ранг матриц равен k.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ составлена из столбцов a^1, a^2, a^3, a^4

Следовательно его ранг равен 2.
Заметим, что в матрице A содержится минор $d \neq 0$. Следовательно $\operatorname{rank}(A)=2$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

№12 Второй элементарные преобразования над строками и (или) столбцами.

Найдем ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу!

1) из 2 стр. вычтем 1 умнож. на 2.

2) из 3 стр. вычтем 1 умн. на 3.

3) из посл. стр. м. вычтем 1 умн. на 2.

Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -10 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Вычтем 2 стр. из 3стр. и прибавим 2стр к 4стр.

$$A \sim \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В полученной матрице минор 3пор.

$$d = \begin{vmatrix} 24 & 19 & 36 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix}$$ отличен от 0.

Все окаймл. минора 4 порядка =0. Таким образом rank$(A)=3$

№ 13 а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

1 стр. делим на 2,
от 2, 3 стр. отнимем 1стр. умноженную на 4, 2.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 1,5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

2 стр. разделим на -1

от 1, 3 стр. отнимем 2 стр., умноженную на 1,5, (-2)

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0 & 6{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как ненулевых строк 2,

то $rank(A) = 2$

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0{,}75 & -1{,}25 & 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rank(A) = 2$

№14 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda - ?$

При $\lambda = 0$ ранг $A = 2$

При $\lambda \neq 0$ ранг $A = 3$

Ответ: 0.

№15 а) $A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1,24 & 0,68 & 1,72 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank (A) = 3.

~~№1~~ в) $A = \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{28}{17} & \frac{45}{17} & \frac{11}{17} & \frac{39}{17} \\ 0 & +1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank (A) = 2

№16. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Упростим матрицу A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 13/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 3.$

в) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Упростим матрицу A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 2{,}25 & 0{,}25 & 3{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 3.$

№ 17. $$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & +10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

При $\lambda = 3$ $\operatorname{rank}(A) = 2$

при $\lambda \neq 3$ $\operatorname{rank}(A) = 3.$

№ 18. $$A = \begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 155 \\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86 \\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -67/47 & 35/47 & 201/47 & 155/47 \\ 0 & 1 & 57/2116 & -3 & 1/529 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(A) = 3.$