1. Ортогональные многочлены

Далее $\mathbb{P}_n$ означает множество алгебраических полиномов степени не выше n, (a, b) будем считать либо ограниченным, либо неограниченным интервалом. Напомним, что весовая функция $\rho(x)$, определенная на (a, b), предполагается почти всюду положительной и интегрируемой. В случае неограниченного интервала (a, b) дополнительно предположим, что абсолютно сходятся интегралы

$$\int_a^b \rho(x) x^n \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Далее под скалярным произведением функций p и q понимается скалярное произведение в $L_{2,\rho}(a, b)$,

$$(p, q) = \int_a^b \rho(x) \, p(x) \, q(x) \, dx \,. \tag{2}$$

Отметим следующее очевидное, но важное свойство этого скалярного произведения: $(rp, q) = (p, rq)$ для любых функций p, q, r.

Пусть дана последовательность алгебраических многочленов

$$P_0(x), \; P_1(x), \; P_2(x), \; \ldots, \; P_n(x), \ldots . \tag{3}$$

Определение 1. *Система многочленов* (3) *называются ортогональной, если для всех n и m: 1) $P_n \in \mathbb{P}_n$; 2) $(P_n, P_m) = 0$ при $n \neq m$.*

Через $\widetilde{P}_n$ будем обозначать соответствущу ортонормированную систему:

$$\widetilde{P}_n = h_n P_n, \quad h_n = 1/(P_n, P_n)^{1/2} \,. \tag{4}$$

Лемма 1. *Для любого заданного интервала (a, b) и веса ρ система ортогональных многочленов существует.*

Доказательство. Искомую систему многочленов (3) построим, применяя метод ортогонализации Грама–Шмидта к системе степеней независимой переменной: $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$. $\square$

Следующая лемма утверждает, что первые $k + 1$ ортогональных полинома $P_0, \; P_1, \; \ldots, \; P_k$ образует базис в пространстве $\mathbb{P}_k$.

Лемма 2. *Любой многочлен $p_k \in \mathbb{P}_k$ степени k представдяется линейной комбинацией ортогональных многочленов $P_i(x)$, $i = 0 : k$. Точнее*

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i P_i(x), \quad c_i = (p_k, P_i)/(P_i, P_i). \tag{5}$$

Доказательство. Разложение (5) имеет смысл, т. к. его правая часть, как и левая, является полиномом степени k. Формула для c_i получается, если обе части (5) скалярно умножить на P_j, $j = 0, 1, \dots, k$, и воспользоваться ортогональностью системы многочленов. □

Лемма 3. *Ортогональный многочлен $P_n(x)$ ортогонален произвольному полиному меньшей степени, т.е. $(P_n, q) = 0$, для любого полинома q степени не выше $n - 1$. Верно и обратное утверждение.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i P_i(x), \quad c_i = (q, P_i)/(P_i, P_i). \tag{6}$$

Умножая обе части этого разложения на P_n, получим $(P_n, q) = 0$. Обратное утверждение очевидно. □

Лемма 4. *Система ортогональных многочленов определяется единственным образом с точностью до нормировки, т. е., если $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ две ортогональные системы на (a, b) с одним и тем же весом ρ, то $Q_n = c_n P_n$, где $c_n \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i P_i(x), \quad c_i = (Q_n, P_i)/(P_i, P_i). \tag{7}$$

Но все c_i в этом разложении равны нулю, кроме c_n, т. к. $(Q_n, P_i) = 0$ при $i = 0 : n - 1$, согласно лемме 3. □

Способ нормировки ортогональных многочленов принято называть их стандартизацией. Например, P_n можно определить так, чтобы выполнялось условие $P_n(c) = d_n$, где $c = a$ или $c = b$, а d_n — заданные числа. В этом случае ортогональная система $\{P_n\}$ определяется единственным образом.

Свойства ортогональных многочленов

Теорема 1. *Нули ортогонального полинома* P_n *степени* $n \geq 1$ *простые и лежат в интервале* (a, b).

Доказательство. Поскольку ρ почти всюду положительна, а

$$(P_n, 1) = \int_a^b \rho(x)\, P_n(x)\, dx = 0,$$

то P_n обязательно меняет знак на (a, b), т. е. имеет хотя бы один нуль нечетной кратности, лежащий в (a, b). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ есть все различные нули нечетной кратности полинома P_n, лежащие на (a, b). Требуется доказать, что $m = n$. Положим $\omega_m(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_m) \in \mathbb{P}_m$ и представим P_n в виде $P_n(x) = \omega_m(x) q_{n-m}(x)$. По определению ω_m, многочлен q_{n-m} не меняет знака на (a, b). Имеем

$$(P_n, \omega_m) = \int_a^b \rho(x) P_n(x) \omega_m(x)\, dx = \int_a^b \rho(x) \omega_m^2(x) q_{n-m}(x)\, dx \neq 0, \quad (8)$$

т.е. $m = n$, т.к. при $m < n$ левая часть (8) равна нулю. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $\{\widetilde{P}_n\}$ *есть ортонормированная система, соответствующая ортогональной системе* $\{P_n\}$ *согласно* (4). *Тогда*

$$x\widetilde{P}_n(x) = \beta_n \widetilde{P}_{n-1}(x) + \alpha_{n+1} \widetilde{P}_n(x) + \beta_{n+1} \widetilde{P}_{n+1}(x)\,, \quad n = 0,\, 1, \ldots\,, \qquad (9)$$

где $\widetilde{P}_{-1}(x) = 0$, $\alpha_{n+1} = (x\widetilde{P}_n,\, \widetilde{P}_n)$, $\beta_{n+1} = \big(x\widetilde{P}_n,\, \widetilde{P}_{n+1}\big)$. *Как следствие, ортогональные многочлены* $\{P_n\}$ *удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям*

$$P_{n+1}(x) = \big(a_n x - b_n\big) P_n(x) - c_n P_{n-1}(x)\,, \quad P_{-1}(x) = 0\,, \quad n \geqslant 0\,. \quad (10)$$

Доказательство. Согласно лемме 2 имеем

$$x\widetilde{P}_n(x) = s_0 \widetilde{P}_0(x) + \ldots + s_n \widetilde{P}_n(x) + s_{n+1} \widetilde{P}_{n+1}(x)\,,$$

где $s_j = (x\widetilde{P}_n,\, \widetilde{P}_j) = (\widetilde{P}_n,\, x\widetilde{P}_j) = 0$ при $n > j+1$, т. е. при $j \leq n-2$. Полагая $\alpha_{n+1} = s_n$, $\beta_{n+1} = s_{n+1}$, получим (9), т. к. $s_{n-1} = \beta_n$. Произведем в (9) замену $\widetilde{P}_n = h_n P_n$, $h_n = (P_n, P_n)^{-1/2}$ и, после очевидных преобразований, придем к (10) с соответствующими постоянными a_n, b_n, c_n. $\square$

Приведем матричную запись соотношений (9).

Следствие 1. *Выполняется соотношение*

$$x \begin{bmatrix} \widetilde{P}_0(x) \\ \widetilde{P}_1(x) \\ \cdots \\ \widetilde{P}_{n-2}(x) \\ \widetilde{P}_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_0(x) \\ \widetilde{P}_1(x) \\ \cdots \\ \widetilde{P}_{n-2}(x) \\ \widetilde{P}_{n-1}(x) \end{bmatrix} + \beta_n \widetilde{P}_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Полагая в этом матричном равенстве $x = x_j$, где x_j есть j-тый корень $P_n(x)$, получим следующее

Следствие 2. *Многочлен $P_n(x)$ имеет n простых корней $x_1, \ldots, x_n$, совпадающих с собственными значениями симметричной трехдиагональной матрицы из следствия 1. Векторы $[\widetilde{P}_0(x_j), \widetilde{P}_1(x_j), \ldots, \widetilde{P}_{n-1}(x_j)]^T$, $j = 1, \ldots, n$, являются собственными векторами (ненормированными).*

Это следствие служит основой алгоритма Голуба–Уэлша поиска корней ортогональных многочленов.

Приведем примеры ортогональных многочленов.

2. Ортогональные многочлены Якоби

Многочлены Якоби $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ определяются на отрезке $[a, b] = [-1, 1]$ и зависят от двух вещественных параметров $\alpha, \beta > -1$. Они ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$.

Теорема 3. *С точность до нормировки справедлива формула Родриго:*

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big((1 - x)^{\alpha+n} (1 + x)^{\beta+n} \Big) . \qquad (11)$$

Доказательство. Докажем, что (11) действительно определяет ортогональный многочлен с весом ρ. Простое применение формулы Лейбница показывает, что правая часть (11) действительно есть многочлен степени n. Пусть g есть многочлен. Учтем, что при $x = \pm 1$ имеет место равенство $\big((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\big)^{(k)} = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда

n раз интегрируя по частям, получим:

$$
\begin{aligned}
(P_n^{(\alpha,\beta)}, g) &= \int_{-1}^{1} \Big((1-x)^{\alpha+n} \, (1+x)^{\beta+n} \Big)^{(n)} g(x)\, dx = \\
&= -\int_{-1}^{1} \Big((1-x)^{\alpha+n} \, (1+x)^{\beta+n} \Big)^{(n-1)} g'(x)\, dx = \\
&= \ldots = (-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n} \, (1+x)^{\beta+n} \, g^{(n)}(x)\, dx. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Если $g \in \mathbb{P}_{n-1}$, тогда $g^{(n)}(x) = 0$ и $(P_n^{(\alpha,\beta)}, g) = 0$. Следовательно, согласно лемме 3, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ искомый ортогональный многочлен. $\square$

При фиксированных значениях α и β мы получаем конкретные системы ортогональных многочленов. Под отдельными именами известны следующие системы.

1) Многочлены Лежандра $P_n(x)$ совпадают с многочленами Якоби при $\alpha = \beta = 0$ (весовая функция $\rho \equiv 1$). При стандартизации $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, они представляются формулой

$$
P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \, \frac{d^n}{dx^n} \Big((x-1)^n (x+1)^n \Big) . \qquad (13)
$$

Нормированные многочлены Лежандра

$$
\widetilde{P}_n(x) = h_n \, P_n(x), \quad h_n = (n + 0.5)^{1/2},
$$

удовлетворяют трехчленным соотношениям

$$
x\widetilde{P}_n(x) = \beta_n \widetilde{P}_{n-1}(x) + \beta_{n+1} \widetilde{P}_{n+1}(x) \, , \quad n = 0, \, 1, \ldots , \qquad (14)
$$

где $\beta_n = n/(4n^2 - 1)^{1/2}$, $n = 1, 2, \ldots,$ $\widetilde{P}_{-1}(x) \equiv 0$.

2) Многочлены Чебышева $T_n(x)$ совпадают с многочленами Якоби при $\alpha = \beta = -1/2$ (весовая функция $\rho = 1/\sqrt{1-x^2}$). На отрезке $[-1, 1]$ справедливы также формулы: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$,

$$
T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x.
$$

В самом деле, это следует из легко проверяемых равенств

$$
\int_{-1} \frac{\cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = 0, \quad m \neq m. \qquad (15)
$$

3. Ортогональные многочлены Лагерра и Эрмита

Многочлены Лагерра $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$ определяются на полуоси $[a,b)=[0,\infty)$ и зависят от вещественного параметра $\alpha>-1$. Они ортогональны на $(0,\infty)$ с весом $\rho(x)=x^\alpha\, e^{-x}$. С точностью до нормировки

$$L_n^{(\alpha)}(x)=x^{-\alpha}e^x\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right). \tag{16}$$

Это проверяется также, как формула Родриго для многочленов Якоби.

Многочлены Эрмита $\{H_n(x)\}$ определяются на оси, $(a,b)=\mathbb{R}^n$. Они ортогональны на с весом $\rho(x)=e^{-x^2}$. С точностью до нормировки

$$H_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\,\frac{d^n\,\rho(x)}{dx^n}\ . \tag{17}$$