КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЛОЛОГИИ И МЕЖКУЛЬТУРНОЙ КОММУНИКАЦИИ

Кафедра анализа данных и исследования операций

М.Д. Миссаров, В.Ю. Чебакова

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА.

Часть I

Казань – 2020

УДК 519.2
ББК 22.171

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 8 от 22 июня 2020 года

Рецензенты:
доктор физ.-мат наук, ведущий научный сотрудник ИММ им. Н.И. Лобачевского К(П)ФУ **А.М. Бикчентаев**
кандидат физ.-мат наук,
доцент математической статистики К(П)ФУ **В.Т. Дубровин**

Миссаров М.Д.
Введение в теорию вероятностей. Теория и практика. Часть I / М.Д. Миссаров, В.Ю. Чебакова. – Казань: Казан. ун-т, 2020. – 91 с.

Данное учебно пособие является первой частью курса «теория вероятностей и математическая статистика» для студентов по направлению Бизнес-информатика. В этом учебно-методическом пособии рассматриваются основные понятия элементарной теории вероятностей.

ГЛАВА 1.
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА
§1. Конечное вероятностное пространство. События и вероятности

Предположим, что множество всех возможных исходов некоторого случайного эксперимента конечно и состоит из n элементов:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

Множество всех исходов Ω называется пространством элементарных событий, а сами исходы $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называются элементарными событиями.

В качестве примера можно привести эксперимент, состоящий в наблюдении за погодой в определенный день года на протяжении ряда лет. Огрублено состояние погоды можно описать вектором (t, p, h, w, pr), где t – температура, p – атмосферное давление, h – влажность, w – направление ветра, pr – осадки. Каждое конкретное значение этого вектора является элементарным исходом. Ясно, что таких исходов будет много, и предсказать состояние погоды без дополнительной информации не представляется возможным.

Помимо элементарных событий нас могут интересовать сложные события, которые состоят из нескольких элементарных событий. Таким образом, событие мы понимаем как некоторое подмножество $A \subset \Omega$. Если в результате проведения случайного эксперимента мы наблюдаем исход $\omega \in A$, то мы говорим, что в этом эксперименте мы наблюдаем событие A (или произошло событие A). Если пространство Ω состоит из n элементарных исходов, то можно показать, что количество различных подмножеств Ω равно 2^n. В теории вероятностей используются некоторые специальные выражения для определения основных операций над подмножествами. В дальнейшем мы будем называть множества событиями.

Множество всех исходов Ω называется достоверным событием (поскольку оно наблюдается при всех исходах). Пустое подмножество $\emptyset$, в котором нет элементов, называется невозможным (не наблюдается никогда).

Если $A \subset B$, то говорят, что событие A влечет событие B. В дальнейшем знак $\subset$ будет обозначать «включение», не обязательно собственное. Действительно, если исходом эксперимента является элемент ω и $\omega \in A$, то $\omega \in B$. Объединением событий A и B называется событие $A \cup B$, которое наблюдается тогда и только тогда, когда наблюдается событие A или B (или оба одновременно).

Пересечением событий A и B называется событие $A \cap B \equiv AB$, состоящее из исходов ω таких, что $\omega \in A$ и $\omega \in B$. Таким образом, наблюдение события $A \cap B$ означает одновременное наблюдение событий A и B. События A и B называются несовместными, если $AB = \emptyset$.

Событие $\bar{A} = \Omega \setminus A$ называется дополнением к событию A: $\omega \in \bar{A}$ тогда и только тогда, когда $\omega \notin A$. Также говорят, что событие $\bar{A}$ противоположно событию A.

Все известные свойства операций объединения и пересечения множеств оказываются необходимыми в теории вероятностей. В частности, полезной является следующая формула:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}. \qquad (1.1)$$

Здесь знаки $\bigcup_{i=1}^{n}$ и $\bigcap_{i=1}^{n}$ обозначают объединение и пересечение n множеств.

Докажем формулу (1.1). Пусть $\omega \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Это означает, что $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, т.е. $\omega \notin A_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Но тогда $\omega \in \overline{A_i}$ при всех $i = 1, \dots, n$, и значит $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Таким образом, мы показали, что $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Аналогичным образом доказывается, что $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Следовательно, соотношение (1.1) верно.

Поскольку операции объединения и пересечения в основных свойствах похожи на операции сложения и умножения чисел, то совокупность всех событий называют алгеброй событий.

Пусть каждому элементарному исходу ω поставлено в соответствие некоторое число $p(\omega) \geq 0$, причем выполнено условие:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \tag{1.2}$$

Число $p(\omega)$ называется вероятностью элементарного события ω.

Определение 1.1. Вероятностью события A назовем число

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \tag{1.3}$$

Если считать число $p(\omega)$ весом элементарного события ω, то вероятность $P(A)$ можно интерпретировать как вес события A. Из (1.2) следует, что

$$P(\Omega) = 1 \tag{1.4}$$

и

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad \text{если} \quad AB = \emptyset. \tag{1.5}$$

Так как в пустом множестве нет ни одного элементарного события, то $P(\emptyset) = 0$. Из определения (1.1) следуют следующие очевидные свойства вероятностей:

1) Для любого события A

$$P(A) \leq 1 \tag{1.6}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{1.7}$$

2) Если $A \subset B$, то

$$P(A) \leq P(B) \tag{1.8}$$

3) Для любых событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.9}$$

Формула (1.9) имеет следующее полезное обобщение, которое называется формулой включения-исключения:

Для любых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \\ + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A1\ldots An) \tag{1.10}$$

Доказательство этой формулы легко получить с помощью метода математической индукции.

Пусть Ω – пространство элементарных исходов, $|\Omega| = n$ (здесь символ $|\Omega|$ обозначает количество элементов в множестве Ω). Обозначим буквой $\mathcal{A}$ множество всех подмножеств множества Ω (алгебру событий) и буквой P – функцию вероятности на алгебре $\mathcal{A}$: для любого $A \in \mathcal{A}$ $P(A)$ определяется как вероятность события A по формуле (1.3).

Определение 1.2. Набор из 3-х связанных друг с другом объектов $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется вероятностным пространством.

Более общее определение вероятностного пространства мы рассмотрим позже.

Существует очень важный пример вероятностного пространства, который носит название классической схемы. Если $|\Omega| = n$ и все элементарные исходы имеют одну и ту же вероятность $p(\omega) = c$, то из условия

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

с очевидностью следует, что константа $c = {}^{1}\!/_{n}$. Тогда вероятность любого события A подсчитывается как

$$\sum_{\omega \in A} \frac{1}{n} = \frac{n(A)}{n}, \tag{1.11}$$

где $n(A) = |A|$ – количество исходов в событии A. Задача вычисления вероятности события A сводится к задаче вычисления количества исходов в A. Такие задачи в математике относятся к разделу комбинаторики.

§2 Элементы комбинаторики.

Рассмотрим понятие комбинации элементов, выбираемых из нескольких групп объектов. Пусть, например, имеется k_1 объектов $t_1, t_2, \ldots, t_{k_1}$, принадлежащих к группе объектов T и k_2 объектов $s_1, s_2, \ldots, s_{k_2}$, принадлежащих к группе объектов S. Комбинацией элементов из T и S называется произвольный набор объектов (t_i, s_j), $i = 1, \ldots, k_1$, $j = 1, \ldots, k_2$. Множество всех возможных комбинаций элементов из T и S визуально можно представить в виде таблицы:

$$
\begin{gathered}
(t_1, s_1),\ (t_1, s_2),\ \ldots, (t_1, s_{k_2}) \\
(t_2, s_1),\ (t_2, s_2), \ldots, (t_2, s_{k_2}) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(t_{k_1}, s_1), (t_{k_1}, s_2), \ldots, (t_{k_1}, s_{k_2}).
\end{gathered}
$$

Таким образом, у нас есть k_1 строчек, в каждой из которой содержится k_2 комбинаций. Поэтому общее количество комбинаций элементов из групп T и S равно $k_1 \cdot k_2$.

Пусть у нас имеются группы объектов $T_1, T_2, \ldots, T_l$, причем группа T_i содержит k_i элементов, $i = 1, \ldots, l$. Комбинацией элементов из групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ называется набор $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, где $a_1 \in T_1, \ldots, a_l \in T_l$. Сколько различных комбинаций из l групп $T_1, T_2, \ldots, T_l$ мы можем составить? Так как для случая $l = 2$ количество комбинаций равно $k_1 \cdot k_2$, то, используя математическую индукцию, легко показать, что количество комбинаций из l групп равно $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_l$.

Отсюда, в частности, следует, что если $T_1 = T_2 = \ldots = T_l$ и $|T_1| = |T_2| = \ldots = |T_l| = k$, то количество комбинаций из этих совпадающих групп равно k^l.

Задача. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5}, если:

а) ни одна из цифр не должна повторяться более одного раза;

б) цифры могут повторяться;

в) числа должны быть нечетными, и цифры в числе могут повторяться.

Решение

а) Первой цифрой числа может быть одна из пяти, так как ноль в начале числа стоять не может. Дальше из общего числа цифр, включая ноль, мы убираем цифру, поставленную на первое место, так как больше в числе она встречаться не может, по условию. Получаем, что вторую цифру числа мы можем взять так же пятью способами. Аналогично, третью цифру числа – четырьмя способами и четвертую – тремя. Применяя принцип умножения, получим 5×5 ×4×3=300 способов.

б) В этом случае первую цифру числа мы можем взять пятью способами, исключая нуль. И все последующие цифры четырехзначного числа мы можем брать шестью способами. В результате получим, что все четырехзначное число мы можем составить 5×6×6×6×=1080 способами.

в) Первые три цифры четырехзначного числа, аналогично предыдущему случаю, мы можем брать 5×6×6=180 способами. И, чтобы число было нечетное, последнюю цифру мы можем брать из следующих цифр { 1 , 3 , 5 }, то есть тремя способами. Применяя принцип умножения, получим 180×3=540 способов.

Задача. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой – m точек. Каждая из вершин при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной стороне:

а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?

б) Сколько четырехугольников, образованных прямыми, будет внутри треугольника?

Решение. Для определенности, будем обозначать сторону, на которой взято n точек, через N ,а сторону, на которой взято m точек, – через M.

а) Рассмотрим вершину при стороне N. Из нее на сторону М выходит m прямых, каждая из которых пересекает каждую из n прямых, исходящих из вершины при стороне M. В результате имеем $n \times m$ точек пересечения;

б) Не уменьшая общности рассуждений, допустим, что прямые, соединяющие вершину при стороне N и точки на стороне M, обозначены $n_1, n_2, \cdots, n_m$ и прямые соединяющие вершину при стороне M и точки на стороне N обозначены $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Нумерация начинается с прямой наиболее близкой к основанию (Рис. 1.)

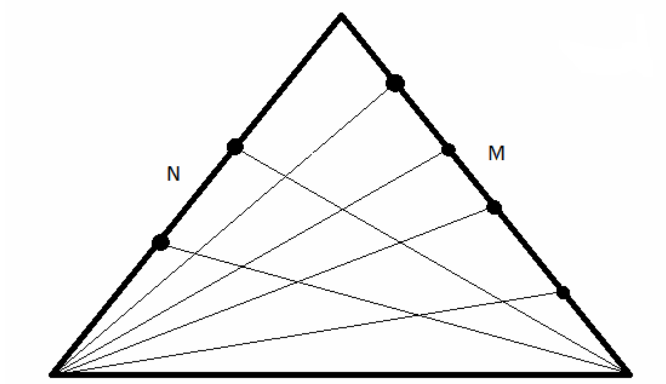


Рис. 1. Разбиение сторон треугольника

Очевидно, что между n_1 и основанием нет четырехугольников. Между прямыми $n_1, n_2, \cdots, n_m$ имеем m–1 треугольник, образованный соседними прямыми и отрезком стороны M между соответствующими соседними точками. И еще один треугольник образуется между прямой n_m и стороной N. Каждый из этих m треугольников разбивается прямыми, исходящими из вершины при стороне M, на один треугольник и n четырехугольников. Имеем, что n – 1 четырехугольник заключен между прямыми m_1, m_2, $\cdots, m_n$, а последний четырехугольник заключен между прямой m_n и самой стороной M. В результате имеем $n \times m$ четырехугольников внутри исходного треугольника.

Задача. Сколько существует функций, задающих взаимно однозначное соответствие между множеством S, содержащим n элементов, и множеством T, содержащим m элементов?

Решение**.** Если $n > m$, то такие функции не существуют, поэтому предположим, что $n \le m$. Пусть элементы множества S обозначены $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Существует m вариантов отображения элементов a_1. Если образ a_1, определен, то имеется $m - 1$ вариант отображения a_2, поскольку он не может быть отображен в образ элемента a_1. Аналогично, существует $m–2$ вариантов отображения a_3 и т.д. Руководствуясь этой схемой, получим, что существует $m–i+1$ вариантов отображения a_i. Поэтому, в соответствии с комбинаторным принципом умножения, имеется $(m) \times (m\text{-}1) \times (m\text{-}2) \times \cdots \times (m\text{-}n+1)$ способов отображения множества S на множество T, при котором никакие два элемента множества S не будут отображены в один и тот же элемент множества T. Таким образом, мы нашли общее количество взаимно однозначных функций из S в T.

Задача. У короля есть 100 мешков с золотыми монетами, в каждом из которых находится ровно 100 монет. Королевский казначей взял из каждого мешка по одной монете, подложив вместо нее фальшивую монету. Король решил проверить состояние своих мешков и взял для проверки наугад из каждого мешка по одной монете. Какова вероятность того, что король обнаружит подмену?

Решение. Случайный эксперимент состоит в том, что король выбирает наугад комбинацию монет из 100 мешков. Пространство элементарных событий Ω состоит из всевозможных комбинаций монет. Так как в каждом мешке 100 монет, то количество исходов равно $|\Omega| = 100^{100}$. Обозначим через A событие, состоящее в том, что хотя бы одна из монет в выбранной комбинации окажется фальшивой. Оказывается проще вычислить вероятность дополнительного события $\bar{A}$, состоящего в том, что в выбранной комбинации все монеты являются золотыми. Поскольку в каждом мешке 99 золотых монет, то количество исходов в $\bar{A}$ равно количеству комбинаций из золотых монет каждого мешка, т.е. $n(\bar{A}) = 99^{100}$. Следовательно,

$$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n} = \frac{99^{100}}{100^{100}} = \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx e^{-1}.$$

Здесь мы воспользовались замечательным пределом

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m} = e^{x}.$$

Отсюда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}632$.

Вероятность того, что король обнаружит подмену, достаточна велика.

Предположим, что у нас есть группа различных предметов $\{a_1, \dots, a_n\} = A$. Мы выбираем случайным образом последовательно r предметов из этой группы, фиксируем результат выбора и возвращаем предметы обратно. Результат всего эксперимента (исход) может быть записан как комбинация $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\right)$ r объектов из A. Количество различных комбинаций (исходов этого эксперимента) равно n^r, поскольку мы каждый раз выбираем элементы из одной и той же группы A. Такой эксперимент называют выбором с возвращением.

Предположим, что мы случайным образом последовательно выбираем r предметов из группы A, но не возвращаем их обратно. Тогда результат эксперимента может быть записан как упорядоченный набор различных предметов $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\right)$, причем 1-ый элемент мы выбираем n способами, 2-ой – $(n-1)$ способами, . . . , r-ый – $(n-r+1)$ способами. Упорядоченный набор r предметов из группы A, $0 \le r \le n$, называется r-элементным размещением. Такой эксперимент называется выбором без возвращения. Количество r- элементных размещений из n предметов называется числом размещений из n элементов по r и обозначается A_n^r:

$$A_n^r = n(n-1)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \qquad (1.12)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot . . . . \cdot n$.

Задача. Сколько существует способов распределить 25 билетов среди 10 студентов.

Решение. Первый студент может получить один из 25 билетов, второй уже один из 24 и так далее. В результате будем иметь $25\times24\times\cdots\times16$ или количество размещений из 25 по 10, то есть

$$A_{25}^{10}=\frac{25!}{15!}$$

Теперь для сравнения предположим, что студент получивший билет, переписывает вопросы и возвращает билет преподавателю. То есть в этом случае первый студент выбирает из 25 билетов, второй также из 25 и так далее. В этом случае получим 25^{10} способов.

Рассмотрим еще одну задачу, решение которой приводит к парадоксальным выводам.

Задача о днях рождения. Какова вероятность того, что в группе из n людей найдутся хотя бы два человека, родившихся в один и тот же день года?

Решение. Поскольку о данной группе людей ничего заранее не известно, естественно считать, что пространство элементарных событий Ω состоит из последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где i_1 – день рождения 1-го человека, i_2 – 2-го и т.д. Поскольку $i_1, i_2, \dots, i_n$ могут принимать любые значения от 1 до 365, то количество всех исходов равно $|\Omega| = 365^n$. Естественно считать, что все исходы равновероятны.

Пусть A – событие, состоящее в том, что в группе найдутся два человека, родившиеся в один и тот же день. Количество исходов в противоположном событии $\bar{A}$ равно

$$n(\bar{A}) = A_{365}^n = \frac{365!}{(365-n)!},$$

$$P(\bar{A}) = \frac{A_{365}^n}{365^n} = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\ .\ .\ .\ \cdot\frac{(365-n+1)}{365},$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{365}^n}{365^n}.$$

Численный счет показывает, что уже при $n = 23$ $P(A) \approx 0{,}508 > 0{,}5$ и далее, при увеличении n вероятность $P(A)$ только растет. При $n = 80$ $P(A) > 0{,}999$. Этот результат многими воспринимается с удивлением, поскольку число людей в группе значительно меньше числа дней в году.

Если $r = n,$ то размещение называется перестановкой из n различных элементов. В этом случае число размещений A_n^n называется еще числом перестановок из n элементов: $A_n^n = n!$ (напомним, что 0!=1).

Задача. Четыре человека сдают шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность:

a) того что три человека получат свои шляпы;

b) того что только два человека получат свои шляпы.

Решение. Рассмотрим варианты:

a) Всего перестановок из четырех шляп 4! Всего шляп четыре, если три человека получают свои шляпы, то и четвертому остается взять только свою шляпу. Поэтому вероятность того что люди получат свои шляпы равна 1/4!

b) Если два первых человека возьмут свои шляпы, то третий может взять только чужую и тогда четвертый возьмет чужую. Осталось только разместить двух человек взявших свои шляпы по четырем местам и вероятность будет равна $A_4^2 / 4!$

Задача. Сколько существует способов упорядочить множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, так чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа можно упорядочить по четным местам $n!$ способами, так как таких мест n. Для каждого способа размещения четных чисел существует $n!$ способов размещения нечетных чисел по нечетным местам. Итого существует $(n!)^2$ способов упорядочить множество $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, так чтобы каждое четное число имело четный номер.

Задача. На собрании должно выступать 4 человека A, B, C, D. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если B не может выступать до того момента, пока не выступит А?

Решение. В списке ораторов A не может быть четвертым, так как после него обязательно должен выступить B. В результате имеем 3 варианта размещения оратора A. При этом, если A выступает первым, то существует 3! способов размещения других ораторов. Если он выступает вторым, то можно выбрать 2 способа расстановки первого оратора (либо C, либо D) и на каждый из вариантов расстановки первого – 2 варианта расстановок последних. Наконец, если A выступает третьим, то существует только два способа расстановки двух первых и один последнего (B) . Итого $3!+2\times2+2=12$ способов.

Задача. Сколько можно составить перестановок множества размером n, в которых данные два элемента не стоят рядом?

Решение. Если из всех перестановок убрать перестановки, в которых фиксированные два элемента стоят рядом, то мы получим перестановки, в которых эти элементы не стоят рядом. Пусть A и B данные два элемента. Рассмотрим случай когда A и B стоят рядом, и B идет после A. Таких случаев всего $(n-1)$. Но A может стоять правее B, таких случаев тоже $(n-1)$. В результате существует $2\times(n-1)$ способов размещения A и B рядом. Каждому из этих способов соответствует $(n-2)!$ перестановок других элементов. Следовательно число перестановок, в которых A и B стоят рядом равно $2\times(n-1)\times(n-2)!=2\times(n-1)!$. Число всех перестановок $n!$. Итого число перестановок в которых A и B не стоят рядом равно $n!-2\times(n-1)!$, или $(n-1)!\times(n-2)$

Задача. Трое друзей, заранее не договариваясь и не видя друг друга, садятся в одну и ту же электричку, состоящую из 10 вагонов. Каждый из друзей равновероятно может выбрать любой из 10-ти вагонов. Какова вероятность того, что хотя бы двое из друзей сядут в один и тот же вагон?

Решение. Исход данного случайного эксперимента можно записать как (i_1, i_2, i_3), где i_k – номер вагона, выбранного k -ым студентом, $k = 1,2,3$. Так как номера вагонов могут меняться в диапазоне от 1 до 10, то количество исходов равно $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$. Пусть событие A означает, что хотя бы двое друзей встретятся в одном вагоне. Проще вычислить вероятность события $\bar{A}$, которое означает, что все друзья выбрали разные вагоны. Количество исходов в $\bar{A}$ равно $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$. Тогда $P(\bar{A}) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1000} = 0{,}72$. Следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}28$.

Предположим теперь, что нам нужно выбрать r предметов из n различных предметов, причем порядок выбранных предметов не важен. Другими словами, мы выбираем какое-то подмножество из r элементов. Неупорядоченная выборка r элементов из n различных элементов называется сочетанием r элементов из n, а количество различных неупорядоченных выборок r элементов из n называется числом сочетаний и обозначается C_n^r. Предположим, что мы выбрали неупорядоченную группу из r элементов. Мы можем $r!$ способами расставить эти элементы по порядку. Таким образом, из одной неупорядоченной выборки мы можем получить $r!$ упорядоченных выборок. Следовательно,

$$A_n^r = r!\, C_n^r .$$

Отсюда

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} . \qquad (1.13)$$

Задача. За один день предприятие изготавливает n изделий. Из этой партии случайным образом выбирается r изделий и, если все они проходят проверку отдела контроля качества, то вся партия из n изделий принимается. В противном случае вся партия отвергается. Известно, что в партии есть k бракованных изделий. Какова вероятность того, что партия будет принята?

Решение. Количество исходов в этом эксперименте равно количеству r - элементных подмножеств, т.е. равно C_n^r. Для того, чтобы партия была принята, необходимо, чтобы в подгруппе выбранных для контроля элементов находились только качественные изделия. Число таких подгрупп равно C_{n-k}^{r}. Следовательно, вероятность того, что партия будет принята, равна

$$\frac{C_{n-k}^{r}}{C_{n}^{r}} = \frac{(n-k)!\,(n-r)!}{n!\,(n-k-r)!}.$$

Задача. Цветочница выставила на продажу 15 белых и 10 красных роз. Некто просит подобрать ему букет из 5 роз. Какова вероятность того, что в букете будет 2 белых и 3 красных роз.

Решение. Испытание состоит в том, что из 25 роз выбираются 5 роз. Отслеживаемое событие A состоит в том, что среди них будет две белых и три красных. В этом случае, порядок выбора не важен и число вех исходов будет равно C_{25}^{5} . Посчитаем число всех благоприятных исходов. Число возможных наборов красных роз, без учета порядка равно C_{10}^{3}. И на каждый такой набор мы получим C_{15}^{2} белых роз. По принципу комбинаторного умножения имеем $C_{10}^{3} \times C_{15}^{2}$ благоприятных исходов. По классической вероятностной схеме вероятность того, что в букете будет 2 белых и 3 красных розы равна $P(A) = \dfrac{C_{10}^{3} \times C_{15}^{2}}{C_{25}^{5}}$

Задача. Трое играют в карты. Каждому игроку сдано по десять карт и две оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках шесть карт бубновой масти, а четыре – других мастей. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что в прикупе две бубновые карты.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в прикупе окажутся две бубновые карты. Из 32 карт игроку известны десять, а остальные 22 неизвестны. Взять две карты из прикупа – это то же самое, что взять их из 22 неизвестных карт, среди которых две бубновые. Поэтому общее число элементарных событий C_{22}^{2}, из которых лишь одно элементарное событие благоприятствует наступлению события A. Согласно классическому определению вероятности $P(A) = {1}/{C_{22}^{2}} = {1}/{231}$.

Задача. Сколько существует способов распределить $3n$ предметов по трем людям, так чтобы каждый человек получил n предметов .

Решение. Зафиксируем порядок (очередь): первым берет человек под номером “1”, вторым под номером “2” и третьим под номером “3”. Первый человек может выбрать n предметов C_{3n}^{n} способами, второй C_{2n}^{n} способами и, наконец, третий C_{n}^{n} по основному принципу умножения имеем $C_{3n}^{n} \times C_{2n}^{n} \times C_{n}^{n}$. Но существует 3! способов упорядочить нашу очередь, в результате будем иметь $3! \times C_{3n}^{n} \times C_{2n}^{n} \times C_{n}^{n}$.

Задача. Пять мужчин и 10 женщин случайным образом рассаживаются по трое за столиками. Сколько существует способов, при которых за каждым столиком окажется мужчина?

Решение. Так как мы имеем пять столиков и пять мужчин, то за каждым столиком должен сидеть один мужчина. Иначе, мужчин на все столики не хватит. За первый столик мужчину можно посадить C_{5}^{1} способами. И существует C_{10}^{2} способов посадить к нему двух женщин. Таким есть $C_{5}^{1} \times C_{10}^{2}$ способов рассадить людей за первый столик, так что бы за ним бал один мужчина и две женщины. За второй столик мужчину можно посадить C_{4}^{1} способами, так как один уже сидит за первым столиком. И, соответственно, существует C_{8}^{2} способов посадить к нему женщин. Получим, что за второй столик есть $C_{4}^{1} \times C_{8}^{2}$ способов рассадить людей нужным нам образом. Аналогично рассуждаем и для остальных столиков. Применяя основной принцип умножения, получим $C_5^1 \times C_{10}^2 \times C_4^1 \times C_8^2 \times C_3^1 \times C_6^2 \times C_2^1 \times C_4^2 \times C_1^1 \times C_2^2$ способов, при которых за каждым столиком окажется мужчина.

Задача. Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находится 15 книг по информатике, 12 книг по математике и 10 книг по химии?

Решение. Есть следующие три (C_3^2 – из трех тем мы выбираем две) варианта: {книга по информатике, книга по математике},{книга по информатике, книга по химии}, {книга по математике, книга по химии}. При выборе первого варианта выбора тем мы имеем $C_{15}^1 \times C_{12}^1 = 180$ вариантов выбора книг, при выборе второго варианта подборки тем мы имеем $C_{15}^1 \times C_{10}^1 = 150$ вариантов выбора книг, и третьего – $C_{12}^1 \times C_{10}^1 = 120$ вариантов выбора книг. При сложении всех возможных вариантов выбора книг, мы получим 450 вариантов их выбора.

Задача. В розыгрыше первенства страны по футболу в вышей лиге класса “А” участвуют 10 команд. Команды, которые займут 1,2,3 места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями. А команды, которые займут последние 2 места, покинут высшую лигу. Сколько разных результатов первенства могут быть.

Решение. Результаты будем считать различными, если они отличаются распределением первых трех мест и набором двух последних команд. Тогда имеем A_{10}^3 способов расстановки первых мест. И на каждое размещение первых мест существует C_7^2 вариантов выхода двух команд из высшей лиги. Тогда имеем $A_{10}^3 \times C_7^2$ различных результатов.

Сочетанием из n элементов по m элементов с повторениями называются группы, содержащие m элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из n типов объектов.

Например, из трех элементов *A,B,C* можно составить такие сочетания по два с повторениями: *AA, AC, BC, AB, BB, CC.*

Теперь аналитически найдем их количество. Каждое сочетание можно описать, указав сколько элементов каждого типа имеется в наборе. Поставим в соответствие каждому набору последовательность из нулей и единиц, составленную следующим способом. Напишем подряд столько единиц, сколько в сочетании имеется букв “*A*”, если букв “*A*” нет, то естественно нет и единиц, соответствующих буквам “*A*”. После этого поставим ноль и снова напишем столько единиц, сколько букв “*B*”. И снова после этого пишем ноль, и ставим единицы соответствующие буквам “*C*”. Написанным выше сочетанием из трех букв по две будут соответствовать такие последовательности 1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011. Каждому сочетанию будет соответствовать последовательность из 2 единиц и (3–1) нулей, и по каждой такой последовательности однозначно можно восстановить соответствующие ей сочетание. И следовательно, в этом случае число наборов равно C^2_{3+2-1}=6.

§3 Счетные пространства элементарных событий.

Легко придумать вероятностные пространства, в которых число элементарных событий бесконечно. Рассмотрим сначала пример, в котором количество исходов счетно. Напомним, что множество называется счетным, если все элементы этого множества можно занумеровать числами натурального ряда:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}\ .$$

В этом случае вероятность любого события $A \subset \Omega$ можно определить как

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i)\,.$$

Если $|A| < \infty$, то сумма конечна, если же $|A| = \infty$, то сумму надо понимать как сумму бесконечного ряда. Заметим, что ряд обязательно сходится, поскольку мы требуем, чтобы сумма вероятностей всех исходов была равна 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1,$$

и $p(\omega_i) \geq 0$ для всех i.

Пример. Двое игроков по очереди бросают монету до тех пор, пока не выпадет «герб». Выигрывает тот игрок, который первым выбросит «герб». Будем обозначать выпадение «решки» 0, а выпадение «герба» 1. Тогда исходы этого эксперимента можно обозначить как $\omega_1 = \{1\}$, $\omega_2 = \{0,1\}$, $\omega_3 = \{0,0,1\}$ и т.д.

Если считать, что в каждом бросании монеты «решка» и «герб» равновероятны, то естественно считать, что $p(\omega_n) = 2^{-n}$. Действительно, если бросать монету n раз, то всевозможных исходов будет 2^n, и так как все они одинаково вероятны, то вероятность исхода $\omega_n = \{0,0,\dots,1\}$, в котором 1 появляется только в последней n-ой позиции, равна $p(\omega_n) = 2^{-n}$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ \dots = 1.$$

Пусть A_1 – событие, означающее, что в игре побеждает 1-ый игрок. Тогда A_1 состоит из исходов с нечетными номерами: $A_1 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots\}$. Событие A_2 (выигрывает второй игрок) состоит из исходов с четными номерами: $A_2 = \{\omega_2, \omega_4, \dots\}$. Тогда

$$P(A_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{2}{3},$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) = \frac{1}{3}.$$

Так как $A_1 A_2 = \emptyset$ и $P(A_1) + P(A_2) = 1$, то вероятность того, что игра не закончится (ничья), равна 0.

§ 4 Геометрические вероятности.

Рассмотрим теперь случай вероятностного пространства, в котором число исходов несчетно. Как известно, примерами таких множеств являются отрезки, прямоугольники и т.п. В этом случае мы не можем занумеровать все исходы. Даже если мы припишем каждому исходу определенную вероятность, мы не можем корректно сформулировать условие нормировки, состоящее в том, что вероятность всего пространства равна 1 (не определено понятие суммы несчетного множества чисел).

Рассмотрим такие задачи, в которых мы можем определить вероятности с помощью понятия длины, площади, объема и т.д. Пусть S – некоторый геометрический объект на прямой, на плоскости или в пространстве. Если $A \subset S$, то $\text{мера}\, A$ будет обозначать геометрическую меру множества A (длину в 1-мерном случае, площадь – в 2-мерном случае и т.д.). Мы будем считать, что пространство исходов состоит из всех точек множества S, а вероятность события $A \subset S$ определена как

$$P(A) = \frac{\text{мера}\, A}{\text{мера}\, S}\,. \tag{1.14}$$

Легко видеть, что основные свойства функции вероятности сохраняются при таком определении (условие нормировки и свойства аддитивности). Заметим, что мы можем вычислять вероятность только тех подмножеств, для которых мы можем вычислить геометрическую меру. Так как точка $x \in A$ имеет меру 0, то вероятность любой точки (элементарного исхода) равна 0. Мы видим, что такое определение существенно отличается от определения вероятности в конечном или счетном вероятностном пространстве.

Задача Бюффона. Предположим, что плоскость разлинована параллельными линиями, лежащими на расстоянии l друг от друга. На плоскость случайным образом бросается игла длины l. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных линий?

Решение. Построим вероятностную модель этого эксперимента с помощью понятия геометрической вероятности. Пусть точка O обозначает центр иглы (середину отрезка MN на Рис. 2.). Тогда мы можем охарактеризовать положение иглы относительно системы линий числами x и φ. Здесь x – расстояние от точки O до ближайшей линии, а φ – угол, который образует игла (или продолжение линии иглы) с ближайшей линией.

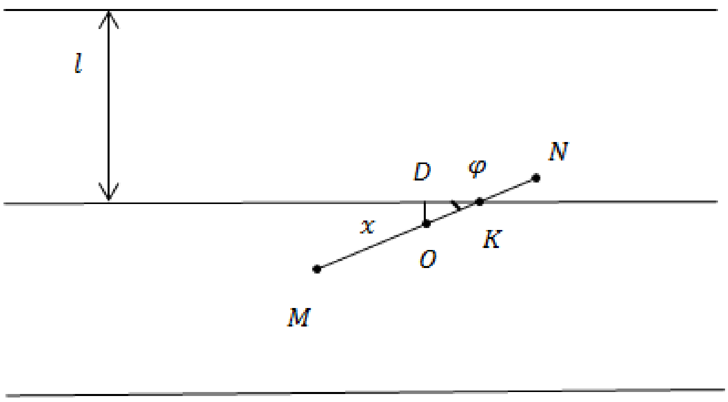


Рис. 2. Геометрическое описание задачи Бюффона

Заметим, что $x \in [0, l/2]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда мы можем описать пространство всех исходов как множество

$$S = \left\{(x, \varphi): \quad 0 \leq x \leq {}^{l}\!/_{2} \ , \ 0 \leq \ \varphi \leq \pi \right\}.$$

Множество S представляет собой прямоугольник. Поскольку мы считаем, что все исходы (x, φ) одинаково возможны в этом эксперименте, то естественно оценить вероятность с помощью формулы (1.14). Заметим, что если игла пересекает линию в точке K, то $|OK| \leq |ON|$. Отрезок OK является гипотенузой в прямоугольном треугольнике DOK, поэтому $|OK| = |OD|/\sin\varphi$. Таким образом, игла пересечет линию, если происходит событие A:

$$A = \left\{(x, \varphi): \quad \frac{x}{\sin\varphi} \leq \frac{l}{2}\right\}$$

Пространство исходов представляет собой прямоугольник (Рис. 3) со сторонами $l/_2$ и π, а событие A состоит из точек этого прямоугольника, которые лежат под синусоидой $A = \left\{(x,\varphi): \quad x \le l/_2 \cdot \sin\varphi \right\}$.

Поэтому $P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } S} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin\varphi \; d\varphi}{\pi \frac{l}{2}} = \frac{-\cos\varphi + \cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi}$.

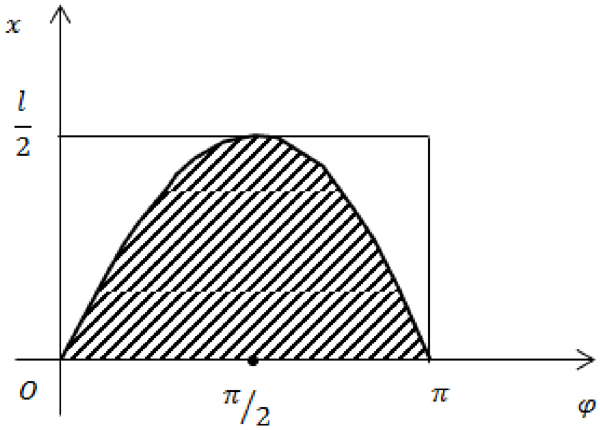


Рис. 3. Геометрическая интерпретация пространства исходов и события A

Задача._Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена локатором в угловом секторе величины 60°, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

Решение. Луч локатора описывает в плоскости круг в 360° с постоянной угловой скоростью. Тогда геометрической мерой пространства элементарных исходов Ω будет площадь описываемого локатором круга, а геометрической мерой пространства благоприятных исходов A будет площадь углового сектора в 60°. Отношение данных геометрических мер являться вероятностью обнаружения цели в указанном секторе и будет равно отношению их угловых величин $\frac{\text{мера}(A)}{\text{мера}(\Omega)} = \frac{60^{o}}{360^{o}} = \frac{1}{6}$.

Задача. В случайный момент времени из промежутка длительностью T включается передатчик и приемник. Длительность переданного сигнала t_2, время работы приемника t_1. Какова вероятность того, что переданный сигнал будет обнаружен?

Решение. Отложим на оси OX время работы передатчика, на оси OY – приемника. Тогда пространством элементарных исходов Ω будет квадрат со стороной T:

$$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le T ,0 \le y \le T\}.$$

Здесь x, y — время начала работы передатчика, приемника соответственно,

$$mes(\Omega) = T^2.$$

Рассмотрим случай, когда первым включается передатчик x, тогда чтобы его обнаружил приемник необходимо выполнение условия $x \le y \le x + t_1$. И, соответственно, если первым начинает работать приемник, то $y \le x \le y + t_2$ (рис.4). В результате можно считать, что эксперимент сводится к попаданию случайной точки в Ω. При этом благоприятными исходами являются точки множества

$$A = \{(x, y):, 0 \le x \le T, x - t_2 \le y \le x + t_1\}.$$

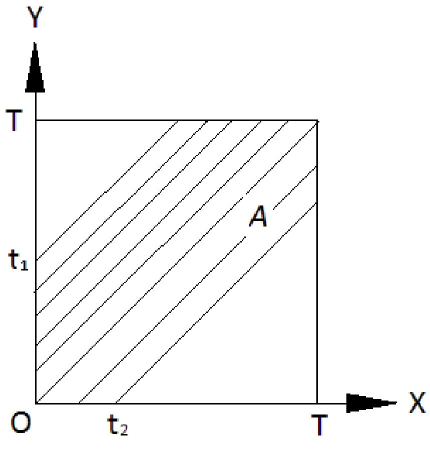


Рис.4. Геометрическая интерпретация пространства исходов и события A

Геометрическая мера множества A равна

$$mes(A) = T_2 - \frac{1}{2}(T - t_2)^2 - \frac{1}{2}(T - t_1)^2.$$

Вероятность того, что переданный сигнал будет обнаружен равна

$$P = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - {t_2}/{T}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - {t_1}/{T}\right)^2.$$

§5. Общее определение вероятностного пространства. Аксиомы Колмогорова.

До сих пор мы рассматривали различные примеры вероятностных пространств и различные способы определения вероятности. В 1930 году великий советский математик А.Н.Колмогоров предложил аксиоматическое определение общего вероятностного пространства, поставив тем самым науку о вероятностях на строгую математическую основу.

Пусть Ω – множество элементарных исходов некоторого случайного эксперимента (явления), которое мы будем называть пространством элементарных событий. Абстрагировавшись от природы этого эксперимента, мы представляем эти исходы как элементы (точки) множества Ω, конечного или бесконечного.

Определение 1.3. Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств Ω называется алгеброй, если выполнены следующие условия:

A1. $\Omega \in \mathcal{A}$.

A2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

A3. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Например, совокупность подмножеств, состоящая из пустого множества $\emptyset$ (невозможного события) и всего пространства Ω (достоверного события), образует алгебру событий. Это самая «бедная» алгебра событий – в ней всего два элемента.

Если $\mathcal{A}$ состоит из всех возможных подмножеств множества Ω, то $\mathcal{A}$ также является алгеброй событий (самой «богатой» алгеброй).

Из аксиом A1–A3, определяющих алгебру событий, можно вывести следующие дополнительные свойства алгебры $\mathcal{A}$:

A4. $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Действительно, так как $\emptyset = \overline{\Omega}$, то из условий A1 и A2 следует, что $\emptyset \in \mathcal{A}$.

A5. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

Так как

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i ,$$

то из условий A2 и A4 следует, что

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \overline{\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i} \in \mathcal{A}.$$

A6. Если $A_1,\ A_2 \in \mathcal{A}$, то $A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{A}$.

Действительно,

$$A_1 \backslash A_2 = \overline{(\overline{A_1} \cup A_2)} \in \mathcal{A}.$$

Все эти свойства означают, что алгебра событий замкнута относительно теоретико-множественных операций.

Приведем еще один пример алгебры событий. Пусть $A_1, \dots, A_n$ – подмножества множества Ω, образующие его разбиение. Это означает, что $A_i A_j = \emptyset$ для всех пар $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Подмножества $A_1, \dots, A_n$ называют иногда атомами этого разбиения. Рассмотрим совокупность подмножеств $\mathcal{A}$, являющихся объединением любых атомов из системы $A_1, \dots, A_n$. Пустое подмножество $\emptyset$ также включаем в систему $\mathcal{A}$, считая, что пустое подмножество является объединением нулевого количества атомов. Тогда легко показать, что совокупность $\mathcal{A}$ является алгеброй событий.

Во многих задачах теории вероятностей необходимо совершать бесконечное (счетное) число теоретико-множественных операций. Поэтому для построения общей теории необходимо усилить условие А3 в определении алгебры.

Определение 1.4. Совокупность множеств называется -алгеброй («сигма-алгеброй»), если выполнены условия А1, А2 и условие А3$'$:

А3$'$. Если $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1,2, \ldots$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Легко видеть, что свойства А4–А6 остаются справедливыми и для -алгебр. Более того, свойство А5 остается справедливым и для счетного множества элементов алгебры $\mathcal{A}$:

А5$'$. Если $A_i \in \mathcal{A},$ $i = 1,2, \ldots$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$

Это свойство следует из тождества

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$$

и аксиомы А2.

В дальнейшем элементы -алгебры $\mathcal{A}$ мы будем называть событиями.

Перейдем теперь к определению вероятности.

Определение 1.5. Пусть Ω – пространство элементарных событий, $\mathcal{A}$ – σ-алгебра событий на этом пространстве. Вероятностью называется функция P, заданная на -алгебре $\mathcal{A}$ и удовлетворяющая условиям:

В1. Свойство положительности: для любого $A \in \mathcal{A}$ $P(A) \geq 0.$

В2. Свойство нормировки: $P(\Omega) = 1.$

В3. Свойство -аддитивности: Если $A_i \in \mathcal{A},$ $i = 1,2, \ldots$ и для любой пары $i \neq j$ $A_i A_j = \emptyset$ (события A_i , $i = 1,2, \ldots$ –попарно несовместны), то $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$

Из аксиом В1–В3 можно вывести другие свойства вероятности, которые мы уже частично обсуждали в случае конечного вероятностного пространства.

Теорема 1.1. (Свойства вероятности).

В4. $$P(\emptyset) = 0. \quad (1.15)$$

В5. Для любых попарно непересекающихся событий $A_1, \dots, A_n$, $A_iA_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.16}$$

В6. Для любого события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \tag{1.17}$$

В7. Для любых событий A_1, A_2 таких, что $A_1 \subset A_2$

$$P(A_2 \backslash A_1) = P(A_2) - P(A_1), \quad P(A_1) \leq P(A_2). \tag{1.18}$$

В8. Для любых событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.19}$$

В9. Для любых событий A_i, $i = 1, \dots, n$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.20}$$

В10. Свойство непрерывности: если события $A_1, A_2, A_3, \dots$ образуют возрастающую последовательность событий $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, то

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right), \tag{1.21}$$

если события $A_1, A_2, A_3, \dots$ образуют убывающую последовательность событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, то

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right). \tag{1.22}$$

Доказательство свойств В4 – В10.

В4. Пусть $A_i = \emptyset$, $i = 1,2, \dots$. Так как $\emptyset = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то в силу аксиомы В3

$$P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset),$$

что возможно лишь в случае, когда $P(\emptyset) = 0$.

В5. Пусть $A_i = \emptyset$ для $i \geq n+1$, тогда

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

В6. Из В2 и В4 следует, что $1 = P(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, откуда следует (1.17).

В7. Из $A_1 \subset A_2$ следует, что $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$. Из В5 следует $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 \backslash A_1)$. Отсюда следует (1.18).

В8. Заметим, что $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2))$. Из В5 и В7 следует

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

В9. Из (1.19) следует

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B). \tag{1.23}$$

Далее воспользуемся методом математической индукции. Пусть

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i), \tag{1.24}$$

тогда из (1.23) и (1.24) следует

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

В10. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, положим $A_0 = \emptyset$. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

где $B_i = A_i \backslash A_{i-1}$. Заметим, что события B_i, $i = 1,2,\ldots$ – попарно не пересекаются.

Тогда из аксиомы В3 следует

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(P(A_i) - P(A_{i-1})\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (P(A_n) - P(\emptyset)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)\,.$$

Соотношение (1.21) доказано.

Пусть теперь $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, тогда $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \overline{A_3} \subset \cdots$ и из соотношения (1.21) следует

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \big(1 - P(A_n)\big) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

и, тем самым,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Теорема 1.1. доказана.

Пример. Допустим, что эксперимент G состоит в том, что определяется масть случайно выбранной из колоды карты.

Так как мы имеем четыре масти, то и элементарных событий будет четыре: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$. Исходя из соображений симметрии, мы рассматриваем все элементарные исходы как равновозможные, то есть $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = P(\omega_4) = 1/4$. В качестве системы событий, целесообразно рассматривать системы множеств (подмножеств) из $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, которые являются алгебрами.

Построим одну из таких алгебр. Пусть $D=\{D_1,D_2\}$, где $D_1=\{\omega_1,\omega_2\}$, $D_2=\{\omega_3,\omega_4\}$ есть разбиение **Ω** на не пустые и попарно непересекающиеся множества **Ω**= D_1 + D_2 . Далее рассмотрим всевозможные объединения множеств из *D*. Если мы добавим к полученной системе множеств пустое множество *Ø,* то получим систему множеств, которая будет алгеброй и которая называется алгеброй порожденной разбиением *D* и обозначаться *A*(*D*). В нашем конкретном случае алгебра *A*(*D*)={ D_1, D_2, Ω , *Ø* }.

Нетрудно проверить, что *A*(*D*) является также и *σ* – алгеброй. По определению $P(\varnothing)=0$; $P(D_1)=P(\omega_1)+P(\omega_2)=1/2$; $P(D_2)= P(\omega_3)+P(\omega_4)=1/2$; $P(\Omega)=1$.

Наконец, определим вероятностное пространство (вероятностную модель) эксперимента *G* с пространством исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ и алгеброй событий *A*(*D*) как тройку (**Ω***,* *A*(*D*) ,*P*), где $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, *A*(*D*) – алгебра, порожденная разбиением *D; P*={*P*(*A*)*, A* ϵ *A*(*D*)} .

Замечание. Если эксперимент *G* имеет конечное или счетное число исходов, то в качестве *D* берется разбиение $\{D_1, D_2, \ldots\}$, где D_i = ω_i. В этом случае *A*(*D*) будет множеством всех подмножеств **Ω**. И таким образом при построении дискретной вероятностной модели в качестве алгебры *A* обычно берется алгебра всех подмножеств **Ω**.

Пример. В нашем распоряжении имеются лампочки в неограниченном количестве, каждая из них с некоторой вероятностью *p* ($0<p<1$) имеет дефект. Лампочку ввинчивают в патрон и проверяют, после чего дефектная лампочка сразу перегорает и заменяется другой.

Пусть ω_i это элементарный исход, состоящий в том, что проверили *i* лампочек. Тогда множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_i,\ldots.\}$ будет счетным (бесконечным).

Далее рассмотрим всевозможные объединения множества Ω. Если мы добавим к полученной системе множеств пустое множество $\varnothing$, то получим систему множеств $\mathcal{F}$, которая будет алгеброй и даже σ-алгеброй. Действительно, так как $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i \in \mathcal{F}$ и если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} \in \mathcal{F}$, так как A является объединением некоторого набора ω_i , кроме этого если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \in \mathcal{F}$, так как так же является объединением некоторого набора ω_i. Все аксиомы определяющие σ-алгебру выполняются для системы множеств $\mathcal{F}$ и следовательно $\mathcal{F}$ есть σ-алгебра.

И наконец, введем вероятность:

$$P(\omega_i) = p^{i-1}(1-p) \text{ и } P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=\sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}(1-p) = 1.$$

Тогда любое объединение элементарных исходов Ω будет иметь вероятность равную сумме вероятностей соответствующих элементарных исходов и будет заведомо больше 0 и меньше 1.

Глава 2.
УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ
§1. Условная вероятность.

В этом параграфе мы рассмотрим важное понятие условной вероятности. В качестве мотивирующего примера рассмотрим случай классической схемы вероятностей. Пусть $|\Omega| = n,$ A и B – события, $n(A)$ и $n(B)$ – количество исходов в A и B соответственно. Предположим, что нам стало известно, что в результате проведения случайного эксперимента наблюдалось событие $B.$ Это означает, что результатом эксперимента было элементарное событие $\omega \in B$. Спрашивается: какова вероятность того, что в этом же эксперименте наблюдалось событие $A.$ Если мы наблюдали событие $A,$ то $\omega \in AB.$ Пусть $n(AB) = |AB|$ – количество исходов в $AB.$ Из $n(B)$ исходов, в которых мы наблюдаем событие $B,$ только в $n(AB)$ случаях мы наблюдаем и событие A. Поэтому естественно считать, что вероятностью наблюдения события A при условии, что наблюдалось событие $B,$ является число

$$P(A|B) = \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{n(AB)/n}{n(B)/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{2.1}$$

Это рассуждение служит основанием для общего определения.

Определение 2.1. Условной вероятностью события A при условии события B называется число:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{2.2}$$

Предполагается, что $P(B) \neq 0$.

Пример. В семье двое детей. Пространство исходов в этой семье опишем как 4 набора $\{M, M\}, \{M, \mathcal{D}\}, \{\mathcal{D}, M\}, \{\mathcal{D}, \mathcal{D}\},$ где первая буква в наборе обозначает пол первого ребенка, а вторая буква – пол второго ребенка, M – мальчик, $\mathcal{D}$ – девочка. Естественно считать, что все эти исходы равновероятны.

Пусть B – событие, означающее, что 1-ый ребенок – мальчик, A – событие, означающее, что 2-ой ребенок – девочка. Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} .$$

Пусть B – событие, означающее, что в семье есть мальчик, A – событие, означающее, что в семье есть девочка. Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} .$$

Из формулы (2.2) следует формула

$$P(AB) = P(B)P(A|B) , \qquad (2.3)$$

которая называется формулой умножения вероятностей. Эту формулу можно обобщить.

Теорема 2.1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – произвольные события. Тогда

$$P(A_1\, A_2\, \dots\, A_n) =$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $n = 2$ формула (2.4) справедлива. Предположим, что она справедлива для всех $n \le m$. Докажем, что она справедлива и для $n = m + 1$.

$$P(A_1\, A_2\, \dots\, A_m A_{m+1}) = P(A_1\, A_2\, \dots\, A_m)P(A_{m+1}|A_1\, \dots\, A_m) =$$
$$= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_m|A_1 \dots A_{m-1})P(A_{m+1}|A_1 \dots A_m) ,$$

что и требовалось доказать.

Формула (2.4) также называется формулой умножения вероятностей. Эта формула часто упрощает решение задач.

Задача. Группа из m студентов сдает экзамены. Считается, что k билетов из n являются «легкими». Какова вероятность того, что все студенты вытянут «легкие» билеты? Предполагается, что $m \le k$.

Решение. Пусть A_i обозначает событие, состоящее в том, что 1-ый студент выбрал «легкий» билет, $i = 1,2,\dots,m$. Тогда из (2.4) следует, что

$$P(A_1 \ \dots \ A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_m|A_1 \dots A_{m-1}) =$$
$$= \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1}\cdot\dots\cdot\frac{k-(m-1)}{n-(m-1)}.$$

Заметим, что для любого заданного события $B \in \mathcal{A}$, такого, что $P(B) \neq 0$, условная вероятность $P(\cdot\,|B)$ является вероятностью на пространстве $(\Omega,\mathcal{A})$. Условие нормировки выполнено, так как

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \mathrm{B})}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Если $A_1, A_2, \dots$ образуют последовательность попарно несовместных событий, то

$$P\left(\bigcup_i A_i\,|B\right) = \frac{P\big((\cup_i A_i)B\big)}{P(B)} = \frac{P(\cup_i(A_iB))}{P(B)} =$$
$$= \frac{1}{P(B)}\sum_i P(\,A_iB) = \sum_i P(\,A_i|B),$$

т.е. условие -аддитивности также выполняется.

Задача. Исследовалась связь между цветом глаз отца и сына. Для событий A={у отца темные глаза} и B={у сына темные глаза} экспериментально были найдены следующие вероятности: $P(AB)=0{,}05$; $P(AB^C)=0{,}079$; $P(ACB)=0{,}089$. Вычислить вероятность рождения сына с темным цветом глаз в зависимости от цвета глаз сына.

Решение. Событие A можно рассматривать, как сумму следующих пересечений: AB, AB^C. Первое AB состоит в том, что у отца темные глаза – у сына темные глаз, второе AB^C, что у отца темные глаза – у сына светлые глаза. Следовательно $P(A)=P(AB)+P(AB^c)=0{,}05+0{,}079=0{,}129$.

Вероятность того, что у сына темным глаза при условии, что у отца темные $P(B/A)=P(AB)/P(A)=0{,}05/0{,}129\approx0.39$. События A={у отца темные глаза} и A^C={у отца светлые глаза} образуют полную группу событий и $P(A^c)=1–$

$P(A)$=1–0,129=0,871. Вероятность того, что у сына темным глаза при условии, что у отца светлые $P(B/A^c)=P(BA^c)/P(A^c)$=0.089/0.871≈0.102.

Задача. В корзинке 10 яблок из них 4 зеленых и 6 красных, тогда вероятность взять вторым зеленое яблоко при условии, что первым взяли тоже зеленое, равна 3/9.

Решение. Так как после того как в первый раз взяли зеленое яблоко (действие уже свершилось) в корзине осталось только 9 яблок и только 3 зеленых.

§2. Независимость событий.

Предположим, что информация о том, что произошло событие B, никак не повлияла на оценку вероятности того, что произошло событие A:

$$P(A|B) = P(A). \tag{2.5}$$

Мы можем сказать, что событие A не зависит от события B. В этом случае из формулы (2.5) следует формула:

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{2.6}$$

Заметим, что формула (2.6) выглядит более привлекательной, чем формула (2.5), в том смысле, что символы A и B входят в нее симметричным образом. Кроме того, нет необходимости ставить условие, что $P(B) \neq 0$. Формула (2.6) мотивирует следующее определение.

Определение 2.2. События A и B называются независимыми событиями, если выполняется соотношение (2.6).

Из этого определения следует, что если выполнено соотношение (2.6), то $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$, т.е. A не зависит от B и B не зависит от A.

Пример. Пусть пространство исходов является квадратом со стороной 1, а вероятность подмножества (фигуры) A определяется как площадь этой фигуры.

Пусть

$$A = \{(x, y): \quad a_1 \le x \le a_2 , \quad 0 \le y \le 1\} ,$$

$$B = \{(x, y): \ 0 \le x \le 1 , \qquad b_1 \le y \le b_2\} .$$

Тогда $$P(A) = (a_2 - a_1) \cdot 1 = a_2 - a_1 ,$$

$$P(B) = 1 \cdot (b_2 - b_1) = b_2 - b_1 ,$$

$$P(AB) = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) = P(A)P(B) .$$

Таким образом, события, представленные прямоугольниками A и B, независимы между собой (Рис. 5.).

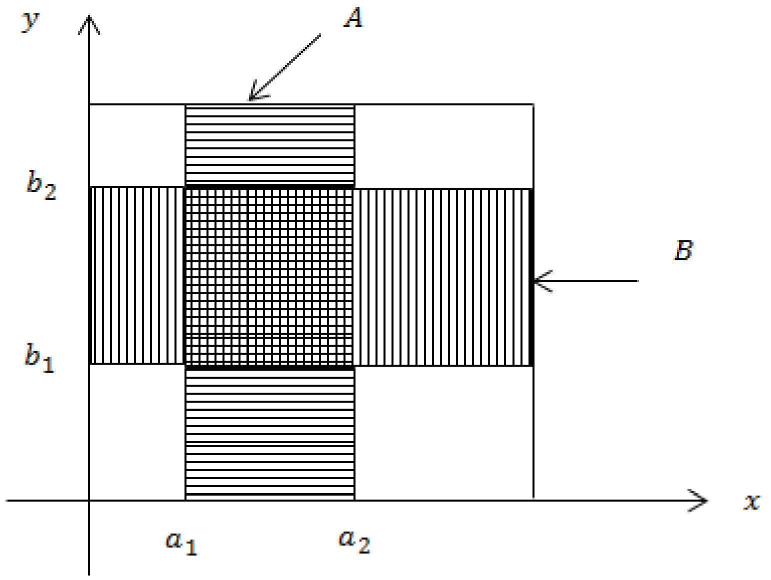


Рис. 5. Геометрическая интерпретация событий A и B

Приведем некоторые свойства понятия независимости событий:

1) Достоверное событие Ω и любое событие A независимы между собой.

2) Если A и B – независимые события, то A и $\bar{B}$ также являются независимыми событиями. Действительно, так как $B = B\bar{A} \cup BA$, то

$$P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA) = P(B) - P(B)P(A) = P(B)\big(1 - P(A)\big)$$

$$= P(B)\big(1 - P(A)\big) = P(B)P(\bar{A}).$$

Также независимыми являются пары событий $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

3) Если события A и B независимы, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, то они не могут быть несовместными. Если бы $AB = \emptyset$, то $P(AB) = P(\emptyset) = 0$ и $P(AB) \neq P(A)P(B)$, так как $P(A)P(B) > 0$.

Определение 2.3. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых наборов

$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\dots P\left(A_{i_k}\right). \qquad (2.7)$$

Из попарной независимости не следует независимость в совокупности.

Пример (Бернштейн С.Н.). Три грани правильного тетраэдра окрашены в красный, зеленый и синий цвет соответственно. На четвертой грани присутствуют все три цвета одновременно. Эксперимент состоит в подбрасывании тетраэдра. Пусть события A_i, $i = 1,2,3$ означают, что тетраэдр выпал гранью, на которой есть красный, зеленый и синий цвет соответственно. Тогда

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2) = P(A_2A_3) = P(A_1A_3) = \frac{1}{4}.$$

Заметим, что события A_1, A_2 и A_3 попарно независимы, но зависимы в совокупности, так как

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}\ .$$

Пример. Доказать, что если независимы события A и B, то независимы и события A^C и B, B^C и A, A^C и B^C.

Доказательство**.** Рассмотрим A^C и B . Так как $P(B) = P(A^CB)+P(AB)$, то в силу независимости событий A и B, имеем $P(B) = P(A^CB)+P(A)P(B)$. События A и A^C образуют полную группу событий, поэтому $P(A)=1–P(A^C)$ и $P(B) = P(A^CB)+(1–P(A^C))P(B)$. Раскрыв скобки и перегруппировав получим $P(A^CB)=P(A^C)P(B)$. Следовательно по определению события A^C и B независимы.

Рассмотрим B^C и A. Так как $P(A) = P(AB^C)+P(AB)$, то в силу независимости событий A и B, имеем $P(A)=P(AB^C)+P(A)P(B)$. События B и B^C образуют полную группу событий, поэтому $P(B)=1–P(B^C)$ и $P(A) = P(A^CB)+(1–P(B^C))P(\text{А})$. Раскрыв скобки и перегруппировав получим $P(AB^C)=P(A)P(B^C)$. Следовательно по определению события A и B^C независимы.

Рассмотрим события A^C и B^C. По свойству условной вероятности $P(A/B)+P(A^c/B)=1$, а по определению условной вероятности имеем $\frac{P(A^C B^C)}{P(B^C)}+\frac{P(AB^C)}{P(B^C)}=1$. Умножим левую и правую часть равенства на $P(B^C)$ и ,с учетом того что B^C и A независимы, получим $P(B^C)=P(A^CB^C)+P(A)P(B^C)$. Перегруппируем и вынесем $P(B^C)$ за скобки $P(B^C)(1– P(\text{A}))=P(A^CB^C)$ и в результате $P(B^C)\,P(A^C) =P(A^CB^C)$.

Задача В урне находятся 5 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу без возвращения поочередно извлекают 3 шара. Проверить независимость (попарно и в совокупности) событий A={белых больше шаров}, B={белых четное число} и C={черных не менее одного} и найти условные вероятности этих событий относительно друг друга.

Решение. Для решения этой задачи выполним следующие действия:

а) Найдем вероятности событий A, B, C.

Событие A состоит из объединения двух несовместных событий (вытащили три белых шара; два белых и один черный). Посчитаем вероятность вытащить три белых шара:

Введем события G_1={вытащить первым белый шар}, G_2={вытащить белый шар вторым}, G_3={вытащить белый шар третьим}.

Вероятность вытащить первым белый шар равна 5/9. Вероятность $P(G_2/G_1)$ – вытащить вторым белый шар при условии, что первым взяли белый равна 4/8. Следовательно, вероятность произведения этих событий $P(G_1G_2)$ равна $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}$.

Вероятность вытащить третьим белый шар при условии, что до этого взяли два шара $P(G_3/(G_1G_2))$ равна 3/7. В результате из определения условной вероятности получаем

$$P(G_3G_1G_2) = P(G_3/(G_1G_2))\times P(G_1G_2) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}.$$

Аналогично, вероятность вытащить два белых шара и один черный будет складываться из трех несовместных событий (соответственно: черный шар вытащили первым, потом два белых; вытащили белый, черный и снова белый шар; сначала вытащили два белых и третьим черный) и будет равна

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}.$$

Вероятность события A будет равна:

$$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{5!\times 5}{2\times 7\times 8\times 9}.$$

<u>Замечание.</u> Также используя формулы комбинаторики и классическую вероятность можно вывести, что $P(A)=\dfrac{C_5^2C_4^1+C_5^3}{C_9^3}$.

Событие B состоит в том, что вытащили один черный шар и два белых, и $P(B)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7}$.

Событие C заключается в объединение событий: вытащили один черный шар, вытащили два черных, вытащили три черных шара. Или же дополнением к событию C будет событие $C^C=\{$взяли все три белых шара$\}$. Объединение этих двух событий составит множество всех элементарных исходов, следовательно $P(C)=1-P(C^c)=1-\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}$.

b) Проверим независимость событий *A, B, C*.

Пересечение событий *A* и *B* состоит в том, что достали один черный шар и два белых. Это есть событие *B*, то есть в нашем случае можно сказать, что событие *B* влечет событие *A*. И $P(AB) = P(B) \neq P(A)P(B)$. Следовательно события *A* и *B* не являются независимыми и следовательно события *A, B, C* не являются независимыми в совокупности.

Проверим независимость *B* и *C*. Пересечение событий *C* и *B* состоит в том, что из урны достали два белых и один черный шар, это и есть само событие *B*. Следовательно, $P(CB) = P(B) \neq P(C)P(B)$ и события *C* и *B* не являются независимыми.

Проверим независимость *A* и *C*. Пересечение событий *A* и *C*, в нашем случае, снова состоит из события *B*. И аналогично $P(AC) = P(B) \neq P(C)P(A)$.

c) Рассмотрим условные вероятности.

Будем считать, что событие *B* произошло. Это означает, что взяли из урны один черный шар и два белых. Но это так же означает, что взяли больше белых шаров, а это уже событие *A*. То есть мы имеем, что если произошло событие В, то значит и произошло событие *A* и *P(A/B)=1*. Аналогично и *P(C/B)=1*. Если же произошло событие *A*, то $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{4}{5}$ и

$P(C/A) = \frac{P(CA)}{P(A)} = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{4}{5}$. Аналогично можно найти *P(A/C)* и *P(B/C).*

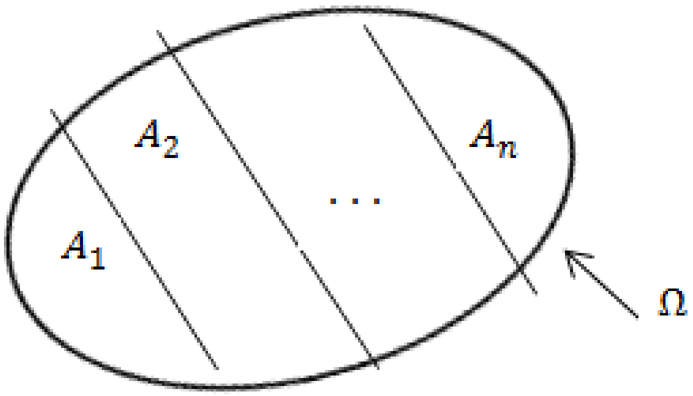
Пусть произошло пересечение событий *BC* – это означает, что из урны взяли один черный шар и два белых– то есть белых больше, это есть событие А. И следовательно *P(A/BC)=1.*

§3. Формула полной вероятности.

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – произвольная группа событий некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Определение 2.4. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, если для всех $i \neq j$ $A_i A_j = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Визуально полную группу событий можно представить с помощью Рис.6



.

Рис. 6. Геометрическая интерпретация полной группы событий

Подмножества $A_1, A_2, \dots, A_n$ разбивают множество Ω на непересекающиеся части. Говорят также, что события $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ образуют разбиение пространства, а сами события называются атомами разбиения.

Теорема 2.2. (Формула полной вероятности). Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ – полная группа событий, B – произвольное событие. Тогда

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \qquad (2.8)$$

Доказательство. Действительно, мы можем представить событие B как объединение непересекающихся событий BA_i, $i = 1, \dots, n$:

$$B = B\Omega = B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} BA_i.$$

В силу свойства аддитивности вероятности и формулы умножения вероятностей

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)\,.$$

Мы видим, что доказательство формулы полной вероятности почти очевидно. Удивительно то, что эта формула весьма эффективна при анализе многих неочевидных вопросов.

Задача. Есть n экзаменационных билетов, из которых определенный студент X выучил только k билетов, $k \le n.$ Какое решение более предпочтительно для студента X:

1) идти отвечать первым,
2) идти отвечать вторым?

Решение. Назовем билеты, подготовленные студентом X, «счастливыми», а остальные билеты – «несчастливыми». Обозначим через B событие, состоящее в том, что студент вытащит билет из числа «счастливых». Если студент идет сдавать первым, то $P(B)=k/n$. Предположим, что студент пойдет отвечать вторым. Пусть A_1 – событие, означающее, что студент Y, который пошел отвечать первым, вытянул «счастливый» билет, A_2 – событие, означающее, что студент Y вытащил «несчастливый» билет. События A_1 и A_2 не пересекаются, и одно из них обязательно произойдет. Это значит, что события A_1 и A_2 образуют полную группу событий. По формуле полной вероятности

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2).$$

Заметим, что, так как взятые билеты не возвращаются, то

$$P(A_1)=\frac{k}{n},P(A_2)=\frac{n-k}{n},P(B|A_1)=\frac{k-1}{n-1},P(B|A_2)=\frac{k}{n-1}.$$

Следовательно,

$$P(B)=\frac{k-1}{n-1}\cdot\frac{k}{n}+\frac{k}{n-1}\cdot\frac{n-k}{n}=\frac{k(k-1+n-k)}{(n-1)n}=\frac{k}{n}\ .$$

Мы видим, что в обоих случаях вероятность успешной сдачи экзамена одна и та же.

Задача о разорении. Два игрока по очереди бросают монету. Если выпадает «герб», то 1-ый игрок выигрывает один рубль у 2-го игрока. Если же выпадет «решка», то 1-ый игрок проигрывает 2-му игроку один рубль. Стартовый капитал 1-го игрока – a рублей, а стартовый капитал 2-го игрока – b рублей. Игра идет до тех пор, пока один из игроков не разорится. Какова вероятность того, что 1-ый игрок разорится (соответственно, 2-ой игрок выиграет)?

Решение. Предположим, что у первого игрока перед очередным туром x рублей, событие $B(x)$ – 1-ый игрок разорится в дальнейшем. Пусть событие A_1 означает, что в очередном туре выпал «герб», а событие A_2 – выпала «решка». Так как события A_1 и A_2 образуют полную группу событий, то

$$P(B(x)) = P(B(x)|A_1)P(A_1) + P(B(x)|A_2)P(A_2).$$

Заметим, что если произойдет событие A_1, то капитал 1-го игрока вырастет на 1 рубль и вероятность разорения 1-го игрока в дальнейшем равна безусловной вероятности $P\big(B(x+1)\big)$: $P(B(x)|A_1) = P\big(B(x+1)\big)$. Если же произойдет событие A_2, то 1-ый игрок проиграет 1 рубль и $P(B(x)|A_2) = P\big(B(x-1)\big)$.

Так как $P(A_1) = P(A_2) = {}^1\!/_2$, то мы получаем уравнение

$$P\big(B(x)\big) = \frac{1}{2}\Big(P\big(B(x+1)\big) + P(B(x-1))\Big). \qquad (2.9)$$

Из (2.9) следует

$$P\big(B(x+1)\big) - P\big(B(x)\big) = P\big(B(x)\big) - P\big(B(x-1)\big),$$

т.е. изменение функции $P\big(B(x)\big)$ за 1 шаг не зависит от x. Обозначим это изменение через

$$c = P\big(B(x)\big) - P\big(B(x-1)\big).$$

Следовательно,

$$P\big(B(x)\big) = P\big(B(0)\big) + cx.$$

Так как $P\big(B(0)\big) = 1$, а $P\big(B(a+b)\big) = 0$ (суммарный капитал игроков $a+b$ собрался у 1-го игрока и это означает, что игра закончена), то

$$P\big(B(x)\big) = 1 + cx\,, \quad 0 = 1 + c(a+b).$$

Отсюда $c = -\frac{1}{a+b}$,

$$P\big(B(x)\big) = 1 - \frac{x}{a+b}.$$

Следовательно, ответ на вопрос задачи равняется

$$P\big(B(a)\big) = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}.$$

Заметим, что при решении этой задачи мы не описывали вероятностное пространство, а просто воспользовались формулой полной вероятности и некоторыми дополнительными соображениями. Заметим также, что вероятность разорения 2-го игрока, имеющего стартовый капитал b рублей, равна $\frac{b}{a+b}$, а вероятность того, что игра закончится, равна $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$. Следовательно, вероятность того, что игра будет продолжаться бесконечно долго, равна 0.

Задача. Имеются три одинаковые с виду урны. В первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей только белые шары. Некто подходит наугад к одной из урн и вынимает из нее один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть событие A – состоит в появление белого шара. Формулируем гипотезы:

H_1={выбор первой урны},

H_2={выбор второй урны},

H_3={ выбор третий урны }.

Найдем вероятности гипотез, так как не было сказано о предпочтении какой либо урны, то выбор урн равновероятен и $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3$. Теперь найдем условные вероятности события *A* относительно данных гипотез:

$$P(A/H_1)=\frac{a}{a+b},\quad P(A/H_2)=\frac{c}{c+d},\quad P(A/H_3)=1.$$

Вероятность вытащить белый шар при условии выбора третьей урны равна единице, так как в ней нет других шаров и событие вытащить белый шар из третьей урны является достоверным. Теперь по формуле полной вероятности найдем, что

$$P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\times\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}.$$

Задача. Среди 20 стрелков 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных. Вероятность поражения цели для отличного стрелка равна 0.9, для хорошего – 0.7, для посредственного – 0.5. Найти вероятность событий *A*={наудачу выбранный стрелок поразит цель}, *B*={два наудачу выбранных стрелка поразят цель, произведя по одному выстрелу (что цель поражена, если в нее попал хотя бы один стрелок)}.

Решение. Сформулируем следующие гипотезы:

H_1={одного отличного стрелка},

H_2={ одного хорошего стрелка },

H_3={ одного посредственного стрелка }.

Найдем вероятности гипотез. Всего стрелков 20 и среди них 4 отличных, по классической схеме вероятностей имеем $P(H_1)=\frac{4}{20}$. Аналогично $P(H_2)=\frac{10}{20}$ и $P(H_3)=\frac{6}{20}$. По условию задачи условные вероятности равны

$P(A/H_1)=0.9$, $P(A/H_2)=0.7$ и $P(A/H_3)=0.5$. По формуле полной вероятности находим вероятность события A и

$$P(A)=0.9\times\frac{4}{20}+0.7\times\frac{10}{20}+0.5\times\frac{6}{20}=0.18+0.35+0.15=0.68.$$

Теперь рассмотрим событие B. Стреляют два стрелка и считается, что цель поражена, если в нее попал хотя бы один стрелок. Это возможно, если в нее попал первый стрелок, второй нет; если в нее не попал первый стрелок, а второй попал; а так же если в нее попали оба стрелка. Вероятность будет складываться из суммы этих событий, или же ее можно посчитать, используя противоположное событие $\overline{B}$ = {в цель не попал первый стрелок и в цель не попал второй стрелок}. Так как стрелки стреляют независимо друг от друга, то вероятность произведения равняется произведению вероятностей и $P(\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{A})$. Здесь $P(\overline{A})=1-P(A)$, тогда $P(B)=1-(1-P(A))^2=0.8976$.

Задача. Группа самолетов в составе: один ведущий и два ведомых, направляется на бомбометание по объекту. Каждый из них несет по одной бомбе. Ведущий самолет имеет прицел, ведомые — не имеют и производят бомбометание по сигналу ведущего. По пути к объекту группа проходит зону противовоздушной обороны, в которой каждый из самолетов, независимо от других, сбивается с вероятностью p. Если к цели подойдет ведущий самолет с обоими ведомыми, они поразят объект с вероятностью $P_{1,2}$. Ведущий самолет, сопровождаемый одним ведомым, поразит объект с вероятностью $P_{1,1}$. Один ведущий самолет, без ведомых, поразит объект с вероятностью $P_{1,0}$. Если ведущий самолет сбит, то каждый из ведомых, если он сохранился, выходит к объекту и поражает его с вероятностью $P_{0,1}$. Найти полную вероятность поражения объекта с учетом противодействия.

Решение. Формулируем полную группу гипотез:

H_1={к объекту вышли все три самолета},

H_2={к объекту вышел ведущий с одним ведомым},

H_3={к объекту вышел один ведущий},

H_4={к объекту вышли два ведомых},

H_5={к объекту вышел один ведомый},

H_6={к объекту никто ни вышел}.

Найдем вероятности гипотез. Так как самолеты сбиваются противовоздушной обороной независимо друг от друга с равной вероятностью, то вероятность произведения равняется произведению вероятностей и $P(H_6)=p^3$. Самолет не сбивается противовоздушной обороной с вероятностью $1–p$ и $P(H_1)=(1–p)^3$, $P(H_3)=P(H_5)=p^2(1–p)$, $P(H_2)=P(H_4)=p(1–p)^2$.

Пусть A={поражение объекта}, тогда $P(A/H_1)=P_{1,2}$, $P(A/H_2)=P_{1,1}$, $P(A/H_3)=P_{1,0}$, $P(A/H_5)=P_{0,1}$, $P(A/H_6)=0$. При вычислении вероятности $P(A/H_4)=1–(1–P_{0,1})^2$ учитывали, что объект поражен, если в него попала хоть одна бомба. По формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)+P(A/H_4)P(H_4)$$
$$+ +P(A/H_5)\mathrm{P}(H_5)=(1–p)^3P_{1,2}+p(1–p)^2P_{1,1}+p^2(1–p)P_{1,0}+$$
$$+p^2(1–p)P_{0,1}+\ldots..+(1–(1–\mathrm{P}_{0,1})^2)\mathrm{p}(1–\mathrm{p})^2.$$

Задача. Имеются две урны: в первой a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Формулируем полную группу гипотез:

H_1={из первой урны во вторую переложили белый шар},

H_2={ из первой урны во вторую переложили черный шар}.

Найдем вероятности гипотез: $P(H_1)=\frac{a}{a+b}, P(H_2)=\frac{b}{a+b}$. Пусть A={из второй урны достали белый шар}. Теперь найдем условные вероятности $P(A/H_1)=\frac{c+1}{c+d+1}$, $P(A/H_2)=\frac{c}{c+d+1}$. По формуле полной вероятности будет

$$P(A)=\frac{c+1}{c+d+1}\times\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d+1}\times\frac{b}{a+b}.$$

Задача. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров и в третий урне 4 черных и 5 белых. Из первой урны переложили шар во вторую, после чего из второй урны переложили шар в третью, потом из третьей урны достали один шар. Найти вероятность, что этот шар белый.

Решение. Пусть A={из третьей урны достали белый шар}. Вероятность этого события зависит от того, какой шар добавили в третью урну, поэтому сформулируем следующие гипотезы

H_1={из второй в третью переложили белый шар},

H_2={из второй в третью переложили черный шар}.

Тогда условные вероятности будут

$$P(A/H_1)=\frac{6}{10},\ P(A/H_2)=\frac{5}{10}.$$

Теперь найдем вероятность гипотез H_1,H_2. Вероятность каждой гипотезы в свою очередь зависит от того, какой шар переложили во вторую урну. Поэтому снова выделим следующую полную группу событий

B_1={из первой во вторую переложили белый шар},

B_2={из первой во вторую переложили черный шар}.

Найдем вероятность этих гипотез $P(B_1)=1/10$, $P(B_2)=9/10$. Условные вероятности будут $P(H_1/B_1)=6/7$, $P(H_1/B_2)=5/7$, $P(H_2/B_1)=1/7$, $P(H_2/B_2)=2/7$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(H_1)=\frac{6}{7}\times\frac{1}{10}+\frac{5}{7}\times\frac{9}{10}=\frac{51}{70},\ P(H_2)=\frac{1}{7}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{7}\times\frac{9}{10}=\frac{19}{70},$$

и следовательно $P(A)=\frac{6}{10}\times\frac{51}{70}+\frac{5}{10}\times\frac{19}{70}$.

Задача. Имеются три партии радиоламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятность того, что радиолампа проработает заданное время, равны для этих партий 0.7, 0.8 и 0.9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из ста данных проработает заданное время?

Решение. Пусть событие A ={наудачу взятая радиолампа проработала заданное время}. Формулируем гипотезы: H_1={выбор лампы из первой партии}, H_2={выбор лампы из второй партии}, H_3={выбор лампы из третий партии}. Найдем вероятности гипотез. Всего ламп 100 и первая партия насчитывает 20 радиоламп, по классической схеме вероятностей имеем $P(H_1)=20/100$. Аналогично $P(H_2)=30/100$ и $P(H_3)=50/100$.

По условию задачи условные вероятности равны $P(A/H_1)=0.7$, $P(A/H_2)=0.8$ и $P(A/H_3)=0.9$. По формуле полной вероятности находим вероятность события A:

$$P(A)=0.7\times\frac{20}{100}+0.8\times\frac{30}{100}+0.9\times\frac{50}{100}.$$

§4. Формула Байеса.

Предположим, что имеется полная группа событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, вероятности которых оцениваются как $P(A_1), \dots, P(A_n)$. В результате проведения случайного эксперимента стало известно, что произошло некоторое событие B. Как это событие повлияет на оценки вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$: $P(A_1|B) = ?$, . . . , $P(A_n|B) = ?$

По определению условной вероятности:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(BA_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}. \qquad (2.10)$$

Если вероятность события B заранее неизвестна, то она может быть найдена по формуле полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P\left(B\middle|A_j\right)P(A_j).$$

Тогда мы можем переписать формулу (2.10) в виде:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P\left(B|A_j\right)P(A_j)}, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (2.11)$$

Формулы (2.10) и (2.11) называются формулами Байеса.

Несмотря на очевидность этих формул, они оказываются полезными при решении различных задач.

Задача. Есть две урны, в одной из которых лежит белый шар, а в другой – черный шар. Перед вами поставили случайно выбранную урну, на ваших глазах положили туда белый шар и перемешали содержимое. После этого вам предложили вытянуть из этой урны шар (не заглядывая туда). Этот шар оказался тоже белым. Какова вероятность того, что оставшийся в урне шар тоже белый?

Решение. Пусть событие A_1 – в выбранной урне лежит белый шар, A_2 – в урне лежит черный шар, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, B – событие, состоящее в том, что вы вытянули белый шар. Тогда

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)},$$

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2).$$

Так как $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = \frac{1}{2}$, $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$, то

$$P(B) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

Соответственно,

$$P(A_2|B) = \frac{1}{3}.$$

Задача. Прибор состоит из двух узлов: работа каждого узла безусловно необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго p_2. Прибор испытывался в течение времени t, в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

Решение. До опыта возможны четыре гипотезы:

H_0={оба узла исправны},

H_1 ={первый узел отказал, а второй исправен},

H_2={первый узел исправен, а второй отказал},

H_3={оба узла отказали}.

Считая, что приборы выходят из строя независимо, найдем вероятности гипотез: $P(H_0)=p_1p_2$, $P(H_1)=(1–p_1)p_2$, $P(H_2)=p_1(1–p_2)$, $P(H_3)=(1–p_1)(1–p_2)$.

Наблюдалось событие A = {прибор отказал}. Найдем условные вероятности

$P(A/H_0)=0$; $P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1$.

По формуле Бейеса

$$P(H_1 / A) = \frac{(1-p_1)p_2}{(1-p_1)p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2)}.$$

§5. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли.

Рассмотрим случайный эксперимент, математическое описание которого задается вероятностным пространством $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$. Предположим, что мы проводим серию из n независимых повторов этого эксперимента при совершенно одинаковых условиях. Для простоты будем считать пространство Ω_1 конечным: $\Omega_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Тогда элементарным исходом серии из n независимых повторов одного и того же эксперимента будет набор $\omega = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, где a_{i_k} означает исход k-го повтора, $a_{i_k} \in \Omega_1$, $k = 1, \dots, n$. Все пространство исходов серии испытаний описывается как

$$\Omega_n = \{\omega = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) : a_{i_k} \in \Omega_1, k = 1, \dots, n\}. \qquad (2.12)$$

В математике такую конструкцию Ω_n называют n-ой степенью пространства Ω_1: $\Omega_n = \Omega_1^n$.

Так как мы предлагаем независимость исходов различных испытаний, то естественно считать, что

$$p_n(\omega) = p_n((a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})) = p_1(a_{i_1}) \cdots p_1(a_{i_n}). \qquad (2.13)$$

Здесь $p_1(a_{i_k})$ – вероятность исхода $a_{i_k} \in \Omega_1$, $k = 1, \dots, n$.

Покажем, что набор чисел, задаваемых формулой (2.13) задает набор вероятностей на пространстве Ω_n.

Действительно,

$$\sum_{\omega\in\Omega_n} p_n(\omega) = \sum_{(a_{i_1},\dots,a_{i_n})\in\Omega_n} p_1(a_{i_1})\dots p_1(a_{i_n}) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m} p_1(a_{i_1}) \sum_{i_2=1}^{m} p_1(a_{i_2}) \dots \sum_{i_n=1}^{m} p_1(a_{i_n}) = 1.$$

Пусть $\mathcal{A}_n$ – алгебра всех возможных подмножеств Ω_n. Вероятность любого события $A \subset \mathcal{A}_n$ определяется как $P_n(A) = \sum_{\omega\in A} p_n(\omega)$.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ обозначают последовательность событий таких, что A_l определяется только исходом -го повтора в серии из n испытаний. Это означает, что

$$A_l = \{\omega : \omega = (a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, \dots, a_{i_n})\},$$

где $a_{i_k} \in \Omega_1$, $k \neq l$, $a_{i_l} \in B_l \subset \Omega_1$. Покажем, что события A_l и A_s независимы, $l \neq s$. В самом деле,

$$A_l A_s = \{\omega : \omega = (a_{i_1}, \dots, a_{i_l}, \dots, a_{i_s}, \dots, a_{i_n})\},$$

где $a_{i_k} \in \Omega_1$, $k \neq l$, $k \neq s$, $a_{i_l} \in B_l$, $a_{i_s} \in B_s$. Отсюда

$$P_n(A_l A_s) =$$

$$= \sum_{a_{i_1}\in\Omega_1} \dots \sum_{a_{i_l}\in B_l} \dots \sum_{a_{i_s}\in B_s} \dots \sum_{a_{i_n}\in\Omega_1} p_1(a_{i_1}) \dots p_1(a_{i_l}) \dots p_1(a_{i_s}) \dots p_1(a_{i_n})$$

$$= 1 \cdot \dots \cdot P_1(B_l) \cdot \dots \cdot P_1(B_s) \cdot \dots \cdot 1 = P_1(B_l) P_1(B_s).$$

Из этих же рассуждений видно, что

$$P_n(A_l) = P_1(B_l), \quad P_n(A_s) = P_1(B_s).$$

Таким образом,

$$P_n(A_l A_s) = P_n(A_l) P_n(A_s).$$

Построенное вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ описывает серию независимых повторов одного и того же эксперимента $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$.

Рассмотрим построенную конструкцию в случае, когда $n = 2$. Предположим, что мы наблюдаем за тем, происходит или не происходит определенное событие A в некоторой серии из n независимых экспериментов. Если событие A происходит, то мы говорим об «успехе», в противном случае мы говорим о «неудаче». Другие события нас не интересуют. В этом случае мы можем считать, что пространство исходов $\Omega_1 = \{0,1\}$, где исход 0 обозначает «неудачу», исход 1 – «успех». Проводится серия из n независимых испытаний и вероятность наступления события A в каждом из них равна $P(A) = P\{1\} = p$, а вероятность «неудачи» $P(\bar{A}) = P\{0\} = q = 1 - p$. Пространство исходов Ω_n имеет вид

$$\Omega_n = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n)\}, \qquad (2.14)$$

где $a_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \dots, n$. Легко видеть, что $|\Omega_n| = 2^n$,

$$P_n(\omega) = P(a_1) \cdots P(a_n) = p^{\sum_{i=1}^n a_i} q^{n - \sum_{i=1}^n a_i}, \qquad (2.15)$$

так как количество «единиц» в последовательности $(a_1, \dots, a_n)$ равно $\sum_{i=1}^n a_i$, а количество «нулей» равно $n - \sum_{i=1}^n a_i$.

Будем считать, что алгебра событий $\mathcal{A}_n$ состоит из всех возможных подмножеств Ω_n.

Определение 2.5. Вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, где Ω_n задается формулой (2.14), а P_n задается формулой (2.15), называется схемой Бернулли.

Пусть $\eta_n(\omega)$ обозначает количество «успехов» в исходе $\omega = (a_1, \dots, a_n)$.

Теорема 2.3. (Формула Бернулли).

$$P(\omega : \eta_n(\omega) = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1, \dots, n. \qquad (2,15)$$

Доказательство. Заметим, что $\eta_n(\omega) = k$, если $\sum_{i=1}^n a_i = k$, $\omega = (a_1, \dots, a_n)$. Количество исходов $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ таких, что

$\sum_{i=1}^{n} a_i = k,$ равно количеству k-элементных подмножеств в множестве из n элементов, т.е. количеству сочетаний C_n^k. Поэтому из (2.15) следует, что

$$P(\eta_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \ k = 0,1,\dots,n.$$

Закончим этот параграф обсуждением следующей парадоксальной задачи.

Задача. Предположим, что любой член жюри делает «правильный» выбор из какого-то количества вариантов с вероятностью $p < 0{,}5$. Члены жюри делают выбор независимо друг от друга и решение принимается большинством голосов. Жюри состоит из трех человек. Кто с большей вероятностью сделает «правильный» выбор – один член жюри или все жюри?

Один член жюри сделает «правильный» выбор с вероятностью p, а «неправильный» выбор с вероятностью $q = 1 - p$. Пусть $\omega = (a_1, a_2, a_3)$, где $a_i = 1$, если i-ый член жюри делает «правильный» выбор, и $a_i = 0$, если i-ый член жюри делает «неправильный» выбор. Жюри сделает правильный выбор, если $a_1 + a_2 + a_3 \geq 2$. Поэтому

$$P(\omega = (a_1, a_2, a_3) : a_1 + a_2 + a_3 \geq 2) =$$
$$= C_3^3 p^3 + C_3^2 p^2 q = p^3 + 3p^2 q.$$

Рассмотрим разность вероятностей правильного выбора:

$$p - p^3 - 3p^2 q = p(1 - p^2) - 3p^2 q = p(1-p)(1+p) - 3p^2 q =$$
$$= q(p + p^2 - 3p^2) = q(p - 2p^2) = qp(1 - 2p).$$

Так как $p < 0{,}5$, то $p > p^3 + 3p^2 q$.

Таким образом, мы приходим к удивительному выводу: при $p < 0{,}5$ один человек сделает «правильный» выбор с большей вероятностью, чем жюри из трех человек. Можно показать, что это утверждение верно для всех жюри из нечетного количества членов.

Задача. Вероятность выигрыша по одному билету денежно–вещевой лотереи равна 0.2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?

Решение. Эксперимент состоит в том, что последовательно проверяются 6 билетов, т. е. проводится 6 повторных независимых испытаний. Каждое испытание имеет два исхода: билет выигрышный, билет невыигрышный. Вероятность выигрыша в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие (*m=2*) состоит в том, что 2 билета оказались выигрышными. Тогда по формуле Бернулли:

$$P_6(m=2)=C_6^2 0.2^2 0.8^4 \approx 0.246$$

Задача. Прибор состоит из шести элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время *t* равна 0.6. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время *t* прибор будет работать безотказно?

Решение. Так как элементы работают независимо друг от друга, то каждый элемент можно рассматривать как отдельное испытание и тогда эксперимент заключается в проведении шести повторных независимых испытаний с двумя исходами каждый. Вероятность отказа каждого элемента за время *t* равна *q* = 0,4. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие *(m≥1)* означает, что хотя бы один элемент прибора исправен. События {хотя бы один элемент прибора исправен} и {не работает ни один прибор} составляют полную группу событий и поэтому

$$P_6(m\ge 1)=1-P_6(0)=1-0{,}4^6 \approx 0{,}9959\,.$$

Задача. Используя условия предыдущего примера, найдите число элементов, которые необходимо включить в прибор, чтобы с вероятностью не менее 0.9 прибор работал безотказно.

Решение. Так как в задаче требуется, чтобы выполнялось условие $P_n(m\ge 1)\ge 0.9$, то имеем $1-0.4^n \ge 0.9$. Отсюда $0.4^n \le 0.1$.

Прологарифмируем это неравенство, тогда $n\ln 0.4 \le \ln 0.1$. Так как $\ln 0.4 < 0$, то $n \ge \dfrac{\ln 0.1}{\ln 0.4} \approx 2.5$. Значит, в приборе должно быть не менее трех элементов для того, чтобы с вероятностью не менее 0.9 он работал безотказно.

Задача. Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0.7.

Решение. Эксперимент заключается в проведении пяти повторных испытаний, независимых, с двумя исходами в каждом (разговор состоялся, разговор не состоялся). Вероятность того, что разговор состоится, в каждом испытании постоянна. Следовательно, схема Бернулли выполняется. Пусть событие $(2 \le m \le 4)$ означает, что состоялось от двух до четырех разговоров. Данное событие будет составным и включает в себя следующие несовместные события: $\{$состоялось только два разговора$\}$,$\{$состоялось только три разговора$\}$,$\{$состоялось только четыре разговора$\}$, и соответственно

$$P_5(2 \le m \le 4) = C_5^2 0.7^2 0.3^3 + C_5^3 0.7^3 0.3^2 + C_5^4 0.7^4 0.3 \approx 0.801.$$

Задача. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0.05. Найдите наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

Решение. Проводится 50 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность появления нестандартной детали в каждом испытании постоянна. Значит, схема Бернулли выполняется. По формуле для наивероятнейшего числа появлений событий имеем $50 \times 0.05 - 0.95 \le S \le 50 \times 0.05 + 0.05$ и $1.55 \le S \le 2.55$. Так как число деталей может быть только целым, то наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии равно 2.

Задача. Система противовоздушной обороны обороняет территорию от воздушного налета, в котором принимает участие N самолетов. Для поражения каждого из самолетов выделяется два истребителя – перехватчика; каждый истребитель поражает цель независимо от другого с вероятностью p. Найти вероятность того, что в составе воздушного налета будет поражено: ровно три самолета.

Решение. События {два истребителя поразят цель} и {цель не поражена} составляют полную группу событий. И, следовательно, вероятность P{цель будет поражена} = 1 – P{цель не поражена}. Так как два истребителя поражают или не поражают цель независимо друг от друга, то P{цель не поражена} будет равна произведению следующих вероятностей P{промахнулся первый истребитель} и P{промахнулся второй истребитель}, то есть P{цель будет поражена} = $1–(1–p)^2$. Дальше рассмотрим воздушный налет из N самолетов, как серию из N независимых повторяющихся опытов (один опыт– это подбит или нет один самолет), где благоприятным исходом будет {самолет подбит} с вероятностью $1–(1–p)^2$. Тогда P{в составе воздушного налета будет поражено: ровно три самолета} = $P_N(3)$, и соответственно

$$P_N(3) = C_N^3 (1-(1-p)^2)^3 (1-p)^{2(N-3)}.$$

Задача. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного ее выполнения необходимо решить любые четыре задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь четыре задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0.8. Если он попробует решить пять задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0.7, а если он возьмется за решение всех шести задач, то вероятность снизится до 0.6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь шансы успешно выполнить работу.

Решение. Пусть A={успешное выполнение работы}. Рассмотрим решение задач N, как серию из N независимых повторяющихся опытов. Здесь N это количество задач, за которые он взялся. Таким образом если он взялся за решение четырех задач, то он должен иметь серию из одних успехов, то есть $P(A)= P_4(4) = 0.8^4=0.4096$, если он взялся за решение пяти задач, то событие A будет состоять из двух не пересекающихся исходов решено {четыре задачи}, {решено пять задач} и $P(A)= P_5(5)+5\times P_5(4) = 0.7^5+5\times 0.7^4\times 0.3=0.52822$. И при решении шести задач $P(A)= P_6(5)+ P_6(4) + P_6(6) = 0.6^6+15\times 0.6^4\times 0.4^2+6\times 0.6^5\times 0.4=0.54432$. В результате студенту надо решать шесть задачи.

Задача. Игральная кость подбрасывается 15 раз. Найти вероятность, что выпадет ровно 10 троек и 3 единицы.

Решение. Зафиксируем следующие исходы: A_1{выпала тройка}, A_2{выпала единица}, A_3{выпало все остальное}, тогда вероятности будут равны $P(A_1)=1/6$, $P(A_2)=1/6$, $P(A_3)=4/6$. Зафиксируем следующий порядок появления исходов

$$(A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_2,A_2,A_2,A_3,A_3).$$

Так как испытания независимы, а вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей, то вероятность этого фиксированного сложного события равна

$$P(A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_1,A_2,A_2,A_2,A_3,A_3) =$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=$$

$$=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\times\left(\frac{4}{6}\right)^{2}.$$

Все остальные возможные события отличаются порядком появления исходов.

И так как произведение не меняется при перемене мест сомножителей, то вероятность каждого события будет так же

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{2}.$$

Далее существует всего C_{15}^{10} способов размещения троек, и на каждые такой способ существуют C_5^3 способов размещения единиц, и на каждый выбор троек и единиц существует C_2^2 способов размещения исхода A_3. Так всего существует

$$C_{15}^{10} \times C_5^3 \times C_2^2 = \frac{15! \times 5! \times 2!}{10! \times 5! \times 3! \times 2! \times 2! \times 0!} = \frac{15!}{10! \times 3! \times 2!}$$

возможных событий , то вероятность того, что выпадет ровно 10 троек и 3 единицы будет равна $\frac{15!}{10! \times 3! \times 2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{2}$.

Данное значение вероятности соответствует так же значению, полученному по формуле для n независимых испытаний с несколькими исходами.

Задача. В цех по ремонту радиоаппаратуры поступают резисторы с трех заводов в отношении 2:3:5. Мастер для прибора взял наугад 6 резисторов. Какова вероятность того, что взят один резистор первого завода, два резистора второго завода и три резистора третьего завода.

Решение. Рассмотрим выбор шести резисторов, как серию из 6 независимых повторяющихся опытов с тремя исходами: A_1={взят резистор первого завода}, A_2={взят резистор второго завода}, A_3={взят резистор третьего завода}. Зная соотношение резисторов первого, второго, третьего завода, введем вероятности исходов $P(A_1)$=0.2, $P(A_2)$=0.3, $P(A_3)$=0.5. Вероятность события {взят один резистор первого завода, два резистора второго завода и три резистора третьего завода} рассмотрим как вероятность двух появлений исхода A_1, трех появлений исхода A_2 и пяти появлений исхода A_3 и найдем, что

$$P_6(2,3,5) = \frac{6!}{2!\times 3!\times 5!}0.2^2 \times 0.3^3 \times 0.5^5.$$

Задача. Выбирается группа из 6 человек. каждый человек может принадлежать одной из трех групп населения, с вероятностью 0.6 оказывается брюнетом, с вероятностью 0.3 шатеном и с вероятностью 0.1 рыжим. Какая вероятность событий: A={в составе группы хотя бы один рыжий}, B={в составе группы три рыжих}.

Решение. Вероятность события A удобно считать через противоположное A^c={ в группе нет рыжих} и $P(A) = 1–P(A^c) =1–0.1^6$. Событие B состоит из следующих несовместных событий {три рыжих, три шатена}, {три рыжих, два шатена, один брюнет }, {три рыжих, один шатен, два брюнета }, {три рыжих, три брюнета} и каждое такое событие есть серия из шести независимых испытаний в каждом из которых возможны три исхода {брюнет}, {шатен}, {рыжий}. В результате

$$P(B) = \frac{6!}{3!\times 3!}0.1^3 \times 0.3^3 + \frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}0.1^3 \times 0.3^2 \times 0.6 + \\ + \frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}0.1^3 \times 0.3 \times 0.6 + \frac{6!}{3!\times 3!}0.1^3 \times 0.6^3$$

Задача. Самолет обстреливается n независимыми выстрелами, каждый из выстрелов с вероятностью p_1, попадает в зону, где он поражает самолет немедленно; с вероятностью p_2 попадает в топливный бак и с вероятностью p_3 не попадает в самолет вообще. Снаряд, попавший в топливный бак, оставляет в нем пробоину, через которую вытекает k литров горючего в час. Потеряв M литров горючего, самолет становится небоеспособным. Найти вероятность того, что через час после обстрела самолет не будет боеспособен.

Решение. Рассмотрим n независимых выстрелов, как серию из n независимых повторяющихся опытов с тремя исходами: A_1={попадания в зону немедленного поражения}, A_2={попадание в топливный бак}, A_3={промах}. Самолет точно будет поражен, если событие A_1 произошло, хотя бы один раз из n, вероятность этого события можно найти как $1-P(\overline{A_1})=1-(1-p_1)^n$, где $\overline{A_1}$ ={не было не одного попадания в зону немедленного поражения}. Если не было не одного попадания в зону немедленного поражения, самолет так же будет поражен, если из топливного бака вылилось M и более литров горючего. Это возможно, если в самолет было, как минимум, $l=\left[M/k\right]+1$ попаданий в топливный бак ($[\cdot]$– целая часть числа).То есть произошло одно из следующих несовместных событий {было l попаданий в топливный бак}, {было $l+1$ попадание в топливный бак},…,{ было n попаданий в топливный бак }. Конечно, $l \le n$, так как в противном случае самолет будет поражен только при попадании в зону поражения. В каждом таком событии только два исхода A_2 и A_3. Следовательно, P{самолет поражен попаданиями в топливный бак} = $\sum_{j=l}^{n}\frac{n!}{j!\times(n-j!)}p_2{}^j p_3{}^{n-j}$. И вероятность того, что самолет через час после обстрела не будет боеспособен, равна

$$1-(1-p_1)^n+\sum_{j=l}^{n}\frac{n!}{j!\times(n-j!)}p_2{}^j p_3{}^{n-j}$$

Упражнения

1. В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебреная медали?

2. Битовая строка – это строка, состоящая из элементов, каждый из которых имеет значение 1 или 0. Сколько существует битовых строк, имеющих длину 5? Сколько существует битовых строк длины k?

3. Из пункта A в пункт B можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; из пункта B в пункт C – пароходом и автобусом. Сколькими способами можно осуществить путешествие из пункта A в пункт C через пункт B.

4. Сколько существует вариантов ответа на тест из 30 вопросов, если на каждый вопрос требуется ответ «да» или «нет»?

5. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на тот же самый вопрос, если подъем и спуск осуществляется различными путями.

6. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел получать вещи, выяснилось, что он забыл номер. Он только помнит, что в номере были числа 23 и 37. Чтобы открыть камеру, нужно правильно набрать пятизначный номер. Какое наибольшее количество номеров нужно перебрать, чтобы открыть камеру?

7. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

8. В классе из 200 студентов 120 человек изучают биологию, 110 изучают химию, а 80 студентов изучают и то, и другое. Сколько студентов изучают хотя бы один из этих курсов? Сколько студентов не изучают ни одного из них?

9. Сколько целых чисел между 1 и 401 делятся на 7 или на 11?

10. Обследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравился шоколад, 752 нравились конфеты и 418 — леденцы, 570 — шоколад и конфеты, 356 — шоколад и леденцы, 348 — конфеты и леденцы, а 297 — все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

11. Задача–шутка (Lewis Carrol. «A Tangled Tale» — Льюис Карроль. «Запутанная сказка», 1881). В ожесточенном бою не менее 70% бойцов потеряли один глаз, не менее75% — одно ухо, не менее 80%—одну руку и не менее 85%—одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

12. Сколько целых чисел между 1 и 1001 делятся на 10, но не делятся на 14?

13. В группе из 200 студентов 75 изучают математику, 70 – историю, 75 – социологию, 35 изучают математику и социологию, 20 – историю и социологию, 25 изучают математику и историю, 15 студентов – все три предмета.

a) Сколько студентов изучают хотя бы один из трех предметов?
b) Сколько студентов изучают только один из трех предметов?
c) Сколько студентов изучают историю или математику, но не изучают социологию?
d) Сколько студентов не изучают ровно два из трех предметов?
e) Сколько студентов не выбрали историю или математику?

14. В научно – исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 – немецкий язык и 23 – оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языков?

15. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,\ldots,n\}$ так, чтобы числа 1,2,3 стояли рядом и в порядке возрастания?

16. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами находятся r элементов?

17. Сколькими способами можно рассадить 10 гостей за круглым столом, если имеет значение только их положение относительно друг друга?

18. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования 5 мальчиков и 6 девочек, если ни два мальчика, ни две девочки не должны стоять рядом?

19. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 мальчиков и 5 девочек так, если ни два мальчика, ни две девочки не должны стоять рядом?

20. Сколько различных слов можно составить из слова «мама»?

21. Сколько различных слов можно составить из слова «математика»?

22. Число слов, которое можно составить из 12 букв (четыре буквы *А*, четыре *Б*, две буквы *В* и две *Г*).

23. Сколько существует способов рассадить 4 учащихся на 25 местах?

24. Сколько существует способов выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 разных сортов пирожных?

25. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составит из букв слова ромб?

26. В магазине имеется 5 сортов конфет. Сколько разных покупок, содержащих не более трех сортов конфет, можно сделать в этом магазине (покупки считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых сортов конфет)?

27. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

28. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех имен?

29. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

30. В студенческий совет избрали 9 человек. Из них надо выбрать секретаря и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

31. Производится 100 троекратных подбрасываний монеты; после каждого подбрасывания отмечается результат – герб или решетка. В 69 случаях из 100 гербы выпали при первом подбрасывании, в 49 случаях гербы выпали при втором и в 53 случаях — при третьем. В 33 случаях гербы выпали при первом и втором подбрасываниях и в 21 случае — при втором и третьем. Показать, что должно быть по меньшей мере 5 случаев, в которых гербы выпали при всех трех подбрасываниях, и что не может быть больше 15 случаев, когда при всех трех подбрасываниях выпала решетка, хотя обязательным не является даже и один такой случай.

32. Ящик содержит некоторое количество шаров, одинаковых во всем, за исключением цвета: часть из них красные, часть —белые, остальные синие. Один за другим вынимаются два шара. Какое пространство событий отвечает этому эксперименту? Сколько элементарных событий соответствует наборам из двух шаров одного цвета? Сколько элементарных событий соответствует наборам из разноцветных шаров? Сколько соответствуют наборам из красного к синего шаров? Сколько соответствуют наборам из красного или синего шаров?

33. На десяти жетонах выбиты числа 1; 2; 3; ...; 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное; нечетное},

б) {простое; 4; 6; 8; 9; 10},

в) {четное; 1; 3; 5},

г) {не более трех; не менее четырех}?

34. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания:

а) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

б) выпадение (в указанном порядке) герба — герба, герба — цифры, цифры — цифры при двукратном подбрасывании монеты;

в) попадание, промах при одном выстреле;

г) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании кости?

35. Укажите, какие из следующих событий являются: 1) случайными, 2) достоверными, 3) невозможными:

а) выигрыш по одному билету автомотолотереи;

б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 синих и 5 красных шаров;

в) получение абитуриентом 25 баллов на вступительных экзаменах в институте при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок;

г) извлечение «дубля» из полной игры в домино;

д) выпадение не более шести очков на верхней грани игрального кубика.

36. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: делится на 10; делится на 11;

б) нарушение в работе: первого; второго мотора летящего самолета;

в) попадание; промах при одном выстреле;

г) выигрыш; проигрыш в шахматной партии;

д) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным; кратным трем?

37. Назвать противоположные для следующих событий:

A —выпадение двух гербов при бросании двух монет;

B — появление белого шара при вынимании одного шара из урны, в которой 2 белых, 3 черных и 4 красных шара;

C—три попадания при трех выстрелах;

D — хотя бы одно попадание при пяти выстрелах;

E — не более двух попаданий при пяти выстрелах;

F — выигрыш первого игрока при игре в шахматы.

38. Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i $(i=1, 2,..., n)$ заключается в том, что i–тая изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) только одна деталь имеет дефект;

г) не более двух деталей имеют дефекты;

д) по крайней мере два изделия не имеют дефектов;

е) точно два изделия дефектны.

39. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события:

A — появление герба на первой монете;
B — появление цифры на первой монете;
C — появление герба на второй монете;
D — появление цифры на второй монете;
E — появление хотя бы одного герба;
F — появление хотя бы одной цифры;
G — появление одного герба и одной цифры;
H — не появление ни одного герба;
$К$ — появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

1) $A + C$; 2) AC; 3) EF; 4) $G + E$; 5) GE; 6) BD; 7) $E + К$.

40. Два шахматиста играют одну партию. Вводятся события: A={выигрывает первый игрок}, B = {выигрывает второй игрок}. Описать события AB, $\overline{A} \setminus B, \overline{A}B$, $A + B + (\overline{A} \setminus B)$.

41. Одновременно подбрасывается 4 монеты. Вводятся события: A={гербов выпало больше, чем цифр}, B = {выпали все гербы}, C={выпали все цифры}. Выяснить смысл событий: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \setminus B$, $A+B$, AB, $\overline{A} \setminus C$, $\overline{A}C$, $\overline{C} \setminus A$.

42. Из колоды в 36 карт наугад вытаскивается карта. Вводятся события: A = {вытащен туз}, B = {вытащена карта красной масти}, C= {вытащена карта масти "пик"}. Выяснить смысл событий: AB, AC, BC, $A \setminus B$, $B \setminus C$, $B \setminus A$, $B\overline{C}$, $B + C$.

43. Из двух коробок, в каждой из которых красные и синие карандаши, наугад берется по карандашу. Вводятся события: A_k={из k–ой коробки вытащен красный карандаш}, k=1,2. Построить множество элементарных исходов, выразив каждый элементарный исход через A_k. Представить в алгебре событий следующие события: A={вытащено два красных карандаша}, B={вытащено два синих карандаша}, C={вытащены карандаши одного цвета}, D={вытащены карандаши разных цветов}.

В задачах **44.1–44.4** построить множество элементарных исходов и выразить через эти исходы указанные события.

44.1. Кубик (игральная кость) подбрасывается один раз. События: A = {на верхней грани выпало четное число очков}, B ={на верхней грани выпало число очков, кратное 3}.

44.2. Одновременно подбрасываются две монеты. События: A={герб выпадает на одной монете}, B ={герб выпадает на двух монетах}.

44.3. Из четырех отобранных тузов наугад вытаскивается две карты. События: A={обе карты черной масти}, B={карты разного цвета}.

44.4. Монета подбрасывается три раза. События: A ={герб выпал ровно один раз}, B={ни разу не выпала цифра}, С={выпало больше гербов, чем цифр}, D={герб выпал не менее чем два раза подряд}.

45. Ребенок играет с 10 буквами разрезной азбуки, *А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т*. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «математика»?

46. В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Предположим, что каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

47. В старинной индейской игре Тонг два игрока одновременно показывают друг другу либо один, либо два, либо три пальца на правой руке. Если для каждого игрока равновозможно показать одни, два или три пальца, чему равна вероятность того, что общее число показанных пальцев четно? Нечетно? Больше четырех? Меньше двух? Простое?

48. В ящике в 5 раз больше красных шаров, чем черных (шары одинаковы во всем, за исключением цвета). Наугад вынимается один шар, Найти вероятность того, что он будет красным.

49. Селекционер скрещивает две породы, каждая из которых обладает парой генов (*а, А*), Каждая из родительских особей передает потомку один из этих генов (либо a, либо A); два гена—один отцовский и одни материнский — составляют пару генов потомка. Опишите пространство событий, элементами которого являются пары генов возможных потомков.

50. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

51. Колода игральных карт содержит 52 карты, разделяющиеся на 4 различные масти по 13 карт в каждой. Предположим, что колода тщательно стасована, так что вытаскивание любой карты одинаково вероятно. Вытащим 6 из них. Описать пространство элементарных исходов, а также:

a). Найти вероятность того, что среди этих карт будет король пик.

b). Найти вероятность того, что среди этих карт будут представители всех мастей.

52. N друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что:

а) два фиксированных лица A и B сядут рядом, причем B слева от A;

б) три фиксированных лица A, B и C сядут рядом, причем A справа от B, а C слева;

в) найти те же вероятности в случае, когда друзья садятся в ряд по одну сторону прямоугольного стола.

53. В лотерее n билетов, из которых k выигрышные. Как велика вероятность выигрыша для того, кто имеет k билетов?

54. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определить: вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов;

55. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам первый из них получит ровно n пар «туз—король одной масти».

56. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря: а) кратно пяти; б) равно 29, если в году 365 дней?

57. В группе 6 юношей и 18 девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

58. Игральная кость бросается дважды. Каждому из 36 элементарных событий приписывается одна и та же вероятность. Найдите вероятность того, что сумма очков равна n для n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

59. Преподаватель наудачу раздает задания n студентам, сидящим за одним столом (слева направо); среди заданий лишь два совпадают между собой. Какова вероятность, что эти задания окажутся рядом.

60. Из курса в 90 студентов деканат сформировал три группы, в каждом из которых назначают старосту. Какова вероятность, что друзья Иванов, Петров и Сидоров все окажутся старостами?

61. Брошено две одинаковые монеты. Найти вероятность того, что монеты выпали разными сторонами.

62. В партии 100 изделий, из которых шесть имеют дефекты. Партия произвольно разделена на две равные части, которые отправлены двум потребителям. Найти вероятность того, все бракованные изделия достанутся одному потребителю.

63. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность p того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

64. В корзине три красных и семь зелёных яблок. Из корзины вынули одно яблоко и отложили в сторону. Это яблоко оказалось зелёным. После этого из корзины берут ещё одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.

65. Телефонный номер состоит из 6 цифр. Некто забыл номер телефона, но помнит, что он состоит из нечетных цифр. Какова вероятность того, что номер будет угадан с первой попытки?

66. Поезд метро состоит из 6 вагонов. Какова вероятность того, что 3 пассажира сядут в один вагон?

67. В пачке из 100 лотерейных билетов 10 выигрышных. Некто покупает 5 билетов. Найти вероятности событий: A = {все купленные билеты выигрышные}, B= {два билета выигрывают}, C={выигрывает хотя бы один билет}.

68. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются две карты. Найти вероятности событий: A = {извлечены карты разного цвета}, B={извлечены карты одной масти}.

69. Из колоды в 52 карты наудачу извлекаются три карты. Найти вероятности событий:

A = {извлечены тройка, семерка, туз},

B = {извлечены две карты бубновой масти},

C = {извлечены два короля}.

70. В коробке 10 красных, 8 синих, 2 зеленых карандаша. Наугад берутся 3 из них. Найти вероятности событий:

A = {среди взятых нет синих карандашей},

B = {взяты карандаши разного цвета},

C = {взят хотя бы один зеленый карандаш}.

71. В машинном зале 10 компьютеров, из которых 3 с черно–белым экраном. Преподаватель произвольным образом рассаживает 10 студентов за эти компьютеры. Какова вероятность того, что студенты Иванов, Петров, Сидоров окажутся за компьютерами с черно–белым экраном?

72. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что в образовавшейся очереди между Ивановым и Петровым окажутся ровно 5 человек?

73. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5 следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?

74. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

75. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда

76. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

77. Во время спортивной игры по команде ведущего «становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики A и B окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

78 В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из которых 4 нестандартные, в другом 15 деталей и 3 из них нестандартные. Из каждого ящика наудачу извлекается по 2 детали. Найдите вероятность того, что из первого ящика извлекли 2 нестандартные, а из второго ящика – 2 стандартные детали.

79. Датчик случайных чисел генерирует двузначное случайное число. Какова вероятность того, что сгенерированное число делится на 5?

60. Слово АБРАКАДАБРА разрезается на буквы, которые затем перемешиваются. Одна за другой вытаскиваются 5 букв и прикладываются друг к другу слева направо. Найти вероятность событий: A={случайно сложится слово РАДАР}, B={случайно сложится слово БАРКА}.

61. Десять книг, из которых три по математике, случайным образом расставляются на полке. Найти вероятность того, что книги по математике окажутся рядом.

62. В партии, состоящей из 1000 изделий, четыре изделия имеют дефекты. Для контроля отбирают 100 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных изделий не окажется бракованных.

63. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, обе извлеченные карты одной масти.

64. В замке на общей оси пять дисков, каждый из которых разделен на шесть секторов с различными написанными на них буквами. Замок открывается только в случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно замка. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

65. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Каждому возможному исходу, требующему n бросаний, припишем вероятность 2^{-n}. Описать пространство элементарных событий. Найти вероятность следующих событий:

а) опыт окончится до 6-го бросания;

б) потребуется четное число бросаний.

66. Бросаются две кости. Пусть A — событие, состоящее в том, что сумма очков нечетная; B — событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события $A\ B$, $A\bigcup B$, $\overline{AB}$. Найти их вероятности при условии, что все 36 элементарных событий равновероятны.

67. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не менее l.

68. На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны 1,5 и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на это плоскость круг радиуса 2,5 см не будет пересечет ни одной линией.

69. Лодка перевозит груз с одного берега на другой, пересекая пролив за один час. Какова вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин. до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 20 мин. после пересечения судном курса лодки? Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны. Курс судна перпендикулярен курсу лодки.

70. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго – два часа.

71. Два лица имеют одинаковую вероятность прийти к указанному месту в любой момент промежутка времени T. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше t.

72. Чтобы добраться в институт, Петя может воспользоваться автобусом одного из двух маршрутов. Автобусы первого маршрута следуют с интервалом в 18 мин., второго маршрута – с интервалом в 15 мин. Найти вероятность того, что Петя будет ждать автобуса не более 10 мин.

73. Во время грозы на участке между 40–м и 70–м километрами телефонной линии произошёл обрыв провода. Считая, что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того, что обрыв расположен между 40–м и 45–м километрами

74. На 200–километровом участке газопровода между компрессорными станциями *A* и *B* происходит утечка газа, которая одинаково возможна в любой точке газопровода. Найти вероятности следующих событий:

а) утечка расположена не далее 20 км от A или B;

б) утечка расположена ближе к A, чем к B.

75. Ёмкость цистерны для хранения бензина на автозаправочной станции равна 50 т. Найти вероятности событий, состоящих в том, что при случайной проверке в цистерне будет обнаружено:

а) менее 5 т бензина;

б) хотя бы 1 т бензина.

76. При проведении инвентаризации для определения имеющегося на складе количества жидкого химического реактива используется измерительный прибор с ценой деления шкалы 0,2 л. Показания прибора округляются до ближайшего деления шкалы. Найти вероятность того, что ошибка округления не превысит 0,04 л.

77. Радар автоинспектора имеет точность 10 км /ч и округляет свои показания в ближайшую сторону. Определить, что происходит чаще — радар округляет скорость «в пользу водителя» или «в пользу ГИБДД»?

78. Компьютер сгенерировал два числа из промежутка [1;2]. Какова вероятность, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1?

79. В квадрат $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ наугад бросается точка $M(x, y)$. Найти вероятность того, что $\min(x, y) < a$, если $0<a<1$

80. В квадрат $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ наугад бросается точка $M(x, y)$. Найти вероятность того, что $\max(x, y) < a$, если $0<a<1$

81. Случайная точка бросается в круг, какова вероятность того, что она попадет внутрь квадрата, вписанного в круг?

82. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка будет удалена от центра квадрата на расстояние меньше, чем 1/3, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше чем на 1/6?

83. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r<a$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых?

84. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметра $2r<a$. Найти вероятность того, что монета пересечет не более одной стороны квадрата.

85. Студент и преподаватель приходят на пересдачу зачета в течение одного и того же временного промежутка длительностью T минут (с равной возможностью в любой его момент). Какова вероятность того, что их встреча состоится, если преподаватель ждет студента t_1, студент преподавателя t_2 минут $(t_{1,2}<T)$

86. Электрон вылетает из случайной точки нити накаливания и движется перпендикулярно ей. *С* какой вероятностью он свободно пройдет через сетку, которая окружает нить и имеет вид винтовой линии с радиусом R, толщиной σ и шагом H ?

87. Самолет с радиолокационной станцией, дальность действия которой L, в районе площадью s осуществляет поиск подводной лодки со скоростью v. Лодка может всплыть в любой точке района на время t. Найти вероятность обнаружения подводной лодки радиолокатором, если время t невелико.

88. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания в любую область пропорциональна площади этой области. Найти вероятность того, что точка находится от центра на расстоянии меньшем $r(r<R)$?

89. Известно, что события A и B произошли, а событие C не произошло. Определите, произошли или не произошли следующие события: $A+BC$; $(A+B)C$; $\overline{A}B+C$; ABC.

90. Используя таблицы операций над событиями, докажите тождества: $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$, $A\overline{B}+B=A+B$

91 Упростите выражения для событий: AB, $A+B$, $A+B+C$, $(A+B)C$, если известно, что $A\subset B$.

92. Докажите, что событие $A+\overline{A}B=\overline{A}+B$ достоверно.

93. Пусть p и q — вероятности на алгебре событий. Являются ли вероятностями на этой же алгебре:

а) $p+q$; б) p^2; в) $\lambda p+\mu q$, где $0\leq\lambda\leq<1$, $0\leq\mu\leq 1$, $\mu+\lambda=1$?

94. Построить вероятностное пространство для опыта по подбрасыванию правильной монеты.

95. Пусть $\Omega = R$, и пусть A — множество, содержащее любые конечные подмножества R (т.е. состоящие из конечного числа точек, в том числе пустое) и их дополнения. В частности, множество $\{0, 2, \pi\}$ принадлежит A, множество

$(-\infty,-7{,}2)\cup(-7{,}2{,}5)\cup(5,\ \infty)$ принадлежит *A*. Проверить, что множество A является алгеброй.

96. В первой урне находится 1 белый и 3 черных шаров, а во второй – 2 черных и 3 белых шаров и в третий урне 4 черных. Вынимаются из каждой урны по одному шару. Найти вероятность того что в наборе будет только один белый шар.

97. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0.9, второй экзамен – 0.85 и третий – 0.8. Какова вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов?

98. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0.9, второго – 0.75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?

99. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правильно решена задача, равна 0.8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, – 0.9. Найдите вероятность того, что правильно решен пример.

100. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – волейболом и баскетболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

101. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в институт, зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

102. Имеется две урны: в первой a белых и b черных шаров; во второй c белых и d черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.

103. Доказать, что вероятность суммы двух событий не больше, чем сумма вероятностей этих событий: $P(A+B)\leq P(A)+P(B)$.

104. В урне a белых и b черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

105. В урне a белых, b черных и c красных шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что, по крайней мере, два из них будут одноцветными.

106. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от не игранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется не игранных мячей?

107. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имеется два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся первый стрелок.

108. В партии, состоящей из N изделий, имеется M дефектных. Из партии выбирается для контроля n изделий. Если среди контрольных окажется более t дефектных, бракуется вся партия. Найти вероятность того, что партия будет забракована.

109. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события:

A — среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновая;

B — среди вынутых карт будет хотя бы одна червонная.

Найти вероятность события C=A+B.

110. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».

111. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

112. Вероятность обнаружения самолета за один обзор локатора равна 0,2. Найти вероятность того, что локатор обнаружит самолет ровно на пятом обзоре.

113. По каналу связи передаются три сообщения. Каждое из них независимо от других искажается с вероятностью 0.2. Найти вероятности следующих событий:

A={все сообщения переданы без искажений},

B={все события искажены},

C={хотя бы одно сообщение искажено},

D={ровно одно сообщение передано без искажений},

F={ровно два сообщения переданы без искажений}.

114. По рации передаются три закодированных сообщения. Вероятность ошибки при расшифровке каждого сообщения составляет 0,3. Найти вероятности следующих событий:

А={все сообщения расшифрованы верно},

В={одно сообщение расшифровано с ошибкой},

С={с ошибкой расшифровано не менее двух сообщений}.

115. На участке AB для гонщика имеется 6 препятствий, вероятность остановки на каждом равна 0,1. Вероятность того, что от B до C гонщик проедет без остановки, равна 0,7. Какова вероятность того, что на участке AC у гонщика не будет ни одной остановки?

116. В гирлянду последовательно включено 10 лампочек. Вероятность перегорания лампочки при повышении напряжения составляет 0,1. Определить вероятность безотказной работы гирлянды при повышении напряжения.

117. Вероятность выхода из строя каждого двигателя трех моторного самолета равна p. Самолет может продолжать полет, если работает хотя бы один двигатель. Какова вероятность аварии?

118. Для изготовления микросхемы требуется n технологических операций; вероятность брака на каждой операции равна p. Какова вероятность изготовления бракованной микросхемы?

119. Самолет терпит аварию, если отказали оба двигателя, или вышла из строя система управления, или вышли из строя системы навигации. Найти вероятность аварии самолета, если вероятность выхода из строя каждого двигателя составляет 0.005, системы управления – 0.001, систем навигации – 0.0002.

120. Ведется пристрелка орудия по цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.6, при последующих выстрелах эта вероятность увеличивается каждый раз на 0.1. Какова вероятность того, что при 4 выстрелах орудие попадает в цель:

а) все 4 раза;

б) ровно 3 раза;

в) не более двух раз.

121. На трассе гонок имеется 4 препятствия. Первое препятствие гонщик успешно преодолевает с вероятностью 0,9, второе – с вероятностью 0.95, третье – с вероятностью 0.8, четвертое – с вероятностью 0.85. Найти вероятность того, что гонщик успешно преодолеет:

а) все 4 препятствия;

б) ровно два препятствия;

в) не менее двух препятствий из четырех

122. В первой урне находится 1 белый и 9 черных шаров, а во второй – 1 черный и 5 белых шаров и в третий урне 4 черных. Из каждой урны достают случайным образом по одному шару, потом выбирают из этих трех шаров один. Найти вероятность того, что выбранный шар белый.

123. На уничтожение цели противника вылетело два самолета разных типов. Самолет первого типа может уничтожить цель с вероятностью 0.9, второго типа – с вероятностью 0.8. Однако противовоздушная оборона противника может сбить самолет первого типа с вероятностью 0.95, самолет второго типа – с вероятностью 0.85. Какова вероятность уничтожения цели?

124. В цехе 14 установок с автоматическим контролем и 6 с ручным. Вероятность изготовления некондиционной продукции для установок с автоматическим контролем составляет 0.001, с ручным контролем – 0.002. Какова вероятность того, что взятая на лабораторный анализ продукция цеха оказалась кондиционной?

125. На конвейер поступают детали с двух станков с ЧПУ. Производительность первого станка в 2 раза больше производительности второго. Вероятность брака на первом станке 0.01, на втором станке 0.02. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь стандартна.

126. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10%, третьего 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 телевизоров первого завода, 20 второго, 50 третьего?

127. В бригаде 8 рабочих и 2 ученика. Вероятность изготовить бракованное изделие для рабочего составляет 0.05, для ученика 0.2. Производительность рабочего в два раза выше, чем у ученика. Какова вероятность, что некоторое изделие, изготовленное бригадой, окажется бракованным?

128. Вероятность попадания в танк при одном выстреле составляет 0.2. При одном попадании танк загорается с вероятностью 0.3, при двух – с вероятностью 0.5, при трех – с вероятностью 0.9. По танку сделано три выстрела. Какова вероятность его загорания?

129. Производится n независимых выстрелов по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1 , если два и более, то с вероятностью 1. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

130. Имеется 15 экзаменационных билетов, каждый из которых содержит по 2 вопроса. Студент Иванов знает ответ только на 15 вопросов. Определить вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого нужно ответить либо на оба вопроса, либо на один вопрос билета и один дополнительный вопрос.

131. Студент Иванов знает только 10 экзаменационных билетов из 25. В каком случае шансы Иванова сдать экзамены выше: когда он берет билет первым или вторым?

132. В первой урне лежат 8 белых и 12 черных шаров, во второй урне лежат 4 белых и 15 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывается один шар, затем из второй урны извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар белый?

133. В первой урне находится 3 белых и 7 черных шаров, во второй урне лежат 5 белых и 3 черных шара. Из первой урны во вторую перекладываются 2 шара, а затем из второй урны извлекается шар. Какова вероятность того, что он белый?

134. В первой урне лежат 8 белых и 12 черных шаров, во второй урне – 4 белых и 16 черных шара. Из каждой урны берется по шару и перекладывается в третью урну, затем из третьей урны вытаскивается шар. Какова вероятность того, что вытащен черный шар?

135. В пирамиде 10 винтовок с оптическим прицелом и 20 без оптического прицела. Вероятность попадания в мишень из винтовки с оптическим прицелом равна 0.9 , из винтовки без оптического прицела – 0.6. Наугад берется винтовка, и из нее делается выстрел; при этом мишень оказывается пораженной. Найти вероятность того, что выстрел сделан: а) из винтовки с оптическим прицелом; б) из винтовки без оптического прицела.

136. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0.8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0.2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью 0.7, если только помеха, то с вероятностью 0.3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

137. В урне лежит шар неизвестного цвета: с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается белый шар и после тщательного перемешивания один шар извлекается. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

138. Рассматривается посадка самолета на аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая за аэродромом визуально. В этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1. Если аэродром затянут низкой облачностью, летчик сажает самолет вслепую по приборам. Надежность (вероятность безотказной работы) приборов слепой посадки равна P. Если приборы слепой посадки сработали нормально, то самолет садится благополучно с той же вероятностью p_1, что и при визуальной посадке. Если же приборы слепой посадки не сработали, то летчик может благополучно посадить самолет только с очень малой вероятностью p_2. Найти полную вероятность благополучной посадки самолета, если известно, что в k% всех случаев посадки аэродром затянут низкой облачностью.

139. Цель, по которой ведется стрельба, состоит из двух различных по уязвимости частей. Для поражения цели достаточно одного попадания в первую часть или двух попаданий во вторую. Для каждого попавшего в цель снаряда вероятность попадания в первую часть равна p_1, во вторую p_2. По цели производится три выстрела; вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Найти вероятность того, что данными тремя выстрелами цель будет поражена.

140. Группа из трех самолетов совершает налет на объект. Объект защищен четырьмя батареями зенитных ракет. Каждая батарея простреливает угловой сектор размерами 60°, так что из полного угла 360° вокруг объекта оказываются защищенными 240°. Если самолет пролетает через защищенный сектор, его обстреливают и поражают с вероятностью p; через незащищенный сектор самолет проходит беспрепятственно. Каждый самолет, прошедший к объекту, сбрасывает бомбу и поражает объект с вероятностью P. Экипажи самолетов не знают, где расположены батареи. Найти вероятность поражения объекта для двух способов организации налета:

1) все три самолета летят по одному и тому же направлению, выбираемому случайно;

2) каждый из самолетов выбирает себе направление случайно независимо от других.

141. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1; на втором месте — с вероятностью p_2; на третьем — с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку и рыба клюнула только один раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

142. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно p_1, p_2, p_3. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут распроданы, равна для первой кассы k_1, для второй k_2, для третьей k_3. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

143. Готовясь к экзамену, студент должен подготовить ответы на две серии вопросов по 5 вопросов в каждой серии. Однако он подготовил ответы на все вопросы первой серии и только на четыре из пяти вопросов второй серии. Экзамен заключается в ответе на три вопроса, причем два из них случайно выбираются из одной серии, а третий случайно выбирается из другой, причем то, из какой серии выбираются два вопроса, а из какой — один, экзаменатор также решает наугад. Какова вероятность того, что этот студент сможет ответить на все три вопроса? Что он сможет ответить только на два вопроса?

144. Производится 4 независимых выстрела с самолета по самолету. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.3. Для поражения (выхода из строя) самолета заведомо достаточно двух попаданий; при одном попадании самолет поражается с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.

145. Работа двигателя контролируется двумя регуляторами. Рассматривается определенный период времени t, в течение которого желательно обеспечить безотказную работу двигателя. При наличии обоих регуляторов двигатель отказывает с вероятностью $q_{1,2}$, при работе только первого из них — с вероятностью q_1, при работе только второго — с вероятностью q_2, при отказе обоих регуляторов — с вероятностью q_0. Первый из регуляторов имеет надежность k_1, второй — k_2. Все элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти полную надежность (вероятность безотказной работы) двигателя.

146. По самолету производится три одиночных выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.4, при втором — 0.5, при третьем — 0.7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий; при одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0.2, при двух попаданиях с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

147. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно: достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой.

148. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие попало в цель, если вероятности попадания для орудий равны соответственно 0.4, 0.3, 0.5.

149. Стоимость проезда в автобусе равна 3 руб., месячный проездной билет на автобус стоит 120 руб., а штраф за безбилетный проезд составляет 10 руб. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0.05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

150. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0.3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице–президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий:

а) поступили ровно две заявки;

б) поступила хотя бы одна заявка;

в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

151. Технологический процесс контролируется по 14 параметрам. Вероятность выхода каждого параметра за границы технических допусков составляет 0.2. Найти:

а) наивероятнейшее число параметров, выходящих за границы технических допусков и соответствующую вероятность;

б) вероятность выхода за границы технических не менее 4 параметров

152. Вероятность попадания стрелком в мишень при каждом выстреле не зависит от результатов предыдущих выстрелов и равна 0.8. Стрелок сделал 5 выстрелов. Найти вероятности следующих событий:

а) мишень поражена одной пулей;

б) мишень поражена двумя пулями;

в) зарегистрировано хотя бы одно попадание;

153. Вероятность попадания бомбы в цель составляет 0.25. Сбрасывается 8 бомб. Найти вероятность того, что будет:

а) не менее 7 попаданий;

б) не менее 1 попадания.

154. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:

а) выиграть одну партию из двух или две из четырех?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

7. Найти вероятность того, что при раздаче колоды в 52 карты четырем игрокам один из них три раза подряд не получал тузов.

155. На цель противника сбрасывается 10 бомб, вероятность попадания в цель для каждой составляет 0.2. Найти:

а) наиболее вероятное число попаданий и соответствующую вероятность;

б) вероятность того, что число попаданий колеблется в пределах от 2 до 4

156. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:3, считая от точки A. На этот отрезок брошено 6 точек. Найти вероятность того, что не менее трех точек окажутся левее C.

157. Игральная кость подбрасывается 16 раз. Найти наивероятнейшее число выпадений очков, кратных 3.

158. Вероятность выигрыша лотерейного билета составляет 0.1. Некто покупает 5 лотерейных билетов. Найти вероятности следующих событий:

A ={ровно два билета выигрывают},

B ={большая часть билетов выигрывает},

C={выигрывает хотя бы два билета}.

159. На отрезок MN длины a наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки M на расстоянии, меньшем x, а три другие– на расстоянии, большем x. Считаем, что $x<a$.

160. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность выдержать испытание для каждого элемента составляет 0.9. Найти наивероятнейшее число выдержавших испытание элементов и его вероятность.

161.Устройство состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности безотказной работы блоков за время t равны соответственно 0.8, 0.7, 0. 2. Найти вероятности того, что за время t будут работать безотказно:

а) все три элемента;

б) два элемента;

в) один элемент.

162. При вращении антенны локатора за время облучения самолета успевают отразиться 8 импульсов. Найти вероятность обнаружения цели за один оборот антенны, если для этого необходимо прохождение через приемник не менее 5 импульсов, а вероятность подавления импульса помехой равна 0.1.

163. Отрезок AB точкой C разделен в отношении 2:1, считая от точки A. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две правее.

164. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:3, считая от точки A. На этот отрезок брошено 6 точек. Найти вероятность того, что не менее трех точек окажутся левее C.

165. ОТК проверяет партию изделий из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0.75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

166. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0.3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми?

167. Экспериментально установлено, что при подбрасывании спичечного коробка количества его падений на меньшую, среднюю и большую грани относятся как 1:4:15. Какова вероятность того, что при 6 подбрасываниях коробка он 1 раз упадет на меньшую грань, 1 раз – на среднюю, 4 раза – набольшую?

168. В квадрат со стороной a вписана окружность, в которую вписан правильный треугольник. Внутрь квадрата бросается 5 точек. Найти вероятность того, что три точки попадут внутрь круга, причем две из них – внутрь треугольника, а две остальные вообще не попадут в круг.

169. Для новогодних подарков школой закуплено 8 кг яблочной, 20 кг вишневой, 12 кг сливовой и 10 кг апельсиновой карамели. Все конфеты перемешаны, и в каждый подарочный пакет кладется по 6 карамелек. Какова вероятность того, что школьник Ваня обнаружит в своем пакете две вишневых, две сливовых и по одной яблочной и апельсиновой карамельке.

170. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0.4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

171. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан:

а) на 3 вопроса,

б) не менее чем на 3 вопроса?

172. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика равна 0.51. Найти вероятности событий:

A ={в семье два мальчика},

B = {в семье не более двух мальчиков},

C ={в семье более двух мальчиков},

D ={ в семье не менее 2 и не более 3 мальчиков}.

173. Играют две равносильные команды в футбол. В ходе матча забито 4 мяча. Какова вероятность того, что счет будет равным?

174. Работа уличного агента по приглашению потенциальных покупателей считается удовлетворительной, если по его приглашению за день на презентацию придет более 10 покупателей. Считая вероятность того, что лицо, к которому агент обратился с предложение, с вероятностью 0.1 придет на презентацию, вычислить вероятность того, что работа агента будет признана удовлетворительной, если агент обратится с предложением к 40 прохожим.

Литература

1. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей/ Б.В. Гнеденко. – М.: Наука, 1965.
2. Вагнер Г. Основы исследования операций. – М.: Мир, 1972.
3. Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А. Управляемые марковские процессы и их приложения. – М.: Наука, 1975.
4. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – М.: Наука, 1979.
5. Миссаров М.Д. Вероятностные модели в исследовании операций. – Изд. КГУ, 2006.
6. Розанов Ю.А. Случайные процессы. Краткий курс. – М.: Наука, 1979.
7. Сакович В.А. Модели управления запасами. – Минск: Наука и техника, 1986.
8. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.
9. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. – М.: Мир, 1990.
10. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1./В. Феллер – М.: Мир, 1984.
11. Ширяев, А.Н. Вероятность/ А.Н. Ширяев – М.: Наука, 1989
12. Hinz J. Markov Decision Processes and Valuation of Real Options, Institut of Operations Research, ETH Zentrum – www.ifor.math.ethz.ch
13. Миссаров, М.Д. Введение в теорию вероятностей: учебное пособие / М.Д. Миссаров. - Казань:Изд-во Казан.ун-та, 2019. - 126 с.
14. Дубровин, В.Т. Решебник по элементарной теории вероятностей/ В.Т. Дубровин, В.С. Желтухин, В.Ю. Чебакова -Казань: Изд-во Казан.ун-та,2015.-118с

15. Пушкин, Л.Н. Задачи по теории вероятностей: Учеб. Пособие/ Л.Н. Пушкин, С.В. Симушкин- Казань: Казан. (Приволжский) Федеральный Ун-т, 2011. - 223 с.

Оглавление