Посвящается моим родителям

АНАСТАСИИ ИВАНОВНЕ,

ВАСИЛИЮ НИКОЛАЕВИЧУ

ГУСЕВЫМ

и моей няне

МАРИИ ИВАНОВНЕ

МАРИНОВОЙ

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. В. АМИНОВА

ПРОЕКТИВНЫЕ СИММЕТРИИ

ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ

КАЗАНЬ
2018

УДК 514.763: 514.764: 514.8: 517.9: 512.813
ББК 22.151: 22.31

Аминова А.В.

Проективные симметрии гравитационных полей. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2018. – 201 с.

ISBN 978-5-00130-100-4

Совокупность всех геодезических линий (траекторий пробных тел в теории гравитации Эйнштейна) задает проективную структуру пространства-времени. Группа инвариантности проективной структуры, состоящая из проективных преобразований, существенным образом определяет свойства гравитационного поля. В книге дается классификация пространств, определяемых полями тяготения, по группам проективных преобразований. Находятся все 4-мерные псевдоримановы пространства лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$, допускающие группы проективных преобразований, более широкие, чем группы гомотетий, и для каждого из них – максимальная проективная алгебра Ли, включая аффинную, гомотетическую и изометрическую подалгебры. Указываются возможные приложения в теории симметрий дифференциальных уравнений.

Для научных работников – математиков, физиков, механиков, аспирантов и студентов соответствующих специальностей. Может использоваться как пособие по специальным курсам: риманова геометрия, алгебры Ли, дифференциальные уравнения, общая теория относительности.

Табл. 1. Библ. 160 назв.

УДК 514.763: 514.764: 514.8: 517.9: 512.813
ББК 22.151: 22.31

ISBN 978-5-00130-100-4

KAZAN FEDERAL UNIVERSITY

Asya AMINOVA

PROJECTIVE SYMMETRIES

OF GRAVITATIONAL FIELDS

KAZAN
2018

UDK 514.763: 514.764: 514.8: 517.9: 512.813
BBK 22.151: 22.31

Aminova A. V.

Projective symmetries of gravitational fields. – Kazan: KFU Publishing House, 2018. – 201 c.

ISBN 978-5-00130-100-4

The set of all geodesic lines (trajectories of test bodies in Einstein's theory of gravity) defines the projective structure of space-time. The invariance group of a projective structure consisting of projective transformations essentially determines properties of the gravitational fields. The book provides a classification of the spaces defined by the gravitational fields on groups of projective transformations. All 4-dimensional pseudo-Riemannian spaces with Lorentzian signatures $(- - -+)$ that admit groups of projective transformations wider than homothety groups are found, and for each of them maximal projective Lie algebra, including affine, homothetic and isometric subalgebras are found. Possible applications in the theory of symmetry of differential equations are indicated.

For scientists — mathematicians, physicists, mechanics, graduate students and students of relevant specialities. Can be used as a guide for special courses: Riemannian geometry, Lie algebras, differential equations, general theory of relativity.

Tab. 1. Bibl. 160 names

UDK 514.763: 514.764: 514.8: 517.9: 512.813
BBK 22.151: 22.31

ISBN 978-5-00130-100-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

"Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрии. В конечном счете именно к этому направлена деятельность физика, хотя сам он может не всегда это сознавать. Понятие симметрии неразрывно связано с понятиями преобразования и инвариантности."

Л. Б. Окунь.
"Физика элементарных частиц" (1988 г., с. 11)

"История выполнения общей программы Клейна показала, что наиболее существенные результаты были получены при исследовании таких групп, которые изоморфны подгруппам группы проективных преобразований."

А. П. Норден.
"Пространства аффинной связности" (1976 г., с. 40)

Теоремы А. З. Петрова [51] о трех типах полей тяготения и разработанная им и его учениками классификация полей тяготения по группам симметрий в форме изометрических (А. З. Петров, В. Р. Кайгородов, 1963 г.), конформных (Р. Ф. Билялов, 1963 г.), проективных и аффинных движений (А. В. Аминова, 1971 г.) стали основой программы поиска точных решений уравнений Эйнштейна в общей теории относительности и положили начало множеству работ, в которых физические свойства материальных систем, а также гравитационного, электромагнитного и других физических полей, переносящих взаимодействия, определялись группами автоморфизмов различных объектов геометрической или физической природы.

Наибольшее число работ такого рода связано с изометриями и конформными преобразованиями пространственно-временных многообразий. В последнее время в эту схему все чаще включаются гомотетии и аффинные преобразования (см. [18], § 16). Физическая структура пространств, допускающих неаффинные проективные движения, остается малоизученной.

В настоящее время кажется несомненным, что реалистичная физическая теория должна развиваться на фоне 4-мерного геометрического пространства, предполагаемого изоморфным реальному пространству-времени. Поэтому изучение геометрических свойств пространственно-временного континуума, в особенности его симметрий, представленных непрерывными группами точечных преобразований, имеет в соответствии с теоремами Э. Нётер [129] важное значение для любой физической теории (см., например, [19]).

С особой наглядностью связь геометрии и физики выступает в теории Эйнштейна [106], [77], [53]; здесь потенциалы гравитационного поля отождествляются с компонентами метрического тензора g_{ij} 4-мерного псевдориманова пространства-времени. Предполагается, что функции g_{ij} удовлетворяют уравнениям поля Эйнштейна

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (\kappa = \mathrm{const}),$$

где T_{ij} – тензор энергии-импульса. В случае произвольного T_{ij} компоненты g_{ij} также могут быть вполне произвольными, охватывая все возможные пространства-времена. Согласно гипотезе геодезических уравнения движения материальных точечных пробных частиц есть уравнения геодезических:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Как было независимо показано А. Эйнштейном, Л. Инфельдом [107] и В. А. Фоком [77], при некоторых дополнительных условиях на тензор энергии-импульса уравнения движения следуют из уравнений поля.

Принципиальное значение для нахождения решений полевых уравнений имеет выбор анзаца – общей конфигурации полевых потенциалов, устанавливаемой из теоретико-групповых соображений (анзац Виттена [147], процедура Форгача–Мантона систематического построения анзацев янг-миллсовских и хиггсовских полей для широкого класса пространственно-временных симметрий [109] и др.).

С другой стороны, пространственно-временные симметрии используются для построения законов сохранения, составляющих основу любой физической теории. Согласно теореме Э. Нётер и исследованиям В. Девиса, М. Мосса, Г. Катцина и Дж. Левина ([100]–[103], [114]) проективные и аффинные движения приводят к фундаментальным механическим и полевым законам сохранения. Главная трудность при построении таких законов сохранения заключается, по мнению авторов, в нахождении указанных движений. Поэтому прежде всего необходимо провести классификацию пространств, определяемых полями тяготения, по группам проективных движений. Решению этой задачи и посвящена данная книга. В ней находятся все пространственно-временные многообразия, т. е. все 4-мерные псевдоримановы пространства лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$ ("пространства-времена"), допускающие группы проективных преобразований, более широкие, чем группы гомотетий, и для каждого из них определяется максимальная проективная алгебра Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

Совокупность всех геодезических линий в пространстве-времени задает его проективную структуру (§ 1). Наоборот, задание проективной структуры определяет семейство метрик и аффинных связностей, каждая из которых может быть геодезически, т. е. с сохранением геодезических, отображена на любую другую метрику (связность) семейства. Поскольку изучение движения пробных тел является основным источником информации о структуре физических полей, проективная структура пространства-времени существенным образом определяет свойства гравитационного поля и других физических полей, описываемых тензором энергии-импульса T_{ij}. Вопрос о проективных преобразованиях пространства-времени является также одним из аспектов проблемы моделирования физических полей (А. З. Петров [55, 56]).

Естественно возникает проблема: в какой мере геодезические – пути пробных тел – определяют пространство-время. Исследования В. И. Голикова показали, что здесь имеется значительный произвол ([22], см. также [54], гл. 8). Следующий этап в решении этой проблемы заключается в том, чтобы в рамках теории групп Ли рассмотреть такие точечные преобразования, которые сохраняют пути пробных тел, т. е. проективные преобразования. Эти преобразования образуют группу инвариантности проективной структуры (проективную группу).

Впервые задача определения римановых пространств V^n, допускающих непрерывные группы проективных преобразований, рассматривалась С. Ли и затем учеником Г. Дарбу М. Кёнигсом для случая двумерных поверхностей. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований и проективных движений (инфинитезимальных проективных преобразований) в пространствах с линейной связностью связано с именами Э. Картана, Л. П. Эйзенхарта, М. С. Кнебельмана, И. А. Схоутена, К. Яно, И. П. Егорова, Г. Врэнчану, Ш. Кобаяси и др.

Проблема проективных преобразований в V^n тесно примыкает к проблеме геодезических отображений (псевдо)римановых пространств, которая в разное время рассматривалась Е. Бельтрами, У. Дини, Т. Леви-Чивита, Г. Фубини, Л. П. Эйзенхартом, П. А. Широковым, А. З. Петровым, Н. С. Синюковым, А. С. Солодовниковым, В. И. Голиковым, Г. И. Кручковичем и др. Общее решение классической геометрической проблемы определения псевдоримановых многообразий с общими геодезическими, более ста лет стоявшей на повестке дня, дано в работе [13].

Как известно, в пространствах постоянной кривизны S^n, рассматриваемых в малом, проективная группа совпадает с проективной группой псевдоевклидова пространства, т. е. с группой дробно-линейных подстановок, и зависит от $n(n+2)$ параметров.

В пространствах V^n непостоянной кривизны порядок проективной группы не превосходит число $n(n-2)+5$ (И. П. Егоров [26]), причем в большинстве случаев эта группа состоит из преобразований подобия (гомотетий) или изометрий. Пространства, допускающие проективную группу более широкую, чем группа гомотетий, встречаются среди пространств непостоянной кривизны весьма редко. В 1903 г. в "Записках Туринской Академии наук" появилась работа Г. Фубини "О группах геодезических преобразований" [110], которая положила начало систематическому определению и изучению таких пространств с положительно определенными метриками. Впоследствии А. С. Солодовников [68] продолжил исследования Г. Фубини и до конца решил поставленную им задачу; в трудах Фубини и Солодовникова содержится классификация собственно римановых пространств V^n, $n \geq 3$, по (локальным) группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий.

Выводы Фубини и Солодовникова опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Снятие условия знакоопределенности значительно усложняет задачу и требует принципиально нового подхода к ее решению. Между тем проективно-групповые свойства псевдоримановых пространств с неопределенными метриками представляют несомненный интерес: как математический в силу важности и малой изученности вопроса (ср. [123], т. II, с. 305), так и физический в рамках современных полевых теорий (см., например, [99]). При этом наибольшего внимания заслуживают псевдоримановы пространства V^4 лоренцевой сигнатуры, определяемые полями тяготения в теории гравитации Эйнштейна.

План книги следующий. Предварительные сведения о геодезических отображениях, проективной связности, проективных, аффинных и конформных преобразованиях псевдоримановых пространств V^n содержит гл. 1. В ней приводится краткий исторический обзор результатов, относящихся к проблеме проективных преобразований псевдоримановых пространств, и решается ряд вспомогательных задач. В гл. 2 определяются и исследуются специальные классы пространств, обладающих какими-либо замечательными проективно-групповыми свойствами: пространства $\Pi^n(K)$ и Γ^n_p, пространства Эйнштейна G^n и проективно-рекуррентные пространства W^n. Выводы этой главы используются в последующих главах. Оставшиеся главы посвящены классификации псевдоримановых пространств V^4, определяемых полями тяготения, по алгебрам Ли проективных и аффинных движений. Классификация основана на разбиении всех пространств V^4 по типам в соответствии с типом проективного движения X, определяемым алгебраической структурой производной Ли $L_X g_{ij}$ метрики g_{ij} в направлении X.

В исследовании можно выделить две основные части. В первой части (гл. 3) определяются пространства V^4, допускающие 1-параметрическую негомотетическую проективную группу. Эта задача сводится к интегрированию системы тензорных дифференциальных уравнений с ковариантными производными относительно неизвестного симметричного двухвалентного тензора в пространстве V^4 с произвольной метрикой. Интегрирование системы осуществляется с помощью идей П. А. Широкова [91], развитых впоследствии А. З. Петровым [49] и В. И. Голиковым [22].

Вторая часть (гл. 4–6) посвящена определению максимальной проективной алгебры Ли P_r в каждом из найденных в первой части пространств. Принципиальное решение этой задачи дается в гл. 4, где изучаются характер и строение алгебры Ли P_r в различных классах пространств. Полученные в гл. 3 и 4 результаты позволяют перейти в двух следующих главах к непосредственному решению основной задачи – определению лоренцевых пространств V^4 непостоянной кривизны (полей тяготения), допускающих максимальную негомотетическую проективную алгебру Ли, и самой этой алгебры вместе с ее аффинной, гомотетической и изометрической подалгебрами. Избранный метод позволяет легко выделить пространства, которые могут быть переведены друг в друга с помощью координатного преобразования (см. § 15). Таким образом, все указанные в классификации пространства неизометричны.

За пределами этой книги осталась развитая автором совместно с Н. А.-М. Аминовым проективно-геометрическая теория симметрий дифференциальных уравнений, – относящиеся сюда сведения можно найти в гл. 9 книги [18] и статьях [15], [17].

Проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий уравнений математической физики. Наибольшей группой точечных симметрий уравнений динамики Ньютона является 24-мерная проективная группа, действующая в 4-мерном плоском пространстве-времени [11]. Этот результат, объясняющий особую роль подгрупп проективных групп в математической физике, получен автором в рамках геометрического подхода, основанного на идеях С. Ли и Э. Картана. Методы дифференциальной геометрии, в частности, методы теории пространств проективной связности Картана, позволяют развить систематический подход к определению локальных и нелокальных симметрий для широких классов обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными [14], что существенно расширяет круг возможных приложений результатов, полученных в данной книге.

Автор благодарен редакторам Л. Ш. Гизатуллиной и Н. И. Андроновой, Н. В. Немковой, осуществившей первоначальный компьютерный набор книги, а также М. Н. Сабитовой за помощь в работе над книгой.

Особая благодарность моему учителю профессору Алексею Зиновьевичу Петрову, указавшему мне направление представленных в книге исследований, а также выдающимся профессорам геометрии Казанского университета Александру Петровичу Нордену и Борису Лукичу Лаптеву, которых также отношу к числу моих учителей, я отдаю дань их светлой памяти.

Глава 1.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Проективная структура

1. Псевдоримановы многообразия. Пусть M есть n-мерное дифференцируемое многообразие. *Псевдоримановой метрикой* на M называется дифференцируемое поле g невырожденных симметричных билинейных форм $g(x)$, $x \in M$, на касательных пространствах T_xM многообразия M. Условие невырожденности означает, что для каждой точки $x \in M$ из равенства $g(X,Y) = 0$ для всех векторов $Y \in T_xM$ следует $X = 0$. В локальной карте (x,U) имеем $g|_U = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, где компоненты $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right) = g_{ji}$ *метрического тензора* являются функциями локальных координат $x^1, \ldots, x^n$ и $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Тензор $g(x)$ задает в касательном пространстве T_xM каждой точки $x \in M$ *псевдоевклидову метрику*, т. е. скалярное произведение $(X,Y) \to g(X,Y) \equiv < X,Y > = < Y,X >$, $X,Y \in T_xM$, определяющее длины векторов и углы между ними, а также операции поднятия и опускания индексов. Метрику g записывают в виде квадратичной формы $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, называемой *основной*, или *фундаментальной* (*квадратичной*) *формой* в M. Это обозначение указывает на то, что вдоль дифференцируемой кривой метрика g равна квадрату дифференциала длины дуги ds.

Метрику g называют *римановой*, если каждая форма $g(x)$ является положительно определенной. *Псевдоримановым* (соответственно *римановым*) *многообразием* $M \equiv M^n$, или (M,g), размерности n называется n-мерное дифференцируемое многообразие с псевдоримановой (соответственно римановой) метрикой g. Если формы $g(x)$ имеют одну и ту же сигнатуру $(n-s, s)$ для всех $x \in M$, то говорят, что

$M \equiv M^n_{(s)}$ и $g \equiv g^{(n)}_{(s)}$ имеют *сигнатуру* $\sigma = n - 2s$ (или $(n-s,s)$, s — число отрицательных, а $n-s$ — число положительных членов в форме $g(x)$, приведенной к каноническому виду $ds^2 = e_i dx^{i^2}$, $e_i = \pm 1$).

Если $s = 1$ или $n - s = 1$, то g называется *лоренцевой метрикой*, а M — *лоренцевым многообразием.*

2. Скобка Ли. Для любого векторного поля X на дифференцируемом многообразии M определено линейное отображение $X: f \to Xf$ алгебры $\mathcal{F}_M$ вещественных функций на M в себя по правилу $(Xf)(p) = X_p f$, где $p \in M$, $X_p f$ есть производная функции f вдоль вектора X_p, принадлежащего касательному пространству T_pM к M в точке p. Если $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — компоненты векторного поля X в карте (x,U), то $Xf|_U = \xi^i(\partial f/\partial x^i) \equiv \xi^i \partial_i f$, в частности,

$$Xx^i = \xi^i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Множество $\mathcal{X}_M$ всех дифференцируемых векторных полей на дифференцируемом многообразии M является вещественной алгеброй Ли бесконечной размерности относительно операции коммутирования (*скобки Ли*), определенной равенством $[X,Y]\,f = X(Yf) - Y(Xf)$ для всех функций f на M и $X, Y \in \mathcal{X}_M$. Если $X = \xi^j \partial_j$ и $Y = \eta^j \partial_j$ в карте (x,U), то согласно (1) имеем

$$[X,Y] = (\xi^j \partial_j \eta^i - \eta^j \partial_j \xi^i)\partial_i. \tag{2}$$

В частности, для координатных векторных полей $X_1 = \partial_1, \ldots, X_n = \partial_n$ выполняются равенства

$$[X_i, X_j] = 0 \quad (i,j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

3. Ковариантная производная. Пусть M — дифференцируемое многообразие и $\mathcal{X}_M$ — алгебра Ли дифференцируемых векторных полей на M.

Ковариантной производной на M называется отображение $\nabla : \mathcal{X}_M \times \mathcal{X}_M \to \mathcal{X}_M : (X,Y) \to \nabla(X,Y) \equiv \nabla_X Y$, которое сопоставляет каждой упорядоченной паре (X,Y) дифференцируемых векторных полей на M векторное поле $\nabla_X Y$, обладающее свойствами 1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$, 2) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$, 3) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$, 4) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$, где f — дифференцируемая функция на M и $X, Y, Z \in \mathcal{X}_M$. Ковариантную производную называют также (*линейной*) *связностью*, а $\nabla_X Y$ — ковариантной производной векторного поля Y в направлении X относительно связности ∇. Пусть

$(x^1, \ldots, x^n, U)$ — карта на M и $X_i = \partial_i,\ i = 1, \ldots, n,$ — координатные векторные поля. Функции Γ^i_{jk} на U, определенные формулой

$$\nabla_{X_j} X_k = \Gamma^i_{jk} X_i \quad (i, j, k = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

называются *компонентами* или *коэффициентами связности* ∇ относительно карты (x, U). В новых координатах $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ будем иметь $\nabla_{X_{j'}} X_{k'} = \Gamma^{i'}_{j'k'} X_{i'}$, где $X_{i'} = X_i(\partial x^i/\partial x^{i'})$. Отсюда следует закон преобразования коэффициентов связности при замене координат

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\Gamma^i_{jk}\right),$$

из которого вытекает, что Γ^i_{jk} не является тензором; величины с таким законом преобразования называются *геометрическими объектами* [1].

4. Тензоры кручения и кривизны. Пусть ∇ — линейная связность в M. Определим отображение $T:\ \mathcal{X}_M \times \mathcal{X}_M \to \mathcal{X}_M$ равенством

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{5}$$

и отображение $R: \mathcal{X}_M \times \mathcal{X}_M \times \mathcal{X}_M \to \mathcal{X}_M$ соотношением

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

T есть тензорное поле типа (1,2), называемое *тензором кручения*, а R — тензорное поле типа (1,3), называемое *тензором кривизны* связности ∇.

Компоненты тензоров кручения и кривизны в карте (x, U) определяются разложениями $T(X_j, X_k) = T^i_{jk} X_i,\ \ R(X_k, X_l)X_j = R^i_{jkl} X_i$ и задаются формулами $T^i_{jk} = -T^i_{kj} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$,

$$R^i_{jkl} = -R^i_{jlk} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^h_{jl}\Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk}\Gamma^i_{hl} \tag{6}$$

$(i, j, h, k, l = 1, \ldots, n)$. Если, в частности, $T^i_{jk} = 0$, то $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Наоборот, из последнего условия следует $T^i_{jk} = 0$. Линейная связность

[1] Определение геометрического объекта см. [75], т. I, с. 12, а также [134], с. 67. Для дальнейшего достаточно понимать под геометрическим объектом тензорное поле либо объекты аффинной (т. е. линейной) и проективной связностей Γ^i_{jk} и Π^i_{jk}.

с нулевым тензором кручения называется *симметричной*. Свертывание тензора кривизны дает симметричный *тензор Риччи*

$$R_{jl} = R^i_{jil}. \tag{7}$$

5. Ковариантно постоянное тензорное поле. *Ковариантное дифференцирование* произвольных дифференцируемых тензорных полей на M определяется правилом Лейбница и правилами 1) если B — тензорное поле типа (s, r) (т. е. s раз контравариантное и r раз ковариантное), то его ковариантная производная ∇B есть тензорное поле типа $(s, r+1)$, 2) ∇ — линейное отображение, коммутирующее со свертыванием, и 3) $\nabla f = df$ для любой функции f на M.

Ковариантная производная порядка k определяется по индукции. Компоненты тензора ∇B в локальных координатах (x^i, U) равны

$$(\nabla_{X_k} B)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \equiv \nabla_k B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \equiv B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,k} =$$

$$= \frac{\partial B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^k} + \Gamma^{j_1}_{kh} B^{hj_2\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} + \ldots + \tag{8}$$

$$+\Gamma^{j_s}_{kh} B^{j_1\ldots j_{s-1}h}_{i_1\ldots i_r} - \Gamma^h_{ki_1} B^{j_1\ldots j_s}_{hi_2\ldots i_r} - \ldots - \Gamma^h_{ki_r} B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{r-1}h}.$$

Заметим, что $\nabla_X B|_U = \xi^k \nabla_k B$ для векторного поля X с ограничением $X|_U = \xi^i \partial_i$ на область карты U.

Производной тензорного поля B вдоль кривой $\gamma_t : \ (a, b) \to M$, заданной уравнениями $x^i = x^i(t)$, называется тензорное поле $\dfrac{DB}{\partial t} \equiv \nabla_X B$ с компонентами $B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,h} \dfrac{dx^h}{dt}$, где X — поле касательных векторов $\dot{x}_t = \left(\dfrac{dx^h}{dt}\right)$ к кривой γ_t. Говорят, что тензор B *переносится параллельно вдоль кривой* γ_t, если $\dfrac{DB}{\partial t} = 0$.

Тензорное поле B на M называется *ковариантно постоянным* или *абсолютно параллельным* относительно ∇, если $\nabla B = 0$. В частности, символ Кронекера δ^i_j ковариантно постоянен: $\delta^i_{j,k} = 0$.

6. Тождества Риччи и Бианки. Для любого тензорного поля B на M справедливо *тождество Риччи*

$$(\nabla_{X_l}\nabla_{X_k}-\nabla_{X_k}\nabla_{X_l})B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}=B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,kl}-B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,lk}\equiv 2B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r,[kl]}=$$

$$=\sum_{q=1}^{r}B^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_{q-1}hi_{q+1}\ldots i_r}R^h_{i_qkl}-\sum_{t=1}^{s}B^{j_1\ldots j_{t-1}hj_{t+1}\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}R^{j_t}_{hkl},$$

где квадратные скобки означают альтернирование, а R — тензор кривизны связности ∇, удовлетворяющий, как легко проверить, *тождеству Бианки*

$$R^i_{jkl,m}+R^i_{jlm,k}+R^i_{jmk,l}=0\quad (i,j,k,l,m=1,\ldots,n). \tag{9}$$

7. Индуцированная метрика. Изометрия. Пусть M^n и N^k — дифференцируемые многообразия и φ: $M^n\to N^k$ — дифференцируемое отображение. Для каждой точки $p\in M^n$ отображение φ индуцирует линейное отображение φ_{*p}, или $(d\varphi)_p$, касательного пространства T_pM^n в касательное пространство $T_{\varphi(p)}N^k$ по формуле $(\varphi_{*p}X_p)f\circ\varphi=X_p(f\circ\varphi)$, $X_p\in T_pM^n$, $f\in\mathcal{F}_{N^k}$. Если (x,U) — карта вокруг точки $p\in M^n$ и (y,V) — карта вокруг ее образа $\varphi(p)\in N^k$, то матрицей линейного отображения $\varphi_{*p}:T_pM^n\to T_{\varphi(p)}N^k$ по отношению к координатным базисам $\left.\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\right|_p$ в T_pM^n и $\left.\left(\dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\right|_{\varphi(p)}$ в $T_{\varphi(p)}N^k$ является матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\right)$, $\alpha=1,\ldots,k$, $i=1,\ldots,n$, вычисленная в точке p. Таким образом, для любого векторного поля X на M^n определено векторное поле φ_*X на N^k, обладающее свойством $X(f\circ\varphi)=(\varphi_*X)f\circ\varphi\quad(f\in\mathcal{F}_{N^k})$. Векторные поля X и φ_*X называют *φ-связанными*, а φ_* называется *дифференциалом отображения* φ.

8. Пусть (M^n,g) и (N^k,a) — псевдоримановы многообразия. Дифференцируемое отображение $\varphi:\ M^n\to N^k$ называется *изометрическим*, если оно сохраняет скалярные произведения, т. е. если $<X,Y>_{M^n}=<\varphi_*X,\varphi_*Y>_{N^k}$, или $g(X,Y)=a(\varphi_*X,\varphi_*Y)$, для каждой точки $p\in M^n$ и всех векторов $X,Y\in T_pM^n$. Отсюда следует, что изометрическое отображение φ имеет максимальный ранг, определяемый в каждой точке рангом матрицы Якоби отображения, так что φ

является погружением. Изометрический диффеоморфизм называется *изометрией.* Если $M^n \subset N^k$ и включение $i : M^n \to N^k : p \to p$ является изометрическим вложением, то M^n называется *псевдоримановым подмногообразием* в N^k. Если (N^k, a) — псевдориманово многообразие и $\varphi : M^n \to N^k$ — погружение, то на M^n возникает *индуцированная псевдориманова метрика* $g = \varphi^* a$ с компонентами

$$g_{ij} = (\varphi^* a)_{ij} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, \ldots, n, \ \alpha, \beta = 1, \ldots, k).$$

В силу определения индуцированной метрики отображение

$$\varphi : (M^n, \varphi^* a) \to (N^k, a)$$

изометрично. Наоборот, если отображение $\varphi : (M^n, g) \to (N^k, a)$ изометрично, то $g = \varphi^* a$.

Пусть M^n есть (вложенное) подмногообразие псевдориманова многообразия (N^k, a) и φ — отображение вложения. Индуцированная метрика $g = \varphi^* a$ превращает M^n в псевдориманово подмногообразие в N^k. Если в локальных координатах (x^i) в M^n и (y^α) в N^k вложение φ задается уравнениями $y^\alpha = \varphi^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$, $\operatorname{rang} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right) = n$, $\alpha = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$, то основная форма в M^n определяется равенствами

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} dx^i dx^j = a_{\alpha\beta} dy^\alpha \, dy^\beta \big|_{y = \varphi(x)}.$$

9. Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) — псевдоримановы многообразия. Определим на прямом произведении $M_1 \times M_2$ многообразий M_1 и M_2 псевдориманову метрику $g = g_1 \times g_2$ формулой

$$g(X, Y) = g_1(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y) + g_2(\pi_{2*} X, \pi_{2*} Y) \quad (X, Y \in M_1 \times M_2),$$

где $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ и $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ — естественные проекции. Полученное таким образом псевдориманово многообразие $(M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ называется *прямым произведением* псевдоримановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2).

10. Связность Леви-Чивита. На псевдоримановом многообразии (M, g) существует единственная линейная связность ∇, удовлетворяющая условиям

$$Z < X, Y > = < \nabla_Z X, Y > + < X, \nabla_Z Y >, \tag{10}$$

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y] \tag{11}$$

для всех дифференцируемых векторных полей X, Y, Z на M. Первое условие равносильно требованию ковариантного постоянства или, что то же, абсолютной параллельности метрического тензора: $\nabla g = 0$, а второе условие означает равенство нулю тензора кручения (5).

Связность ∇, определенная условиями (10) и (11), называется *связностью Леви-Чивита* или *римановой связностью*, а определенный ею параллельный перенос — *параллелизмом Леви-Чивита*. Заметим, что из $\delta^i_{j,k} = 0$ и $g_{ij,k} = 0$ следует ковариантное постоянство контравариантного метрического тензора: $g^{ij}{}_{,k} = 0$.

Пусть (x, U) — карта на M и $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, — координатные векторные поля. Из (4), (10) и (11) в силу (3) найдем $(1/2)\big(X_i < X_j, X_k > + X_j < X_i, X_k > - X_k < X_i, X_j >\big) = < \nabla_{X_i} X_j, X_k > = \Gamma^l_{ij} < X_l, X_k >$. Подставив сюда $< X_i, X_k > = g(X_i, X_k) = g_{ik}$, получим

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \tag{12}$$

где

$$\Gamma_{k,ij} = \Gamma^l_{ij} g_{lk}. \tag{13}$$

Умножая обе части равенства (13) на g^{hk} и суммируя по k, будем иметь

$$\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji} = \frac{1}{2} g^{hk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \tag{14}$$

Величины $\Gamma_{k,ij}$ и Γ^h_{ij} называются *символами Кристоффеля* (или *кристоффелями*) соответственно *первого* и *второго рода* метрики g.

Тензор кривизны R^i_{jkl} связности Леви-Чивита называется *тензором римановой кривизны*. Опустив индекс i, получим тензор R_{ijkl} со свойствами $R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klij}$, $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$. Свертывание тензора Риччи R_{jl} с g^{jl} определяет *скалярную кривизну*

$$\mathcal{R} = g^{jl} R_{jl} \tag{15}$$

псевдориманова многообразия M. Если выполняется условие $R_{ij} = (\mathcal{R}/n) g_{ij}$, то M называется *пространством Эйнштейна*.

Свертывая тождество Бианки (9) с g^{jl} и суммируя по $i = k$, получим тождество $2R^l_{m,l} - \mathcal{R}_{,m} = 0$.

11. Пространство постоянной кривизны. Для каждой 2-плоскости $\mathcal{E}$ в касательном пространстве T_pM n-мерного псевдориманова многообразия M *секционная кривизна* $K(p,\mathcal{E})$ в точке $p \in M$ определяется формулой

$$K(p,\mathcal{E}) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - \big(g(X,Y)\big)^2}, \tag{16}$$

где R — тензор кривизны многообразия M, а (X,Y) — базис в $\mathcal{E}$. Если $K(p,\mathcal{E})$ — постоянное число K для всех плоскостей $\mathcal{E}$ в T_pM и всех точек $p \in M$, то M называется *пространством постоянной кривизны* K и обозначается $S^n(K)$ или S^n.

Теорема 1.1. (*Ф. Шур* [136]) *Пусть M — связное псевдориманово многообразие размерности $n \geq 3$, секционная кривизна $K(p,\mathcal{E})$ которого зависит только от точки p. Тогда M — пространство постоянной кривизны.*

Из (16) следует, что (M,g) *имеет постоянную кривизну K, если и только если для всех векторных полей X,Y,Z на M выполнено условие $R(X,Y)Z = K\big(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\big)$, или в локальных координатах*

$$R^i_{jkl} = K(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}) \qquad \left(K = \frac{R}{n(n-1)}\right), \tag{17}$$

где δ^i_j — символ Кронекера. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки $p \in M$ существовали локальные координаты (x^i), в которых метрика g приводится к *римановой форме*

$$ds^2 = \frac{e_1 dx^{1^2} + \ldots + e_n dx^{n^2}}{\sigma^2},$$

где $\sigma = 1 + (K/4)\sum\limits_{i=1}^{n} e_i dx^{i^2}$, $e_i = \pm 1$. Последнее условие равносильно требованию, чтобы каждая точка $p \in M$ имела окрестность, изометричную открытому подмножеству одного из следующих пространств: псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^n_{(s)}$ при $K = 0$, *псевдориманова сферического пространства*

$$S^n_{(s)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}_{(s)} \,\middle|\, b^{n+1}_{(s)}(x,x) \equiv -\sum_{i=1}^{s} x^{i^2} + \sum_{j=s+1}^{n+1} x^{j^2} = r^2 \right\}$$

при $K = \dfrac{1}{r^2} > 0$ и *псевдориманова гиперболического пространства*

$$H^n_{(s)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}_{(s+1)} \,\middle|\, b^{n+1}_{(s+1)}(x,x) = -r^2 \right\}$$

при $K = -\dfrac{1}{r^2} < 0$ с псевдоримановыми метриками, индуцированными на соответствующих квадриках псевдоевклидовыми метриками в $\mathbb{R}^{n+1}_{(\cdot)}$. При $s = 0$ $S^n_{(0)}$ есть обычная сфера, а $H^n_{(0)} \equiv H^n$ — гиперболическое пространство ([148], с. 88).

12. Геодезическая. Пусть M есть n-мерное дифференцируемое многообразие и X — дифференцируемое векторное поле на M. Кривая $\gamma\colon \mathbb{R} \supset (a,b) \to M\colon t \to x(t)$ называется *интегральной кривой* или *траекторией* векторного поля X, если

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \quad (a < t < b). \tag{18}$$

В карте (x, U) на M, для которой $X|_U = \xi^i(x)\partial_i$, условие (18) запишется в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i\left(x^1(t), \ldots, x^n(t)\right) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

Поэтому (18) называется *дифференциальным уравнением на многообразии* M. Векторное поле X называется (*автономной*) *динамической системой* на M, а (19) — ее *локальной записью.* Интегральная кривая $x(t)$ векторного поля X называется *максимальной*, если она не является ограничением интегральной кривой этого поля, определенной на бо́льшем интервале $I \supset (a,b)$. Для любого векторного поля X на M и точки $p \in M$ существует единственная максимальная интегральная кривая, проходящая через точку p.

Гладкая кривая γ на многообразии с линейной связностью ∇ называется *геодезической*, если касательный вектор кривой переносится вдоль нее параллельно (п. 5). Если $x^i = x^i(\tau)$ — уравнение кривой γ, а $\eta^i\partial_i$ — касательный вектор, переносящийся параллельно, то $\dfrac{dx^i}{d\tau} = \mu\eta^i$. Дифференцируя, найдем $\dfrac{D}{d\tau}\left(\dfrac{dx^i}{d\tau}\right) = \dfrac{d\mu}{d\tau}\eta^i$, или

$$\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)_{,k} \frac{dx^k}{d\tau} = \lambda \frac{dx^i}{d\tau}. \tag{20}$$

Введя новый параметр $t = t(\tau)$, будем иметь

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{,k}\frac{dx^k}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \left(\lambda - \frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{dx^i}{dt}.$$

Параметр t, определенный условием $\dfrac{d^2t}{d\tau^2} - \lambda\dfrac{dt}{d\tau} = 0$ (с точностью до подстановки $t \to \alpha t + \beta$, где α, β — постоянные), называется *каноническим* или *аффинным параметром.* Уравнение геодезической $\gamma = x_t$, отнесенной к аффинному параметру t, имеет вид

$$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{,k}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{21}$$

значит, *поле X векторов $\dot{x}_t$, касательных к геодезической x_t с аффинным параметром t, параллельно вдоль нее*:

$$\frac{DX}{dt} = 0, \quad \textit{или} \quad \nabla_X X = 0.$$

Отсюда легко вывести, что канонический параметр неизотропной геодезической (т. е. геодезической с неизотропными касательными векторами) в пседоримановом пространстве с основной формой ds^2 с точностью до линейной подстановки совпадает с натуральным параметром — длиной дуги s.

Геодезическая максимальна, если она не является частью бо́льшей геодезической. Если область задания геодезической есть $-\infty < t < \infty$, то она называется *полной.* Пусть $x^i = x^i(t)$, $a < t < b$, где $-\infty \le a < b \le \infty$, — уравнение кривой $\gamma = x_t$ класса C^2 в M и Γ^i_{jk} — компоненты связности ∇ в локальных координатах (x^i). Тогда в силу (21) и (8) γ есть геодезическая, если и только если

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

при условии, что t — аффинный параметр.

13. Геодезическое отображение. Уравнение Вейля. Два n-мерных многообразия M и M' с линейными связностями ∇ и ∇' называются *многообразиями с соответствующими* или *общими геодезическими,* если существует диффеоморфизм f из M в M', называемый *геодезическим* или *проективным отображением*, такой, что f отображает каждую геодезическую γ в M в геодезическую $f(\gamma)$ в M', и прообраз $f^{-1}(\gamma')$ каждой геодезической γ' в M' есть геодезическая в M.

Для того чтобы f было проективным отображением, необходимо и достаточно, чтобы в соответственных локальных координатах $x^i\big|_{p\in M} = x^i\big|_{f(p)\in M'}$ выполнялось *уравнение Вейля*

$$\Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j, \tag{22}$$

где Γ^i_{jk} (соответственно Γ'^i_{jk}) — компоненты связности ∇ (соответственно ∇') в локальных координатах x^i, $p = p_i dx^i$ — дифференциальная 1-форма[2].

Достаточность условия (22) легко проверяется. Для доказательства его необходимости запишем уравнения геодезических (20) в M и M':

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \lambda(\tau)\dot{x}^i, \quad \ddot{x}^i + \Gamma'^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \lambda'(\tau)\dot{x}^i \quad \left(\dot{x}^i \equiv dx^i/d\tau\right).$$

Обозначив $\Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = p^i_{jk} \equiv p^i_{kj}$, $\lambda'(\tau) - \lambda(\tau) = \varphi(\tau)$, найдем

$$p^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \varphi(\tau)\dot{x}^i, \quad p^l_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \varphi(\tau)\dot{x}^l.$$

Отсюда, исключив $\varphi(\tau)$, получим $(p^i_{jk}\delta^l_m - p^l_{jk}\delta^i_m)\dot{x}^j\dot{x}^k\dot{x}^m = 0$. Учитывая, что полученные равенства должны выполняться тождественно и через каждую точку координатной окрестности во всех направлениях проходят геодезические, придем к соотношению $p^i_{jk} = \Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j$, т. е. к уравнению Вейля (22).

В случае $(M, \nabla) = (M', \nabla')$ геодезическое отображение называется *геодезическим* или *проективным преобразованием* [110].

14. Тензор проективной кривизны. Если ввести в M и M' *проективные параметры Томаса* [144]

$$\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{n+1}\left(\delta^i_j\Gamma^l_{kl} + \delta^i_k\Gamma^l_{jl}\right), \tag{23}$$

то уравнение Вейля (22) примет вид

$$\Pi'^i_{jk} = \Pi^i_{jk}. \tag{24}$$

[2]Разность $\Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$ называют *тензором аффинной деформации* [48].

Из (24) следует равенство $W'^i_{jkl} = W^i_{jkl}$, где W^i_{jkl} — *тензор Вейля проективной кривизны*,

$$W^i_{jkl} = \Pi^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_k \Pi_{jl} - \delta^i_l \Pi_{jk}),$$
$$\Pi^i_{jkl} = \partial_k \Pi^i_{jl} - \partial_l \Pi^i_{jk} + \Pi^h_{jl}\Pi^i_{hk} - \Pi^h_{jk}\Pi^i_{hl}, \quad \Pi_{jk} = \Pi^h_{jhk}. \tag{25}$$

Таким образом, *проективное отображение сохраняет проективные параметры Томаса и тензор Вейля проективной кривизны.*

При преобразовании координат проективные параметры Томаса преобразуются по закону

$$\Pi^{i'}_{j'k'} = \Pi^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} -$$
$$-\frac{1}{n+1}\left(\delta^{i'}_{j'}\frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial x^{k'}} + \delta^{i'}_{k'}\frac{\partial \ln|\Delta|}{\partial x^{j'}}\right), \quad \Delta = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right),$$

и определяют геометрический объект, называемый *объектом проективной связности.*

Пусть M и M' — псевдоримановы многообразия с метриками g и g'. Свертывая уравнение Вейля по индексам i, k и используя *формулу Фосса—Вейля*

$$\Gamma^i_{il} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^l}\ln|\det(g_{ij})|, \tag{26}$$

получим

$$p = d\psi \equiv \frac{1}{2(n+1)} d\ln\frac{\left|\det(g'_{ij})\right|}{|\det(g_{ij})|}.$$

Тогда уравнение (22) примет вид

$$\Gamma'^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \psi_{,k} + \delta^i_k \psi_{,j} \tag{27}$$

(здесь и далее запятая означает ковариантное дифференцирование относительно связности Леви-Чивита метрики g).

Записав условие ковариантного постоянства метрики g' относительно ее связности Леви-Чивита, задаваемой символами Γ'^i_{jk}, легко доказать, что (27) равносильно уравнению

$$g'_{ij,k} = 2g'_{ij}\psi_{,k} + g'_{ik}\psi_{,j} + g'_{jk}\psi_{,i}. \tag{28}$$

Так же, как уравнение Вейля, *равенство* (28) *необходимо и достаточно для того, чтобы метрики g и g' имели общие геодезические.*

.

15. Проективно-плоское пространство. Пространство A^n аффинной связности n измерений называется *проективно-плоским* или *проективно-евклидовым пространством*, если его геодезические линии могут быть отображены в прямые линии плоского пространства $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, в подходящих координатах выражаются $n-1$ линейными уравнениями с постоянными коэффициентами или n линейными параметрическими уравнениями. В этих координатах, называемых *проективными координатами*, коэффициенты связности Γ^i_{jk} плоского пространства обращаются в нуль и из (22)—(24) следуют равенства

$$\begin{gathered} \Gamma'^i_{jk} = \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j, \\ \Pi'^i_{jk} = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

для коэффициентов Γ'^i_{jk} и Π'^i_{jk} соответственно аффинной и проективной связностей в проективно-плоском пространстве A^n. Такие связности называются *проективно-плоскими.*

Отсюда нетрудно вывести, что *при $n > 2$ пространство A^n является проективно-плоским тогда и только тогда, когда его тензор Вейля проективной кривизны обращается в нуль.*

В силу формул (6), (7), (23) и (25) тензор Вейля проективной кривизны псевдориманова многообразия (M^n, g) имеет вид

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_k R_{jl} - \delta^i_l R_{jk}). \tag{30}$$

Из равенства $W_{ijkl} = 0$ получим

$$R_{ijkl} = \frac{1}{n-1}(g_{ik} R_{jl} - g_{il} R_{jk}).$$

Поскольку $R_{iikl} = 0$, найдем $R_{ij} = \rho g_{ij}$ при $n > 2$, где $\rho = \mathrm{const}$ согласно теореме 1.1 ([94], с. 106), при этом выполняется (17) с $K = \rho/(n-1)$.

По терминологии Шура двумерное проективно-плоское (псевдо)риманово пространство называется *проективной поверхностью.* Используя (29), легко доказать, что *всякая проективная поверхность имеет постоянную кривизну* (см. [37], ч. II, с. 73).

Таким образом, *проективно-плоское псевдориманово пространство (M^n, g) есть пространство постоянной кривизны* ([94], с. 166).

16. Проективная связность. Проективные параметры Томаса (23) задают проективную связность локально. Для того чтобы задать проективную связность глобально, необходимо рассмотреть множество 2-струй и ввести понятие о проективной структуре как главном подрасслоении Π расслоения $P^2(M)$ реперов второго порядка со структурной группой L_0 — факторизованной по центру группой матриц из $SL(n+1,\mathbb{R})$ вида $\{(A,0),(\xi,a)\}$, где $A \in GL(n,\mathbb{R})$, а ξ есть n-мерный вектор-строка ([121]; [18], § 8).

Каждая аффинная связность без кручения задает проективную структуру. Две связности ∇ и ∇' в M, индуцирующие одну и ту же проективную структуру Π, называются *проективно эквивалентными связностями.* Если псевдоримановы метрики g и g' имеют проективно эквивалентные связности Леви-Чивита, то они называются *проективно эквивалентными метриками.*

Аффинные связности ∇ и ∇' на M проективно эквивалентны, т. е. принадлежат одной и той же проективной структуре, тогда и только тогда, когда их проективные параметры совпадают. В силу этого объект проективной связности, определенный на M проективными параметрами Томаса, задает проективную структуру на M.

Из результатов этого параграфа и п. 13 следует также, что *две псевдоримановы метрики на многообразии M проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют общие геодезические.*

§ 2. Инфинитезимальные преобразования

17. 1-параметрическая группа преобразований. Пусть M — дифференцируемое многообразие, X — векторное поле на M, (x,U) — карта на M и $X|_U = \xi^i(x)\partial_i$. Рассмотрим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \xi^i(x^{k'}) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{31}$$

с независимым переменным t и неизвестными функциями $x^{i'}(t)$, удовлетворяющими начальным условиям $x^{i'}(0) = x^i$. Запишем решение системы (ограничение на U интегральной кривой векторного поля X) в виде ряда Тейлора $x^{i'}(t) = x^i + \left.\frac{dx^{i'}}{dt}\right|_{t=0} t + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2x^{i'}}{dt^2}\right|_{t=0} t^2 + \ldots$. Дифференцируя (31) по t, найдем $\left.\dfrac{d^2x^{i'}}{dt^2}\right|_{t=0}=\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x^{j'}}\left.\dfrac{dx^{j'}}{dt}\right|_{t=0}=\xi^j\partial_j\xi^i(x)$. Так же вычисляются остальные производные. В итоге получим

$$\begin{aligned}x^{i'}(t)&=x^i+t\xi^i(x)+\frac{t^2}{2!}\xi^j\partial_j\xi^i(x)+\ldots=\\&=\left(1+t\xi^j\partial_j+\frac{t^2}{2!}(\xi^j\partial_j)^2+\ldots\right)x^i,\end{aligned}\tag{32}$$

или, символически, $x^{i'}=e^{tX}x^i$. Это решение определяет преобразование $\varphi_t:\ (x^i)\to(x^{i'}(t))$. Так как, очевидно, $\varphi_{t_1}\varphi_{t_2}=\varphi_{t_1+t_2}$ и $\varphi_t{}^{-1}=\varphi_{-t}$, то преобразования φ_t образуют (локальную) 1-параметрическую группу, или *(локальный) поток $F_X(t)$ векторного поля X*. Будем говорить, что X (или $\xi^i(x)$) *порождает (локальную) 1-параметрическую группу $F_X(t)$ (локальных) преобразований* в окрестности точки (x^i).

Если существует (глобальная) 1-параметрическая группа преобразований φ_t такая, что для всех $x\in M$ *орбита* $x_t=\varphi_t(x)$ точки x есть интегральная кривая векторного поля X, то X называется *полным векторным полем.*

Пренебрегая в (32) степенями t выше первой и записывая δt вместо t, получим *бесконечно малое преобразование* $x^i\to x^{i'}=x^i+\xi^i\delta t$, о котором говорят, что оно *порождает группу* $F_X(t)$, а символ $X=\xi^i\partial_i$ называют *генератором* или *оператором* этой группы, или *инфинитезимальным преобразованием* в M.

Наоборот, если задана однопараметрическая группа G_1 преобразований $\varphi_t:\ (x^i)\to(x^{i'}(t)=f^i(x^1,\ldots,x^n,t))$, где t есть канонический параметр, т. е. $\varphi_{t_1}\varphi_{t_2}=\varphi_{t_1+t_2}$ (такой параметр всегда существует, см. [78], с. 82), то векторное поле $\xi^i(x)$ определяется дифференцированием:

$$\xi^i(x)=\left.\frac{\partial f^i(x^1,\ldots,x^n,t)}{\partial t}\right|_{t=0}\quad(i=1,\ldots,n).\tag{33}$$

Таким образом, задание однопараметрической группы G_1 преобразований φ_t эквивалентно заданию векторного поля $\xi^i(x)$.

18. Производная Ли. Пусть M — дифференцируемое многообразие, $\mathcal{T}_M$ — алгебра тензорных полей на M, $\Omega\in\mathcal{T}_M$ и $F_X(t)$ — поток векторного поля X в окрестности точки x. Дифференциал φ_{t^*} преобразования $\varphi_t\in F_X(t)$ переводит каждый касательный вектор $Y\in T_{\varphi_t^{-1}(x)}M$ в касательный вектор $\varphi_{t^*}Y\in T_xM$, определяемый следующим образом. Если Y касается некоторой кривой γ в точке $\varphi_t^{-1}(x)$, то $\varphi_{t^*}Y$ касается кривой $\varphi_t(\gamma)$ в точке $\varphi_t(\varphi_t^{-1}(x)) = x$. Пусть x^i — координаты точки x и y^i — координаты точки $\varphi_t^{-1}(x)$. Если $Y = \eta^i \dfrac{\partial}{\partial y^i}$, $\varphi_{t^*}Y = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, то $\xi^i = \eta^l \dfrac{\partial x^i}{\partial y^l}\Big|_{\varphi_t^{-1}(x)}$. Отображение φ_{t^*} задает линейный изоморфизм касательных пространств $T_{\varphi_t^{-1}(x)}M$ и T_xM. Этот изоморфизм может быть продолжен до изоморфизма $\tilde{\varphi}_t$ тензорной алгебры $\mathcal{T}(\varphi_t^{-1}(x))$ в точке $\varphi_t^{-1}(x)$ на тензорную алгебру $\mathcal{T}(x)$ в точке x, который сохраняет тип тензора и перестановочен со свертываниями.

Тензорное поле $\tilde{\Omega}(t) \equiv \tilde{\varphi}_t\Omega$, определенное равенством

$$(\tilde{\varphi}_t\Omega)_x = \tilde{\varphi}_t\left(\Omega_{\varphi_t^{-1}(x)}\right),$$

называется *увлеченным тензорным полем* [3], а отображение $L_X : \Omega \to L_X\Omega$ алгебры тензоров $\mathcal{T}_M$ в себя, определенное формулой

$$(L_X\Omega)_x = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Omega_x - \tilde{\Omega}_x(t)\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\Omega_x - (\tilde{\varphi}_t\Omega)_x\big), \qquad (34)$$

— *дифференцированием Ли* вдоль X. $L_X\Omega$ называют *производной Ли* тензорного поля Ω вдоль X, а $L_X\Omega\,\delta t$ — *дифференциалом Ли* поля Ω по отношению к бесконечно малому преобразованию $x^{i'} = x^i + \xi^i\delta t$, где ξ^i — компоненты векторного поля X.[4]

Если поле Ω увлекается на $\xi^i\delta t$, то взятый с обратным знаком дифференциал Ли этого поля в точке x равен, с точностью до членов

---

[3] Пусть точки области $U \subseteq M^n$ подвергаются преобразованию φ: $\bar{p}(\bar{x}^i) \to p(x^i)$, где x^i и $\bar{x}^i$ — координаты точек p и $\bar{p}$ в исходной системе координат $x^1, \dots, x^n$. Введем новую координатную систему $(\tilde{x})$ таким образом, чтобы точка p имела по отношению к $(\tilde{x})$ те же координаты, что и её прообраз, точка $\bar{p}$, по отношению к исходной системе координат (x). Этот процесс называется увлечением координатой системы преобразованием φ, а $(\tilde{x})$ называется увлеченной системой координат. Пусть в M^n задан геометрический объект Ω класса C^r. Значения составляющих объекта Ω в точках M^n назовем естественными. Образуем теперь поле $\tilde{\Omega}$, компоненты которого в увлеченной системе координат $(\tilde{x})$ в каждой точке p равняются компонентам объекта Ω в точке $\bar{p}$ в старой системе координат (x). Переходя в точке p к исходной системе координат, получим поле $\tilde{\Omega}(x^i)$; компоненты увлеченного поля по отношению к исходной системе координат определяются формулами преобразования координат, составляющими увлеченного поля в увлеченной системе координат и законом преобразования составляющих объекта. Этот процесс называется увлечением поля преобразованием φ, а поле $\tilde{\Omega}$ называется увлеченным полем. ([134], с. 62—66).

[4] Определение производной Ли для более общих геометрических объектов, являющихся функциями точки и направления, было дано Б. Л. Лаптевым [46].

второго и более высокого порядков малости по δt, изменению поля Ω в этой точке, т. е. *вариации формы* поля Ω в точке x. Следовательно,

$$L_X(\partial_i\Omega) = \partial_i L_X \Omega. \tag{35}$$

Подчеркнем, что $L_X(\partial_i\Omega)$ нельзя рассматривать как производную Ли от $\partial_i\Omega$, ибо в общем случае $\partial_i\Omega$ не является тензорным полем. Так как, очевидно, $\widetilde{\overbrace{\Phi\otimes\Omega}} = \tilde\Phi\otimes\tilde\Omega$, то справедливо правило Лейбница $L_X(\Phi\otimes\Omega) = (L_X\Phi)\otimes\Omega + \Phi\otimes L_X\Omega$.

Дифференцирование Ли сохраняет тип тензорного поля и коммутирует со свертываниями, поскольку изоморфизм $\tilde\varphi_t$ сохраняет тип тензорного поля и перестановочен со свертываниями. Если f — функция на M, то ввиду того, что $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$, имеем

$$(L_X f)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x) - f(\varphi_t^{-1}(x)\big) = (Xf)(x) = (\xi^l\partial_l f)(x). \tag{36}$$

Если η_i — координаты ковектора, то, применяя формулу Тейлора и учитывая только члены первого порядка малости по t, найдем

$$(L_X\eta_i)(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\eta_i(x) - \eta_k\big(x'(-t)\big)\partial_i x^{k'}(-t)\right) = \left(\xi^l\partial_l\eta_i + \eta_l\partial_i\xi^l\right)(x). \tag{37}$$

Так же получим

$$L_X\eta^i = \xi^l\partial_l\eta^i - \eta^l\partial_l\xi^i, \tag{38}$$

что с учетом (2) дает $L_X Y = [X,Y]$, где $Y = \eta^i\partial_i$, т. е. $L_X Y$ *равняется скобке Ли векторных полей* X, Y.

Производная Ли для тензоров более высокой валентности вычисляется для каждого индекса в отдельности по правилам (37) или (38) в зависимости от характера индекса. В частности, для тензора кривизны R^i_{jkl} имеем

$$\begin{gathered} L_X R^i_{jkl} = \xi^h\partial_h R^i_{jkl} - R^h_{jkl}\partial_h\xi^i + R^i_{hkl}\partial_j\xi^h + R^i_{jhl}\partial_k\xi^h + \\ + R^i_{jkh}\partial_l\xi^h \equiv \xi^h R^i_{jkl,h} - R^h_{jkl}\xi^i_{,h} + R^i_{hkl}\xi^h_{,j} + R^i_{jhl}\xi^h_{,k} + R^i_{jkh}\xi^h_{,l} \end{gathered} \tag{39}$$

(запятая означает ковариантную производную), а производная Ли символа Кронекера δ^i_j равна нулю: $L_X\delta^i_j = \xi^l\partial_l\delta^i_j - \delta^h_j\partial_h\xi^i + \delta^i_h\partial_j\xi^h = 0$.

Понятия увлеченного поля и производной Ли для геометрического объекта определяются аналогично.

19. Пусть (M,g) — псевдориманово многообразие, $X = \xi^i\partial_i$ — векторное поле на M. Обозначим через δt постоянную бесконечно малую величину и рассмотрим бесконечно малое преобразование

$$g_{ij}dx^idx^j + \delta t X(g_{ij}dx^idx^j) \equiv g_{ij}dx^idx^j + \delta t(L_X g_{ij})dx^idx^j.$$

Вычислив

$$X(g_{ij}dx^idx^j) = (Xg_{ij})dx^idx^j + g_{ij}d(Xx^i)dx^j + g_{ij}dx^id(Xx^j),$$

найдем

$$L_X g_{ij} = \xi^l\partial_l g_{ij} + g_{il}\partial_j\xi^l + g_{lj}\partial_i\xi^l \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i}, \tag{40}$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование относительно g (т. е. относительно связности Леви-Чивита метрики g). Это — самый короткий вывод формулы для производной Ли метрического тензора, которую можно получить также с помощью правил (37), (38) или непосредственно из определения (34).

Найдем производную Ли символов Кристоффеля. Дифференцируя равенство $g_{lk}g^{li} = \delta^i_k$ и учитывая, что ковариантная производная и производная Ли символа Кронекера δ^i_k равны нулю, получим

$$(\partial_h g_{lk})g^{li} + g_{lk}\partial_h g^{li} = 0, \quad (L_X g_{lk})g^{li} + g_{lk}L_X g^{li} = 0.$$

Свертывая с g^{kj} и используя (40), найдем

$$L_X g^{ij} = \xi^l\partial_l g^{ij} - g^{lj}\partial_l\xi^i - g^{il}\partial_l\xi^j. \tag{41}$$

Из (12), (14) и (35) имеем

$$2L_X\Gamma_{l,jk} = \partial_k L_X g_{jl} + \partial_j L_X g_{kl} - \partial_l L_X g_{jk},$$

$L_X\Gamma^i_{jk} = (L_X g^{il})\Gamma_{l,jk} + g^{il}L_X\Gamma_{l,jk}$. Отсюда с помощью (40) и (41) находим

$$L_X\Gamma^i_{jk} = \xi^l\partial_l\Gamma^i_{jk} - \Gamma^l_{jk}\partial_l\xi^i + \Gamma^i_{lk}\partial_j\xi^l + \Gamma^i_{jl}\partial_k\xi^l + \partial_{jk}\xi^i = \xi^i_{,jk} + \xi^l R^i_{jlk}, \tag{42}$$

где R — тензор кривизны связности $\nabla(\Gamma^i_{jk})$. Заметим, что производная Ли $L_X\Gamma^i_{jk}$ является тензором в отличие от символов Γ^i_{jk}. Дифференцируя (6) и учитывая (35), имеем

$$L_X R^i_{jkl} = (L_X\Gamma^i_{jl})_{,k} - (L_X\Gamma^i_{jk})_{,l}. \tag{43}$$

Если M — многообразие с линейной связностью ∇, то равенства (37) и (38) можно переписать в ковариантных производных:

$$L_X\eta_i = \xi^l\partial_l\eta_i + \eta_l\partial_i\xi^l = \xi^l\eta_{i,l} + \eta_l\xi^l_{,i},$$

$$L_X\eta^i = \xi^l\partial_l\eta^i - \eta^l\partial_l\xi^i = \xi^l\eta^i_{,l} - \eta^l\xi^i_{,l},$$

отсюда видно, что дифференцирование Ли сохраняет тип тензорного поля.

Запишем ковариантную производную $u_{i,j} = \partial_j u_i - \Gamma^l_{ij}u_l$ и найдем ее производную Ли

$$L_X u_{i,j} = \partial_j(L_X u_i) - \Gamma^l_{ij}L_X u_l - (L_X\Gamma^l_{ij})u_l = (L_X u_i)_{,j} - (L_X\Gamma^l_{ij})u_l.$$

Так же получим $L_X u^i_{,j} - (L_X u^i)_{,j} = (L_X\Gamma^i_{jl})u^l$. Аналогично выводится правило коммутации лиевой и ковариантной производных для произвольного тензорного поля B

$$L_X B^{j\dots}_{l\dots,i} - (L_X B^{j\dots}_{l\dots})_{,i} = (L_X\Gamma^j_{ih})B^{h\dots}_{l\dots} + \dots - (L_X\Gamma^h_{il})B^{j\dots}_{h\dots} - \dots \quad (44)$$

Применив его к метрическому тензору, найдем

$$L_X g_{jk,i} - (L_X g_{jk})_{,i} \equiv -(L_X g_{jk})_{,i} = -(L_X\Gamma^h_{ij})g_{hk} - (L_X\Gamma^h_{ik})g_{jh},$$

отсюда

$$L_X\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ih}\big((L_X g_{kh})_{,j} + (L_X g_{jh})_{,k} - (L_X g_{jk})_{,h}\big). \quad (45)$$

Для любых векторных полей X и Y на M справедливо равенство

$$L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] \equiv L_X L_Y - L_Y L_X. \quad (46)$$

Таким образом, *производная Ли вдоль коммутатора* $[X,Y]$ *векторных полей* X, Y *равна коммутатору* $[L_X, L_Y]$ *производных Ли вдоль этих полей.*

Из (23) и (42) следует формула

$$L_X\Pi^i_{jk} = \xi^h\partial_h\Pi^i_{jk} - \Pi^h_{jk}\partial_h\xi^i + \Pi^i_{hk}\partial_j\xi^h + \Pi^i_{jh}\partial_k\xi^h + \partial_{jk}\xi^i -$$

$$-\frac{1}{n+1}\left(\delta^i_j\partial_{kh}\xi^h + \delta^i_k\partial_{jh}\xi^h\right).$$

Выражения для производных Ли тензорного поля и символов Кристоффеля были получены в работе Г. Фубини [110]. Термин "дифференциал Ли" предложил Д. Ван Данциг.

Рассмотрим линейный геометрический объект [5] Ω на $V \subseteq M$. Пусть X — инфинитезимальное преобразование, для которого производная Ли поля Ω обращается в нуль: $L_X\Omega = 0$. Вследствие линейности объекта Ω его производная Ли преобразуется линейно и однородно. Поэтому написанное равенство справедливо в любой системе координат.

Выберем локальную систему координат (x, U) в окрестности произвольной точки $p \in V$ так, чтобы выполнялось равенство $X|_U = \xi^i\partial_i = \partial_1$. В этой карте конечные преобразования φ_t, порожденные векторным полем X, имеют вид $x^{i'}(t) = x^i + t\delta_1^i$ и $L_X\Omega = \partial_1\Omega$ ([134], с. 108), поэтому увлеченное поле можно представить рядом

$$\tilde{\Omega}(t) = e^{tL_X}\Omega = \Omega + tL_X\Omega + \frac{t^2}{2!}L_X^2\Omega + \ldots \tag{47}$$

при условии, что компоненты объекта Ω — аналитические функции. Так как $L_X\Omega = 0$, то $\tilde{\Omega}(t) = \Omega$. Справедлива

Т е о р е м а 2.1. *Поле линейного геометрического объекта Ω инвариантно при действии (локальной) 1-параметрической группы (локальных) преобразований, порожденной векторным полем X, т. е. $\tilde{\Omega} = \Omega$, тогда и только тогда, когда производная Ли этого объекта обращается в нуль: $L_X\Omega = 0$* [6].

Из (47) следует формула

$$L_X\Omega = \frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

§ 3. Проективные, аффинные и конформные движения в V^n. Определения и свойства

20. Инфинитезимальные изометрии. Пусть M^n есть n-мерное псевдориманово многообразие с метрикой g и связностью Леви-Чивита ∇. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется

---

[5] Геометрический объект с линейным (не обязательно однородным) законом преобразования. Этим свойством обладают, в частности, тензорные поля и объекты аффинной и проективной связностей.

[6] См. [153], с. 34. Доказательство этой теоремы для тензорных полей см. [123], т. 1, с. 40.

изометрией, если он сохраняет метрический тензор, т. е. если $f^*g = g$ (см. пп. 7, 8). Группа $\widehat{I}(M^n)$ изометрий связного псевдориманова многообразия M^n есть группа Ли размерности самое большее $n(n+1)/2$. Если $\dim \widehat{I}(M^n) = n(n+1)/2$, то M^n есть пространство постоянной кривизны ([121], гл. 2, § 3).

Векторное поле X на M^n называется *инфинитезимальным изометрическим преобразованием*, или *инфинитезимальной изометрией*, а также *киллинговым векторным полем*, или (*изометрическим*) *движением* (*и.д.*), если локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований, порожденная полем X в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных изометрий, при этом увлеченный метрический тензор $\tilde{g}_{ij} = g_{ij}$, и расстояние между смещенными точками всегда равняется расстоянию между исходными точками. В силу теоремы 2.1 X есть инфинитезимальная изометрия, если и только если выполняется *уравнение Киллинга* $L_X g = 0$, или в локальной карте (x, U)

$$L_X g_{ij} \equiv \xi^l \partial_l g_{ij} + g_{il}\partial_j \xi^l + g_{jl}\partial_i \xi^l \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0,$$

где L_X есть производная Ли вдоль X и $\xi^i \partial_i = X|_U$.

Множество $I(M^n)$ *всех инфинитезимальных изометрий в* M^n *образует алгебру Ли, размерность которой для связного псевдориманова многообразия* M^n *не превосходит* $n(n+1)/2$. *Если* $\dim I(M^n) = n(n+1)/2$, *то* M^n *есть пространство постоянной кривизны* [94].

Если векторное поле X порождает глобальную 1-параметрическую группу изометрий, то оно является полным. Множество всех полных киллинговых векторных полей образует алгебру Ли группы $\widehat{I}(M^n)$ изометрий в M^n.

В полном римановом многообразии M^n (т. е. в римановом многообразии с полной римановой связностью, для которой каждая максимальная геодезическая в M^n является полной) каждое киллингово векторное поле полно. Поэтому если M^n полно, то алгебра Ли $I(M^n)$ всех изометрических движений в M^n изоморфна алгебре Ли группы $\widehat{I}(M^n)$ изометрий в M^n.

21. Инфинитезимальные аффинные преобразования. Пусть M и M' — многообразия с линейными (в частности, римановыми) связностями ∇ и ∇' соответственно. Дифференцируемое отображение $f : M \to M'$ называется *аффинным отображением*, если оно отображает каждое параллельное векторное поле вдоль любой кривой τ из M в параллельное векторное поле вдоль кривой $f(\tau)$, т. е. если индуцированное отображение касательного расслоения TM в TM' преобразует каждую горизонтальную кривую в горизонтальную кривую. Очевидно, что f отображает каждую геодезическую из M в геодезическую из M'.

Аффинное отображение f многообразия M на себя называется *аффинным преобразованием* в M. Множество аффинных преобразований в M образует группу, обозначаемую $\widehat{A}(M)$ или $\widehat{A}(\nabla)$. Группа $\widehat{A}(M)$ аффинных преобразований многообразия M с конечным числом связных компонент есть группа Ли ([123], т. 1, с. 215). Так как каждая изометрия в псевдоримановом многообразии M есть аффинное преобразование, то группа изометрий $\widehat{I}(M) \subset \widehat{A}(M)$.

Векторное поле X на M называется *инфинитезимальным аффинным преобразованием* или *аффинным* (*киллинговым*) *векторным полем*, или также *аффинным движением* (*а.д.*), если порождаемая этим полем в окрестности U каждой точки $p \in M$ локальная 1-параметрическая группа локальных преобразований φ_t сохраняет связность ∇, т. е. если $\varphi_t : U \to M$ есть аффинное преобразование относительно сужения $\nabla|_U$ связности ∇ на U: $\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$. Ввиду теоремы 2.1 X есть аффинное движение в M, если и только если $\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X,Y)$ для всех векторных полей Y на M, или

$$L_X\Gamma^i_{jk} \equiv \partial_{jk}\xi^i + \xi^l\partial_l\Gamma^i_{jk} - \Gamma^l_{jk}\partial_l\xi^i + \Gamma^i_{lk}\partial_j\xi^l + \Gamma^i_{jl}\partial_k\xi^l \equiv$$

$$\equiv \xi^i{}_{,jl} + \xi^k R^i_{jkl} = 0,$$

что для псевдориманова многообразия (M,g) равносильно условию $\nabla(L_Xg) = 0$, или $L_Xg_{ij} = h_{ij}$, $h_{ij,k} = 0$, где ξ^i, Γ^i_{jk} и R^i_{jkl} — компоненты соответственно векторного поля X, связности ∇ и тензорного поля кривизны в координатном репере (∂_i).

Если M — связное многообразие с линейной связностью ∇, то *алгебра Ли $A(M)$ инфинитезимальных аффинных преобразований в M имеет размерность самое большее $n^2 + n$, где $n = \dim M$*. Если $\dim A(M) = n^2 + n$, то M плоское, т. е. кривизна многообразия M тождественно равна нулю ([123], т. 1, с. 219).

Множество всех полных аффинных векторных полей в M образует алгебру Ли группы $\widehat{A}(M)$ аффинных преобразований в M.

22. Инфинитезимальные проективные преобразования. Проективное преобразование многообразия M с аффинной связностью переводит геодезические снова в геодезические и сохраняет проективную связность, подобно тому, как аффинное преобразование сохраняет аффинную связность.

Пусть Π и Π' — проективные структуры (п. 16) на многообразиях M и M' соответственно. Диффеоморфизм f из M в M' индуцирует изоморфизм $f_* : P^2(M) \to P^2(M')$. Если f_* переводит Π в Π', то f называется проективным изоморфизмом из M в M'. Если $M = M'$ и $\Pi = \Pi'$, то изоморфизм f называется *проективным преобразованием* в M или *автоморфизмом проективной структуры* Π.

Векторное поле X на многообразии M с проективной структурой Π называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением* (*п.д.*), если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $x \in M$ локальная 1-параметрическая группа преобразований состоит из (локальных) проективных преобразований, т. е. автоморфизмов проективной структуры Π.

Инфинитезимальное проективное преобразование называется также *проективным* (*киллинговым*) *векторным полем.*

Связности ∇ и ∇' на M принадлежат одной и той же проективной структуре тогда и только тогда, когда их проективные параметры Томаса совпадают (п. 16). Таким образом, диффеоморфизм f многообразия M на себя является проективным преобразованием относительно проективной структуры, индуцированной на M связностью ∇, тогда и только тогда, когда он сохраняет объект проективной связности, определенный на M проективными параметрами Томаса.

Отсюда вытекает, что векторное поле X на M является инфинитезимальным проективным преобразованием тогда и только тогда, когда все преобразования φ_t из потока $F_X(t)$ векторного поля X сохраняют проективную связность, т. е. когда поле объекта проективной связности инвариантно при действии (локальной) 1-параметрической группы (локальных) преобразований, порожденной векторным полем X: $\tilde{\Pi}^i_{jk} = \Pi^i_{jk}$. В соответствии с теоремой 2.1 необходимое и достаточное условие инвариантности объекта проективной связности состоит в обращении в нуль его производной Ли: $L_X \Pi^i_{jk} = 0$, или

$$L_X \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \phi_k + \delta^i_k \phi_j, \quad \phi_k \equiv \frac{1}{n+1} L_X \Gamma^l_{kl}, \tag{48}$$

что с учетом (42) при $X = \xi^i \partial_i$ равносильно

$$\xi^i{}_{,jk} + \xi^l R^i_{jlk} = \delta^i_j \phi_k + \delta^i_k \phi_j.$$

Если ввести *оператор Кобаяси* $A_X \equiv L_X - \nabla_X$, то последнее уравнение можно записать в инвариантном виде

$$\nabla_Y A_X \equiv \nabla_Y (L_X - \nabla_X) = R(X,Y) - \phi(Y) \cdot id - Y\phi \quad (Y \in \mathcal{X}_M),$$

где R — тензор кривизны, а $\phi = \phi_k dx^k$ — дифференциальная 1-форма.

З а м е ч а н и е 3.1. *В силу* (43) *условия интегрируемости уравнений* (48) *имеют вид*

$$L_X R^i_{jkl} = \delta^i_l \phi_{j,k} - \delta^i_k \phi_{j,l} + \delta^i_j(\phi_{l,k} - \phi_{k,l}),$$

или

$$L_X W^i_{jkl} = 0,$$

где W^i_{jkl} *— тензор проективной кривизны* (*п.* 15). *Отсюда следует, что проективное движение* X *является коллинеацией кривизны:* $L_X R^i_{jkl} = 0$, *если и только если* $\phi_{i,j} = 0$.

Если M — псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇, то из (48) согласно формуле Фосса—Вейля (26) получим

$$\phi_k = \frac{1}{n+1} L_X \Gamma^l_{kl} = \frac{1}{n+1} \partial_k \left(\partial_l \xi^l + \frac{1}{2} \xi^l \partial_l \ln \sqrt{|\det(g_{ij})|} \right) \equiv \varphi_{,k} \,.$$

Следовательно, *необходимое и достаточное условие для того, чтобы векторное поле* $X = \xi^i \partial_i$ *было проективным движением в псевдоримановом многообразии* (M, g), *выражается равенством*

$$L_X \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_{,k} + \delta^i_k \varphi_{,j} \,, \tag{49}$$

где

$$\varphi = \frac{1}{n+1} \left(\partial_l \xi^l + \frac{1}{2} \xi^l \partial_l \ln \sqrt{|\det(g_{ij})|} \right)$$

— функция x^i, которую будем называть *определяющей функцией* проективного движения X, ибо постоянство или непостоянство функции φ определяет соответственно аффинный или неаффинный характер отвечающего ей проективного движения (см. ниже). Из (49), свертывая, получим

$$L_X R_{jl} = -(n-1)\varphi_{,jl} \tag{50}$$

и в силу (30)

$$L_X W^i_{jkl} = 0, \tag{51}$$

где W^i_{jkl} — тензор Вейля проективной кривизны.

Запишем в локальных координатах условие параллельности метрического тензора g_{ij} относительно связности Леви-Чивита: $\partial_k g_{ij}$ −

$\Gamma^l_{ik}g_{lj} - \Gamma^l_{jk}g_{il} = 0$. Взяв производную Ли от обеих частей этого равенства, ввиду (35) и (49) будем иметь

$$(L_X g_{ij})_{,k} \equiv (\xi_{i,j} + \xi_{j,i})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \tag{52}$$

Наоборот, если последнее равенство выполняется, то из (45) следует (49). Таким образом, *условие* (52) *необходимо и достаточно для того, чтобы X было проективным движением в* (M, g).

Уравнение (52) можно записать в виде следующих двух соотношений:

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij} \tag{53}$$

(*обобщенное уравнение Киллинга*) и

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i} \tag{54}$$

(*уравнение Эйзенхарта*).

Условия интегрируемости уравнений (54) имеют вид

$$h_{ih}R^h_{jkl} + h_{jh}R^h_{ikl} = g_{ik}\varphi_{jl} + g_{jk}\varphi_{il}g_{ik}\varphi_{jl} - g_{il}\varphi_{jk} - g_{jl}\varphi_{ik}. \tag{55}$$

Свертывая уравнение Эйзенхарта по индексам i, j, получим

$$\varphi_{,k} = \frac{1}{2(n+1)}g^{ij}h_{ij,k} = \frac{1}{n+1}g^{ij}\xi_{i,jk} \equiv \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{div}X\right)_{,k}. \tag{56}$$

Если $\mathrm{div}X = \mathrm{const}$ ($\varphi = \mathrm{const}$), то векторное поле X сохраняет аффинную связность: $L_X\Gamma^i_{jk} = 0$, т. е. является инфинитезимальным аффинным преобразованием.

При $h_{ij} = \mathrm{const} \cdot g_{ij}$ аффинное движение X есть инфинитезимальная гомотетия (п. 23), а при $h_{ij} = 0$ — инфинитезимальная изометрия (§ 3).

Л е м м а 3.1. *Если в уравнении Эйзенхарта* (54) $h = cg$, *то* $c = \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в этом случае из (56) получим

$$\varphi_{,k} = \frac{1}{2(n+1)}g^{ij}c_{,k}\ g_{ij} = \frac{n}{2(n+1)}c_{,k},$$

и (54) примет вид

$$-2g_{ij}\ c_{,k} + ng_{ik}\ c_{,j} + ng_{jk}\ c_{,i} = 0.$$

Свертывая последнее равенство с g^{ik}, найдем $(n^2+n-2)c_{,j}=0$, следовательно, $c_{,j}=0$ при $j=1,\ldots,n>1$.

Проведя симметрирование $\mathcal{S}$ обеих частей уравнения (54), получим $\mathcal{S}(\nabla q)=0$, где $q=4\varphi g-h$. Если γ — геодезическая в M, то поле ее касательных векторов $\dot\gamma$ параллельно вдоль γ (§ 13). В соответствии с этим величина $q(\dot\gamma,\dot\gamma)$ остается постоянной вдоль каждой геодезической γ в M, т. е. является первым интегралом уравнений геодезических.

Следовательно, *каждому решению уравнения* (54) *в* M *соответствует квадратичный первый интеграл*

$$(4\varphi g-h)(\dot\gamma,\dot\gamma)=\mathrm{const}$$

уравнений геодезических (*механический закон сохранения*).

Используя формулы (36), (37), (46) и (56), легко доказать, что для любых двух проективных движений X_1 и X_2 в M их скобка Ли $X=[X_1,X_2]$ также является проективным движением, при этом $\operatorname{div}[X_1,X_2]=X_1\operatorname{div}X_2-X_2\operatorname{div}X_1$. Поэтому множество $P(M)$ всех проективных движений в M образует алгебру Ли, называемую *проективной алгеброй Ли* в M.

Пусть $\nabla(\Gamma)$ и $\nabla'(\Gamma')$ — проективно эквивалентные связности в M : $\Gamma'^i_{jk}-\Gamma^i_{jk}=\delta^i_jp_k+\delta^i_kp_j$. Если выполняется (48), т. е. если X есть инфинитезимальное проективное преобразование связности ∇, то, очевидно, таким оно будет и для связности ∇'. Следовательно, проективные алгебры Ли проективно эквивалентных связностей изоморфны (совпадают), в частности, справедлива

Т е о р е м а 3.1. *Проективные алгебры Ли псевдоримановых многообразий с общими геодезическими изоморфны.*

В случае римановых связностей ∇ и ∇' имеем

$$\operatorname{div}_{\nabla'}X=(n+1)p\ (X)+\operatorname{div}_{\nabla}X.$$

Докажем, что *проективные преобразования псевдориманова многообразия* M^n *образуют группу Ли.*

Напомним теорему Пале.

Т е о р е м а 3.2 (Р. Пале [131]). *Пусть* $\widehat{G}$ — *группа дифференцируемых преобразований дифференцируемого многообразия* M, G' — *множество всех векторных полей* X *на* M, *которые порождают* (*глобальную*) 1*-параметрическую группу преобразований, принадлежащих* $\widehat{G}$, G — *подалгебра Ли, порожденная множеством* G' *в алгебре Ли векторных полей на* M. *Если* G *конечномерна, то* $\widehat{G}$ *допускает структуру группы Ли* (*такую, что отображение* $\widehat{G}\times M\to M$

дифференцируемо) и $G = G'$. Алгебра Ли для $\widehat{G}$ естественно изоморфна G.

Если $\widehat{G}$ есть группа $\widehat{P}(M^n)$ проективных преобразований псевдориманова многообразия M^n, то G' есть множество всех (полных) проективных векторных полей на M^n и G — проективная алгебра Ли $P(M^n)$ в M^n. Следовательно, доказательство нашего утверждения сводится к доказательству конечномерности проективной алгебры Ли $P(M^n)$. Если X — проективное движение в M^n, то в каждой карте на M^n выполняются уравнения (49), условия интегрируемости которых выводятся с помощью формулы (43) и имеют вид

$$L_X R^i_{jkl} \equiv \xi^h \partial_h R^i_{jkl} - R^h_{jkl}\partial_h \xi^i + R^i_{hkl}\partial_j \xi^h + R^i_{jhl}\partial_k \xi^h + \\ + R^i_{jkh}\partial_l \xi^h = \delta^i_l \varphi_{,jk} - \delta^i_k \varphi_{,jl}. \tag{57}$$

Пусть $X = \xi^i \partial_i$. Введем новые функции $u^i_j = \xi^i_{,j}$. Тогда с учетом (42) уравнения (49) можно записать в виде следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\xi^i_{,j} = u^i_j, \quad u^i_{j,k} = \xi^l R^i_{jkl} + \delta^i_j \varphi_{,k} + \delta^i_k \varphi_{,j}, \\ \varphi_{,ij} = -\frac{1}{n-1}(\xi^l R_{ij,l} + R_{lj} u^l_i + R_{il} u^l_j), \tag{58}$$

содержащей $n(n+2)$ неизвестных функций ξ^i, u^i_j и $\varphi_{,i}$ [26]. Если условия интегрируемости этой системы выполняются тождественно, то ее решение зависит от n^2+2n произвольных параметров. При этом пространство допускает проективную алгебру Ли максимальной размерности n^2+2n. Таким образом, *размерность проективной алгебры Ли в M^n не превосходит n^2+2n*. По теореме Пале группа $\widehat{P}(M^n)$ проективных преобразований в M^n есть группа Ли с алгеброй Ли $P(M^n)$.

Каждая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли, и каждой группе Ли соответствует алгебра Ли. Среди групп Ли с алгеброй Ли g имеется единственная связная односвязная группа Ли G; любая связная группа Ли с алгеброй Ли g имеет вид G/D, где D — дискретный нормальный делитель группы G, содержащийся в ее центре [57].

Таким образом, все вопросы, касающиеся групп Ли, точнее, их связных компонент единицы, сводятся к соответствующим вопросам для алгебр Ли. Поэтому при изучении групп проективных преобразований, которые, как показано выше, являются группами Ли, основное внимание уделяется алгебрам Ли этих групп, реализуемым в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований. Ясно, что имеют место включения $\widehat{I}(M^n) \subseteq \widehat{H}(M^n) \subseteq \widehat{A}(M^n) \subseteq \widehat{P}(M^n)$, где $\widehat{I}(M^n), \widehat{H}(M^n)$ и $\widehat{A}(M^n)$ — группы соответственно изометрических, гомотетических и аффинных преобразований псевдориманова многообразия M^n. Отсюда следуют включения для изометрической (I), гомотетической (H) и аффинной (A) алгебр Ли в M^n: $I(M^n) \subseteq H(M^n) \subseteq A(M^n) \subseteq P(M^n)$. Гомотетическая алгебра Ли обладает важным свойством, замеченным Г. Фубини:

Т е о р е м а 3.3. [110] *Если V^n допускает максимальную гомотетическую алгебру Ли H_r*[7]*, то эта алгебра содержит изометрическую подалгебру I_τ размерности $\tau \geq r-1$.* [8]

В силу теорем 3.1 и 3.2 *проективные группы геодезически соответствующих пространств изоморфны.*

Размерность проективной алгебры Ли $P(M^n)$ n-мерного связного псевдориманова многообразия M^n равна n^2+2n, если и только если M^n есть пространство постоянной кривизны S^n [121], *в противном случае* $\dim\ P(M^n) \leq n^2-2n+5$ (И. П. Егоров [26]).

Так как связность в S^n проективно эквивалентна плоской связности, то из предыдущего следует, что проективная группа пространства постоянной кривизны совпадает с проективной группой евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. с группой дробно-линейных подстановок от n переменных. Поэтому в дальнейшем пространства постоянной кривизны, как правило, исключаются из рассмотрения.

Если M^n не является S^n, то условия интегрируемости системы (58) тождественно не выполняются и приводят к дополнительным связям для ξ^i, u^i_j и $\varphi_{,i}$. Количество этих связей определяется в соответствии с теорией интегрируемости ([74], с. 118; [26]).

Исследуя условия интегрируемости системы (58), И. П. Егоров пришел к следующим фундаментальным результатам.

Т е о р е м а 3.4. [25] *Наибольший порядок групп (аффинных) движений пространств аффинной связности A^n, отличных от проективно-евклидова пространства, равен $n(n-2)+5$. Все такие группы необходимо транзитивны.*

Пусть $\bar{D}^n$ — максимально подвижное пространство аффинной связности, отличное от проективно-евклидова пространства. Имеет место

[7] Т.е. гомотетическую алгебру Ли наибольшей размерности в V^n. Так же определяются максимальные группы $\widehat{I}(M^n), \widehat{H}(M^n)$, $\widehat{A}(M^n)$ и соответствующие максимальные алгебры Ли.

[8] Ср. М. Кнебельман [120].

Т е о р е м а 3.5. [25] *Группа (аффинных) движений пространства $\bar{D}^n$ является группой проективных коллинеаций этого пространства.*

Так как проективные коллинеации любого $\bar{D}^n$ совпадают с коллинеациями пространства проективной связности, соответствующего $\bar{D}^n$, и группа (аффинных) движений пространства $\bar{D}^n$, являясь подгруппой группы проективных коллинеаций, содержит $n(n-2)+5$ параметров, то справедлива

Т е о р е м а 3.6. [25] *Группы коллинеаций наибольшего порядка пространств проективной связности с отличным от нуля тензором Вейля транзитивны и их порядок равен $n(n-2)+5$.*

Отсюда следут, что *размерность проективной алгебры Ли $P(M^n)$ n-мерного связного псевдориманова многообразия M^n непостоянной кривизны не превосходит число* n^2-2n+5 : $\dim\ P(M^n) \leq n^2-2n+5$.

Группа $\widehat{P}$ проективных преобразований n-мерного многообразия M с проективной структурой Π есть группа Ли преобразований размерности $r \leq \dim\ \Pi = n^2+2n$. Если $\dim\ \widehat{P} = \dim\ \Pi$, то Π есть естественная проективная структура либо на проективном пространстве $P^n(\mathbb{R})$, либо на его универсальном накрывающем пространстве S^n ([121], с. 186).

23. Инфинитезимальные конформные преобразования и гомотетии. Диффеоморфизм f псевдориманова многообразия (M,g) на себя называется *конформным преобразованием*, если $f^*g=\rho g$, где ρ есть функция на M. Если ρ — константа, то f называется преобразованием подобия, или *гомотетией.* При $\rho=1$ гомотетия есть изометрия. Конформное преобразование сохраняет угол между любыми двумя направлениями в точке.

Векторное поле X на (M,g) называется *инфинитезимальным конформным преобразованием* или *конформным* (*киллинговым*) *векторным полем*, или также *конформным движением* (*к.д.*) (соответственно *инфинитезимальной гомотетией*, или *гомотетическим движением* (*г.д.*)), если оно порождает в окрестности каждой точки $p \in M$ локальную 1-параметрическую группу конформных преобразований (соответственно гомотетий). X есть конформное движение на M, если и только если

$$L_X g = \sigma g, \tag{59}$$

где функция σ постоянна для гомотетий. Пусть $\sigma = 2c = \mathrm{const}$:

$$L_X g = 2cg. \tag{60}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы $X = \partial_1$; тогда уравнение (59) примет вид $\partial_1 g_{ij} = 2g_{ij}$, отсюда

$$g_{ij} = e^{2cx^1} a_{ij}(x^2, \ldots, x^n). \tag{61}$$

Наоборот, если существует координатная система, в которой метрический тензор имеет форму (61), то пространство допускает 1-параметрическую группу гомотетий, порожденную преобразованием $x^{i'} = x^i + \delta^i_1 \delta t$; при этом квадрат расстояния между исходными точками x и $x + dx$ и квадрат расстояния между преобразованными точками x' и $x' + d'x$ имеют всегда постоянное отношение.

Можно показать, что условие (59) равносильно следующему:

$$L_X G_{ij} 0, \tag{62}$$

где $G_{ij} \equiv |det(g_{ij})|^{-1/n} g_{ij}$ — *конформные параметры Томаса*, определяющие геометрический объект с линейным законом преобразования ([153], с. 32).

Группа $\widehat{C}(M)$ *конформных преобразований* (*соответственно группа* $\widehat{H}(M)$ *гомотетий*) *связного* n*-мерного псевдориманова многообразия* M *есть группа Ли размерности* $\dim \widehat{C}(M) \le (n+1)(n+2)/2$ *при условии* $n \ge 3$ (*соответственно* $\dim \widehat{H}(M) \le n(n+1)/2 + 1$).

Доказывается это следующим образом. Из условий интегрируемости уравнения $L_X g = \sigma g$ следует, что размерность конформной алгебры Ли не превосходит $(n+1)(n+2)/2$ [94]. Так как любая r-мерная гомотетическая алгебра Ли содержит изометрическую подалгебру Ли размерности $r_I \ge r - 1$ [110] и $r_I \le n(n+1)/2$, то $r \le r_I + 1 \le n(n+1)/2 + 1$. По теореме Пале (п. 22) группа конформных преобразований и группа гомотетий есть группы Ли преобразований.

Из (60) и (45) найдем $L_X \Gamma^i_{jk} = 0$. Таким образом, инфинитезимальная гомотетия является аффинным движением. Наоборот, если конформное движение X есть аффинное движение, то выполняются равенства $L_X g_{ij} = \sigma g_{ij}$ и $L_X \Gamma^i_{jk} = 0$, отсюда $\sigma = \mathrm{const}$. Следовательно, для того чтобы инфинитезимальное преобразование в M было гомотетическим, необходимо и достаточно, чтобы оно было одновременно конформным и аффинным ([153], с. 167).

В силу (59) и леммы 3.1 справедлива

Т е о р е м а 3.7 (Г. Фубини [110]). *Всякое конформное проективное преобразование есть гомотетия.*

Векторное поле X на n-мерном связном псевдоримановом многообразии (M, g) называется замкнутым конформным векторным полем, если $\nabla X = f \cdot id$, где $f = (1/n)\mathrm{div} X \equiv (1/n)\xi^i_{,i}$. Пусть F — пространство таких полей, H — пространство инфинитезимальных гомотетий. Если $\dim F \geq n$ и $F \cap H = \{0\}$, то многообразие (M, g) эйнштейново: $R_{ij} = \kappa g_{ij}$, где $R_{ij} = R^l_{ilj}$ — компоненты тензора Риччи в координатном репере [145].

Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) называется *конциркулярным векторным полем*, если $\nabla X = \rho \cdot id + X \cdot d\Phi$, и *рекуррентным векторным полем*, если $\nabla X = X \cdot d\Phi$, где ρ и Φ — скалярные поля. Если выполняется условие $\nabla_Y X = \rho Y + a(Y)X$ для поля 1-формы a и всех векторных полей Y на M, то X называется *торсообразующим векторным полем* [134].

Конциркулярные векторные поля возникают при рассмотрении конформных преобразований псевдоримановых многообразий, переводящих геодезические окружности в геодезические окружности. Примером конциркулярного векторного поля может служить детально исследованное П. А. Широковым в 1931 г. [88] поле сходящихся направлений, называемое также конкуррентным векторным полем (см. ниже). В дальнейшем изучением конциркулярных векторных полей занимался целый ряд авторов ([42], [44], [61], [130], [146] и др.). В рамках общей теории относительности конциркулярные векторные поля рассматривал Х. Такено. Ему принадлежит решение вопроса о конциркулярных векторных полях в сферически-симметричных пространствах-временах [142].

Р. Дезж [104] нашел условия для кривизны, при которых связное аналитическое риманово многообразие V^n $(n > 2)$, допускающее ненулевое конциркулярное векторное поле, является пространством Эйнштейна. В работе Дж. Ферран [108] установлен канонический вид метрики конформно евклидова пространства, допускающего конциркулярное векторное поле.

Скалярное поле Φ на (M, g) называется *специальным конциркулярным скалярным полем*, если

$$\nabla^2 \Phi = \rho \Phi g,$$

где $\rho = \mathrm{const} \neq 0$. Если тензор кривизны (соответственно тензор Риччи) риманова пространства (M, g), допускающего специальное конциркулярное ("спецконциркулярное") скалярное поле, удовлетворяет условию $R_{hijk,[lm]} = 0$ (соответственно $R_{ij,[kl]} = 0$), то M есть пространство постоянной кривизны (соответственно пространство Эйнштейна) [125].

Связное n-мерное риманово многообразие M класса C^∞ допускает $n+1$ независимых решений уравнения $\nabla^2\rho + c^2\rho g = 0$, если и только если M изометрично сфере $S^n(1/c)$ в E^{n+1} ([143], см. также [127]).

Векторное поле X на n-мерном римановом многообразии (M, g) класса C^∞ называется *специальным концикулярным* (спецконциркулярным) *векторным полем*, если $\nabla_Y X = \phi Y$ для всех векторных полей Y и функций ϕ на M. Если на многообразии M существуют более двух линейно независимых специальных конциркулярных векторных полей $X_{(i)}$, то $\nabla_Y \phi_{(i)} = -Kg(Y, X_{(i)})$ для всех $Y \in \mathcal{X}_M$ и $\phi_{(i)} = -K\rho_{(i)} + b_{(i)}$, где $b_{(i)}$ и K — константы [119].

Если $\nabla_Y X = Y$ для всех $Y \in \mathcal{X}_M$, то X называется *конкуррентным векторным полем* [88], [134]. Очевидно, что конкуррентное векторное поле является инфинитезимальной гомотетией.

Если полное связное риманово многообразие M допускает конкуррентное векторное поле X, то оно изоморфно евклидову пространству, причем изоморфизм переводит X в "радиальное"векторное поле $x^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ [98].

Конциркулярным полям и геодезическим отображениям посвящена серия работ И. Г. Шандры [79]—[84]. Проективные преобразования и конциркулярная геометрия рассматриваются в [18], гл. 4.

В заключение отметим работу Н. Х. Ибрагимова [32], в которой рассматриваются группы обобщенных движений и получен аналог уравнений Киллинга для произвольных групп обобщенных движений. О проективных преобразованиях как обобщенных движениях Н. Х. Ибрагимова см. [18], § 14.

§ 4. Группы проективных преобразований псевдоримановых пространств

24. Исследования проективных отображений, их обобщений и приложений имеют более чем вековую историю (см. [18] и приведенную там библиографию). У истоков этих исследований, обязанных своим возникновением задаче динамики о преобразованиях уравнений движения механических систем, сохраняющих траектории, стояли классические теоремы Бельтрами и Дини, опубликованные в конце 60-х гг. 19 в.

Т е о р е м а 4.1 (Э. Бельтрами, 1868 г. [96]). *Единственные пространства, геодезические которых соответствуют геодезическим пространства постоянной кривизны, суть также пространства постоянной кривизны.*

Т е о р е м а 4.2 (У. Дини, 1869 г. [105]). *Два неналагающихся римановых пространства V^2 и $\widetilde{V}^2$ геодезически отображаются друг на друга тогда и только тогда, когда их линейные элементы приводимы к лиувиллевской форме*

$$ds^2 = (u+v)(dx^2+dy^2), \qquad \widetilde{ds}^2 = -\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)\left(\frac{dx^2}{u}-\frac{dy^2}{v}\right),$$

где u — функция x, v — функция y.

Через двадцать семь лет после выхода работы У. Дини Т. Леви-Чивита дал общее решение проблемы геодезических отображений римановых пространств в виде следующей фундаментальной теоремы.

Т е о р е м а 4.3 (Т. Леви-Чивита, 1896 г. [126][9]). *Два (собственно) римановых пространства V^n и $\widetilde{V}^n$ геодезически отображаются друг на друга тогда и только тогда, когда их линейные элементы могут быть приведены к виду*

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} {\prod_{\beta}}' |f_\beta - f_\alpha|\, ds_\alpha^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \Phi_\alpha, \tag{63}$$

$$\widetilde{ds}^2 = a\big((f_1+b)\cdots(f_p+b)\big)^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}(f_\alpha+b)^{-1}\Phi_\alpha \qquad (a, b = \mathrm{const}),$$

где ds_α^2 есть положительно определенная квадратичная форма, зависящая от переменных x^{i_α}, f_α — функция x^{i_α}, равная постоянной, если форма ds_α^2 неодномерна, $f_\beta \neq f_\alpha$ при $\beta \neq \alpha$, $\prod'_\beta \Big|f_\beta - f_\alpha\Big|$ означает произведение множителей $|f_\beta - f_\alpha|$ для всех $\beta = 1, ..., p$, кроме $\beta = \alpha$. [10]

[10] Предполагается, что координаты $x^1, \ldots, x^n$ разбиты на $p > 1$ групп $\big(x^{i_\alpha}\big)$, $\alpha = 1, \ldots, p$, соответственно числу разных корней уравнения $\det(\tilde{g}_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$. Количество переменных в каждой группе определяется кратностью соответствующего корня; f_α есть функция (единственного) переменного x^{i_α}, если соответствующий корень простой (в этом случае группа $\big(x^{i_\alpha}\big)$ состоит из одной координаты); $f_\alpha = \mathrm{const}$, если соответствующий корень кратный (группа $\big(x^{i_\alpha}\big)$ состоит более чем из одной координаты).

В 1939 г., спустя семьдесят лет после появления теоремы Дини, П. А. Широков определил все двумерные псевдоримановы многообразия с общими геодезическими (см. [91], с. 383-389). Работа П. А. Широкова положила начало систематическому исследованию геодезически соответствующих пространств с неопределенными метриками. Используя и развивая идеи П. А. Широкова, А. З. Петров [49] дал классификацию трехмерных геодезически соответствующих псевдоримановых пространств, а его ученик В. И. Голиков [22] определил все четырехмерные лоренцевы пространства с соответствующими геодезическими. Классификация n-мерных геодезически соответствующих лоренцевых пространств была выполнена Г. И. Кручковичем [43]. В работах [69]—[71] А. С. Солодовников, используя теорему Леви-Чивита, решил задачу о разбиении римановых пространств V^n $(n > 2)$ на непересекающиеся классы геодезически соответствующих пространств и определил геодезические классы римановых пространств $V(K)$. Позднее Г. И. Кручкович [44] рассмотрел вопрос о геодезическом отображении псевдоримановых пространств $V(K)$. Общим вопросам теории геодезических отображений псевдоримановых пространств посвящен ряд статей Н. С. Синюкова ([59]—[64] и др.) и его монография [66], содержащая полученные им и его учениками многочисленные результаты. Общее решение проблемы определения псевдоримановых многообразий с общими геодезическими дано в работе [13].

Вскоре после появления статьи Т. Леви-Чивита [126] была опубликована работа Г. Фубини [110], в которой проблема геодезических отображений рассматривалась с групповой точки зрения. Впервые задача определения римановых пространств, допускающих непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривалась Софусом Ли для случая двумерных поверхностей, однако, как писал Гвидо Фубини в предисловии к [110], "знаменитому математику не удалось решить эту проблему", названную Фубини "проблемой Ли". Впоследствии Г. Кенигс [124] указал, каким образом можно дополнить результаты Ли, однако метод Ли не мог быть использован для общего решения проблемы. Подвергнув критике метод Ли, Г. Фубини развил свой подход, основанный на аппарате лиевского дифференцирования; хотя термин "производная Ли" возник позже, именно в работе Г. Фубини [110] была, по-видимому, впервые вычислена и эффективно использована производная Ли объекта связности. В этой же работе получен ряд основополагающих результатов, таких, как теорема о размерности подгруппы изометрий в группе гомотетий, традиционно связываемая с именем М. Кнебельмана [120].

Г. Фубини начал исследование (см. [110]) римановых пространств V^n, $n \geq 3$, допускающих группы проективных преобразований более широкие, чем группы гомотетий, которое спустя полвека было продолжено А. С. Солодовниковым. Относящиеся сюда результаты, включая выводы Фубини, подробно излагаются в работе А. С. Солодовникова [68]. Справедлива

Т е о р е м а 4.4 ([68], с. 45). *Для того чтобы векторное поле ξ^i определяло в (собственно) римановом пространстве V^n однопараметрическую группу G_1 проективных преобразований, не являющихся преобразованиями подобия, или, что то же самое, задавало бесконечно малое проективное преобразование $x^i \to x^i + \xi^i \delta t$, не являющееся подобием (т. е. $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} \neq c g_{ij}$), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат*

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} {\prod_{\beta}}' |f_\beta - f_\alpha| \, ds_\alpha^2,$$

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \sum_{\alpha=1}^{p} \left(f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta \right) \Phi_\alpha \quad \left(\Phi_\alpha = {\prod_{\beta}}' |f_\beta - f_\alpha| \, ds_\alpha^2\right). \tag{64}$$

Условия (52) *выполняются при этом с функцией*

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta.$$

Метрики вида (63) называются *метриками Леви-Чивита.* Рассмотрим одномерную форму ds_α^2 в (63). Она имеет вид $\psi(x^{i_\alpha}) dx^{i_\alpha 2}$ и преобразованием переменной x^{i_α} приводится к виду $dx^{i_\alpha 2}$. Поэтому будем считать все одномерные ds_α^2 равными $dx^{i_\alpha 2}$. Линейный элемент

$$\overset{*}{ds}{}^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} {\prod_{\beta}}' |f_\beta - f_\alpha| \, dy^{\alpha^2} \tag{65}$$

называется *присоединенным* к (63). Здесь $y^1, \ldots, y^p$ — новые переменные; непостоянные функции $f_\alpha(x^{i_\alpha})$, отвечающие одномерным ds_α^2, при переходе к $\overset{*}{ds}{}^2$ заменяются на $f_\alpha(y^\alpha)$. Таким образом, переход к присоединенному элементу заключается, по существу, в замене всех неодномерных форм ds_α^2 одномерными dy_α^2 (ср. п. 32).

Метрика (63) называется *метрикой Леви-Чивита основного типа*, если $\overset{*}{ds}{}^2$ не имеет постоянной кривизны, и *исключительной метрикой Леви-Чивита* в противном случае.

Пусть $x^i \to x^i + \xi^i \delta t$ — бесконечно малое проективное преобразование в пространстве Леви-Чивита (63). Разобьем компоненты ξ^i на группы ξ^{i_α} $(\alpha = 1, \ldots, p)$ в соответствии с разбиением формы (63). Имеет место

Т е о р е м а 4.5 (Г. Фубини [110]). *Если* (63) *есть пространство Леви-Чивита основного типа и* $p \geq 3$, *то каково бы ни было бесконечно малое проективное преобразование* $x^i \to x^i + \xi^i \delta t$, *компоненты* ξ^{i_α} *зависят лишь от переменных* x^{i_α} *той же группы* (*т. е. из* ds^2_α).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что из компонент тензора кривизны метрики (63), у которых не все четыре индекса принадлежат одной группе (x^{i_α}), все равны нулю, кроме следующих:

$$R^{i_\alpha}_{j_\beta k_\beta i_\alpha} = -R^{i_\alpha}_{j_\beta i_\alpha k_\beta} = \tilde{g}_{j_\beta k_\beta} \overset{*}{R}{}^{\alpha}_{\beta\beta\alpha} \quad (\alpha \neq \beta); \tag{66}$$

здесь $\overset{*}{R}{}^{\alpha}_{\beta\beta\alpha}$ — компоненты тензора кривизны, составленного для $\overset{*}{ds}{}^2$, а $\tilde{g}_{j_\beta k_\beta}$ — коэффициенты формы ds^2_β. Из равенства (57), которое должно выполняться для любого проективного преобразования, в силу свойств тензора кривизны следует

$$(R^{l_\gamma}_{j_\beta j_\beta l_\gamma} - R^{i_\alpha}_{j_\beta j_\beta i_\alpha})\partial_{l_\gamma} \xi^{i_\alpha} = 0,$$

где α, β, γ попарно различны. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что какая-либо из производных $\partial_{l_\gamma} \xi^{i_\alpha} \neq 0$. Тогда $\overset{*}{R}{}^{\gamma}_{\beta\beta\gamma} = \overset{*}{R}{}^{\alpha}_{\beta\beta\alpha}$ при любом $\beta \neq \alpha, \gamma$. Отсюда с учетом особого строения тензора кривизны следует равенство $\overset{*}{R}{}^{\mu}_{\delta\delta\mu} = -K \overset{*}{g}_{\delta\delta}$. Это означает, что присоединенная метрика $\overset{*}{ds}{}^2$ имеет постоянную кривизну K, что противоречит условию ([68], с. 67).

Рассмотрим бесконечно малое проективное преобразование $x^i \to x^i + \xi^i \delta t$, или, как мы дальше будем говорить, преобразование ξ^i. Система координат, обладающая тем свойством, что направления координатных линий в каждой точке суть главные направления тензора $\xi_{(i,j)}$, называется канонической относительного данного преобразования ξ^i.

Т е о р е м а 4.6 ([68], с. 68). *Рассмотрим метрику* (63), *где не все функции* f_α *постоянны. Для того чтобы* ξ^i *было проективным, но не подобным преобразованием, а данная система координат* (63) *была канонической для* ξ^i, *необходимо и достаточно соблюдение условий*

$$a(\xi_{i,j} + \xi_{j,i})dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p}\big((f_\alpha + b) + \sum_{\beta=1}^{p}(f_\beta + b)\big)\Phi_\alpha \tag{67}$$

$(a, b - const, a \neq 0)$.

Пусть ξ^i — отличное от подобия проективное преобразование в пространстве (63) основного типа. По теореме 4.5 компоненты ξ^{i_α} зависят лишь от переменных той же группы x^{k_α}, поэтому $\xi_{(i_\alpha, j_\beta)} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, и система координат (63) является канонической для ξ^i. Интегрируя уравнения (67), придем к следующим результатам.

Т е о р е м а 4.7 ([68], с. 76). *Все пространства* V^n (63) *основного типа, допускающие проективные преобразования* ξ^i, *отличные от подобия, определяются при* $p \geq 3$ *из следующих условий:*

а) для одномерных ds^2_α

$$\begin{aligned} \xi^\alpha \frac{df_\alpha}{dx^\alpha} &= f^2_\alpha + cf_\alpha + a, \\ 2\frac{d\xi^\alpha}{dx^\alpha} &= (3-p)f_\alpha - c(p-1); \end{aligned} \tag{68}$$

б) для неодномерных ds^2_ρ (*в этом случае* $f_\rho = const$)

$$0 = f^2_\rho + cf_\rho + a, \tag{69}$$

а ξ^{i_ρ} *задает в* ds^2_ρ *преобразование подобия:*

$$\tilde{\xi}_{i_\rho, j_\rho} + \tilde{\xi}_{j_\rho, i_\rho} = \lambda_\rho \tilde{g}_{i_\rho j_\rho}, \tag{70}$$

где $\lambda_\rho = (3-p)f_\rho - c(p-1)$, $\tilde{g}_{i_\rho j_\rho}$ *означает коэффициент формы* ds^2_ρ, *а* $\tilde{\xi}_{i_\rho, j_\rho}$ — *ковариантную производную вектора* $\tilde{\xi}_{i_\rho} = \tilde{g}_{i_\rho j_\rho}\xi^{j_\rho}$ *в* ds^2_ρ; *значения постоянных c и a произвольны.*

Т е о р е м а 4.8 ([68], с. 76). *Все проективные преобразования* ξ^i *в пространствах* V^n (63) *основного типа при* $p \geq 3$ *получаются комбинированием* $\lambda \underset{0}{\xi}{}^i + \eta^i$ *одного из них* $\underset{0}{\xi}{}^i$, *удовлетворяющего* (68)—(70), *с изометриями* η^i. *Изометрии* η^i *сводятся, в свою очередь, к изометриям в тех* ds^2_μ, *которым отвечают* $f_\mu = const$.

Исключение (из последнего правила для изометрий) составляют следующие пространства (63):

$$ds^2_\alpha = dx^{\alpha^2}, \ f_\alpha = A^\alpha (x^\alpha)^{\frac{2}{1-p}} \quad (\alpha = 1, \ldots, p-1), \quad f_p = 0,$$

а ds^2_p — произвольная метрика от $n-p+1>1$ переменных $x^p, \ldots, x^n$, для которых все проективные преобразования ξ^i суть линейные комбинации следующих:

$$\underset{0}{\xi}{}^\alpha = \frac{1-p}{2} x^\alpha f_\alpha,^{11} \quad \underset{0}{\xi}{}^{i_p} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p-1; \ i_p = p, \ldots, n);$$

$\eta^\alpha = \kappa x^\alpha$, $\eta^{i_p}(x^p, \ldots, x^n)$ определяет в $ds^2_p = \tilde{g}_{i_p j_p} dx^{i_p} dx^{i_p}$ преобразование подобия: $\tilde{\xi}_{i_p, j_p} + \tilde{\xi}_{j_p, i_p} = 2\kappa \tilde{g}_{i_p, j_p}$ (здесь добавлен множитель 2, пропущенный в [68]; $\underset{0}{\xi}{}^i$ есть решение (68)—(70), а η^i — изометрия) ([68], с. 76—77).

Результаты, обобщенные в двух последних теоремах, принадлежат в основном Г. Фубини. Как мы увидим далее, эти результаты легко обобщаются на случай пространств Леви-Чивита V^4 произвольной сигнатуры, принадлежащих к основному типу (см. §§ 12,18,19,24). Последующие результаты принадлежат А. С. Солодовникову.

Всякое исключительное пространство Леви-Чивита есть $V(K)$. Теория пространств $V(K)$ была развита А. С. Солодовниковым [68], [70] в связи с изучением проективных преобразований римановых пространств. Обобщение теории пространств $V(K)$ на псевдоримановы пространства дано Г. И. Кручковичем [41], [44].

Полуприводимое риманово пространство с метрикой

$$ds^2 = ds^2_0 + \sum_{\gamma=1}^{t} \overset{\gamma}{\sigma} \, ds^2_\gamma, \tag{71}$$

где $ds^2_0 = g_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{i_0}$, $ds^2_\gamma = \overset{\gamma}{g}_{i_\gamma j_\gamma} \, dx^{i_\gamma} dx^{i_\gamma}$ $(i_0, j_0 = 1, \ldots, q)$ — самостоятельные метрики, зависящие каждая от своих переменных x^{i_p} $(p = 0, 1, \ldots, t)$, и $\overset{\gamma}{\sigma}$ — положительные функции переменных x^{i_0}, называется *пространством* $V(K)$, а представление (71) называется K-*разложением* метрики ds^2, если присоединенная метрика

$$\overset{*}{ds}{}^2 = ds^2_0 + \sum_{\gamma=1}^{t} \overset{\gamma}{\sigma} \, dy^{q+\gamma^2}$$

[11] В правой части добавлен множитель $(1-p)/2$, пропущенный в [68].

имеет постоянную кривизну K. Можно показать, что всякое исключительное пространство Леви-Чивита, где не все f_α постоянны, есть $V(K)$. Используя полученный им необходимый и достаточный признак пространств $V(K)$, А. С. Солодовников определил метрики римановых пространств $V(K)$ и решил вопрос о максимальных проективных группах в этих пространствах ([68], см. также [71]). Наиболее существенную роль в его рассуждениях играла теорема о единственности максимального K-разложения ([68], § 14), доказательство которой прямо опирается на предположение о положительной определенности метрик. Перечисление всех относящихся сюда результатов заняло бы много места, отметим только два общих свойства проективных преобразований в $V(K)$.

Т е о р е м а 4.9 ([68], с. 85). *Любое проективное преобразование ξ^i в пространстве $V(K)$ удовлетворяет условию $\varphi_{,ij} = -K(\xi_{i,j}+\xi_{j,i})$, где $\varphi_{,i}$ есть вектор, определяемый из* (52).

Т е о р е м а 4.10 ([68], с. 86). *Пространство $V(K)$ при $K \neq 0$ не допускает аффинных преобразований, отличных от изометрий.*

Если в метрике (63) все функции f_α постоянны, то она допускает только аффинные преобразования. Вопрос об аффинных преобразованиях в (собственно) римановых пространствах V^n решает

Т е о р е м а 4.11 ([68], с. 114). *Если $ds^2 = ds_0^2 + ds_1^2 + \ldots + ds_r^2$ есть разложение ds^2 на неприводимые и неодномерные $ds_1^2, \ldots, ds_r^2$ и евклидову форму ds_0^2, то вся аффинная группа состоит из преобразований подобия, действующих отдельно в каждом ds_i^2 $(i = 0, 1, \ldots, r)$. В $ds_1^2, \ldots, ds_r^2$ преобразования описываются посредством*

$$ds^2 = e^{x^1} d\sigma^2(x^2, \ldots, x^n)$$

(сдвиги по линии x^1) или являются тождественными, в ds_0^2 сводятся к обычным аффинным преобразованиям.

Выводы Г. Фубини и А. С. Солодовникова существенно опираются на предположение о положительной определенности рассматриваемых метрик. Снятие условия знакоопределенности не только влечет за собой значительное усложнение задачи, многократно увеличивая число типов пространств произвольной сигнатуры, но требует также принципиально нового подхода к ее решению.

Один из таких подходов, связанный с рассмотрением алгебраической структуры производной Ли $L_X g$ в направлении инфинитезимального проективного преобразования X, был положен автором в основу излагаемой в этой книге классификации четырехмерных лоренцевых пространств (полей тяготения) по алгебрам Ли проективных и аффинных движений (А. В. Аминова [1]—[10]). Инфинитезимальные проективные преобразования трехмерных лоренцевых пространств изучала Л. И. Жукова (см. работу [31] и библиографию в ней). Использованный ею подход основан на разложении по малому параметру трехмерных метрик Петрова с соответствующими геодезическими [49] и не может быть применен в общем случае.

В. И. Голиков, рассматривая 4-мерные пространства Эйнштейна, определяемые полями тяготения, доказал, что они не допускают проективных преобразований, более общих, чем аффинные.

Остальная литература по рассматриваемому вопросу посвящена либо общим вопросам теории проективных преобразований [26], [64], [111], [113] [12], либо изучению проективно-групповых свойств отдельных классов римановых и аффинно-связных пространств — симметрических [138], [156], рекуррентных и Риччи-рекуррентных пространств [95], [132], [133], [139], [149]—[151]. В работе [128] рассматриваются проективные преобразования в пространстве Финслера.

§ 5. Алгебраическая структура симметричного тензора h_{ij} в пространстве-времени

25. Существенную роль в последующем изложении играет алгебраическая структура симметричного тензора h_{ij} в пространстве-времени (L^4, g), определяемая локально его инвариантными элементами: собственными числами, собственными векторами и характеристикой Сегре. Напомним определение характеристики Сегре. Пусть λ-матрица

$$(h_{ij} - \lambda g_{ij}) \tag{72}$$

имеет в точке $x \in V^4$ систему элементарных делителей $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$, $(\lambda - \lambda_1)^{m_2}, \ldots$, $(\lambda - \lambda_2)^{m_1'}$, $(\lambda - \lambda_2)^{m_2'}, \ldots$. Инварианты λ_i, называемые базисами элементарных делителей, определяют собственные числа тензора h_{ij} в точке x и являются корнями характеристического уравнения

$$\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0. \tag{73}$$

[12] См. §§ 2,3.

Числа $m_1, m_2, \ldots, m'_1, m'_2, \ldots$ определяют тип тензора h_{ij}. Для обозначения типа тензора употребляется символ

$$\chi = \{(m_1, m_2, \ldots)\ (m'_1, m'_2, \ldots) \ldots\},$$

в котором круглые скобки объединяют числа, соответствующие одному и тому же характеристическому числу. Этот символ называется *характеристикой Сегре* λ-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ или матрицы (h_{ij}) ([90], §§ 3, 17; [18], с. 453).

Если $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ — определенная форма, то элементарные делители матрицы (72) простые (первой степени) и можно определить n взаимно ортогональных собственных векторов $\underset{l}{\xi}{}^j$, удовлетворяющих системе уравнений $(h_{ij} - \lambda_e g_{ij})\underset{l}{\xi}{}^j = 0$, которые будут задавать главные направления (главные оси) тензора h_{ij}. При этом для простого корня главное направление определяется однозначно, а корню кратности p отвечает p-мерная плоскость, любые p взаимно ортогональных векторов которой определяют систему главных осей тензора h_{ij} ([94], § 33).

В случае неопределенной формы ds^2 корни уравнения (73) могут быть комплексными, а элементарные делители $(\lambda - \lambda_e)^{m_k}$ непростыми ($m_k > 1$). Общее решение вопроса о приведении пары квадратичных форм с произвольными сигнатурами к каноническому виду над полем вещественных чисел в предположении, что одна из форм невырожденная, было дано А. З. Петровым ([50], см. также [54], § 9). Пользуясь доказанной им теоремой о главных осях тензора, можно указать все возможные в пространстве-времени характеристики Сегре и записать отвечающие им канонические формы $(\bar{g}_{ij})$ и $(\bar{h}_{ij})$ в некотором неголономном ортогональном репере, который будем называть каноническим.

Детальное исследование алгебраической структуры пары квадратичных форм в пространстве-времени было проведено в диссертации В. И. Голикова (см. [54], § 46). Перечислим все возможные при лоренцевой сигнатуре типы тензора h_{ij} и соответствующие канонические формы.

$\chi_1 = \{1111\}$, $\chi_2 = \{(11)11\}$, $\chi_3 = \{(11)(11)\}$, $\chi_4 = \{(111)1\}$, $\chi_5 = \{(1111)\}$. Во всех пяти случаях элементарные делители матрицы (72) простые, а корни уравнения (73) вещественные. В орторепере, построенном на базисе из собственных векторов тензора h_{ij}, канонические формы имеют вид

$$\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{4} e_i dx^{i^2}, \quad \bar{h}_{ij}dx^i dx^j = \sum_{i=1}^{4} e_i \lambda_i dx^{i^2} \quad (e_i = \pm 1), \tag{74}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ — базисы элементарных делителей; $\lambda_1 = \lambda_2$ для χ_2; $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ для χ_3; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ для χ_4 и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ для χ_5.

$\chi_6 = \{11, 1\,\overset{*}{1}\}$, $\chi_7 = \{(11)1\,\overset{*}{1}\}$. Среди корней уравнения (73) имеется пара $\alpha \pm i\beta$ комплексно сопряженных корней. В комплексном орторепере канонические формы определяются равенствами

$$\begin{gathered}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + e_3(dx^{3^2} + dx^{4^2}),\\ \bar{h}_{ij}dx^i dx^j = e_1\lambda_1 dx^{1^2} + e_2\lambda_2 dx^{2^2} +\\ e_3\left((\alpha + i\beta)dx^{3^2} + (\alpha - i\beta)dx^{4^2}\right),\end{gathered} \tag{75}$$

где $e_1 = e_2 = e_3 = -1$; λ_1, λ_2 — вещественные корни уравнения (73); $\lambda_1 = \lambda_2$ для χ_7, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$.

$\chi_8 = \{112\}$, $\chi_9 = \{(11)2\}$, $\chi_{10} = \{1(12)\}$, $\chi_{11} = \{(112)\}$. Все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ вещественные. Имеется непростой элементарный делитель $(\lambda - \lambda_3)^2$, которому соответствует изотропное главное направление. В каноническом орторепере имеем

$$\begin{gathered}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} + e_3(dx^{3^2} - dx^{4^2}),\\ \bar{h}_{ij}dx^i dx^j = e_1\lambda_1 dx^{1^2} + e_2\lambda_2 dx^{2^2} +\\ e_3\left((\lambda_3 + 1)dx^{3^2} + 2dx^3 dx^4 - (\lambda_3 - 1)dx^{4^2}\right),\end{gathered} \tag{76}$$

$e_1 = e_2 = e_3 = -1$; $\lambda_1 = \lambda_2$ для χ_9; $\lambda_2 = \lambda_3$ для χ_{10} и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ для χ_{11}.

$\chi_{12} = \{13\}$, $\chi_{13} = \{(13)\}$. Тензор h_{ij} имеет одно изотропное главное направление. Канонические формы определяются формулами

$$\begin{gathered}\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + e_2(dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2}),\\ \bar{h}_{ij}dx^i dx^j = e_1\lambda_1 dx^{1^2} + e_2\lambda_2 dx^{2^2} +\\ 2e_2 dx^3(dx^2 + dx^4) + e_2\lambda_2(dx^{3^2} - dx^{4^2}),\end{gathered} \tag{77}$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные корни уравнения (73); $\lambda_1 = \lambda_2$ для χ_{13}.

Заметим, что прибавление к тензору h_{ij} слагаемого, пропорционального метрическому тензору g_{ij}, изменяя собственные числа тензора h_{ij}, не меняет его характеристики. Это замечание не теряет силу, если умножить h_{ij} на постоянное ненулевое число.

§ 6. Ковариантно постоянные симметричные тензоры a_{ij} в V^3

26. В этом параграфе определяются все трехмерные псевдоримановы пространства V^3, допускающие ковариантно постоянный тензор $a_{ij} = a_{ji}$: $a_{ij,k} = 0$. Будет доказана

Т е о р е м а 6.1. *Для того чтобы в трехмерном псевдоримановом пространстве* (V^3, g) *существовал ковариантно постоянный симметричный тензор* $a_{ij} \neq const \cdot g_{ij}$, *необходимо и достаточно, чтобы оно допускало ковариантно постоянное векторное поле* φ^i: $\varphi^i_{,j} = 0$.

Доказательство основывается на разбиении пространств V^3 по типам в соответствии с видом характеристики Сегре χ тензора a_{ij} и интегрировании уравнения $a_{ij,k} = 0$ в соответствующем каноническом репере.

Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестной функцией θ:

$$Y_s\theta \equiv \underset{s}{\xi}{}^i(x^1, \ldots, x^n)\frac{\partial\theta}{\partial x^i} = 0 \quad (s = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n),$$

где $\underset{s}{\xi}{}^i$ — компоненты p векторов ортогонального репера $(Y_1, \ldots, Y_n)$, была вполне интегрируемой (полной), т. е. допускала $n - p$ независимых решений $\theta^1, \ldots, \theta^p$, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы ([94], с. 143)

$$[Y_s, Y_t] \equiv Y_sY_t - Y_tY_s = \sum_{r=1}^{n} e_r(\gamma_{rst} - \gamma_{rts})Y_r \quad (s, t = 1, \ldots, p), \tag{78}$$

где

$$\gamma_{ijk} = \underset{i}{\xi}{}_{l,m}\, \underset{j}{\xi}{}^l\, \underset{k}{\xi}{}^m \tag{79}$$

— коэффициенты вращения Риччи ([94], § 30), линейно выражались через операторы системы $Y_1, \ldots, Y_p$ ([93], с. 12).

В V^3 возможны следующие характеристики Сегре тензора a_{ij}: $\{12\}, \{3\}$, $\{111\}$, $\{1,1\,\overset{*}{1}\}$, $\{(12)\}$, $\{(11)1\}$ и $\{(111)\}$. В последнем случае имеем тривиальный результат: $a_{ij} = \mathrm{const}\cdot g_{ij}$. Рассмотрим по порядку остальные характеристики.

$\chi = \{12\}$. Имеется непростой элементарный делитель $(\lambda - \lambda_2)^2$; все характеристические числа вещественные. Канонические формы в (каноническом) орторепере $(Y_k) = \left(\underset{k}{\xi}{}^l \partial_l\right)$ имеют вид [49]

$$\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + e_2 dx^{2^2} - e_2 dx^{3^2},$$

$$\bar{a}_{ij}dx^i dx^j = e_1\lambda_1 dx^{1^2} + e_2\lambda_2 dx^{2^2} + \tag{80}$$

$$e_2\left(dx^{2^2} + 2dx^2dx^3 - (\lambda_2 - 1)dx^{3^2}\right);$$

здесь λ_1, λ_2 — вещественные инварианты, e_1, e_2 равны ± 1. Подставив канонические значения в уравнения $a_{ij,k} = 0$, записанные в инвариантной форме в каноническом орторепере:

$$Y_k\bar{a}_{ij} - \sum_{s=1}^{3}(e_s\bar{a}_{sj}\gamma_{isk} + e_s\bar{a}_{is}\gamma_{jsk}) = 0, \tag{81}$$

получим $\gamma_{ijk} = 0$. Следовательно, рассматриваемое пространство имеет нулевую кривизну. К такому же выводу придем в случаях $\{3\}$, $\{111\}$, $\{1,1\,\overset{*}{1}\}$.

$\chi = \{(12)\}$. Канонические формы определяются формулами (80), в которых следует положить $\lambda_1 = \lambda_2$. Из уравнений (81) найдем $\lambda_1 = \lambda_2 = \mathrm{const}$, $\gamma_{23k} = 0$, $\gamma_{12k} = \gamma_{13k}$ $(k = 1,2,3)$. Составив коммутаторы (78), нетрудно убедиться, что система дифференциальных уравнений $Y_1\theta = (Y_2 - Y_3)\theta = 0$ вполне интегрируемая и имеет одно решение, которое мы обозначим θ^3. Уравнения $Y_1\theta = 0$ и $(Y_2 - Y_3)\theta = 0$ имеют каждое по два независимых решения; пусть это будут соответственно θ^2, θ^3 и θ^1, θ^3. В новой системе координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, получим $\underset{1}{\xi}{}^i = \Phi_1\delta_1^i$, $\underset{2}{\xi}{}^i - \underset{3}{\xi}{}^i = \Phi_2\delta_2^i$, где Φ_1 и Φ_2 — функции переменных x^i. Приравняв коэффициенты при одинаковых производных $\partial_l\theta$ в левых и правых частях равенств (78), получим следующую систему уравнений:

1° $\partial_1\underset{2}{\xi}{}^3 = 0$,

2° $\partial_2 \underset{2}{\xi}^{3} = 0$,
3° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1 \underset{3}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{k}\partial_k \underset{1}{\xi}^{1} = e_1\gamma_{311}\underset{1}{\xi}^{1}$,
4° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1 \underset{2}{\xi}^{1} - \underset{2}{\xi}^{k}\partial_k \underset{1}{\xi}^{1} = e_1\gamma_{211}\underset{1}{\xi}^{1}$,
5° $\underset{2}{\xi}^{k}\partial_k \underset{3}{\xi}^{1} - \underset{3}{\xi}^{k}\partial_k \underset{2}{\xi}^{1} = e_1(\gamma_{123}-\gamma_{132})\underset{1}{\xi}^{1}$,
6° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1 \underset{2}{\xi}^{2} = e_2\gamma_{212}(\underset{2}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{2})$,
7° $\underset{1}{\xi}^{1}\partial_1 \underset{3}{\xi}^{2} = e_2\gamma_{213}(\underset{2}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{2})$,
8° $\underset{2}{\xi}^{k}\partial_k \underset{3}{\xi}^{2} - \underset{3}{\xi}^{k}\partial_k \underset{2}{\xi}^{2} = 0$.

Из первых четырех уравнений найдем $\underset{2}{\xi}^{3} = \underset{3}{\xi}^{3} = \Phi_3(x^3)$, $\underset{1}{\xi}^{1} = \Phi_1(x^1, x^3)$. После преобразования $x^{i'} = \int \Phi_i^{-1} dx^i$ $(i = 1, 2, 3)$, опустив штрихи, получим $\underset{1}{\xi}^{i} = \delta_1^i$, $\underset{2}{\xi}^{i} - \underset{3}{\xi}^{i} = \delta_2^i$, $\underset{2}{\xi}^{3} = 1$. Используя эти равенства, по формуле

$$g^{ij} = \sum_{s=1}^{3} e_s \underset{s}{\xi}^{i} \underset{s}{\xi}^{j},$$

где $e_3 = -e_2$, вычислим компоненты $g^{11} = e_1$, $g^{13} = g^{33} = 0$, $g^{23} = e_2$, $g^{12} = e_2 \underset{2}{\xi}^{1}$ и $g^{22} = e_2(\underset{2}{\xi}^{2} + \underset{3}{\xi}^{2})$. Из уравнения 5° и разности уравнений 6° и 7° следует $\partial_2 \underset{2}{\xi}^{1} = 0$, поэтому $g^{12} = \Phi(x^1, x^3)$. Используя уравнение 8°, найдем $g^{22} = \omega(x^1, x^3)$. Координатное преобразование $x^{i'} = x^i - e_1\delta_2^i \int \Phi dx^1$ обращает g^{12} в нуль, не меняя вида остальных компонент g^{ij}. Вычислив ковариантные компоненты сначала g_{ij}, а затем и $\underset{j}{\xi}_{i}$, с помощью формулы $a_{ij} = \sum_{s,t=1}^{3} e_s e_t \bar{a}_{st} \underset{s}{\xi}_{i} \underset{t}{\xi}_{j}$ окончательно получим

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1 {dx^1}^2 + 2e_2 dx^2 dx^3 + \omega(x^1, x^3) {dx^3}^2,$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = b g_{ij} dx^i dx^j + e_2 {dx^3}^2 \quad (b = \text{const}),$$

где ω — произвольная функция переменных x^1, x^3. Найденная метрика допускает изотропное ковариантно постоянное векторное поле $\varphi^i = \delta_2^i$.

Подобным образом в случае характеристики $\{(11)1\}$ найдем

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1 {dx^1}^2 + e_2\Phi(x^1, x^2){dx^2}^2 + e_3 {dx^3}^2,$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = b\left(e_1 {dx^1}^2 + e_2\Phi(x^1, x^2){dx^2}^2\right) + ce_3 {dx^3}^2 \quad (b, c - \mathrm{const});$$

эта метрика допускает неизотропное ковариантно постоянное векторное поле $\varphi^i = \delta_3^i$.

Полученные результаты дают полное решение указанной в заголовке задачи и доказывают необходимость существования ковариантно постоянного векторного поля (теорема 6.1). Достаточность почти очевидна: если V^3 допускает ковариантно постоянное векторное поле φ^i, то тензор $a_{ij} = \varphi_i\varphi_j$ ковариантно постоянен и не может быть пропорционален метрическому, поскольку ранг матрицы $(\varphi_i\varphi_j)$ равен единице.

§ 7. Ковариантно постоянные векторные поля в пространстве П. А. Широкова

27. В 1926 г. П. А. Широков доказал, что квадратичная форма (собственно) риманова пространства n измерений приводится к виду

$$ds^2 = {x^n}^2 a_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau + {dx^n}^2 \quad (\sigma, \tau = 1, \ldots, n-1), \tag{82}$$

где $a_{\sigma\tau}$ не зависит от координаты x^n [87], если оно допускает решение уравнения [13]

$$\varphi_{,ij} = \alpha g_{ij}, \quad \alpha = \mathrm{const} \neq 0. \tag{83}$$

Этот результат легко распространяется на случай произвольной сигнатуры. Пусть метрический тензор псевдориманова пространства V^n удовлетворяет условию

$$\varphi_{,ij} = g_{ij}. \tag{84}$$

Введем новые независимые (из-за неизотропности вектора $\varphi_{,i}$) переменные $x^{i_1'} = f^{i_1}$, $x^{n'} = e_n\varphi$, где $i_1 = 1, \ldots, n-1$, $e_n = \pm 1$, а функции f^{i_1} координат $x^1, \ldots, x^n$ являются независимыми решениями уравнения $\nabla_1(\varphi, f) \equiv g^{ij}\varphi_{,i}f_{,j} = 0$. В новых координатах основная форма в

[13] Уравнение (83), а также более общее уравнение: $\varphi_{,ij} = \rho g_{ij}$, $\rho \neq \mathrm{const}$, рассматривалось впоследствии целым рядом авторов [146], [61], [71], [42], [44].

V^n примет вид

$$ds^2 = g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + g_{nn} dx^{n^2}$$

(штрихи опущены). Так как при этом $\varphi = e_n x^n$, то из (84) следует

$$g_{nn} = \frac{1}{2} e_n (x^n + c)^{-1}, \quad g_{i_1 j_1} = (x^n + c) \hat{a}_{i_1 j_1},$$

где $c = \mathrm{const}$ и $\partial_n \hat{a}_{i_1 j_1} = 0$. Перейдя от x^n к новой переменной $\int (2|x^n + c|)^{-1/2} dx^n$, будем иметь

$$ds^2 = x^{n^2} a_{i_1 j_1}(x^1, \ldots, x^{n-1}) dx^{i_1} dx^{j_1} + e_n dx^{n^2} \quad (i_1, j_1 = 1, \ldots, n-1). \tag{85}$$

Полученная квадратичная форма имеет тот же вид, что и (82).

Таким образом, *для того чтобы в V^n существовало решение уравнения* (84)*, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат его метрика определялась формулой* (85)*.*

Пространства, метрика которых может быть приведена к виду (85), будем называть *пространствами П. А. Широкова* [14]. Так как метрика $x^{n^2} dy^2 + e_n dx^{n^2}$, присоединенная к (85), имеет нулевую кривизну, то *пространство П. А. Широкова есть* $V(0)$ (§ 4).

Основные свойства пространства (82) были изучены П. А. Широковым в работе [87]. В статье [88] П. А. Широков вновь возвращается к пространству (82), показывая, что оно допускает поле сходящихся направлений $\varphi_{,i}$. Если в пространстве (82) или (85) существуют два поля сходящихся направлений, то они отличаются друг от друга на ковариантно постоянное векторное поле. Как мы увидим далее, четырехмерные пространства П. А. Широкова, в которых существуют два поля сходящихся направлений и, следовательно, ковариантно постоянное векторное поле, обладают наиболее полно представленной проективной группой, включающей изометрические, гомотетические, аффинные и проективные преобразования [15], более того, среди неплоских четырехмерных пространств это единственные пространства, обладающие таким свойством. Справедлива

Л е м м а 7.1. *Пространство П. А. Широкова V^n допускает ковариантно постоянное векторное поле тогда и только тогда, когда его*

[14] Пространства П. А. Широкова принадлежат к эквидистантным пространствам Н. С. Синюкова [61].

[15] Существование гомотетий следует уже из уравнения (82).

метрика в подходящих локальных координатах приводится к одной из форм

$$ds^2 = x^{n^2} a_{i_0 j_0}(x^1, \ldots, x^{n-2}) dx^{i_0} dx^{j_0} + e_{n-1} dx^{n-1^2} + e_n dx^{n^2}, \qquad (86)$$

$$ds^2 = x^{n^2} a_{i_0 j_0}(x^1, \ldots, x^{n-2}) dx^{i_0} dx^{j_0} + 2dx^{n-1} dx^n, \qquad (87)$$

где $i_0, j_0 = 1, \ldots, n-2$, $e_{n-1}, e_n = \pm 1$.

Действительно, если V^n допускает неизотропное ковариантно постоянное векторное поле, то в подходящих координатах его метрика имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2(x^1, \ldots, x^{n-1}) + e_n dx^{n^2},$$

где ds_1^2 есть $(n-1)$-мерная квадратичная форма, $e_n = \pm 1$. Легко показать, что в случае, когда V^n является пространством П. А. Широкова, форма ds_1^2 также определяет $(n-1)$-мерное пространство П. А. Широкова, поэтому фрома ds^2 может быть приведена к виду (86).

Если метрика (85) допускает изотропное ковариантно постоянное векторное поле, то это поле можно представить в виде $\lambda^i = (\psi x^n)_{,}{}^{i}$, где функция ψ переменных x^{i_1} удовлетворяет уравнениям

$$\psi_{|i_1 j_1} + e_n \psi a_{i_1 j_1} = 0, \quad a^{i_1 j_1} \psi_{|i_1} \psi_{|j_1} + e_n \psi^2 = 0$$

(черта означает ковариантную производную относительно метрики $ds_1^2 = a_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1}$). После замены $\psi = e^u$ уравнения примут вид

$$u_{|i_1 j_1} = -e_n a_{i_1 j_1} - u_{|i_1} u_{|j_1}, \quad u_{|i_1} u_|{}^{i_1} = -e_n.$$

Интегрируя их в новых переменных $x^{i_0'} = f^{i_0}$, $x^{n-1'} = u$, где i_0, $j_0 = 1, \ldots, n-2$ и f^{i_0} — независимое решение уравнения $a^{i_1 j_1} u_{|i_1} f^{i_0}{}_{|j_1} = 0$, найдем

$$ds_1^2 = e^{2x^{n-1}} a_{i_0 j_0}(x^1, \ldots, x^{n-2}) dx^{i_0} dx^{j_0} - e_n dx^{n-1^2} \qquad (88)$$

и после преобразования координат

$$x^{i_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{i_0'}, \quad x^{n-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^{n'}}{x^{n-1'}} \right|, \quad x^n = \sqrt{2 \left| e_n x^{n'} x^{n-1'} \right|},$$

опустив штрихи, получим (87).

Запишем для метрики (88) обобщенное уравнение Киллинга для конформного движения $X = \xi^{i_1}\partial_{i_1}$:

$$L_X a_{i_1 j_1} \equiv \xi_{i_1|j_1} + \xi_{j_1|i_1} = \psi a_{i_1 j_1}, \tag{89}$$

где ψ — решение уравнения $\psi_{|i_1 j_1} + e_n \psi a_{i_1 j_1} = 0$. Если положить в уравнении (89) $\xi_{i_1} = \bar{\xi}_{i_1} - (1/2)e_n \psi_{|i_1}$, то оно примет вид уравнения Киллинга $\bar{\xi}_{i_1|j_1} + \bar{\xi}_{j_1|i_1} = 0$ для инфинитезимальной изометрии. Таким образом, если в пространстве (88) действует r-мерная изометрическая алгебра Ли, то оно допускает r независимых конформных движений $X_a = Y_a - (1/2)e_n \psi^{|i_1}\partial_{i_1}$, где $Y_1, \ldots, Y_r$ — базисные изометрии.

Глава 2.

ПРОСТРАНСТВА $\Pi^n(K)$, G^n, Γ^n_p, W^n

§ 8. Определение и свойства пространств $\Pi^n(K)$. Пространства Эйнштейна G^n

28. Как известно, произвольное проективное движение $X = \xi^i \partial_i$ в пространстве S^n постоянной кривизны K удовлетворяет условию ([94], с. 276):
$$KL_X g_{ij} + \varphi_{,ij} = 0, \tag{90}$$
где g_{ij} — метрический тензор, φ — определяющая функция. Естественно возникает вопрос: исчерпывается ли круг пространств, обладающих этим свойством, пространствами постоянной кривизны и, если нет, то каковы эти пространства? Выясняется, что существуют обширные классы псевдоримановых пространств непостоянной кривизны как определенной метрики (пространства $V(K)$), так и неопределенных метрик (пространства Эйнштейна, K-пространства (гл. 4)), произвольное проективное движение которых удовлетворяет условию (90), причем среди всех других пространств данной размерности, не имеющих постоянной кривизны, эти пространства обладают наибольшей проективной подвижностью.

Как мы увидим, свойство, выраженное равенством (90), позволяет сделать важные выводы о характере и строении проективной группы в V^n и в случае $K \neq 0$ указать алгоритм для определения максимальной проективной группы. Поэтому имеет смысл объединить пространства, обладающие указанным свойством, под общим названием. Введем

О п р е д е л е н и е 8.1. *Псевдориманово пространство V^n называется пространством $\Pi^n(K)$, если произвольное проективное движение в нем удовлетворяет условию* (90).

Из предыдущего следует, что множество пространств $\Pi^n(K)$ не является пустым. В частности, всякое $S^n(K)$ есть $\Pi^n(K)$.

Подставив (90) в (52), найдем

$$\varphi_{,ijk} + K(2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}) = 0. \tag{91}$$

Условия интегрируемости этих уравнений

$$\varphi_{,h}\Pi^h_{ijk} = 0, \quad \varphi_{,ih}\Pi^h_{jkl} + \varphi_{,jh}\Pi^h_{ikl} = 0, \tag{92}$$

где

$$\Pi^h_{ikl} \equiv R^h_{ikl} + K(\delta^h_l g_{ik} - \delta^h_k g_{il}), \tag{93}$$

выполняются тождественно для пространств постоянной кривизны (см. п. 11). Свертывая первое из уравнений (92) по индексам i, k, получим

$$(R_{hj} + (1-n)Kg_{hj})\,\varphi^h_{,} = 0. \tag{94}$$

Отсюда видно, что всякое решение уравнения (91) определяет главное направление тензора Риччи с постоянным главным инвариантом ([94], § 33), равным $(n-1)K$.

Если в (90) $K = 0$, то $\varphi_{,ij} = 0$, и из (57) следует $L_X R^i_{jkl} = 0$. Если $K \neq 0$ и $\varphi = \mathrm{const}$, то для любого аффинного движения в $\varphi^n(K)$ выполняются уравнения Киллинга $L_X g_{ij} = 0$.

Если при $K \neq 0$ положить

$$\xi_i = \bar{\xi}_i - \frac{1}{2K}\varphi_{,i},$$

где φ — произвольное решение уравнения (91), то равенства (90) примут вид $\bar{\xi}_{(i,j)} = 0$. Следовательно, справедливы три теоремы.

Т е о р е м а 8.1. *Произвольное проективное движение X в $\Pi^n(K)$ при $K = 0$ сохраняет тензор кривизны: $L_X R^i_{jkl} = 0$. Для того чтобы пространство $\Pi^n(K)$ при $K = 0$ допускало неаффинное проективное преобразование, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало ковариантно постоянное векторное поле.*

Т е о р е м а 8.2. *Аффинная группа в $\Pi^n(K)$ при $K \neq 0$ есть группа изометрий.*

Т е о р е м а 8.3. *Любое проективное движение $\xi^i\partial_i$ в $\Pi^n(K)$ при $K \neq 0$ можно представить в виде*

$$\xi^i\partial_i = \left(\bar{\xi}^i - \frac{1}{2K}\varphi^i_{,}\right)\partial_i, \tag{95}$$

где $\bar{\xi}^i\partial_i$ задает изометрическое движение, а φ — решение уравнения (91).

Таким образом, если пространство $\Pi^n(K)$ при $K \neq 0$ допускает r-мерную изометрическую алгебру Ли I_r, то каждому решению уравнения (91) соответствуют r линейно независимых проективных движений (95). Этот результат хорошо известен для пространств постоянной кривизны ([94], с. 277).

Наоборот, пусть $\Pi^n(K)$ при $K \neq 0$ допускает r линейно независимых неаффинных проективных движений. Сколько из них существенно разных, т. е. таких, которые не могут быть получены друг из друга прибавлением некоторого изометрического движения? Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 8.4. *Если пространство* $\Pi^n(K)$ *при* $K \neq 0$ *допускает максимальную проективную алгебру Ли* P_r *и общее решение уравнения* (91) *имеет вид* [1]

$$\varphi_{,i} = \sum_{\alpha=1}^{\tau} a^\alpha \underset{\alpha}{\varphi}_{,i}, \tag{96}$$

где a^α *— произвольные постоянные и* $\underset{\alpha}{\varphi}_{,1}, \ldots, \underset{\alpha}{\varphi}_{,\tau}$ *линейно независимы, то* P_r *имеет аффинную подалгебру* $A_{r-\tau}$ *размерности* $r - \tau$, *совпадающую с алгеброй Ли* $I_{r-\tau}$ *инфинитезимальных изометрий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 8.3 базисные векторы в P_r можно представить в виде

$$\underset{a}{\xi}_i = \underset{a}{\bar{\xi}}_i - \frac{1}{2K} \sum_{\alpha=1}^{\tau} \underset{a}{c}^{\alpha} \underset{\alpha}{\varphi}_{,i}, \tag{97}$$

где $a = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, n$; $\underset{a}{c}^{\alpha}$ — постоянные, $\underset{a}{\bar{\xi}}_i$ задают изометрические движения. Покажем, что ранг Rk матрицы $(\underset{a}{c}^{\alpha})$ равен τ. Действительно, каждому нетривиальному решению уравнения (91) отвечает неаффинное проективное движение, например,

$$\xi^i = -\frac{1}{2K}\varphi,^i.$$

Если ранг Rk меньше τ, то в общем решении уравнения (91) найдется такая функция φ, что соответствующее ей проективное движение будет отсутствовать среди проективных движений, построенных на базисе (97) и, вопреки условию теоремы, алгебра Ли P_r не будет максимальной.

[1]Вследствие линейности уравнения (91) это условие не накладывает дополнительных ограничений.

Пусть для определенности $\det(\underset{\beta}{c}{}^{\alpha}) \neq 0$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, \tau$ (этого всегда можно достигнуть с помощью перенумерации базисных векторов). Введем новый базис:

$$\begin{gathered} \underset{\alpha}{\xi}{}^{i\prime} = \underset{\alpha}{\xi}{}^{i} \quad (\alpha = 1, \ldots, \tau), \\ \underset{b}{\xi}{}^{i\prime} = \underset{b}{\xi}{}^{i} - \textstyle\sum_{\alpha=1}^{\tau} \underset{b}{k}{}^{\alpha} \underset{\alpha}{\xi}{}^{i} \quad (b = \tau + 1, \ldots, r), \end{gathered} \tag{98}$$

где $\underset{b}{k}{}^{\alpha}$ удовлетворяют системе уравнений $\underset{b}{c}{}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{\tau} \underset{b}{k}{}^{\beta} \underset{\beta}{c}{}^{\alpha}$. Покажем, что векторы $\underset{k}{\xi}{}^{i\prime}$ линейно независимы. Предположим обратное:

$$\sum_{\alpha=1}^{\tau} l^{\alpha} \underset{\alpha}{\xi}{}^{i\prime} + \sum_{b=\tau+1}^{r} l^{b} \underset{b}{\xi}{}^{i\prime} = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{\tau} \left(l^{\alpha} - \sum_{b=\tau+1}^{r} l^{b} \underset{b}{k}{}^{\alpha} \right) \underset{\alpha}{\xi}{}^{i} + \sum_{b=\tau+1}^{r} l^{b} \underset{b}{\xi}{}^{i} = 0,$$

Так как векторы $\underset{k}{\xi}{}^{i}$ независимы, то $l^b = l^{\alpha} = 0$.

Подставив (97) в (98), найдем

$$\underset{b}{\xi}{}^{i\prime} = \underset{b}{\bar{\xi}}{}^{i} - \sum_{\alpha=1}^{\tau} \underset{b}{k}{}^{\alpha} \underset{\alpha}{\bar{\xi}}{}^{i} \quad (b = \tau + 1, \ldots, r).$$

Это означает, что $r - \tau$ векторов нового базиса определяют изометрии. Так как $\underset{b}{\xi}{}_{(i,j)}{}' \neq 0$ при $\alpha = 1, \ldots, \tau$ согласно сделанному предположению $\det(\underset{\beta}{c}{}^{\alpha}) \neq 0$, то эти $r - \tau$ независимых движений порождают максимальную изометрическую алгебру Ли $I_{r-\tau}$. Вследствие теоремы 8.2 аффинная алгебра Ли совпадает с $I_{r-\tau}$.

С л е д с т в и е 8.1. *Если известно общее решение* (96) *уравнения* (91) *в пространстве* $\Pi_n(K)$, $K \neq 0$, *то для построения максимальной проективной алгебры Ли в этом пространстве достаточно найти изометрическую алгебру Ли и присоединить к ее базису* τ *линейно независимых проективных движений, которые можно выбрать в виде*

$$X_{\alpha} = \underset{\alpha}{\varphi}{}_{,}{}^{i} \partial_i \quad (\alpha = 1, \ldots, \tau). \tag{99}$$

Таким образом, определение максимальной проективной алгебры Ли в $\Pi_n(K)$ при $K \neq 0$ сводится к нахождению общего решения уравнения (91). Интегрирование этого уравнения для заданного пространства несравненно проще, чем интегрирование уравнения (52), так как последнее содержит $n(n+1)/2+1$ неизвестных ($L_X g_{ij}$, φ), а первое — только одно (φ). Кроме того, эта задача существенно облегчается использованием весьма простых условий интегрируемости (92).

Отметим, что в соответствии с формулой (94) тензор Риччи пространства $\Pi_n(K)$ из теоремы 8.4 имеет τ независимых главных направлений, определяемых собственными векторами $\underset{\alpha}{\varphi},{}^i$ с одним и тем же постоянным собственным числом $(n-1)K$. Следовательно, траектории 1-параметрических групп, порожденных проективными движениями (99), являются главными конгруэнциями тензора Риччи.

Приведенные выше результаты решают в принципе вопрос о проективных движениях в пространстве $\Pi_n(K)$ при $K \neq 0$.

В случае $K = 0$ задача определения максимальной проективной алгебры Ли сводится к нахождению всех существующих в $\Pi_n(0)$ ковариантно постоянных векторных полей $\varphi_{,i}$ и симметричных билинейных форм $a_{ij} = L_X g_{ij} \neq c g_{ij}$.

Рассмотрим в качестве приложения пространства Эйнштейна G^n, $n > 2$, произвольной сигнатуры, определенные уравнениями

$$R_{ij} = \kappa g_{ij}, \tag{100}$$

где $\kappa = R/n = \mathrm{const}, R = R^i{}_i$ — скалярная кривизна. Подставив (100) в (50), найдем

$$\kappa L_X g_{lj} = -(n-1)\varphi_{,lj}.$$

Это уравнение совпадает с (90) при $K = \kappa/(n-1)$. Доказана

Т е о р е м а 8.5. *Всякое пространство Эйнштейна G^n, $n > 2$, есть $\Pi^n(K)$ с $K = R/[n(n-1)]$.*

Как следствие, пространства Эйнштейна G^n, $n > 2$, обладают всеми свойствами пространств $\Pi^n(K)$, в частности, имеют место следующие теоремы [112], [2].

Т е о р е м а 8.6. *Всякое аффинное движение пространства Эйнштейна G^n, $n > 2$, с отличной от нуля скалярной кривизной R есть изометрическое движение.*

Т е о р е м а 8.7. *Всякое проективное движение пространства Эйнштейна G^n, $n > 2$, с нулевой скалярной кривизной $R = 0$ удовлетворяет условию $L_X R^i{}_{jkl} = 0$; для того чтобы пространство допускало* *неаффинное проективное движение, необходимо, чтобы в нем существовало ковариантно постоянное векторное поле.*

Два последних результата были в разной форме и с различных позиций одновременно и независимо получены автором [2] и группой американских ученых [112].

Применим полученные результаты к пространствам Эйнштейна четырех измерений лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$, которые, как известно, описывают свободные ($\kappa = 0$) и однородные ($\kappa \neq 0$) поля тяготения.

Используя канонические формы Петрова для тензора кривизны ([53], с. 136—142) и учитывая, что в пространстве Эйнштейна G^n, $n > 2$, тензор Π^i_{jkl} (93), где следует положить $K = \kappa/(n-1)$, совпадает с тензором проективной кривизны ${W^i}_{jkl}$ (30), запишем в неголономном орторепере условия интегрируемости (92) уравнений (91) для $\kappa \neq 0$ (пространства T_i^*)

$$\varphi_{,h}{W^h}_{ijk} = 0, \quad \varphi_{,ih}{W^h}_{jkl} + \varphi_{,jh}{W^h}_{ikl} = 0$$

и уравнения $L_X {R^i}_{jkl} = 0$ для $\kappa = 0$ (пространства T_i). Анализ этих уравнений приводит к известному выводу В. И. Голикова [20] о том, что проективные движения пространств T_i ($\kappa = 0$) сводятся к гомотетиям, а пространств T_i^* ($\kappa \neq 0$) — к аффинным движениям, если только T_i^* и T_i не имеют постоянной кривизны. Используя теорему 8.6, получим утверждение:

Т е о р е м а 8.8. *Всякое проективное движение пространств Эйнштейна G^4 сигнатуры $(- - -+)$ непостоянной кривизны есть изометрическое движение, если скалярная кривизна пространства отлична от нуля, и гомотетическое движение в противном случае.*

В гл. 4 будет показано, что всякое пространство-время, допускающее ковариантно постоянное векторное поле, есть $\Pi^4(0)$. Обсудим в связи с этим некоторые групповые свойства пространств, допускающих ковариантно постоянные векторные поля.

§ 9. Определение и свойства пространств Γ_p^n

29. Предположим, что в V^n существуют p независимых ковариантно постоянных векторных полей

$$\underset{\alpha}{\lambda}{}^i = \underset{\alpha}{\lambda}{}_{,}{}^i, \quad \underset{\alpha}{\lambda}{}_{,ij} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, p). \tag{101}$$

Составим $p(p+1)/2$ ковариантно постоянных симметричных тензоров

$$\underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij} = \underset{\alpha}{\lambda}{}_i \underset{\beta}{\lambda}{}_j + \underset{\beta}{\lambda}{}_i \underset{\alpha}{\lambda}{}_j \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots, p). \tag{102}$$

В новых координатах $x^{i'} = \underset{i}{\lambda}(x^1, \dots, x^n)$, где функции $\underset{p+1}{\lambda}, \dots, \underset{n}{\lambda}$ выбраны так, чтобы выполнялось условие $\det\left(\partial_j \underset{i}{\lambda}\right) \neq 0$, опустив штрихи, получим $\underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij} = \delta^\alpha_i \delta^\beta_j + \delta^\beta_i \delta^\alpha_j$, отсюда следует линейная независимость тензоров $\underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij}$.

Учитывая равенство $\underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij,k} = 0$, запишем обобщенные уравнения Киллинга для аффинных движений (п. 21): $L_X g_{ij} = 2 \underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij}$. Нетрудно видеть, что векторы

$$\underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i = \underset{\alpha}{\lambda}\underset{\beta}{\lambda}{}^i + \underset{\beta}{\lambda}\underset{\alpha}{\lambda}{}^i \tag{103}$$

удовлетворяют этим уравнениям и, следовательно, определяют аффинные движения. Если векторы $\underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i$ линейно зависимы, то выполняется равенство $\sum_{(\alpha\beta)} p^{(\alpha\beta)} \underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}_i = 0$, где, по меньшей мере, одна из постоянных $p^{(\alpha\beta)}$ отлична от нуля. Дифференцируя это равенство ковариантно по x^j и симметрируя по индексам i, j, получим

$$\sum_{(\alpha\beta)} p^{(\alpha\beta)} L_{\underset{(\alpha\beta)}{\xi}} g_{ij} = 2 \sum_{(\alpha\beta)} p^{(\alpha\beta)} \underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij} = 0.$$

Так как это противоречит линейной независимости тензоров $\underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij}$, то векторы $\underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i$ линейно независимы. Ранг любого из тензоров (102) не превосходит число 2, поэтому при $n > 2$ эти тензоры не могут быть пропорциональны метрическому тензору g_{ij}. Следовательно, все аффинные движения (103) при $n > 2$ не являются гомотетическими. Доказана

Т е о р е м а 9.1. *Если в псевдоримановом пространстве* V^n $(n > 2)$ *существуют* p *независимых ковариантно постоянных векторных полей* (101), *то оно допускает* $p(p+1)/2$ *линейно независимых негомотетических аффинных движений*

$$\underset{a}{X}{}_{(\alpha\beta)} = (\underset{\alpha}{\lambda}\underset{\beta}{\lambda}{}^i + \underset{\beta}{\lambda}\underset{\alpha}{\lambda}{}^i)\partial_i \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, p; (\alpha\beta) = 1, \dots, p(p+1)/2); \tag{104}$$

здесь предполагается, что пары $(\alpha\beta)$ *расположены в определенном порядке и пронумерованы; буква а в символе* $\underset{a}{X}$ *отмечает негомотетический аффинный характер движения.*

О п р е д е л е н и е 9.1. *Пусть* $\underset{1}{\lambda}{}^i, \ldots, \underset{p}{\lambda}{}^i$ — *ковариантно постоянные векторные поля в псевдоримановом пространстве* V^n, $n > 2$. *Если* $p(p+1)/2$ *тензоров* (102) *вместе с метрическим тензором* g_{ij} *образуют базис ковариантно постоянных симметричных тензоров* h_{ij} *в* V^n, *то* V^n *называется пространством* Γ^n_p.

При $p = n$ пространство Γ^n_p является плоским. Забегая вперед, укажем, что всякое неплоское пространство-время, допускающее два независимых ковариантно постоянных векторных поля, есть Γ^4_2, причем эти пространства оказываются максимально подвижными с проективно-групповой точки зрения среди всех других пространств непостоянной кривизны, определяемых полями тяготения, и допускают важную физическую интерпретацию. Поэтому определенный выше класс пространств Γ^n_p не является пустым и заслуживает внимательного изучения.

Для любого аффинного движения X в (Γ^n_p, g_{ij}) производная Ли $L_X g_{ij}$, будучи ковариантно постоянной, представляется в виде разложения

$$L_X g_{ij} = \sum_{(\alpha\beta)=1}^{p(p+1)/2} c^{(\alpha\beta)} \underset{(\alpha\beta)}{a}{}_{ij} + c g_{ij}$$

с постоянными $c^{(\alpha\beta)}$ и c. Если положить здесь

$$\xi^i = \eta^i + \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta)=1}^{p(p+1)/2} c^{(\alpha\beta)} \underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i,$$

то получим $L_\eta g_{ij} = c g_{ij}$. Следовательно, вектор η^i определяет инфинитезимальную гомотетию. Поэтому справедлива

Т е о р е м а 9.2. *Произвольное аффинное движение* $X = \xi^i \partial_i$ *в* Γ^n_p $(n > 2)$ *можно представить в виде суммы*

$$\xi^i \partial_i = \eta^i \partial_i + \frac{1}{2} \sum_{(\alpha\beta)=1}^{p(p+1)/2} c^{(\alpha\beta)} \underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i \partial_i,$$

где $c^{(\alpha\beta)}$ — *const,* $\eta^i \partial_i$ — *инфинитезимальная гомотетия в* Γ^n_p, *а* $\underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i$ *задается формулой* (103).

Пусть пространство Γ^n_p допускает максимальную аффинную алгебру Ли A_r, где в силу теоремы 9.1 r не может быть меньше $p(p+1)/2$. По теореме 9.2 базисные векторы в A_r можно представить в виде

$$\underset{a}{\xi}{}^i\partial_i = \underset{a}{\eta}{}^i\partial_i + \frac{1}{2}\sum_{(\alpha\beta)=1}^{p(p+1)/2} \overset{(\alpha\beta)}{\underset{a}{c}} \underset{(\alpha\beta)}{\xi}{}^i\partial_i, \tag{105}$$

где $\underset{a}{\eta}{}^i\partial_i$ — гомотетия, $\overset{(\alpha\beta)}{\underset{a}{c}} = \mathrm{const}$, $a = 1, \ldots, r$; $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что ранг матрицы $\left(\overset{(\alpha\beta)}{\underset{a}{c}}\right)$ равен $\tau \equiv p(p+1)/2$, так как A_r содержит аффинные движения (104). С помощью перенумерации базисных векторов всегда можно добиться выполнения условия $\det\left(\underset{\gamma}{c}{}^{(\alpha\beta)}\right) \neq 0$ для $(\alpha, \beta), \gamma = 1, \ldots, \tau$.

Введем новый базис в A_r, определив его равенствами (98), где $\underset{b}{k}{}^\gamma$ удовлетворяют системе уравнений

$$\underset{b}{c}{}^{(\alpha\beta)} = \sum_{\gamma=1}^{\tau} \underset{b}{k}{}^\gamma \overset{(\alpha\beta)}{\underset{\gamma}{c}} \quad ((\alpha\beta) = 1, \ldots, \tau; b = \tau+1, \ldots, r).$$

Заменив в (98) $\underset{a}{\xi}{}^i$ по формулам (105), получим

$$\underset{b}{\xi}{}^{i\prime} = \underset{b}{\eta}{}^i - \sum_{\gamma=1}^{\tau} \underset{b}{k}{}^\gamma \underset{\gamma}{\eta}{}^i \quad (b = \tau+1, \ldots, r).$$

Следовательно, $r - \tau = r - p(p+1)/2$ векторов нового базиса задают гомотетии, которые порождают максимальную гомотетическую алгебру Ли в Γ^n_p ввиду предположения о неравенстве нулю определителя $|\underset{\gamma}{c}{}^{(\alpha\beta)}|$. Поэтому для определения A_r достаточно найти алгебру Ли $H_{r-\tau}$ гомотетий в Γ^n_p и присоединить к ее базису $p(p+1)/2$ аффинных движений (104). Доказана

Т е о р е м а 9.3. *Максимальная аффинная алгебра Ли A_r в Γ^n_p, $n > 2$, содержит гомотетическую подалгебру Ли $H_{r-p(p+1)/2}$. Базис алгебры Ли A_r получается присоединением генераторов* (104) *к генераторам Y_i, $i = p(p+1)/2+1, \ldots, r$, подалгебры $H_{r-p(p+1)/2}$.*

§ 10. Проективно-рекуррентные пространства W^n

30. Псевдориманово пространство V^n называется *проективно-рекуррентным пространством* и обозначается символом W^n, если его тензор проективной кривизны (30)

$$W^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(\delta^i_k R_{jl} - \delta^i_l R_{jk})$$

удовлетворяет условию

$$W^i_{jkl,m} = u_m W^i_{jkl}, \tag{106}$$

где u_m — вектор рекуррентности.

Нетрудно видеть, что *симметрические* ($R^i_{jkl,m} = 0$), *проективно-симметрические* ($W^i_{jkl,m} = 0$) и *рекуррентные* ($R^i_{jkl,m} = \lambda_m R^i_{jkl}$) пространства (см. § 4) являются проективно-рекуррентными.

Пусть W^n допускает проективное движение $X = \xi^i \partial_i$. В соответствии с формулами (49) и (51) имеем

$$L_X \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_{,k} + \delta^i_k \varphi_{,j}, \tag{107}$$

$$L_X W^i_{jkl} = 0. \tag{108}$$

Дифференцируя последнее уравнение ковариантно по x^m и используя коммутационные соотношения (44) для лиевой и ковариантной производных, вследствие (107) и (108) получим

$$L_X W^i_{jkl,m} = \delta^i_m \varphi_{,h} W^h_{jkl} - 2\varphi_{,m} W^i_{jkl} - \varphi_{,j} W^i_{mkl} - \varphi_{,k} W^i_{jml} - \varphi_{,l} W^i_{jkm}. \tag{109}$$

Если взять производную Ли вдоль X от обеих частей равенства (106) и воспользоваться условием (108), то придем к равенству

$$L_X W^i_{jkl,m} = v_m W^i_{jkl}, \tag{110}$$

где $v_m = L_X u_m$. Подставив (110) в (109), найдем

$$v_m W^i_{jkl} = \delta^i_m \varphi_{,h} W^h_{jkl} - 2\varphi_{,m} W^i_{jkl} - \varphi_{,j} W^i_{mkl} - \varphi_{,k} W^i_{jml} - \varphi_{,l} W^i_{jkm}. \tag{111}$$

Опустив в последнем уравнении индекс i и симметрируя по индексам i, j, получим

$$\varphi_{,h} g_{mi} W^h_{jkl} + \varphi_{,h} g_{mj} W^h_{ikl} - \varphi_{,i} W_{jmkl} - \varphi_{,j} W_{imkl} = 0. \tag{112}$$

Свертывая это уравнение по индексам i, m, будем иметь

$$(n+2)\varphi_{,h}W^h_{jkl} = 0,$$

тогда (112) примет вид

$$\varphi_{,i}W_{jmkl} + \varphi_{,j}W_{imkl} = 0.$$

Возникает альтернатива: либо $\varphi_{,i} = 0$ и проективное движение сохраняет аффинную связность, либо $W_{ijkl} = 0$ и W^n при $n > 2$ является S^n (§ 1). Доказана

Теорема 10.1. *Проективно-рекуррентные пространства W^n размерности $n > 2$ произвольной сигнатуры непостоянной кривизны не допускают проективных движений, отличных от аффинных.*

Из теорем 10.1 и 8.6 следует утверждение:

Теорема 10.2. *Максимальная проективная группа во всяком проективно-рекуррентном пространстве Эйнштейна G^n размерности $n > 2$ непостоянной кривизны с нулевой скалярной кривизной есть группа изометрий.*

Положив в (111) $\varphi_{,i} = 0$, найдем $v_m W^i_{jkl} = 0$, отсюда $v_m = 0$, если $W^i_{jkl} \neq 0$. Таким образом, если проективно-рекуррентное пространство W^n размерности $n > 2$ непостоянной кривизны допускает аффинное движение $X = \xi^i\partial_i$, то выполняется равенство $L_X u_m = 0$, где u_m — вектор рекуррентности (см. (106)). Отметим, что для рекуррентных пространств с вектором рекуррентности λ_m это условие принимает особенно простую форму $\xi^i\lambda_i = \mathrm{const}$.

Рассмотрим в качестве примера пространства-времена ненулевой кривизны, допускающие два (максимальное число) независимых ковариантно постоянных векторных поля. Результаты, полученные в §§ 9, 10, позволяют легко решить вопрос о максимальных проективных алгебрах Ли в этих пространствах.

В. Р. Кайгородов [39] показал, что пространства с основными формами

$$ds^2 = -\sigma^2(x^1, x^2)dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} + dx^{4^2}, \tag{113}$$

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{2^2} - \tau^2(x^3, x^4)dx^{3^2} + dx^{4^2}, \tag{114}$$

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 - dx^{2^2} - dx^{3^2} + \gamma^2(x^3, x^4)dx^{4^2}, \tag{115}$$

где $\sigma(x^1, x^2), \tau(x^3, x^4), \gamma(x^3, x^4)$ — произвольные функции указанных переменных, являются рекуррентными, в частности, при специальном выборе функций σ, τ, γ, симметрическими.

Докажем, что *метрика всякого пространства-времени, допускающего два независимых ковариантно постоянных векторных поля, может быть приведена к одной из форм* (113)—(115).

Легко обнаружить (ср. [141]), что метрическая форма пространства-времени, в котором существуют два независимых ковариантно постоянных векторных поля, с помощью координатных преобразований всегда может быть приведена к одной из двух форм:

$$ds^2 = dl^2 + e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},$$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + 2dx^2 dx^3 - dx^{4^2} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{116}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — функции x^1, x^2, $g_{11} < 0$, e_3, e_4 равны ± 1 и выбираются таким образом, чтобы сигнатура была $(- - -+)$, dl^2 — двумерная метрическая форма переменных x^1, x^2, определяющая некоторое V^2. Выбрав в V^2 полугеодезическую систему координат, будем иметь

$$ds^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2} + e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2} \quad (e_1, e_2 = \pm 1). \tag{117}$$

Принимая во внимание сигнатуру пространства, получим форму (113) либо (114).

Обратимся к форме (116). В новых координатах

$$x^{1'} = f^1(x^1, x^2),\ x^{2'} = x^2,\ x^{3'} = x^3 + f^3(x^1, x^2),\ x^{4'} = x^4,$$

где f^1 и f^3 — решения системы дифференциальных уравнений Коши-Ковалевской ([76], § 1):

$$\partial_1 f^1 = \sqrt{-g_{11}}, \quad \partial_1 f^3 = \sqrt{-g_{11}} g^{\alpha 3} \partial_\alpha f^1 \quad (\alpha = 1, 2),$$

форма (116) принимает вид

$$ds^2 = -dx^{1^2} + \theta(x^1, x^2) dx^{2^2} + 2dx^2 dx^3 - dx^{4^2} \tag{118}$$

и приводится к (115). Отсюда следует

Т е о р е м а 10.3. *Если пространство-время допускает два линейно независимых ковариантно постоянных векторных поля, то оно является рекуррентным либо симметрическим пространством.*

Используя теоремы 10.1, 10.3 и тот легко проверяемый факт, что всякое пространство постоянной римановой кривизны K, допускающее параллельное векторное поле, является плоским ($K = 0$), получим следующее утверждение.

Т е о р е м а 10.4. *Максимальная проективная алгебра Ли во всяком неплоском пространстве-времени, допускающем два линейно независимых ковариантно постоянных векторных поля, является аффинной алгеброй Ли.*

Вопрос об аффинных движениях в рассматриваемых пространствах в принципе решает

Т е о р е м а 10.5. *Всякое неплоское пространство-время, допускающее два линейно независимых ковариантно постоянных векторных поля, есть* Γ_4^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с предыдущим необходимо рассмотреть метрики (117) и (118); последнюю метрику запишем в эквивалентной форме

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{3^2} - 2dx^2dx^4 + \theta(x^1, x^4)dx^{4^2}. \tag{119}$$

Каждая из метрик (117), (119) допускает два ковариантно постоянных векторных поля

$$\underset{1}{\lambda}_i \equiv \underset{1}{\lambda}_{,i} \equiv (x^3)_{,i} = \delta_i^3, \quad \underset{2}{\lambda}_i \equiv \underset{2}{\lambda}_{,i} \equiv (x^4)_{,i} = \delta_i^4 \tag{120}$$

и, следовательно, три ковариантно постоянных тензорных поля (106):

$$\underset{1}{a}_{ij} = 2\delta_i^3\delta_j^3, \quad \underset{2}{a}_{ij} = 2\delta_i^4\delta_j^4, \quad \underset{3}{a}_{ij} = \delta_i^3\delta_j^4 + \delta_j^3\delta_i^4.$$

Покажем, что эти тензоры образуют вместе с метрическими тензорами базисы ковариантно постоянных симметричных тензоров валентности два в рассматриваемых пространствах ненулевой кривизны.

Простые вычисления показывают, что из компонент тензора кривизны метрики (117) не равны нулю только

$$R^\alpha_{\beta\alpha\beta} = g_{\beta\beta}(g_{\alpha\alpha})^{-1}R^\beta_{\alpha\beta\alpha},$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$, а ненулевые компоненты тензора кривизны метрики (119) есть $R^1_{414} = R^2_{141} = (1/2)\partial_{11}\theta$. Следовательно, метрика (117) имеет постоянную нулевую кривизну тогда и только тогда, когда $R^\alpha_{\beta\alpha\beta} = 0$ при $\alpha, \beta = 1, 2$, а метрика (119) плоская, если и только если $\partial_{11}\theta = 0$.

Условия интегрируемости уравнений $h_{ij,k} = 0$ имеют вид

$$h_{mi}R^m_{jkl} + h_{mj}R^m_{ikl} = 0. \tag{121}$$

Пусть здесь R^m_{ikl} — тензор кривизны метрики (117). Положив $i = l = \beta, j = \mu, k = \alpha$, найдем $h_{\alpha\mu}R^\alpha_{\beta\beta\alpha} = 0$ (не суммировать) при $\alpha, \beta = 1, 2,\ \mu = 3, 4$. Если $h_{\alpha\mu} \neq 0$, то $R^\alpha_{\beta\alpha\beta} = 0$, и метрика (117) плоская, поэтому $h_{\alpha\mu} = 0$ при $\alpha = 1, 2,\ \mu = 3, 4$. Точно так же, положив $i = j = k = \alpha,\ l = \beta$ в (121), получим $h_{12} = 0$.

Аналогично, используя условие $\partial_{11}\theta \neq 0$, для метрики (119) из (121) найдем $h_{1i} = h_{11}\delta^1_i,\ h_{2i} = h_{11}\delta^4_i$. Далее уравнения $h_{ij,k} = 0$ легко интегрируются для обеих метрик; в результате получим, что любой ковариантно постоянный симметричный тензор h_{ij} в (117) и (119) определяется равенством

$$h_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} c^\alpha \underset{\alpha}{a}_{ij} + cg_{ij} \quad (c^\alpha, c - \mathrm{const}).$$

Поскольку тензоры $\underset{\alpha}{a}_{ij}$, g_{ij} линейно независимы для каждого из пространств (117) и (119), они образуют базисы ковариантно постоянных двухвалентных тензоров $h_{ij} = h_{ji}$ в этих пространствах, которые поэтому являются пространствами Γ^2_4.

Подставив (120) в (104), получим негомотетические аффинные движения

$$\underset{a}{X}_1 = x^3 p_3, \quad \underset{a}{X}_2 = x^4 p_4, \quad \underset{a}{X}_3 = e_3 x^4 p_3 + e_4 x^3 p_4 \tag{122}$$

в пространстве (117) и

$$\underset{a}{X}_1 = x^3 p_3, \quad \underset{a}{X}_2 = x^4 p_2, \quad \underset{a}{X}_3 = x^4 p_3 + x^3 p_2 \qquad (p_i \equiv \partial_i) \tag{123}$$

в пространстве (119). В соответствии с теоремой 9.3 максимальные аффинные алгебры Ли в этих пространствах содержат еще только гомотетии, которые будут определены в гл. 6.

Вопрос о негомотетических проективных движениях в V^4 сигнатуры -2, допускающих два ковариантно постоянных векторных поля, полностью решен.

Глава 3.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЗЕНХАРТА. H-ПРОСТРАНСТВА

Как указывалось во введении, целью данного исследования является определение всех четырехмерных пространств-времен, т. е. всех псевдоримановых многообразий V^4 лоренцевой сигнатуры $(- - -+)$ четырех измерений, допускающих алгебры Ли инфинитезимальных проективных (в частности, аффинных) преобразований, более широкие, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Так как всякая r-мерная алгебра Ли обязательно содержит одномерную подалгебру, а уравнения, определяющие одномерную проективную алгебру Ли, имеют вид (52):

$$(L_X g_{ij})_{,k} \equiv (\xi_{i,j} + \xi_{j,i})_{,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i},$$

то в первую очередь необходимо определить те пространства (V^4, g_{ij}), для которых эти уравнения имеют решения (X, φ).

Излагаемая ниже классификация пространств-времен, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g_{ij}$ метрики g_{ij} в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq V^4$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g_{ij}$. Тип тензора $L_X g_{ij}$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g_{ij} в области V. При этом уравнения (52) разбиваются на две группы — уравнения Эйзенхарта (54)

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}$$

и обобщенные уравнения Киллинга (53)

$$L_X g_{ij} \equiv \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij}.$$

Наша первая задача заключается в нахождении для всех типов пространств-времен, определяемых характеристикой χ тензора h_{ij}, метрик, допускающих нетривиальные решения $h_{ij} \neq c g_{ij}$ уравнений Эйзенхарта. Такие метрики будем называть *h-метриками типа* χ, а соответствующие пространства — *h-пространствами типа* χ.

Каждому решению h уравнения Эйзенхарта в V^4 соответствует квадратичный первый интеграл

$$(h - 4\varphi g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \mathrm{const}$$

уравнений геодезических.

В этой главе будут найдены все лоренцевы h-метрики непостоянной кривизны и сформулированы необходимые и достаточные условия для существования в пространстве-времени однопараметрической проективной группы; для каждой из найденных h-метрик будет указан соответствующий тензор h.

§ 11. Уравнения Эйзенхарта в неголономном ортогональном репере

31. Пусть в касательном пространстве в каждой точке $p \in V^4$ выбран канонический ортогональный репер $\left(\underset{p}{\xi}{}^i\right)$ (§ 5). В этой системе отнесения имеем ([94], § 29)

$$g^{ij} = \sum_{p=1}^{4} e_p \underset{p}{\xi}{}^i \underset{p}{\xi}{}^j, \quad g_{ij} = \sum_{p=1}^{4} e_p \underset{p}{\xi}{}_i \underset{p}{\xi}{}_j, \quad h_{ij} = \sum_{p,q=1}^{4} e_p e_q \bar{h}_{pq} \underset{p}{\xi}{}_i \underset{q}{\xi}{}_j, \tag{124}$$

где инварианты $\bar{h}_{pq} = h_{ij} \underset{p}{\xi}{}^i \underset{q}{\xi}{}^j$ определены для различных возможных типов тензора h_{ij} равенствами (74)—(77), $e_p = \pm 1$. Уравнения Эйзенхарта (54), записанное в инвариантной форме в орторепере, примут вид

$$\begin{gathered} X_r \bar{h}_{pq} + \textstyle\sum_{s=1}^{4} e_s (\bar{h}_{ps} \gamma_{sqr} + \bar{h}_{sq} \gamma_{spr}) = \\ 2\bar{g}_{pq} X_r \varphi + +\bar{g}_{pr} X_q \varphi + \bar{g}_{qr} X_p \varphi \quad (p, q, r = 1, \ldots, 4), \end{gathered} \tag{125}$$

где $X_p \theta = \underset{p}{\xi}{}^i \partial\theta / \partial x^i$, $\gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}{}_{i,j} \underset{q}{\xi}{}^i \underset{r}{\xi}{}^j$ — коэффициенты вращения Риччи. Подставив в (125) вместо $\bar{g}_{pq}$ и $\bar{h}_{pq}$ соответствующие канонические значения, получим для каждого типа h-метрик систему из сорока уравнений, которые после несложных преобразований приводятся к следующим равенствам.

Тип $\{112\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{34\alpha} = \gamma_{12p} = \gamma_{2p1} = \gamma_{1p2} = 0, \quad \gamma_{343} = \gamma_{434} = (1/2)e_3 X_3\varphi, \\
\gamma_{121} = e_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} X_2\varphi, \quad \gamma_{122} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} X_1\varphi, \\
\gamma_{\alpha p\alpha} = e_\alpha(\lambda_\alpha - \lambda_3)^{-1} X_3\varphi, \quad \gamma_{\alpha 43} = \gamma_{\alpha 34} = e_3(\lambda_\alpha - \lambda_3)^{-2} X_\alpha\varphi, \\
\gamma_{\alpha pp} = e_3(\lambda_\alpha - \lambda_3)^{-2}\left[1 + (-1)^p(\lambda_3 - \lambda_\alpha)\right] X_\alpha\varphi, \\
(X_3 - X_4)\varphi = X_\alpha(\lambda_3 - 2\varphi) = X_p(\lambda_3 - 3\varphi) = \\
X_\alpha(\lambda_\alpha - 4\varphi) = X_q(\lambda_1 - 2\varphi) = X_r(\lambda_2 - 2\varphi) = 0.
\end{gathered} \tag{126}$$

Тип $\{(11)2\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{\alpha p\alpha} = e_\alpha(\lambda_1 - \lambda_3)^{-1} X_3\varphi, \quad \gamma_{343} = \gamma_{434} = (1/2)e_3 X_3\varphi, \\
\gamma_{1pq} = \gamma_{2pr} = \gamma_{34\alpha} = 0, \\
(X_3 - X_4)\varphi = X_\alpha\lambda_1 = X_\alpha\lambda_3 = X_\alpha\varphi = \\
X_p(\lambda_1 - 2\varphi) = X_p(\lambda_3 - 3\varphi) = 0.
\end{gathered} \tag{127}$$

Тип $\{1(12)\}$:

$$\begin{gathered}
\gamma_{1p\alpha} = \gamma_{12r} = \gamma_{34l} = \gamma_{23l} - \gamma_{24l} = 0, \\
\gamma_{122} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} X_1\varphi, \quad \gamma_{134} = \gamma_{143} = e_3(\lambda_1 - \lambda_2)^{-2} X_1\varphi, \\
\gamma_{1pp} = e_3(\lambda_1 - \lambda_2)^{-2}\left[1 + (-1)^p(\lambda_2 - \lambda_1)\right] X_1\varphi, \\
X_q\lambda_\alpha = X_q\varphi = X_1(\lambda_1 - 4\varphi) = X_1(\lambda_2 - 2\varphi) = 0.
\end{gathered} \tag{128}$$

Тип $\{(112)\}$:

$$\gamma_{34l} = \gamma_{\alpha 3l} - \gamma_{\alpha 4l} = X_l\varphi = X_l\lambda_1 = 0. \tag{129}$$

Тип $\{13\}$:

$$\gamma_{t31} = \gamma_{24t} = \gamma_{h33} = 0, \quad \gamma_{1hk} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-3} X_1 \varphi \quad (h \neq k),$$

$$\gamma_{13h} = \gamma_{1h3} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-2} X_1 \varphi,$$

$$\gamma_{1hh} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-3} \left[1 - (-1)^{h/2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2\right] X_1 \varphi,$$

$$\gamma_{1h1} = e_1(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} X_2 \varphi, \quad \gamma_{133} = e_2(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} X_1 \varphi, \tag{130}$$

$$3\gamma_{322} = 3\gamma_{434} = 6\gamma_{234} = 2\gamma_{243} = 6\gamma_{342} = 2e_2 X_2 \varphi,$$

$$X_3 \lambda_\alpha = X_3 \varphi = X_h(\lambda_1 - 2\varphi) = X_h(3\lambda_2 - 8\varphi) =$$

$$X_1(\lambda_1 - 4\varphi) = X_1(\lambda_2 - 2\varphi) = (X_2 - X_4)\varphi = 0.$$

Тип $\{(13)\}$:

$$\gamma_{13l} = \gamma_{sql} = \gamma_{12l} - \gamma_{14l} = X_l \varphi = X_l \lambda_1 = 0. \tag{131}$$

В формулах (126)—(131) $\alpha = 1, 2$; $p = 3, 4$; $h, k = 2, 4$; $s, q = 2, 3, 4$; $r = 1, 3, 4$; $t = 1, 2, 4$; $l = 1, \ldots, 4$.

Выше рассмотрены тензоры h_{ij} с непростыми характеристиками Сегре. В случае простых характеристик Сегре можно воспользоваться результатами, полученными для (собственно) римановых пространств.

§ 12. H-пространства в случае простых элементарных делителей матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$

32. Предположим сначала, что все элементарные делители матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ простые и имеют вещественные базисы. Тогда тензор h_{ij} имеет четыре независимых главных направления, и матрицы (g_{ij}), (h_{ij}) могут быть одновременно приведены в каждой точке пространства к диагональному виду, что характерно для определенных форм. Поэтому в рассматриваемом случае справедливы результаты Фубини—Солодовникова (теорема 4.4), и тензоры g_{ij} и h_{ij} с поправкой на сигнатуру определяются формулами (4.1), (4.2):

$$g_{ij} dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p} \prod_{\beta}{}' (f_\beta - f_\alpha) ds_\alpha^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \Phi_\alpha, \tag{132}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p} \rho_\alpha \Phi_\alpha, \quad \rho_\alpha = f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{p} f_\beta, \tag{133}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{p} f_\beta;$$

здесь использованы введенные ранее обозначения (см. пояснения к теореме 4.4). Следуя традиции, будем называть (132) метрикой Леви-Чивита. Ниже перечислены четырехмерные лоренцевы метрики Леви-Чивита, соответствующие различным характеристикам Сегре тензора h_{ij}.

Тип {1111}:

$$g_{ij}dx^i dx^j = \sum_{k=1}^{4} e_k \prod_j{}'(f_j - f_k){dx^k}^2, \tag{134}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \sum_{k=1}^{4} e_k \left(f_k + \sum_{i=1}^{4} f_i\right) \prod_j{}'(f_j - f_k){dx^k}^2, \tag{135}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f_i, \tag{136}$$

f_i — функция единственного переменного x^i, e_k равны ± 1 и выбираются здесь и далее так, чтобы сигнатура метрики в каждой точке была $(- - - +)$.

Тип $\{(11)11\}$:

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = \prod_{\alpha=3,4}(f_\alpha - f_1)\left(e_1 {dx^1}^2 + e_2 \Phi(x^1, x^2){dx^2}^2\right) + \\ e_3 \prod_{\alpha=1,4}(f_\alpha - f_3){dx^3}^2 + e_4 \prod_{\alpha=1,3}(f_\alpha - f_4){dx^4}^2 \equiv \textstyle\sum_{\alpha=1,3,4} \Phi_\alpha, \end{gathered} \tag{137}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1,3,4}(f_\alpha + \sum_{\beta=1,3,4} f_\beta)\Phi_\alpha, \tag{138}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1,3,4} f_\beta, \tag{139}$$

$f_1 = \mathrm{const}$, f_μ — функция переменного x^μ, $\mu = 3, 4$.

Тип $\{(11)(11)\}$:

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = \left(e_1 {dx^1}^2 + e_2\Phi(x^1, x^2){dx^2}^2\right) + \\ \left(e_3 {dx^3}^2 + e_4\theta(x^3, x^4){dx^4}^2\right) \equiv \textstyle\sum_{\alpha=1}^2 \Psi_\alpha, \end{gathered} \tag{140}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha \Psi_\alpha, \quad \varphi = \mathrm{const} \quad (\lambda_\alpha = \mathrm{const}). \tag{141}$$

Тип $\{(111)1\}$:

$$g_{ij}dx^i dx^j = (f_4 - f_1)\left(\overset{1}{g}{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e_4 {dx^4}^2\right), \tag{142}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = (f_4 - f_1)\left((2f_1 + f_4)\,\overset{1}{g}{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e_4(f_1 + 2f_4){dx^4}^2\right), \tag{143}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(f_1 + f_4); \tag{144}$$

здесь $f_1 = \mathrm{const}$, f_4 зависит от x^4, $\overset{1}{g}_{\mu\nu}\ dx^\mu dx^\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3,)$ — трехмерная квадратичная форма. Метрика (142) преобразованием координат приводится к виду

$$g_{ij}dx^i dx^j = f^2(x^4)\left(\overset{1}{g}{}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + e_3 {dx^3}^2\right) + e_4 {dx^4}^2 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{145}$$

где $\overset{1}{g}{}_{\alpha\beta}$ — функция x^1, x^2, x^3. Если, в частности, $f = \mathrm{const}$, то получается (локально) приводимое пространство $V^3 \times V^1$:

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)dx^\alpha dx^\beta + e_3 {dx^3}^2 + e_4 {dx^4}^2 \ (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{146}$$

В случае характеристики $\{(1111)\}$ имеем тривиальный результат $h_{ij} = \mathrm{const} \cdot g_{ij}$.

Как мы увидим далее, проективно-групповые свойства, обнаруженные Г. Фубини в положительно определенных пространствах Леви-Чивита основного типа, сохраняются при снятии условия знакоопределенности. Учитывая это, введем следующие определения.

Будем называть линейный элемент

$$\overset{*}{d}\, s^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} e_\alpha \Pi'_\beta (f_\beta - f_\alpha) dy^{\alpha^2} \quad (e_\alpha = \pm 1) \tag{147}$$

присоединенным к (132); форму (132) назовем *метрикой Леви-Чивита основного типа*, если присоединенная метрика (147) не имеет постоянной кривизны [1], и *исключительной метрикой Леви-Чивита* в противном случае, т. е. если $\overset{*}{d}\, s^2$ имеет постоянную кривизну K.

Этим определениям можно придать простой геометрический смысл. Введем во всех неодномерных ds^2_α в (132) полугеодезические системы координат:

$$ds^2_\alpha = e_\alpha dx^{\tilde{i}^2_\alpha} + \overset{\alpha}{g}_{k_\alpha j_\alpha}\, dx^{k_\alpha} dx^{j_\alpha} \quad (k_\alpha, j_\alpha \neq \tilde{i}_\alpha),$$

а одномерные ds^2_β будем считать равными $e_\beta dx^{i_\beta^{\,2}} \equiv e_\beta dx^{\tilde{i}^2_\beta}$. Поверхности $x^{k_\alpha} = \text{const}$, $k_\alpha \neq \tilde{i}_\alpha$, несущие на себе метрику

$$\tilde{d}s^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} e_\alpha \Pi'_\beta (f_\beta - f_\alpha) dx^{\tilde{i}^2_\alpha},$$

являются вполне геодезическими (см. § 15). Если положить $x^{\tilde{i}_\alpha} = y^\alpha$, то $\tilde{d}s^2$ совпадет с $\overset{*}{d}\, s^2$. Таким образом, особые проективно-групповые свойства исключительных пространств Леви-Чивита связаны с существованием в них семейств вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны, а присоединенная метрика является метрикой вполне геодезических подпространств пространства Леви-Чивита, образующих $(4-p)$-параметрическое семейство.

33. Пусть среди базисов элементарных делителей матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ имеется пара комплексно сопряженных (характеристики $\{111\,\overset{*}{1}\}$ и $\{(11)1\,\overset{*}{1}\}$). [2] Так как в этих случаях элементарные делители простые, то выполняются равенства (134)—(139), в которых f_3 и f_4 являются комплексно сопряженными функциями комплексно сопряженных переменных x^3 и x^4, а x^1 и x^2 — вещественные переменные. Чтобы

[1] Это обстоятельство не зависит от выбора знаков у e_α.

[2] Используемый в этом пункте метод предложен А. З. Петровым [49].

перейти к вещественному базису, сделаем преобразование координат $x^\alpha = \bar{x}^\alpha,\ x^3 = (1/2)(\bar{x}^3 + i\bar{x}^4),\ x^4 = (1/2)(\bar{x}^3 - i\bar{x}^4),\ \alpha = 1, 2$. В новых координатах имеем

для типа $\{111\ \overset{*}{1}\}$

$$g_{ij}d\bar{x}d\bar{x}^j = (f_1 - f_2)\textstyle\sum_{\alpha=1}^2(-1)^\alpha e_\alpha\left[(\sigma - f_\alpha)^2 + \tau^2\right]d\bar{x}^{\alpha^2} +$$
$$2e_3\tau\left[\Pi_{\alpha=1}^2(f_\alpha - \sigma) - \tau^2\right]d\bar{x}^3 d\bar{x}^4 + e_3\tau^2\textstyle\sum_{\alpha=1}^2(f_\alpha - \sigma)(d\bar{x}^{4^2} - d\bar{x}^{3^2}), \tag{148}$$

$$h_{ij}d\bar{x}d\bar{x}^j = (f_1 - f_2)\sum_{\alpha=1}^2(-1)^\alpha e_\alpha(f\alpha + \sum_{\beta=1}^2 f_\beta + 2\sigma)\times$$
$$\left[(\sigma - f_\alpha)^2 + \tau^2\right]d\bar{x}^{\alpha^2} + 2e_3\tau\Big[(\textstyle\sum_{\beta=1}^2 f_\beta + 3\sigma)\Pi_{\beta=1}^2(f_\beta - \sigma) -$$
$$5\sigma\tau^2\Big]d\bar{x}^3 d\bar{x}^4 + e_3\tau^2\Big[\textstyle\sum_{\beta=1}^2 f_\beta - \Pi_{\beta=1}^2(f_\beta - \sigma) +$$
$$3\sigma + \tau^2\Big](d\bar{x}^{4^2} - d\bar{x}^{3^2}), \tag{149}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^2 f_\alpha + \sigma; \tag{150}$$

для типа $\{(11)1\ \overset{*}{1}\}$

$$g_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \left[(\sigma - f_1)^2 + \tau^2\right]\left[e_1 d\bar{x}^{1^2} + e_2\Phi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)d\bar{x}^{2^2}\right] +$$
$$+ e_3\tau\left[\tau(d\bar{x}^{4^2} - d\bar{x}^{3^2}) + 2(f_1 - \sigma)d\bar{x}^3 d\bar{x}^4\right], \tag{151}$$

$$h_{ij}d\bar{x}^i d\bar{x}^j = 2(f_1 + \sigma)\left[(\sigma - f_1)^2 + \tau^2\right]\left[e_1 d\bar{x}^{1^2} + e_2\Phi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)d\bar{x}^{2^2}\right] +$$
$$4e_3\sigma\tau^2(d\bar{x}^{4^2} - d\bar{x}^{3^2}) + 2e_3\tau\left[\tau^2 + (3\sigma + f_1)(f_1 - \sigma)\right]d\bar{x}^3 d\bar{x}^4.$$
$$\varphi = \frac{1}{2}f_1 + \sigma, \qquad f_1 = \mathrm{const}.$$

В обоих случаях $\sigma = \Re f_3$, $\tau = \Im f_3$ — гармонически сопряженные функции вещественных переменных $\bar{x}^3$ и $\bar{x}^4$. Метрика (151) значительно упрощается, если перейти к новой системе координат, связанной со старой преобразованием: $x^\alpha = \bar{x}^\alpha$, $x^3 = \omega(\bar{x}^3, \bar{x}^4)$, $x^4 = \bar{x}^4$, $\alpha = 1, 2$, где функция ω определяется из уравнения $d\omega = \tau d\bar{x}^3 + \sigma d\bar{x}^4$, правая часть которого является полным дифференциалом вследствие гармонической сопряженности функций σ и τ. Выполнив необходимые вычисления, придем к следующему результату.

Т е о р е м а 12.1. *Если симметричный тензор h_{ij} с характеристикой $\{(11)1\ \overset{*}{1}\}$ и функция φ удовлетворяют в $V^4(g_{ij})$ уравнению* (54), *то существует (вещественная) голономная система координат, в которой*

$$g_{ij}dx^i dx^j = B\big(e_1 {dx^1}^2 + e_2\Phi(x^1, x^2){dx^2}^2\big) + e_3({dx^3}^2 - B{dx^4}^2), \quad (152)$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = 2\sigma g_{ij}dx^i dx^j + 2e_3\sigma {dx^3}^2 - 2e_3 B dx^3 dx^4, \quad (153)$$

$$\varphi = \sigma, \quad (154)$$

где B и σ — функции x^3 и x^4, определяемые из уравнений

$$\partial_3 B = -2\partial_4\sigma, \quad \partial_4 B = 2(B\partial_3\sigma + 2\sigma\partial_4\sigma). \quad (155)$$

Если тензор h_{ij} принадлежит к типу $\{11,\ 1\ \overset{*}{1}\}$ и удовлетворяет в V^4 уравнению (54), *то в подходящей системе координат тензоры h_{ij}, g_{ij} и φ определяются формулами* (148)—(150).

§ 13. H-пространства типов $\{112\}, \{(11)2\}, \{1(12)\}$ и $\{(112)\}$

34. В этом параграфе будут определены тензоры g_{ij} и h_{ij} для случаев с цифрой два в характеристике тензора h_{ij}, когда h_{ij} имеет три главных направления, одно из которых изотропное. Рассмотрим по отдельности возможные типы h-пространств.

Тип $\{112\}$. Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных $X_s\theta \equiv \underset{s}{\xi}{}^i\partial_i\theta = 0$, $s = 1, \ldots, p$; $i = 1, \ldots, 4$, где $\underset{s}{\xi}{}^i$ — компоненты векторов канонического орторепера, введенного в § 11, была вполне интегрируемой, т. е. чтобы она допускала $4-p$ независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы

$$[X_s, X_t]\,\theta \equiv X_s X_t\theta - X_t X_s\theta = \sum_{r=1}^{4} e_r(\gamma_{rst} - \gamma_{rts})X_r\theta \quad (156)$$

линейно выражались через операторы $X_s\theta$ (см. п. 26).

Используя равенства (126), составим всевозможные коммутаторы операторов X_i :

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2]\,\theta = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha \gamma_{21\alpha} X_\alpha \theta,\\
&[X_1, X_3]\,\theta = \textstyle\sum_{q\neq 2} e_q \gamma_{31q} X_q \theta,\\
&[X_1, X_4]\,\theta = e_1\gamma_{311} X_1\theta + \textstyle\sum_{p=3}^{4} e_p \gamma_{p14} X_p \theta,\\
&[X_2, X_3]\,\theta = \textstyle\sum_{p\neq 1} e_p \gamma_{32p} X_p \theta,\\
&[X_2, X_4]\,\theta = e_2\gamma_{322} X_2\theta + \textstyle\sum_{p=3}^{4} e_p \gamma_{p24} X_p \theta,\\
&[X_3, X_4]\,\theta = e_3\gamma_{433}(X_3 + X_4)\theta \quad (e_4 = -e_3).
\end{aligned} \tag{157}$$

Отсюда следует, что системы $X_p\theta = 0$ $(p = 2, 3, 4)$ и $X_q\theta = 0$ $(q = 1, 3, 4)$ вполне интегрируемые и имеют каждая по одному решению; обозначим их соответственно θ^1 и θ^2. Системы $X_1\theta = X_2\theta = (X_3 - X_4)\theta = 0$ и $X_1\theta = X_2\theta = 0$, также вполне интегрируемые. Первая система имеет одно решение θ^4, вторая система имеет два независимых решения, одно из которых выберем равным θ^4, а другое обозначим θ^3. После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ в новой системе отнесения, опустив штрихи, получим

$$\underset{\alpha}{\xi}{}^{i} = P_\alpha(x)\delta^i_\alpha, \quad \underset{3}{\xi}{}^{i} - \underset{4}{\xi}{}^{i} = P_3(x)\delta^i_3, \quad \underset{p}{\xi}{}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2; p = 3, 4). \tag{158}$$

Интегрируя с помощью этих равенств те из уравнений (126), которые не содержат γ_{pqr}, найдем

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f_i + c, \quad \lambda_\alpha = f_\alpha + \sum_{i=1}^{4} f_i \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{159}$$

где $c = \mathrm{const}$, f_1 — функция x^1, f_2 — функция x^2 и $f_4 = f_3$ — функция x^4.

Так как в уравнениях (157) функция θ произвольна и

$$[X_s, X_t]\,\theta = \left(\underset{s}{\xi}{}^{i}\partial_i \underset{t}{\xi}{}^{j} - \underset{t}{\xi}{}^{i}\partial_i \underset{s}{\xi}{}^{j}\right)\partial_j\theta,$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial_j\theta$, получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ\ \ \underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha}\partial_\alpha \underset{\beta}{\xi}{}^{\beta} = e_\beta\gamma_{\beta\alpha\beta}\underset{\beta}{\xi}{}^{\beta} \quad (\alpha\neq\beta),\\
&2^\circ\ \ \textstyle\sum_{p=3}^{4}\underset{q}{\xi}{}^{p}\partial_p \underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha} = e_\alpha\gamma_{\alpha 3\alpha}\underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha},\\
&3^\circ\ \ \underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha}\partial_\alpha \underset{q}{\xi}{}^{3} = \textstyle\sum_{p=3}^{4} e_p\gamma_{p\alpha q}\underset{p}{\xi}{}^{3},\\
&4^\circ\ \ \left(\underset{3}{\xi}{}^{3}-\underset{4}{\xi}{}^{3}\right)\partial_3 \underset{3}{\xi}{}^{4} = 2e_3\gamma_{433}\overset{4}{\underset{3}{\xi}},\\
&5^\circ\ \ \textstyle\sum_{p=3}^{4}\left(\underset{3}{\xi}{}^{p}\partial_p \underset{4}{\xi}{}^{3} - \underset{4}{\xi}{}^{p}\partial_p \underset{3}{\xi}{}^{3}\right) = e_3\gamma_{433}\left(\underset{3}{\xi}{}^{3}+\underset{4}{\xi}{}^{3}\right),\\
&6^\circ\ \ \underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha}\partial_\alpha \underset{3}{\xi}{}^{4} = \textstyle\sum_{p=3}^{4} e_p\gamma_{p\alpha 3}\underset{p}{\xi}{}^{4} \quad (\alpha,\beta=1,2; p,q=3,4).
\end{aligned}
\tag{160}
$$

Интегрируя с помощью (126), (158) и (159) уравнения $1^0, 2^0$ системы (160), найдем

$$\underset{\alpha}{\xi}{}^{\alpha} = (f_1-f_2)^{-1/2}(f_\alpha - f_3)^{-1}\Phi_\alpha \quad (\alpha=1,2),$$

где $\Phi_1=\Phi_1(x^1)$ и $\Phi_2=\Phi_2(x^2)$ — произвольные функции. Из уравнений 3^0 получим

$$\underset{3}{\xi}{}^{3} - \underset{4}{\xi}{}^{3} = \Pi_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - f_3)^{-1/2}\Phi_3(x^3,x^4),$$

где Φ_3 — произвольная функция x^3 и x^4. Рассмотрим по отдельности случаи, когда производная $f_3'(x^4)$: а) отлична от нуля, б) равна нулю.

а) В случае $f_3'\neq 0$ сделаем преобразование координат

$$x^{\alpha'} = \int\frac{dx^\alpha}{\Phi_\alpha} \quad x^{4'} = f_3(x^4) \quad (\alpha=1,2,3),$$

не меняющее вида соотношений (158), и в новой системе отнесения, опустив штрихи, получим

$$
\begin{aligned}
&\underset{\alpha}{\xi}{}^{i} = (f_1-f_2)^{-1/2}(f_\alpha - x^4)^{-1}\delta^i_\alpha, \quad \underset{3}{\xi}{}^{i} - \underset{4}{\xi}{}^{i} = \Pi_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - x^4)^{-1/2}\delta^i_3,\\
&\underset{p}{\xi}{}^{\alpha} = 0 \quad (\alpha=1,2;\ p=3,4).
\end{aligned}
\tag{161}
$$

Интегрируя уравнения 3° при $q = 3$, а также уравнения 5°, 6° системы (160), найдем

$$\underset{3}{\xi}^{4} = (x^3 + \theta)^{-1} \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1/2}, \tag{162}$$

$$\underset{3}{\xi}^{3} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1} + (x^3 + \theta)^{-1} \Phi \right) \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1/2}$$

(Φ и θ — произвольные функции x^4). После координатного преобразования $x^{\alpha'} = x^\alpha,\ x^{3'} = x^3 - (1/2) \int \Phi dx^4,\ \alpha = 1, 2, 4,$ будем иметь

$$\underset{3}{\xi}^{3} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1} \right) \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1/2}. \tag{163}$$

Формулы (161)—(163) определяют компоненты векторов орторепера, удовлетворяющих системе уравнений (160). С их помощью по формулам (124) вычисляются контравариантные компоненты метрического тензора

$$g^{\alpha\alpha} = e_\alpha (f_1 - f_2)^{-1} (f_\alpha - x^4)^{-2}, \quad g^{\alpha p} = g^{12} = g^{44} = 0,$$

$$g^{33} = e_3 \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-2} \textstyle\sum_{\beta=1}^{2} (f_\beta - x^4),$$

$$g^{34} = e_3 (x^3 + \theta)^{-1} \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4)^{-1} \quad (\alpha = 1, 2; p = 3, 4),$$

а также его ковариантные компоненты:

$$\begin{gathered} g_{ij} dx^i dx^j = (f_1 - f_2) \textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha (f_\alpha - x^4)^2 dx^{\alpha^2} + 2 e_3 (x^3 + \theta) \times \\ \Pi_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4) dx^3 dx^4 - e_3 (x^3 + \theta)^2 \textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} (f_\alpha - x^4) dx^{4^2}, \end{gathered} \tag{164}$$

где $f_\alpha = f_\alpha(x^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$, и $\theta = \theta(x^4)$ — произвольные функции, e_i равны ± 1 и выбираются так, чтобы сигнатура была $(- - - +)$. Используя (164), по формулам $\underset{l}{\xi}_{i} = g_{ij} \underset{l}{\xi}^{j}$ определим ковариантные компоненты векторов орторепера и, наконец, компоненты тензора h_{ij} (см. (124) и

(76)):

$$h_{ij}dx^i dx^j = \textstyle\sum_{\alpha=1}^2 \lambda_\alpha g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2} + 2\lambda_3 g_{34} dx^3 dx^4 + \\ + \left(\lambda_3 g_{44} + (x^3+\theta) g_{34}\right) dx^{4^2}, \\ \lambda_\alpha = f_\alpha + 2x^4 + \textstyle\sum_{\beta=1}^2 f_\beta, \quad \lambda_3 = \textstyle\sum_{\beta=1}^2 f_\beta + 3x^4 \quad (\alpha = 1,2), \\ \varphi = x^4 + (1/2)\textstyle\sum_{\alpha=1}^2 f_\alpha. \tag{165}$$

б) Если $f_3 = \sigma = \mathrm{const}$, то после преобразования координат $x^{\alpha'} = \int (f_\alpha - \sigma)\Phi_\alpha^{-1} dx^\alpha$, $x^{3'} = \int \Phi_3^{-1} dx^3$, $x^{4'} = x^4$, $\alpha = 1,2$, опустив штрихи, получим

$$\underset{\alpha}{\xi}{}^i = (f_1 - f_2)^{-1/2}\delta_\alpha^i, \quad \underset{3}{\xi}{}^i - \underset{4}{\xi}{}^i = \Pi_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1/2}\delta_i^3, \quad \underset{p}{\xi}{}^\alpha = 0 \tag{166}$$

($\alpha = 1,2; p = 3,4$). В силу последнего из этих равенств $X_p\varphi = 0$ при $p = 3,4$, поэтому из (126) имеем $\gamma_{pqp} = \gamma_{\alpha p\alpha} = 0$ при $\alpha = 1,2$; $p,q = 3,4$ и $p \neq q$. С помощью этих соотношений из уравнений 4°, 6° и 3° при $q = 4$ найдем

$$\underset{3}{\xi}{}^4 = \Pi_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1/2}\theta, \tag{167}$$

$$\underset{4}{\xi}{}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1} + \Phi\right)\Pi_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1/2}, \tag{168}$$

где θ и Φ — произвольные функции x^4. После преобразования координат $x^{\alpha'} = x^\alpha$, $x^{3'} = x^3 - (1/2)\int \Phi\theta^{-1} dx^4$, $x^{4'} = \int \theta^{-1} dx^4$, $\alpha = 1,2$, которое не меняет (166), формулы (167) приводятся к следующим:

$$\underset{3}{\xi}{}^4 = \Pi_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1/2}, \tag{169}$$

$$\underset{4}{\xi}{}^3 = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1}\right)\Pi_{\alpha=1}^2 (f_\alpha - \sigma)^{-1/2}. \tag{170}$$

Так же, как в предыдущем случае, используя (166), (169), (124) и

(76), определим ковариантные компоненты тензоров g_{ij} и h_{ij}:

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = (f_1 - f_2)\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha dx^{\alpha^2} + \\ 2e_3 \Pi_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - \sigma)dx^3 dx^4 - e_3 \sum_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - \sigma)dx^{4^2}, \end{gathered} \tag{171}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_\alpha g_{\alpha\alpha} dx^{\alpha^2} + 2\lambda_3 g_{34} dx^3 dx^4 + (\lambda_3 g_{44} + g_{34})dx^{4^2}, \tag{172}$$

при этом

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha, \tag{173}$$

где λ_i, $i = 1, 2, 3$, получаются из (159), если положить $f_3 = f_4 = \sigma$, $f_\alpha = f_\alpha(x^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Введя функции $\bar{f}_\alpha = f_\alpha - \sigma$, $\alpha = 1, 2$, и приняв во внимание, что добавление к тензору h_{ij} слагаемого, пропорционального метрическому тензору, не нарушает равенств (54), для метрической формы (171) получим

$$ds^2 = (f_1 - f_2)\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha dx^{\alpha^2} + 2e_3 \Pi_{\alpha=1}^{2} f_\alpha dx^3 dx^4 - e_3 \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha dx^{4^2} \tag{174}$$

(черта над f опущена). Формула (172) остается в силе, но меняется вид функций λ_i :

$$\lambda_\alpha = f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{2} f_\beta, \quad \lambda_3 = \sum_{\beta=1}^{2} f_\beta \quad (\alpha = 1, 2). \tag{175}$$

Получена

Т е о р е м а 13.1. *Если симметричный тензор* h_{ij} *типа* $\{112\}$ *и функция* φ *удовлетворяют в* V^4 *с метрическим тензором* g_{ij} *уравнениям* (54), *то существует голономная система координат, в которой* g_{ij}, h_{ij} *и* φ *определяются формулами* (164), (165) *либо формулами* (172)—(175).

Тип $\{(11)2\}$. Выписав с помощью (127) коммутаторы операторов

X_i

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2]\,\theta = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha \gamma_{21\alpha} X_\alpha \theta,\\
&[X_1, X_3]\,\theta = e_1\gamma_{311}X_1\theta + e_2\gamma_{213}X_2\theta,\\
&[X_1, X_4]\,\theta = e_1\gamma_{311}X_1\theta + e_2\gamma_{214}X_2\theta,\\
&[X_2, X_3]\,\theta = e_1\gamma_{123}X_1\theta + e_2\gamma_{322}X_2\theta,\\
&[X_2, X_4]\,\theta = e_1\gamma_{124}X_1\theta + e_2\gamma_{322}X_2\theta,\\
&[X_3, X_4]\,\theta = e_3\gamma_{433}(X_3 + X_4)\theta,
\end{aligned}
\tag{176}
$$

легко убедиться, что система $X_\alpha\theta = (X_3 - X_4)\theta = 0$, а также системы $X_\alpha\theta = (X_3+X_4)\theta = 0$ и $X_p\theta = 0$ ($\alpha = 1, 2$, $p = 3, 4,$) вполне интегрируемые. Обозначим решения первой и второй систем соответственно θ^4 и θ^3, а решения последней системы θ^1 и θ^2. В новой системе координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, получим

$$
\underset{3}{\xi}{}^i - \underset{4}{\xi}{}^i = P(x)\delta^i_3, \quad \underset{3}{\xi}{}^i + \underset{4}{\xi}{}^i = Q(x)\delta^i_4, \quad \underset{\alpha}{\xi}{}^p = 0, \tag{177}
$$

где $\alpha = 1, 2$, $p = 3, 4$, P и Q — произвольные функции x^i. Интегрируя с помощью этих равенств те из уравнений (127), которые не содержат γ_{pqr}, найдем

$$
\varphi = f + \mathrm{const}, \quad \lambda_1 = 2f + \sigma, \quad \lambda_3 = 3f, \tag{178}
$$

где f — произвольная функция x^4, $\sigma = \mathrm{const}$. Приравняв коэффициенты при одинаковых производных $\partial_i\theta$ в правых и левых частях равенств (176), получим систему уравнений

$$
\sum_{\alpha=1}^{2} \underset{\beta}{\xi}{}^\alpha \partial_\alpha \underset{p}{\xi}{}^q = 0, \ (1^\circ)
$$

$$
\partial_4 \underset{4}{\xi}{}^3 = 0, \ (2^\circ)
$$

$$
2\underset{3}{\xi}{}^3 \partial_3 \underset{4}{\xi}{}^4 = e_3\gamma_{433}\left(\underset{3}{\xi}{}^4 + \underset{4}{\xi}{}^4\right), \ (3^\circ)
$$

$$
\sum_{p=3}^{4} \underset{q}{\xi}{}^p \partial_p \underset{\sigma}{\xi}{}^\beta = e_\sigma\gamma_{\sigma 3\sigma}\underset{\sigma}{\xi}{}^\beta + e_\rho\gamma_{\sigma\rho q}\underset{\rho}{\xi}{}^\beta \quad (\sigma \ne \rho), \ (4^\circ)
$$

$$
\sum_{p=3}^{4}\left(\underset{1}{\xi}{}^p\partial_p\underset{2}{\xi}{}^\beta - \underset{2}{\xi}{}^p\partial_p\underset{1}{\xi}{}^\beta\right) = \sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha\gamma_{21\alpha}\underset{\alpha}{\xi}{}^\beta \ (5^\circ)
$$

($\beta, \sigma, \rho = 1, 2;\ p, q = 3, 4$). Из первого уравнения вследствие неравенства нулю определителя матрицы $(\underset{i}{\xi}{}^{j})$ найдем $\partial_\alpha \underset{p}{\xi}{}^{q} = 0$ при $\alpha = 1, 2;\ p, q = 3, 4$. С помощью этих соотношений, а также (127), (177) и (178) легко интегрируются уравнения 2° и 3°:

$$\underset{4}{\xi}{}^{3} = -\underset{3}{\xi}{}^{3} = -\Phi,\ \underset{4}{\xi}{}^{4} = \underset{3}{\xi}{}^{4} = \left(\frac{1}{2} f' \int \frac{dx^3}{\Phi} + \Psi\right)^{-1};$$

здесь $\Phi = \Phi(x^3)$ и $\Psi = \Psi(x^4)$ — произвольные функции указанных переменных, $f' \equiv df/dx^4$. Рассмотрим два случая.

а) В случае $f' \neq 0$ после преобразования координат

$$x^{\alpha'} = x^\alpha,\ x^{3'} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^3}{\Phi},\ x^{4'} = f \quad (\alpha = 1, 2),$$

опустив штрихи, будем иметь

$$\underset{\alpha}{\xi}{}^{p} = \underset{p}{\xi}{}^{\alpha} = 0,\ \underset{3}{\xi}{}^{3} = -\underset{4}{\xi}{}^{3} = \frac{1}{2},\ \underset{p}{\xi}{}^{4} = \frac{1}{x^3 + \theta} \tag{179}$$

($\alpha = 1, 2,\ p = 3, 4,\ \theta$ — произвольная функция x^4). Если умножить уравнение 4° на $e_\sigma \underset{\sigma}{\xi}{}^{\alpha}$, симметрируя полученное выражение по α, β и суммируя по σ от 1 до 4, то, приняв во внимание, что при $\sigma = 3, 4$ обе части уравнения 4° тождественно равны нулю, так как в силу (177) $\underset{\sigma}{\xi}{}^{\beta} = 0$, с помощью формул (124), (127) и равенства (178), в котором положено $f = x^4$, получим уравнение

$$\sum_{p=3}^{4} \underset{q}{\xi}{}^{p} \partial_p g^{\alpha\beta} = 2 \underset{3}{\xi}{}^{4} (x^4 - \sigma)^{-1} g^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

из которого ввиду (179) следует $\partial_3 g^{\alpha\beta} = 0$ и, после интеграции,

$$g^{\alpha\beta} = (x^4 - \sigma)^{-2} \Phi^{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{180}$$

где $\Phi^{\alpha\beta}$ — произвольные функции x^1, x^2. Используя (179), (180) и равенство (178), в котором положено $f = x^4$, по формулам (124) и (76) вычислим компоненты тензоров g_{ij} и h_{ij}; после замены $x^{4'} = x^4 - \sigma$ и подходящего преобразования координат $x^1,\ x^2$ получим квадратичные формы

$$g_{ij} dx^i dx^j = x^{4^2} \left(e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2}\right) + 2e_3 (x^3 + \theta(x^4)) dx^3 dx^4, \tag{181}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = 2x^{4^3}\left(e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1,x^2)dx^{2^2}\right) +$$

$$6e_3x^4(x^3+\theta(x^4))dx^3dx^4 + e_3(x^3+\theta(x^4))^2dx^{4^2}, \tag{182}$$

$$\varphi = x^4, \tag{183}$$

где θ и Φ — функции указанных переменных.

б) Если $f' = 0$, то из (178) следует $\varphi = \mathrm{const}$. Выполнив необходимые вычисления, найдем

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1,x^2)dx^{2^2} + 2dx^3dx^4, \tag{184}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1\left(e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1,x^2)dx^{2^2}\right) +$$

$$\lambda_2\left(2dx^3dx^4 + dx^{4^2}\right), \tag{185}$$

$$\varphi = \mathrm{const}; \tag{186}$$

здесь λ_1, λ_2 — произвольные постоянные, Φ — функция x^1, x^2. Доказана

Т е о р е м а 13.2. *Если симметричный тензор* h_{ij} *типа* $\{(11)2\}$ *и функция* φ *удовлетворяют в* $V^4(g_{ij})$ *уравнениям* (54)*, то в некоторой голономной системе координат* g_{ij}, h_{ij} *и* φ *определяются формулами* (181)—(183) *либо формулами* (184)—(186).

Выше подробно рассмотрены два типа h-пространств. В оставшихся случаях ограничимся воспроизведением основных этапов доказательств, опустив утомительные выкладки, которые, как мы видели, сводятся к интегрированию систем дифференциальных уравнений в частных производных и нахождению подходящих преобразований координат.

Тип $\{1(12)\}$. Коммутаторы операторов X_i имеют вид

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2]\,\theta = e_2\gamma_{212}X_2\theta + e_3\gamma_{231}(X_3 - X_4)\theta,\\
&[X_1, X_3]\,\theta = e_2\gamma_{321}X_2\theta + \textstyle\sum_{p=3}^4 e_p\gamma_{p13}X_p\theta,\\
&[X_1, X_4]\,\theta = e_2\gamma_{321}X_2\theta + \textstyle\sum_{p=3}^4 e_p\gamma_{p14}X_p\theta,\\
&[X_2, X_3]\,\theta = e_2\gamma_{322}X_2\theta + e_3\gamma_{323}(X_3 - X_4)\theta,\\
&[X_2, X_4]\,\theta = e_2\gamma_{322}X_2\theta + e_3\gamma_{324}(X_3 - X_4)\theta,\\
&[X_3, X_4]\,\theta = e_2(\gamma_{234} - \gamma_{233})X_2\theta.
\end{aligned} \tag{187}$$

Рассмотрим три вполне интегрируемые, как следует из (187), (128), системы дифференциальных уравнений $X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta = 0$, $X_1\theta = X_2\theta = (X_3 - X_4)\theta = 0$, $X_1\theta = (X_3 - X_4)\theta = 0$ и уравнение $X_1\theta = 0$. Обозначим решения первой и второй систем соответственно θ^1 и θ^4, решения третьей системы θ^2 и θ^4. Два из трех независимых решений последнего уравнения выберем равными θ^2 и θ^4, а третье обозначим θ^3. После преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, найдем

$$\underset{1}{\xi}{}^i = P\delta^i_1,\ \underset{3}{\xi}{}^i - \underset{4}{\xi}{}^i = Q\delta^i_3,\ \underset{q}{\xi}{}^1 = \underset{2}{\xi}{}^4 = 0 \quad (q = 2, 3, 4)$$

(P, Q — функции x^i). Интегрируя с помощью этих равенств уравнения (128), не содержащие γ_{pqr}, получим

$$\varphi = \frac{1}{2}f + \mathrm{const}, \quad \lambda_1 = 2f, \quad \lambda_2 = f + \sigma,$$

где f — произвольная функция x^1, $\sigma = \mathrm{const}$.

Решая при помощи (128) полученную из (187) систему уравнений относительно $\underset{j}{\xi}{}^i$ и вычисляя g_{ij}, h_{ij} по формулам (124), (76), придем к следующему результату.

Т е о р е м а 13.3. *Если симметричный тензор h_{ij} типа $\{1(12)\}$ и функция φ удовлетворяют в $V^4(g_{ij})$ уравнению (54), то существует голономная система координат, в которой*

$$\begin{gathered} g_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + f(x^1)(e_2 dx^{2^2} + 2e_3 dx^3 dx^4) - \\ e_3(1 + f(x^1)\theta(x^2, x^4))dx^{4^2}, \end{gathered} \tag{188}$$

$$\begin{gathered} h_{ij}dx^i dx^j = 2e_1 f(x^1) dx^{1^2} + \\ f^2(x^1)\left(e_2 dx^{2^2} + 2e_3 dx^3 dx^4 - e_3\theta(x^2, x^4)dx^{4^2}\right), \end{gathered} \tag{189}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}f, \tag{190}$$

где f и θ — функции указанных переменных, $e_i = \pm 1$.

Тип $\{(112)\}$. Из формул (129) следует $\varphi = \mathrm{const}$. При этом правая часть уравнения (54) обращается в нуль, и тензор h_{ij} оказывается ковариантно постоянным. Произведя необходимые выкладки, получим следующую теорему.

Т е о р е м а 13.4. *Если тензор h_{ij} принадлежит к типу $\{(112)\}$ и вместе с функцией φ удовлетворяет в $V^4(g_{ij})$ уравнению (54), то он ковариантно постоянен. Метрика g_{ij} и тензор h_{ij} в некоторой голономной системе координат определяются формулами*

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)dx^\alpha dx^\beta + 2dx^3 dx^4 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \tag{191}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij}dx^i dx^j + e{dx^3}^2 \quad (e = \pm 1), \tag{192}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — функции x^1, x^2, x^3, λ — постоянная.

§ 14. H-пространства типов $\{13\}$ и $\{(13)\}$

35. В этом параграфе будут определены метрики h-пространств типов $\{13\}$ и $\{(13)\}$, когда тензор h_{ij} имеет два главных направления, одно из которых изотропное.

Тип $\{13\}$. Пользуясь формулами (130) и (156), запишем равенства

$$[X_1, X_2]\,\theta = e_1\gamma_{211}X_1\theta + \textstyle\sum_{p=2}^4 e_p\gamma_{p12}X_p\theta,$$

$$[X_1, X_3]\,\theta = e_2\gamma_{313}X_3\theta + e_2\gamma_{312}(X_2 - X_4)\theta,$$

$$[X_1, X_4]\,\theta = \textstyle\sum_{\alpha=1}^2 e_\alpha\gamma_{41\alpha}X_\alpha\theta + \sum_{p=3}^4 e_p\gamma_{p14}X_p\theta,$$

$$[X_2, X_3]\,\theta = e_2\gamma_{322}(X_2 + X_4)\theta,$$

$$[X_2, X_4]\,\theta = 2e_2\gamma_{324}X_3\theta,$$

$$[X_3, X_4]\,\theta = e_2\gamma_{232}(X_2 + X_4)\theta \qquad (e_2 = e_3 = -e_4),$$

из которых следует, что системы $X_2\theta = X_3\theta = X_4\theta = 0$, $X_1\theta = X_3\theta = (X_2 - X_4)\theta = 0$ и $X_1\theta = (X_2 - X_4)\theta = 0$ вполне интегрируемые. Пусть решения первой и второй систем будут соответственно θ^1 и θ^4, решения третьей системы θ^3 и θ^4. Два из трех независимых решений уравнения $X_1\theta = 0$ возьмем равными θ^3 и θ^4, а третье решение обозначим θ^2. В новой координатной системе, определенной уравнениями $x^{i'} = \theta^i(x)$, опустив штрихи, имеем

$$\underset{1}{\xi}{}^i = P(x)\delta_1^i, \;\; \underset{2}{\xi}{}^i - \underset{4}{\xi}{}^i = Q(x)\delta_2^i, \;\; \underset{q}{\xi}{}^1 = \underset{3}{\xi}{}^4 = 0 \quad (q = 2, 3, 4).$$

Решая с помощью полученных равенств уравнения (130), не содержащие γ_{pqr}, найдем

$$\varphi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f_i + \mathrm{const}, \quad \lambda_\alpha = f_\alpha + \sum_{i=1}^{4} f_i \quad (\alpha = 1, 2),$$

где f_1 — функция x^1, $f_2 = f_3 = f_4$ — функция x^4.

Рассмотрим следующие возможности: а) $f_1' \neq 0$, $f_2' \neq 0$; б) $f_1' \neq 0$, $f_2' = 0$; в) $f_1' = 0$, $f_2' \neq 0$; г) $f_1' = f_2' = 0$ (штрих означает производную функции по ее аргументу). Так как в последнем случае $\varphi = \mathrm{const}$ и, как следует из (130), $\gamma_{pqr} \equiv 0$, то соответствующее h-пространство является плоским и в дальнейшем не рассматривается. Исследуя остальные случаи, придем к следующему результату.

Т е о р е м а 14.1. *Если симметричный тензор* h_{ij} *типа* $\{13\}$ *и функция* φ *удовлетворяют в* $V^4(g_{ij})$ *уравнению* (54), *то существует голономная система координат, в которой*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\Phi B^3 dx^{1^2} + e_2 B dx^{3^2} + e_2 x^2(Bx^2 - 4A)dx^{4^2} + 4e_2 AB dx^2 dx^4 + 2e_2(Bx^2 - 2A)dx^3 dx^4, \tag{193}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = \lambda_1 g_{11} dx^{1^2} + \lambda_2\left(g_{33}dx^{3^2} + 2g_{24}dx^2 dx^4\right) + 2(\lambda_2 g_{34} + g_{24})dx^3 dx^4 + \left(\lambda_2 g_{44} + 4e_2 A(Bx^2 - A)\right)dx^{4^2}, \tag{194}$$

$$\lambda_1 = 2x^1 + 3x^4, \quad \lambda_2 = x^1 + 4x^4, \quad \varphi = \frac{1}{2}(x^1 + 3x^4) \tag{195}$$

либо

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\Phi dx^{1^2} + e_2 x^1\left(dx^{3^2} + 2dx^2 dx^4 + dx^{4^2}\right) - 2e_2 dx^3 dx^4, \tag{196}$$

$$h_{ij}dx^i dx^j = 2e_1 x^1 \Phi dx^{1^2} + e_2 x^{1^2}\left(dx^{3^2} + 2dx^2 dx^4 + dx^{4^2}\right) - e_2 dx^{4^2}, \tag{197}$$

$$\varphi = x^1, \tag{198}$$

либо

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1 x^{4^3} dx^{1^2} + e_2 dx^{3^2} + 4e_2 A dx^2 dx^4 + 2e_2 x^2 dx^3 dx^4 + e_2 x^{2^2} dx^{4^2}, \tag{199}$$

$$
\begin{gathered}
h_{ij}dx^i dx^j = 3e_1 x^{4^4} dx^{1^2} + 4e_2 x^4 \left(dx^{3^2} + 4A dx^2 dx^4\right) + \\
4e_2(A + 2x^2x^4)dx^3dx^4 + 4e_2x^2(x^2x^4 + A)dx^{4^2},
\end{gathered}
\tag{200}
$$

$$
\varphi = \frac{3}{2}x^4; \tag{201}
$$

в формулах (193)—(201)

$$
A \equiv x^3 + \theta(x^4), \quad B \equiv x^1 - x^4,
$$

Φ *— функция* x^1, θ *— функция* x^4.

Тип $\{(13)\}$. Из двух последних равенств (131) следует $\varphi = \mathrm{const}$, и тензор h_{ij} оказывается ковариантно постоянным. Выполнив соответствующие вычисления, получим теорему:

Т е о р е м а 14.2. *Если симметричный тензор* h_{ij} *типа* $\{(13)\}$ *удовлетворяет в* $V^4(g_{ij})$ *уравнению* (54), *то он ковариантно постоянен* ($\varphi = const$) *и существует голономная система координат, в которой*

$$
g_{ij}dx^i dx^j = e_1 dx^{1^2} + 2e_2 dx^2 dx^4 + e_2 dx^{3^2} + \theta(x^1, x^4)dx^{4^2}, \tag{202}
$$

$$
h_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij} dx^i dx^j + 2e_2 dx^3 dx^4, \tag{203}
$$

где $\lambda = const$, θ *— функция* x^1 *и* x^4, $e_1, e_2 = \pm 1$.

Если потребовать, чтобы V^4 имело сигнатуру $(- - - +)$, то формулы (202) и (203) примут вид:

$$
g_{ij}dx^i dx^j = -dx^{1^2} - 2dx^2 dx^4 - dx^{3^2} + \theta(x^1, x^4)dx^{4^2}, \tag{204}
$$

$$
h_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij} dx^i dx^j - 2dx^3 dx^4.
$$

36. Необходимые и достаточные условия существования в пространстве-времени 1-параметрической проективной группы. Выше рассмотрены все возможные для полей тяготения характеристики (типы) тензора h_{ij} и, следовательно, полностью решен вопрос о метриках полей тяготения, допускающих нетривиальные решения уравнений Эйзенхарта. В приведенных выше теоремах сформулированы необходимые условия. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что во всех случаях справедливы обратные утверждения, и, таким образом, найденные условия являются необходимыми и достаточными. Прямым следствием полученных результатов является

Т е о р е м а 14.3. *Для того чтобы векторное поле X было проективным движением и порождало 1-параметрическую проективную группу в пространстве-времени $V^4(g_{ij})$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой системе координат*

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad L_X g_{ij} = h_{ij}, \tag{205}$$

где пары (g_{ij}, h_{ij}), а также отвечающие им определяющие функции φ задаются формулами (134)—(144) *и определяются в теоремах* 12.1, 13.1—13.4*,* 14.1 *и* 14.2.

Если проективное движение является аффинным, то определяющая функция φ постоянна (гл. 1, § 3). Полагая $\varphi = \mathrm{const}$ в перечисленных в теореме 14.3 формулах там, где это возможно, получим следующий результат.

Т е о р е м а 14.4. *Бесконечно малое преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является негомотетическим аффинным движением и, следовательно, порождает* 1*-параметрическую (собственно) аффинную группу в пространстве-времени $V^4(g_{ij})$, если и только если в некоторой системе координат*

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad L_\xi g_{ij} = h_{ij},$$

где g_{ij} и h_{ij} определяются формулами (137)—(138) $(f_1, f_3, f_4 - const)$, (140)—(141), (142)—(143) $(f_1, f_4 - const)$, (152)—(153) $(B = const)$, (184)—(185), (188)—(189) $(f = const)$, (191)—(192) *и* (202)—(203).

Изучив перечисленные в теореме 14.4 h-пространства, придем к выводу:

Т е о р е м а 14.5. *Для того чтобы пространство-время V^4 допускало негомотетическое аффинное движение, необходимо, чтобы в нем существовало постоянное векторное поле либо оно было приводимым пространством $V^2 \times V^2$.*

В соответствии с теоремой 9.1 первое условие (наличие ковариантно постоянного векторного поля) является достаточным. Заметим, что последнюю теорему можно сформулировать в другой форме:

Т е о р е м а 14.6. *Пространство-время V^4 допускает двухвалентный ковариантно постоянный симметричный тензор, отличный от фундаментального тензора, тогда и только тогда, когда оно является приводимым пространством $V^2 \times V^2$ либо допускает ковариантно постоянное векторное поле.*

В заключение отметим, что если все собственные числа тензора h_{ij} совпадают, иначе говоря, если уравнение $\det(h_{ij} - \lambda g_{ij}) = 0$ имеет один четырехкратный корень, то из полученных результатов следует, что тензор h_{ij} ковариантно постоянен. Поэтому справедлива

Теорема 14.7. *Если X — проективное движение в пространстве-времени $V^4(g_{ij})$ и все собственные числа тензора $L_X g_{ij}$ равны между собой (тип $\{(p_1, \ldots, p_r)\}$), то проективное движение является аффинным.*

Глава 4.

СВОЙСТВА h-ПРОСТРАНСТВ. ЖЕСТКИЕ h-ПРОСТРАНСТВА И K-ПРОСТРАНСТВА

§ 15. Определение K-пространства. Жесткие h-пространства

37. Решая для каждой определенной в предыдущей главе пары форм (g_{ij}, h_{ij}) уравнения Киллинга, получим согласно теореме 14.3 все проективные движения в полях тяготения. Однако соответствующие им одномерные алгебры Ли не исчерпывают в общем случае все негомотетические проективные движения, имеющиеся в каждом из данных пространств. Чтобы пояснить это, сделаем отступление.

Как известно, геодезическим классом псевдориманова пространства V^n (g_{ij}) называется совокупность $\{\bar{V}^n(\bar{g}_{ij})\}$ всех пространств, геодезически соответствующих данному. Рассмотрим λ-матрицы $(\bar{g}_{ij}-\lambda g_{ij})$ для всевозможных $\bar{g}_{ij}$. Характеристики Сегре этих λ-матриц для различных $\bar{g}_{ij}$, вообще говоря, будут разными. Для доказательства возьмем в качестве примера пространства с линейным элементом

$$g_{ij}dx^i dx^j = -dx^{1^2} - dx^{3^2} - 2dx^2 dx^4 + \theta(x^1, x^4) dx^{4^2}.$$

Можно показать, что они допускают только тривиальное геодезическое отображение (с сохранением связности) на пространства

$$\bar{g}_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij}dx^i dx^j + \mu dx^{3^2} + \nu dx^3 dx^4 + \tau dx^{4^2},$$

где λ, μ, ν, τ — произвольные постоянные. Простые вычисления показывают, что различным частным значениям постоянных μ, ν, τ отвечают разные характеристики $\{(1111)\}$, $\{1(111)\}$, $\{1(12)\}$, $\{(112)\}$, $\{(13)\}$ соответствующих λ-матирц $(\bar{g}_{ij} - \lambda g_{ij})$. Подобный пример можно привести и в случае нетривиального геодезического отображения.

Следовательно, метод нахождения геодезически соответствующих пространств, основанный на разбиении их по типам в соответствии с видом характеристики Сегре тензора $\bar{g}_{ij}$, хотя и дает полное решение задачи в смысле перечисления всех пар геодезически соответствующих пространств, но не позволяет указать для всех типов пространств их полный геодезический класс.

Отсюда вытекает, что аналогичный метод нахождения проективных негомотетических движений, вообще говоря, может быть использован только для определения пространств, допускающих одномерную проективную алгебру Ли, и для того чтобы найти максимальную алгебру Ли, необходимо провести дополнительное исследование. В принципе определение максимальной проективной алгебры Ли для заданного пространства эквивалентно нахождению в нем общего решения уравнения (52). Поэтому можно было бы для каждого h-пространства заново решить эти уравнения, в которых g_{ij} будут уже известными функциями координатных переменных. Этот путь, однако, нехорош по двум причинам. Во-первых, решение указанной задачи связано со значительными вычислительными трудностями ввиду большого функционального произвола, с которым определены h-метрики, и в некоторых случаях практически невозможно; во-вторых, полученные в предыдущей главе результаты, определяющие одномерные проективные алгебры Ли для каждого h-пространства, остались бы неиспользованными. Поэтому наиболее целесообразен следующий подход — обратившись к условиям интегрируемости уравнений (52), выяснить, в каких случаях максимальная алгебра Ли определяется имеющимися результатами.

На этом пути мы получили для каждого типа h-пространств условия на компоненты тензора кривизны, которые сводились к весьма сложным дифференциальным уравнениям для коэффициентов g_{ij}. Однако при внимательном изучении этих условий выяснилось, что они связаны с существованием в данном h-пространстве вполне геодезических подпространств постоянной кривизны либо означают постоянство кривизны самого h-пространства. Это обстоятельство помогло выделить те пространства, для которых максимальная проективная алгебра Ли P_r содержит гомотетическую подалгебру H_{r-1} и вследствие этого получается присоединением к алгебре Ли гомотетий одномерной проективной алгебры Ли, определенной в предыдущей главе. Оставшуюся часть пространств удалось свести к ранее изученному классу (гл. 2).

Так возникло разделение h-пространств на два класса — жесткие

h-пространства и K-пространства, — которое дало ключ к решению всей рассматриваемой задачи. Об этих двух классах и их свойствах рассказывается в данной главе, цель которой заключается в том, чтобы, не интегрируя обобщенные уравнения Киллинга, определить общие проективно-групповые свойства h-метрик, в частности, установить размерности гомотетической и аффинной подалгебр максимальной проективной алгебры Ли (этот вопрос имеет прямое отношение к степени общности полученных в предыдущей главе решений уравнения Эйзенхарта), а также определить другие важные свойства h-метрик, которые позволят перейти в следующих главах к непосредственному решению основной задачи — классификации полей тяготения непостоянной кривизны по алгебрам Ли проективных движений.

Целый ряд весьма интересных проективно-групповых свойств полей тяготения оказывается связанным с существованием в них семейств вполне геодезических поверхностей, т. е. таких поверхностей, все геодезические линии которых являются геодезическими линиями объемлющего пространства-времени ([94], § 54). Как явствует из сформулированной ниже теоремы, пространства, допускающие семейства вполне геодезических поверхностей, встречаются среди h-пространств систематически.

Т е о р е м а 15.1. *Если два или более базисов элементарных делителей матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ совпадают, иначе говоря, если в характеристике Сегре $\chi = \{(m_1, m_2, \ldots)\ (m'_1, m'_2, \ldots) \ldots\}$ тензора h_{ij} некоторые числа в фигурной скобке заключены в круглые скобки, то соответствующее h-пространство допускает семейство вполне геодезических поверхностей.*

Действительно, согласно лемме Бомпиани [97] всякое риманово пространство V^n с квадратичной формой

$$g_{ij}dx^i dx^j = a_{ij}dx^i dx^j + a_{\sigma\tau}dx^\sigma dx^\tau$$

$(i, j = 1, \ldots, m;\ \sigma, \tau = m+1, \ldots, n)$, где функции a_{ij} не зависят от $x^{m+1}, \ldots, x^n$, допускает семейство $x^\sigma = \text{const}$ $(\sigma = m+1, \ldots, n)$ вполне геодезических поверхностей. Вследствие этой леммы семейства 2-поверхностей $x^\alpha = \text{const}$ $(\alpha = 1, 2)$ в h-пространстве (145) (тип $\{(111)1\}$) и $x^p = \text{const}$ $(p = 3, 4)$ в h- пространстве (188) (тип $\{1(12)\}$) являются вполне геодезическими.

Нетрудно видеть, что h-метрики (137), (151), (181) и (184), принадлежащие к типам $\{(11)11\}, \{(11)1\ \overset{*}{1}\}$ и $\{(11)2\}$, могут быть записаны в виде

$$g_{ij}dx^i dx^j = B(x^3, x^4)\left(e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1, x^2)dx^{2^2}\right) + d\sigma^2(x^3, x^4), \quad (206)$$

где B — некоторая функция от x^3, x^4, $d\sigma^2$ — двумерный линейный элемент, отнесенный к переменным x^3, x^4. Из леммы Бомпиани следует, что семейство гиперповерхностей $x^2 = \text{const}$ в пространстве (206) является вполне геодезическим.

h-пространства (146) и (191), принадлежащие к типам $\{(111)1\}$ и $\{(112)\}$, допускают семейства $x^\alpha = \text{const}$ $(\alpha = 1, 2)$ вполне геодезических поверхностей постоянной нулевой кривизны. Наконец, поверхности $x^p = \text{const}$ $(p = 2, 4)$ в h-пространствах (140) и (204) (типы $\{(11)(11)\}$ и $\{(13)\}$) являются вполне геодезическими и имеют постоянную нулевую кривизну. Введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 15.1. *h-пространство непостоянной кривизны с кратными базисами элементарных делителей матрицы* $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ *называется K-пространством, если оно допускает семейство вполне геодезических поверхностей указанного выше вида* (*см. вывод теоремы* 15.1)*, каждая из которых имеет постоянную риманову кривизну K.*

З а м е ч а н и е 15.1. *Если потребовать, чтобы гиперповерхности $x^2 = const$ в h-пространстве* (188) *имели постоянную кривизну K, то вполне геодезические поверхности $x^p = const$* $(p = 3, 4)$ *также будут иметь постоянную кривизну K* (*см. п.* 43). *Это условие* (*постоянство кривизны гиперповерхностей $x^2 = const$*) *будет определять K-пространство в указанном случае.*

О п р е д е л е н и е 15.2. *Если h-пространство непостоянной кривизны, не является K-пространством, то оно называется жестким h-пространством.*

Согласно этим определениям все h-пространства непостоянной кривизны с различными базисами элементарных делителей λ-матрицы

$$(h_{ij} - \lambda g_{ij})$$

являются жесткими h-пространствами.

Если потребовать, чтобы указанные в определении 15.1 вполне геодезические поверхности имели постоянную кривизну K (там, где это возможно), то получим метрики K-пространств. В одном частном случае это можно сделать уже сейчас. Как было показано, пространства

(146), (191) и (140) допускают семейства вполне геодезических поверхностей постоянной нулевой кривизны и, следовательно, являются K-пространствами ($K = 0$).

Пусть V^4 допускает изотропное ковариантно постоянное векторное поле λ^i. Так как ковариантно постоянный вектор является градиентом, то, определив функцию $\lambda(x)$ уравнением $\partial\lambda/\partial x^i = \lambda_i$ и введя изотропную полугеодезическую систему координат ([54], с. 50), в которой изотропные гиперповерхности $\lambda = \text{const}$ образуют координатные поверхности $x^3 = \text{const}$, получим

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2dx^3dx^4 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Поскольку в этой системе координат $\lambda = x^3$, из уравнений $\lambda_{,ij} = 0$ следует $\partial_4 g_{\mu\nu} = 0$. Преобразования координат, не меняющие полученного результата, имеют вид

$$x^{\alpha'} = f^\alpha(x^1, x^2, x^3),\ x^{3'} = x^3 + \text{const},\ x^{4'} = x^4 + f^4(x^1, x^2, x^3)\ (\alpha = 1, 2). \tag{207}$$

Если потребовать, чтобы в новой, штрихованной системе координат выполнялись условия $g'_{\alpha 3} = g'_{33} = 0$, то придем к системе дифференциальных уравнений Коши-Ковалевской:

$$\partial_3 f^\alpha = -g^{4\beta}\partial_\beta f^\alpha - g^{\gamma\beta}\partial_\gamma f^4 \partial_\beta f^4,$$
$$\partial_3 f^4 = -g^{4\beta}\partial_\beta f^4 - \frac{1}{2}g^{\gamma\beta}\partial_\gamma f^4\partial_\beta f^4 - \frac{1}{2}g^{44} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2).$$

При известных условиях ([76], § 1), которые мы будем предполагать выполненными, эта система имеет решения f^α, f^4. Подставив их в (207), в новых координатах, опустив штрихи, получим

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)dx^\alpha dx^\beta + 2dx^3dx^4 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{208}$$

Если V^4 допускает неизотропное ковариантно постоянное векторное поле, то оно является произведением $V^3 \times V^1$ трехмерного и одномерного пространств. Введя в V^3 полугеодезическую систему координат, будем иметь

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)dx^\alpha dx^\beta + e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2} \tag{209}$$

($\alpha, \beta = 1, 2; e_i = \pm 1$).Так как метрики (191), (208) и (146), (209) совпадают и всякое четерехмерное приводимое пространство есть либо $V^3 \times V^1$, либо $V^2 \times V^2$, то справедлива

Т е о р е м а 15.2. 1) *Если неплоское пространство-время непостоянной кривизны допускает ковариантно постоянное векторное поле, то оно является K-пространством* ($K = 0$).
2) *Всякое приводимое пространство-время непостоянной кривизны есть K-пространство* ($K = 0$).

Сравнив теоремы 15.2 и 14.5, получим следующее предложение.

Т е о р е м а 15.3. *Если неплоское пространство-время допускает негомотетическое аффинное движение, то оно является K-пространством, $K = 0$.*

Как мы увидим далее, среди всех других h-пространств непостоянной кривизны K-пространства обладают наибольшей проективной подвижностью и в этом отношении приближаются к пространствам постоянной кривизны. Геометрически этот факт представляется очевидным, так как, с одной стороны, пространства постоянной кривизны обладают максимальной проективной группой и, с другой стороны, все геодезические вполне геодезических поверхностей являются геодезическими в объемлющем пространстве-времени. Поэтому наличие в пространстве-времени семейств вполне геодезических поверхностей постоянной кривизны, вообще говоря, должно приводить к повышению его проективной подвижности. Эти интуитивные соображения получат фактическое подтверждение в последующем изложении. Мы убедимся также, что K-пространства существенно отличаются от жестких h-пространств по характеру и строению допускаемых ими проективных алгебр Ли. Таким образом, введенное нами разделение h-пространств на два класса является весьма существенным.

В следующем параграфе будет показано, что каждое K-пространство есть $\Pi^4(K)$. С этой точки зрения в данном выше определении K-пространства содержится геометрическая характеристика известной части пространств $\Pi^n(K)$, введенных аналитически в § 8.

§ 16. Полуприводимые и приводимые K-пространства

38. В этом и следующем параграфах будут определены метрики всех K-пространств и доказана

Т е о р е м а 16.1. *Для любого проективного движения $X = \xi^i \partial_i$ в K-пространстве выполняются уравнения*

$$K L_X g_{ij} + \varphi_{,ij} = 0, \tag{210}$$

где φ - определяющая функция.

Сравнивая (210) и (90), в соответствии с определением 8.1 получаем утверждение:

Т е о р е м а 16.2. *Всякое K-пространство есть* $\Pi^4(K)$.

Этой теоремой все замечательные проективно-групповые свойства пространств $\Pi^4(K)$ переносятся на K-пространства. В гл. 2 мы видели, что все пространства постоянной кривизны S^4 и все пространства Эйнштейна G^4 являются пространствами $\Pi^4(K)$. K-пространства, по-видимому, заключают круг пространств-времен, обладающих этим свойством.

Разделим K-пространства на три группы: 1) полуприводимые и приводимые K-пространства, 2) K-пространства, допускающие ковариантно постоянные векторные поля, и 3) K-пространства типа $\{1(12)\}$. Рассмотрим каждую их них отдельно.

К первой группе относятся метрики (137), (140), (145), (146), (152), (181) и (184), которые исследуются в данном параграфе. Пространства (140), (146) и (184) являются приводимыми, остальные ((137), (145), (152) и (181)) полуприводимыми. Напомним, что риманово пространство V^n называется полуприводимым, если в некоторой системе координат его метрика имеет вид

$$ds^2 = ds_0^2(x^1, \ldots, x^q) + \sigma(x^1, \ldots, x^q) ds_1^2(x^{q+1}, \ldots, x^n), \tag{211}$$

где ds_0^2 и ds_1^2 — соответственно q-мерная и $(n-q)$-мерная метрики, зависящие каждая от своих переменных, а функция σ зависит только от переменных из ds_0^2. Метрика ds_0^2 называется главной частью, а ds_1^2 — добавочной частью метрики ds^2 [42]. Далее пространство (211) будет обозначаться символом $V^{q+(n-q)}$. К $V^{q+(n-q)}$ принадлежат субпроективные пространства Кагана [38], метрика которых приводится в основном случае к виду

$$ds^2 = edx^{1^2} + \sigma(x^1) ds_1^2(x^2, \ldots, x^n) \quad (e = \pm 1),$$

где ds_1^2 есть $(n-1)$-мерная метрика постоянной кривизны K_1, и для исключительных пространств Кагана — к виду

$$ds^2 = 2dx^1 dx^2 + \sigma(x^2) ds_1^2(x^3, \ldots, x^n), \tag{212}$$

где ds_1^2 есть $(n-2)$-мерная псевдоевклидова метрика.

Пространство (211) называется пространством $V_0(K)$, если присоединенная метрика

$$\overset{*}{ds}{}^2 = ds_0^2 + e\sigma dy^2 \quad (e = \pm 1)$$

имеет постоянную кривизну K. Г. И. Кручкович [42], основываясь на результатах Х. Фриса [146], доказал следующую теорему: риманово пространство V^n допускает непостоянное решение $f(x^i)$ уравнений

$$f_{,ij} = -(Kf + L)g_{ij} \quad (K, L - \text{const}) \tag{213}$$

тогда и только тогда, когда оно является пространством $V_0(K)$ (в случае $K = L = 0$ дополнительно требуется неизотропность градиента $f_{,i}$).

Пространство $V_0(K)$ вида

$$ds^2 = e_1 dx^{1^2} + \sigma(x^1)ds_1^2(x^2, \ldots, x^n) \quad (e_1 = \pm 1),$$

называется пространством $V_1(K)$. Можно показать [44], что V^n является $V_1(K)$ в том и только том случае, если оно допускает решение $f(x^i)$ системы уравнений

$$f_{,ij} = -Kfg_{ij} \text{ при } K \neq 0; \tag{214}$$

$$f_{,ij} = g_{ij} \ \text{ или } \ f_{,ij} = 0, \nabla_1 f \neq 0 \text{ при } K = 0. \tag{215}$$

Сравнивая формулы (213) и (214), (215), видим, что всякое $V_0(K)$ есть $V_1(K)$.

Запишем метрики (137), (152) и (181) в виде

$$ds^2 = B(x^3, x^4)ds_1^2(x^1, x^2) + ds_2^2(x^3, x^4), \tag{216}$$

где ds_1^2, ds_2^2 — двумерные линейные элементы, а $B(x^3, x^4)$ — функция указанных переменных, принимающая определенные значения для каждой метрики. Отсюда следует, что пространства с основными формами (137), (152) и (181) есть V^{2+2}. Если ввести в ds_1^2 полугеодезическую систему координат, то метрика (216) примет вид

$$ds^2 = B(x^3, x^4)\left(e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1, x^2)dx^{2^2}\right) + ds_2^2(x^3, x^4). \tag{217}$$

Если эта метрика определяет K-пространство, то гиперповерхности $x^2 = \text{const}$ с основной формой

$$g_{i_0 j_0}dx^{i_0}dx^{j_0} = e_1 B(x^3, x^4)dx^{1^2} + ds_2^2(x^3, x^4) \quad (i_0, j_0 = 1, 3, 4) \tag{218}$$

имеют постоянную кривизну K (§ 15). Так как при этом присоединенная метрика

$$\overset{*}{ds}{}^2 = eB(x^3, x^4)dy^2 + ds_2^2(x^3, x^4) \quad (e = \pm 1),$$

составленная для полуприводимого пространства (216), также имеет постоянную кривизну K, то всякое K-пространство вида (216) есть $V_0(K)$ и, следовательно, $V_1(K)$ (см. замечание после формулы (215)).

Рассмотрим h-пространство типа $\{(111)1\}$ с основной формой (145)

$$g_{ij}dx^i dx^j = f^2(x^4)\left(\overset{0}{g}_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)dx^\alpha dx^\beta + e_3 dx^{3^2}\right) + e_4 dx^{4^2}$$

$(\alpha, \beta = 1, 2)$, определяющей полуприводимое пространство V^{1+3} с присоединенной метрикой

$$ef^2(x^4)dy^2 + e_4 dx^{4^2} \quad (e, e_4 = \pm 1). \tag{219}$$

Согласно определению 15.1 пространство (145) непостоянной кривизны является K-пространством, если поверхности $x^\alpha = \mathrm{const}$ $(\alpha = 1, 2)$, несущие на себе метрику

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = f^2(x^4)e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2} \quad (\mu, \nu = 3, 4), \tag{220}$$

имеют постоянную кривизну K. Поскольку в этом случае присоединенная метрика (219) также имеет постоянную кривизну K, то всякое K-пространство вида (145) есть четырехмерное пространство $V_1(K)$ непостоянной кривизны, и наоборот. Объединив этот вывод с предыдущим, получим лемму.

Л е м м а 16.1. *Всякое полуприводимое K-пространство есть пространство $V_1(K)$ непостоянной кривизны, или K-пространство типа* $\{(111)1\}$.

Таким образом, изучение полуприводимых K-пространств сводится к изучению четырехмерных пространств $V_1(K)$ непостоянной кривизны, или K-пространств (145), принадлежащих к типу $\{(111)1\}$.

39. K-пространства типа $\{(111)1\}$. Тензор кривизны метрики (220) имеет вид

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -e_4\frac{f''}{f}(\delta^\rho_\mu g_{\sigma\nu} - \delta^\rho_\nu g_{\sigma\mu}) \quad (\rho, \sigma, \mu, \nu = 3, 4).$$

Справедлива

Л е м м а 16.2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы метрика* (145) *определяла K-пространство, выражается равенством*

$$f'' + e_4 kf = 0. \tag{221}$$

Используя условие (221), можно уже сейчас доказать справедливость теоремы 16.1 в рассматриваемом случае. С этой целью введем обозначения

$$ds_0^2 = \overset{0}{g}{}_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{j_0} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + e_3 dx^{3^2} \quad (i_0, j_0 = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2)$$

и выпишем ненулевые коэффициенты связности и компоненты тензора кривизны K-пространства (145):

$$\Gamma^{i_0}_{j_0 k_0} = \overset{0}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0}, \quad \Gamma^{i_0}_{4 i_0} = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma^4_{i_0 j_0} = -e_4 \frac{f'}{f} g_{i_0 j_0}, \tag{222}$$

$$\begin{gathered} R^{i_0}_{j_0 k_0 l_0} = \overset{0}{R}{}^{i_0}_{j_0 k_0 l_0} - 2 e_4 f'^2 \delta^{i_0}_{[k_0} \overset{0}{g}{}_{e_0] j_0}, \\ R^{i_0}_{4 i_0 4} = e_4 K, \quad R^4_{i_0 4 j_0} = K g_{i_0 j_0}, \end{gathered} \tag{223}$$

где величины $\overset{0}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0}$, $\overset{0}{R}{}^{i_0}_{j_0 k_0}$ составлены для метрики ds_0^2.

Пусть $X = \xi^i \partial_i$ — проективное движение в K-пространстве (145). Используя формулы (223), из условий интегрируемости (57) уравнений (52) при $(ijkl) = (4 j_0 4 l_0)$ [1] найдем

$$K(\xi^m \partial_m g_{j_0 l_0} + g_{j_0 k_0} \partial_{l_0} \xi^{k_0} + g_{l_0 k_0} \partial_{j_0} \xi^{k_0}) = -\varphi_{, j_0 l_0},$$

или

$$K L_X g_{j_0 l_0} + \varphi_{, j_0 l_0} = 0 \quad (j_0, l_0 = 1, 2, 3). \tag{224}$$

Точно так же, полагая в (57) поочередно $(ijkl) = (i_0 4 i_0 4)$, $(444 l_0)$, получим

$$K L_X g_{44} + \varphi_{,44} = K L_X g_{l_0 4} + \varphi_{, l_0 4} = 0 \quad (l_0 = 1, 2, 3). \tag{225}$$

Из (224) и (225) следует (210), ч. т. д.

Определим метрики K-пространств типа $\{(111)\}$. Так как умножив метрику постоянной кривизны $K \neq 0$ на постоянное положительное число, можно сделать $|K|$ равным 1, то, полагая в уравнении (221) поочередно $K = \pm e_4$, $K = 0$ и интегрируя его, получим следующие возможности (ср. [44]):

$$ds^2 = \sin^2 x^4 ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = e_4), \tag{226}$$

[1] В записи $(ijkl) = (i_0 j_0 k_0 l_0)$, которой будем часто пользоваться, предполагается: $i = i_0,\ j = j_0,\ k = k_0,\ l = l_0$.

$$ds^2 = \sinh^2 x^4 ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = -e_4), \tag{227}$$

$$ds^2 = \cosh^2 x^4 ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = -e_4), \tag{228}$$

$$ds^2 = e^{2x^4} ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = -e_4), \tag{229}$$

$$ds^2 = ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = 0), \tag{230}$$

$$ds^2 = x^{4^2} ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2} \quad (K = 0), \tag{231}$$

где ds_0^2 — трехмерная метрическая форма, зависящая от переменных x^1, x^2, x^3. Метрика (231) определяет пространство П. А. Широкова (§ 7), а (230) есть приводимое пространство $V^3 \times V^1$. Справедлива

Л е м м а 16.3. *Метрики* (226)—(228)*, записанные в подходящей системе координат, имеют общие геодезические с метрикой* (231) *и, следовательно, допускают ту же проективную алгебру Ли, что и метрика* (231).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в метриках (226)—(228) новые переменные соответственно $x^{4'} = \tan x^4$, $x^{4'} = \tanh x^4$ и $x^{4'} = \coth x^4$, после чего метрики примут вид

$$\underset{1}{ds}^2 = \frac{ex^{4^2}}{1 + x^{4^2}} ds_0^2 + \frac{e_4 dx^{4^2}}{(1 + x^{4^2})^2}, \tag{232}$$

$$\underset{2}{ds}^2 = \frac{ex^{4^2}}{1 - x^{4^2}} ds_0^2 + \frac{e_4 dx^{4^2}}{(1 - x^{4^2})^2}, \tag{233}$$

$$\underset{3}{ds}^2 = \frac{ex^{4^2}}{1 - x^{4^2}} ds_0^2 + \frac{e_4 dx^{4^2}}{(1 - x^{4^2})^2} \tag{234}$$

(штрихи опущены). Ненулевые коэффициенты связности этих метрик определяются равенствами

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0} = \overset{0}{\underset{1}{\Gamma}}{}^{i_0}_{j_0 k_0}, \quad \underset{1}{\Gamma}{}^{i_0}_{4 i_0} = \frac{1}{x^4(1 + x^{4^2})},$$

$$\underset{1}{\Gamma}{}^{4}_{i_0 j_0} = -e e_4 x^4 \overset{0}{\underset{1}{g}}{}_{i_0 j_0}, \quad \underset{1}{\Gamma}{}^{4}_{44} = \frac{-2x^4}{1 + x^{4^2}},$$

$$\underset{p}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0} = \overset{0}{\underset{p}{\Gamma}}{}^{i_0}_{j_0 k_0}, \quad \underset{p}{\Gamma}{}^{i_0}_{4 i_0} = \frac{1}{x^4(1 - x^{4^2})},$$

$$\underset{p}{\Gamma}{}^{4}_{i_0 j_0} = -e e_4 x^4 \overset{0}{\underset{p}{g}}{}_{i_0 j_0}, \quad \underset{p}{\Gamma}{}^{4}_{44} = \frac{2x^4}{1 - x^{4^2}} \quad (p = 2, 3; e, e_4 = \pm 1).$$

Вычислив по формулам (222) коэффициенты связности метрики (231) и используя необходимое и достаточное условие (22) геодезического соответствия двух метрик, а также предыдущие формулы, убедимся, что метрики (232)—(234) имеют общие геодезические с метрикой (231) и по теореме 3.1 допускают ту же проективную алгебру Ли (с теми же генераторами в соответственных системах координат), что и метрика (231).

40. Далее при рассмотрении полуприводимых жестких h-пространств нам понадобятся некоторые сведения об h-пространствах V^{2+2}, прежде всего, необходимые и достаточные условия определяемых ими K-пространств. Выпишем ненулевые коэффициенты связности и компоненты тензора кривизны метрики (216) в предположении, что двумерная квадратичная форма ds_2^2 приведена к диагональному виду, что всегда возможно (ср. [68]):

$$\Gamma^{i_\alpha}_{j_\alpha k_\alpha} = \overset{\alpha}{\Gamma}{}^{i_\alpha}_{j_\alpha k_\alpha},\ \Gamma^{i_1}_{i_1 j_2} = \frac{1}{2}(\ln|B|)_{,j_2},\ \Gamma^{i_2}_{j_1 j_1} = -\frac{1}{2}(\ln|B|)^{i_2}_{,}g_{j_1 j_1} \tag{235}$$

($i_1 = 1,2$, $i_2 = 3,4$, в правой части первого равенства стоит символ Кристоффеля метрики ds_α^2, $\alpha = 1,2$),

$$\begin{gathered} R^{i_1}_{j_1 i_1 j_1} = \overset{1}{R}{}^{i_1}_{j_1 i_1 j_1} - \frac{1}{4B^2}\triangle_1 B g_{i_1 j_1} \quad (i_1 \neq j_1), \\ R^{i_2}_{j_2 i_2 j_2} = \overset{2}{R}{}^{i_2}_{j_2 i_2 j_2} \quad (i_2 \neq j_2), \quad R^{i_1}_{j_2 i_1 k_2} = P_{j_2 k_2}, \\ R^{i_2}_{j_1 l_2 j_1} = g^{i_2 i_2} P_{i_2 l_2} g_{j_1 j_1} \quad (i_1, j_1 = 1,2; j_2, k_2, l_2 = 3,4), \end{gathered} \tag{236}$$

где $\triangle_1 B \equiv g^{ij} B_{,i} B_{,j}$ — оператор Бельтрами первого рода,

$$P_{j_2 k_2} \equiv \frac{1}{4B^2} B_{,j_2} B_{,k_2} - \frac{1}{2B} B_{,j_2 k_2}, \tag{237}$$

$\overset{\alpha}{R}{}^{i_\alpha}_{j_\alpha k_\alpha l_\alpha}$ — компоненты тензора кривизны, составленного для ds_α^2, $\alpha = 1, 2$.

H-пространство (216) непостоянной кривизны является K-пространством, если гиперповерхности $x^2 = \mathrm{const}$ с основной формой (218) имеют постоянную кривизну K (§ 15). Так как все величины $\Gamma^2_{i_0 j_0}$ и $\Gamma^{i_0}_{2 j_0}$ при $i_0, j_0 = 1, 3, 4$ равны нулю для метрики (216), то коэффициенты связности и компоненты тензора кривизны метрики (218) совпадают с соответствующими величинами для метрики (217). Отсюда ввиду формул (236) следует

Л е м м а 16.4. *Метрика* (217) *непостоянной кривизны определяет K-пространство тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$P_{j_2k_2} = Kg_{j_2k_2}, \tag{238}$$

$$R^{i_2}_{j_2k_2l_2} = 2K\delta^{i_2}_{[k_2}g_{l_2]j_2} \quad (i_2, j_2, k_2, l_2 = 3, 4), \tag{239}$$

где $P_{j_2k_2}$ определены формулой (237).

Из (236), (238) и (239) следует, что ненулевые компоненты тензора кривизны K-пространства (217), за исключением $R^{i_1}_{j_1i_1j_1}$, $i_1, j_1 = 1, 2$, имеют вид

$$R^{i_2}_{j_2i_2j_2} = Kg_{j_2j_2}, \quad R^{i_\alpha}_{j_\beta i_\alpha j_\beta} = Kg_{j_\beta j_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{240}$$

Поэтому справедлива

Л е м м а 16.5. *Если метрика* (217)*, для которой выполняются условия* (238), (239)*, имеет постоянную кривизну K, то*

$$R^{i_1}_{j_1i_1j_1} = Kg_{j_1j_1} \quad (i_1, j_1 = 1, 2), \tag{241}$$

и наоборот.

Выпишем для справки метрики полуприводимых K-пространств V^{2+2}

для $K \neq 0$:

$$g_{ij}dx^idx^j = \left((ae^{x^4} + be^{-x^4})\cos x^3 + c\sin x^3\right)^2 ds_1^2(x^1, x^2) +$$

$$e_3\left(dx^{3^2} - \cos^2 x^3 dx^{4^2}\right),$$

$$g_{ij}dx^idx^j = (a\cos x^4\cosh x^3 + b\sinh x^3)^2 ds_1^2(x^1, x^2) +$$

$$e_3\left(dx^{3^2} - \cosh^2 x^3 dx^{4^2}\right) \quad (a, b, c - \mathrm{const}),$$

для $K = 0$:

$$g_{ij}dx^idx^j = x^{4^2}ds_1^2(x^1, x^2) + 2dx^3dx^4,$$

$$g_{ij}dx^idx^j = x^{4^2}ds_1^2(x^1, x^2) + e_3\left(dx^{3^2} - dx^{4^2}\right), \tag{242}$$

$$g_{ij}dx^idx^j = ds_1^2(x^1, x^2) + e_3\left(dx^{3^2} - dx^{4^2}\right).$$

Если K-пространство является полуприводимым пространством V^{2+2}, то его метрика приводится к одной из перечисленных выше.

Докажем три леммы.

Л е м м а 16.6. *Если* $\xi^i\partial_i$ *— проективное движение в* K*-пространстве вида* (217), *то* $L_\xi g_{i_1l} \equiv h_{i_1l} = 0$ *при* $i_1 = 1,2$; $l = 1,\dots,4$; $i_1 \neq l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (55), полагая $(ijkl) = (i_1j_2k_1i_1)$ и используя формулы (240), найдем $h_{k_1j_2}(R^{k_1}_{i_1i_1k_1} + Kg_{i_1i_1}) = 0$ (не суммировать). Если $h_{k_1j_2} \neq 0$, то $R^{k_1}{}_{i_1k_1i_1} = Kg_{i_1i_1}$ и из (241) следует, что (217) имеет постоянную кривизну. Поэтому $h_{k_1j_2} = 0$ при $k_1 = 1,2$; $j_2 = 3,4$. Так же, полагая $(ijkl) = (i_1i_1i_1l_1)$ в (55), получим $h_{12} = 0$.

Л е м м а 16.7. *Если* $\xi^i\partial_i$ *— проективное движение в* K*-пространстве вида* (217), *то его определяющая функция* φ *зависит только от* x^{i_2}, $i_2 = 3,4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (54) $(ijk) = (i_1j_2j_2)$, с помощью (235) получим

$$\partial_{j_2}h_{i_1j_2} - \Gamma^{i_1}_{i_1j_2}h_{i_1j_2} - \Gamma^{k_2}_{j_2j_2}h_{i_1k_2} = g_{j_2j_2}\varphi_{,i_1}.$$

Так как по предыдущей лемме $h_{i_1j_2} = 0$, то $\varphi_{,i_1} = 0$, ч. т. д.

Л е м м а 16.8. *Если* $\xi^i\partial_i$ *— проективное движение в* K*-пространстве вида* (217), *то* ξ^{i_α} *зависят только от* x^{k_α} $(\alpha = 1,2;\ i_1 = 1,2,\ i_2 = 3,4)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в (57) $(ijkl) = (i_1j_1j_1l_2)$, $i_1 \neq j_1$, с учетом формулы (240) найдем

$$(R^{i_1}{}_{j_1i_1j_1} - R^{l_2}{}_{j_1l_2j_1})\partial_{l_2}\xi^{i_1} = 0$$

(не суммировать). Если $\partial_{l_2}\xi^{i_1} \neq 0$, то выполняется условие (241) и (217) имеет постоянную кривизну. Следовательно, $\partial_{l_2}\xi^{i_1} = 0$. Из уравнений (53) с помощью леммы 16.6 получим $\partial_{i_1}\xi^{l_2} = -g_{i_1i_1}g^{-1}_{l_2l_2}\partial_{l_2}\xi^{i_1} = 0$, ч. т. д.

41. Приводимые пространства. Все четырехмерные приводимые пространства есть либо $V^3 \times V^1$, либо $V^2 \times V^2$ и в соответствии с теоремой 15.2 являются K-пространствами ($K = 0$). Метрика пространства $V^3 \times V^1$ приводится к линейному элементу (230), рассмотренному в п. 39. Докажем теорему 16.1 для $V^2 \times V^2$ (метрика (140)). Так как (140) получается из (217), если положить $B(x^3, x^4) \equiv 1$, то из (235) и (236) имеем

$$\Gamma^{i_\alpha}_{j_\alpha k_\alpha} = \overset{\alpha}{\Gamma}{}^{i_\alpha}_{j_\alpha k_\alpha}, \quad R^{i_\alpha}{}_{j_\alpha i_\alpha j_\alpha} = \overset{\alpha}{R}{}^{i_\alpha}{}_{j_\alpha i_\alpha j_\alpha} = \overset{\alpha}{T} g_{j_\alpha j_\alpha}$$

($\alpha = 1, 2; i_1 = 1, 2; i_2 = 3, 4$, $\overset{\alpha}{T}$ — функция x^{i_α}, по i_α не суммировать). Остальные символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны метрики (140) равны нулю. Уравнение (57) при $(ijkl) = (i_\beta j_\alpha k_\alpha i_\beta)$, $\alpha \neq \beta$, дает

$$R^{i_\beta}{}_{m k_\alpha i_\beta} \partial_{j_\alpha} \xi^m - R^m{}_{j_\alpha k_\alpha i_\beta} \partial_m \xi^{i_\beta} +$$

$$R^{i_\beta}{}_{j_\alpha m i_\beta} \partial_{k_\alpha} \xi^m + R^{i_\beta}{}_{j_\alpha k_\alpha m} \partial_{i_\beta} \xi^m = \varphi_{,j_\alpha k_\alpha}.$$

Поскольку все компоненты тензора кривизны, у которых не все индексы принадлежат одной группе (i_α), равны нулю, то $\varphi_{,j_\alpha k_\alpha} = 0$. Если $(ijkl) = (i_\alpha k_\alpha i_\alpha j_\beta)$, $k_\alpha \neq i_\alpha$, в уравнении (55), то его правая часть тождественно равна нулю, поэтому $g_{i_\alpha i_\alpha} \varphi_{,k_\alpha j_\beta} = 0$. Следовательно, $\varphi_{,ij} = 0$, т. е. выполняется (210) ($K = 0$).

§ 17. Пространства, допускающие ковариантно постоянные векторные поля, и другие K-пространства. Инвариантные признаки K-пространств

42. В соответствии с теоремой 15.2 всякое пространство-время, допускающее ковариантно постоянное векторное поле, является K-пространством ($K = 0$). Покажем, что и в этом случае справедлива теорема 16.1, нужно только положить $K = 0$ в формуле (210). Если ковариантно постоянное векторное поле неизотропно, то метрика пространства-времени приводится к виду (230) и, как следует из результатов п. 39, любое проективное движение в ней удовлетворяет условию $\varphi_{,ij} = 0$, где φ — определяющая функция. В случае изотропного ковариантно постоянного векторного поля метрика пространства-времени в некоторой системе координат имеет вид (191) (§ 15). Вычислив компоненты тензора кривизны этой метрики, нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$R^i{}_{jk3} = R^4{}_{ijk} = 0 \quad (i, j, k = 1, \ldots, 4); \tag{243}$$

с их помощью из уравнения (57) при $(ijkl) = (4j43)$ найдем $\varphi_{,j3} = 0$. Если $l = 3$ в уравнении (55), то ввиду (243) его левая часть тождественно равняется нулю, поэтому

$$\Gamma_{ijk} \equiv g_{i3}\varphi_{,jk} + g_{j3}\varphi_{,ik} = 0.$$

Полагая здесь $i = j = 4$, получим $\varphi_{,4k} = 0$, но тогда $\Gamma_{4jk} = \varphi_{,jk} = 0$, ч. т. д.

Прямым следствием полученного результата, теоремы 15.2 и уравнений (57) является

Т е о р е м а 17.1. *Если пространство-время допускает ковариантно постоянное векторное поле, то произвольное проективное движение X в нем удовлетворяет условию $\varphi_{,ij} = 0$ (φ — определяющая функция) и, следовательно, является коллинеацией кривизны:* $L_X R^i{}_{jkl} = 0$.

Перечислим h-пространства, допускающие ковариантно постоянные векторные поля: (146) (тип $\{(111)1\}$), (184) (тип $\{(11)2\}$), (191) (тип $\{(112)\}$) и (202) (тип $\{(13)\}$).

43. Рассмотрим h-пространство (188), принадлежащее к типу $\{1(12)\}$. Согласно определению 15.2 оно является K-пространством, если гиперповерхности $x^2 = \mathrm{const}$ с основной формой

$$g_{i_0j_0}dx^{i_0}dx^{j_0} = e_1 dx^{1^2} + 2e_3 dx^3 dx^4 - e_3\left(1 + \theta(x^2, x^4)\right) dx^{4^2} \tag{244}$$

имеют постоянную кривизну K. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что из компонент тензора кривизны метрики (188) отличны от нуля только следующие:

$$R^{i_2}_{pi_2q} = \rho g_{pq},$$

$$\begin{gathered}
R^2{}_{i_2 2 j_2} = \rho g_{i_2j_2}, \quad R^1{}_{i_2 1 j_2} = (\rho + T_1) g_{i_2j_2} \quad (i_2 \neq j_2), \\
R^{i_1}{}_{j_1 i_1 k_1} = (\rho + T_1) g_{j_1k_1}, \quad R^{i_2}{}_{1 i_2 1} = (\rho + T_1) g_{11}, \\
R^{i_1}{}_{4 i_1 4} = \rho g_{44} + \overset{i_1}{T}, \quad R^3{}_{i_1 i_1 4} = -f^{-1} T_{i_1} g_{i_1 i_1}
\end{gathered} \tag{245}$$

$(i_1, j_1, k_1 = 1, 2;\ i_2, j_2 = 3, 4;\ p, q = 2, 3, 4)$, где

$$\rho = -(1/4)e_1(f'/f)^2, \quad \overset{1}{T} = -e_3 f\theta T_1, \quad \overset{2}{T} = e_3 T_2,$$

$$T_1 = (1/2)e_1 f^{-2}(f'^2 - ff''), \quad T_2 = (1/2)\left(e_2\partial_{22}\theta - (1/2)e_1(f'/f)^2\right). \tag{246}$$

Используя эти формулы, докажем две леммы.

Л е м м а 17.1. *Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны h-пространства типа* $\{1(12)\}$ *выражается равенством*

$$R^i{}_{jkl} = 0 \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, 4; i \neq k, l). \tag{247}$$

Необходимость этого условия очевидна. Достаточность устанавливается следующим образом. Из указанных в формуле (247) компонент для метрики (188) отличны от нуля только компоненты $R^3_{i_1 i_1 4}$. Приравнивая их нулю, получим $T_{i_1} = 0$, следовательно, $\overset{i_1}{T} = 0$. Затем из (245) в дополнение к (247) получим равенства $R^i_{jik} = \rho g_{jk}$ $(i, j, k = 1, \ldots, 4)$. Согласно теореме 1.1 ρ есть постоянное число, и метрика (188) имеет постоянную кривизну.

Л е м м а 17.2. *Метрика* (188) *определяет K-пространство тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:* 1) $\rho = K = const$*;* 2) $f = ce^{\alpha x^1}$*;* 3) $T_1 = 0$, *где ρ определяется формулой* (246), *c и α — произвольные постоянные,* $K = -(1/4)e_1\alpha^2$.

Эта лемма является прямым следствием формул (245), (246) и совпадения коэффициентов связности $\overset{0}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0}$ и компонент тензора кривизны $\overset{0}{R}{}^{i_0}{}_{j_0 k_0 l_0}$ $(i_0, j_0, k_0, l_0 = 1, 3, 4)$ метрики (244) с соответствующими величинами метрики (188). Из (245) и леммы 17.2 следует, что вполне геодезические поверхности $x^p = \text{const}$ $(p = 3, 4)$ в K-пространстве (188) также имеют постоянную риманову кривизну K. В самом деле, из равенства нулю компоненты $\overset{0}{R}{}^3{}_{114} = R^3{}_{114}$ вытекает $T_1 = 0$, но тогда (см.(245))

$$\overset{1}{R}{}^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} = R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} = K(\delta^{i_1}_{k_1} g_{l_1 j_1} - \delta^{i_1}_{l_1} g_{j_1 k_1}) \quad (i_1, j_1, k_1, l_1 = 1, 2),$$

где тензор кривизны $\overset{1}{R}{}^{i_1}{}_{j_1 k_1 l_1}$ составлен относительно коэффициентов $g_{i_1 j_1}$, определяющих метрику поверхностей $x^p = \text{const}$ $(p = 3, 4)$.

Если постоянная α из леммы 17.2 равняется нулю, то $f = \mathrm{const}$. В этом случае метрика (188) допускает два ковариантно постоянных векторных поля и, следовательно, определяет K-пространство ($K = 0$) рассмотренного ранее вида (п. 42). Отметим также, что эта метрика простейшими преобразованиями переменных приводится к метрике (202) (тип $\{(13)\}$).

Если $\alpha \neq 0$, то функция $\psi = a(x^4)e^{(\alpha/2)x^1}$, где $a(x^4)$ — решение уравнения $a'' + (1/4)e_1e_3\alpha^2 a = 0$, удовлетворяет в K-пространстве (188) уравнению $\psi_{,ij} = (1/4)e_1\alpha^2\psi g_{ij} = -K\psi g_{ij}$. Сравнивая его с (214), заключаем, что всякое K-пространство ($K \neq 0$) типа $\{1(12)\}$ есть $V_1(K)$, или K-пространство типа $\{(111)1\}$ (см. § 16). Тогда из леммы 16.1 следует

Т е о р е м а 17.2. *Всякое K-пространство при $K \neq 0$ есть полуприводимое пространство $V_1(K)$, или K-пространство типа* $\{(111)1\}$.

Таким образом, все K-пространства можно разделить на три группы: пространства $V_1(K)$, приводимые пространства и пространства, допускающие ковариантно постоянные векторные поля. Используя известный признак приводимости, полученный П. А. Широковым [89], а также необходимый и достаточный признак пространств $V_1(K)$ (уравнения (214), (215) [44]), можно определить инвариантный признак K-пространств.

Т е о р е м а 17.3. *Пространство-время непостоянной кривизны является K-пространством тогда и только тогда, когда*

a) при $K \neq 0$ оно допускает решение $f(x)$ уравнения

$$f_{,ij} = -Kfg_{ij},$$

b) при $K = 0$ существует постоянный симметрический идемпотентный тензор $c_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$:

$$c_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad c^{\delta}_{\alpha}c_{\delta\beta} = c_{\alpha\beta},$$

либо существует непостоянное решение f уравнения

$$f_{,ij} = lg_{ij} \quad (l = const). \tag{248}$$

Заметим, что уравнения $f_{,ij} = \rho g_{ij}$ (ρ — функция), к числу которых относятся уравнения (247) и (248), возникают при рассмотрении конциркулярных преобразований в V^n, т. е. специальных конформных преобразований, переводящих геодезические круги (кривые с постоянной первой и нулевой второй кривизнами) в геодезические круги ([152], см. также [18], гл. 4).

Уравнение (248) в случае $l \neq 0$ определяет пространство П. А. Широкова (§ 7), а в случае $l = 0$ пространство, допускающее ковариантно постоянное векторное поле. Из теоремы 17.3 следует, что совокупность K-пространств при $K = 0$ исчерпывается приводимыми пространствами, пространствами П. А. Широкова и пространствами, допускающими ковариантно векторные поля.

§ 18. Жесткие h-пространства с различными базисами элементарных делителей матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$

44. В этом и следующем параграфах для жестких h-пространств будут доказаны две теоремы.

Теорема 18.1. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор a_{ij} в жестком h-пространстве пропорционален фундаментальному тензору:*

$$a_{ij} = a_2 g_{ij} \quad (a_2 = const).$$

Теорема 18.2. *Векторное поле $X = \xi^i \partial$ является проективным движением в жестком h-пространстве тогда и только тогда, когда*

$$L_X g_{ij} = a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij} \quad (a_1, a_2 = const), \tag{249}$$

где h_{ij} — известный тензор, удовлетворяющий уравнению Эйзенхарта и определенный вместе с метрическим тензором g_{ij} в теореме 14.3.

Эти теоремы позволяют сделать важные выводы о строении максимальной проективной алгебры Ли в жестком h-пространстве. Прямым следствием теоремы 18.1 является

Теорема 18.3. *Аффинная алгебра Ли в жестком h-пространстве состоит из инфинитезимальных гомотетий.*

Из теоремы 18.2 вытекает важная групповая характеристика жестких h-пространств:

Теорема 18.4. *Если жесткое h-пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит гомотетическую подалгебру H_{r-1} размерности $r - 1$.*

Доказательство. Предположим, что жесткое h-пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, порожденную операторами $X_\alpha = \underset{\alpha}{\xi}{}^i \partial_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$. Вследствие теоремы 18.2 имеем

$$L_{X_\alpha} g_{ij} = \underset{\alpha}{a}{}_1 h_{ij} + \underset{\alpha}{a}{}_2 g_{ij} \quad (\underset{\alpha}{a}{}_1, \underset{\alpha}{a}{}_2 = \mathrm{const}), \tag{250}$$

Так как по предположению алгебра P_r не сводится к гомотетиям, то, по меньшей мере, одна из постоянных $\underset{\alpha}{a}{}_1$, например, $\underset{1}{a}{}_1 \neq 0$, отлична от нуля. Введем новый базис в P_r:

$$\underset{1}{\xi}{}^{i'} = \underset{1}{\xi}{}^i, \quad \underset{\beta}{\xi}{}^{i'} = \underset{1}{a}{}_1 \underset{\beta}{\xi}{}^i - \underset{\beta}{a}{}_1 \underset{1}{\xi}{}^i \qquad (\beta = 2, \ldots, r) \tag{251}$$

и покажем, что $r-1$ векторов нового базиса определяют гомотетии. По известному свойству производной Ли (п. 18) имеем

$$L_{\underset{\beta}{\xi'}} g_{ij} = \underset{1}{a}{}_1 L_{\underset{\beta}{\xi}} g_{ij} - \underset{\beta}{a}{}_1 L_{\underset{1}{\xi}} g_{ij}.$$

Отсюда, используя (250) и (251), получим

$$L_{\underset{\beta}{\xi'}} g_{ij} = (\underset{1}{a}{}_1 \underset{\beta}{a}{}_2 - \underset{1}{a}{}_2 \underset{\beta}{a}{}_1) g_{ij} \quad (\beta = 2, \ldots, r).$$

Это означает, что $\underset{2}{\xi}{}^{i'} \partial_{i'}, \ldots, \underset{r}{\xi}{}^{i'} \partial_{i'}$ задают инфинитезимальные гомотетии, т. е. алгебра Ли P_r имеет подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий.

Вернемся к теоремам 18.1 и 18.2. Теорема 18.2 вытекает из теоремы 18.1 и следующей леммы.

Лемма 18.1. *Определяющая функция любого проективного движения в жестком h-пространстве есть $a_1\varphi$ $(a_1 = const)$, где φ — функция, удовлетворяющая вместе с h_{ij} уравнению Эйзенхарта и определенная для каждого типа h-пространств в теореме* 14.3.

В силу этой леммы, линейности уравнения (52) и того обстоятельства, что любые два решения $L_{X_1} g_{ij}$ и $L_{X_2} g_{ij}$ этого уравнения с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор a_{ij}, общее решение $L_X g_{ij}$ уравнений (52) в жестком h-пространстве имеет вид $a_1 h_{ij} + a_{ij}$, или в соответствии с теоремой 18.1 $a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij}$, где a_1, a_2 — постоянные; отсюда следует теорема 18.2.

В итоге наша задача свелась к доказательству для всех жестких h-пространств теоремы 18.1 и леммы 18.1. В данном параграфе это делается для h-пространств, принадлежащих к типам $\{112\}$,$\{13\}$,$\{1111\}$ и $\{11, 1\overset{*}{1}\}$. Согласно определению 15.2 h-пространства перечисленных типов являются жесткими, если они не имеют постоянной кривизны.

45. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для тензоров кривизны h-метрик (164) и (174) типа $\{112\}$ выполняются равенства

$$R^i{}_{\alpha i\beta} = \rho g_{\alpha\beta} \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, 4), \tag{252}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — нулевые компоненты метрических тензоров. Из компонент $R^i{}_{jkl}$ при $i \neq k, l$ отличны от нуля только две: $R^3{}_{i_1 i_1 4}$, $i_1 = 1, 2$ (условимся впредь считать, что индексы i_1 со значком 1 принимают значения 1,2, а индексы i_2 со значком 2 — значения 3,4). Остальные ненулевые компоненты тензора кривизны определяются равенствами

$$\begin{gathered} R^{i_2}{}_{j_2 i_2 l_2} = \rho g_{j_2 l_2}, \\ R^{i_1}{}_{j_1 i_1 j_1} = (\rho + \overset{1}{T}) g_{j_1 j_1}, \quad R^{i_1}{}_{4 i_1 4} = \rho g_{44} + \overset{2}{T}{}_{i_1}, \\ \frac{R^{i_1}{}_{j_2 i_1 k_2}}{g_{j_2 k_2}} = \frac{R^{l_2}{}_{i_1 l_2 i_1}}{g_{i_1 i_1}} = \rho + \overset{3}{T}{}_{i_1} \quad (j_2 \neq k_2), \end{gathered} \tag{253}$$

где для метрики (164)

$$\begin{gathered} \rho = (x^3 + \theta)^{-1} g_{34}^{-1} \theta' - (1/4)(f_1 - f_2) \textstyle\sum_{i_1} e_{i_1} g_{i_1 i_1}^2 f_{i_1}'{}^2, \\ \overset{1}{T} = (x^3 + \theta)^{-1} (f_1 - f_2)^{-2} \textstyle\sum_{k_1} e_{k_1} (-1)^{k_1} R^3{}_{k_1 k_1 4}, \\ \overset{2}{T}{}_{i_1} = e_3 e_{i_1} (x^3 + \theta)(f_1 - f_2)^{-1} R^3{}_{i_1 i_1 4}, \\ \overset{3}{T}{}_{i_1} = e_{i_1} (x^3 + \theta)^{-1} (f_{i_1} - x^4)^{-1} (f_1 - f_2)^{-1} R^3{}_{i_1 4 i_1}, \end{gathered} \tag{254}$$

для метрики (174)

$$\begin{gathered} \rho = -\frac{1}{4}(f_1 - f_2)^{-1} \left(e_1 f_1^{-2} f_1'{}^2 + e_2 f_2^{-2} f_2'{}^2 \right), \\ \overset{1}{T} = (f_1 - f_2)^{-2} \sum_{k_1} (-1)^{k_1} e_{k_1} f_{k_1}^2 R^3{}_{k_1 k_1 4}, \\ \overset{2}{T}{}_{i_1} = e_3 e_{i_1} f_{i_1}^2 (f_1 - f_2)^{-1} R^3{}_{i_1 i_1 4}, \quad \overset{3}{T}{}_{i_1} = e_{i_1} f_{i_1} (f_1 - f_2)^{-1} R^3{}_{i_1 4 i_1}. \end{gathered} \tag{255}$$

Имеет место

Л е м м а 18.2. *Необходимое и достаточное условие постоянства кривизны h-пространства типа $\{112\}$ выражается равенством*

$$R^i_{jkl} = 0 \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, 4;\ i \neq k, l). \tag{256}$$

Необходимость этого условия вытекает из формулы (17). Достаточность устанавливается следующим образом. Согласно (256)

$$R^3{}_{i_1 i_1 4} = 0,$$

поэтому $\overset{1}{T} = \overset{2}{T}{}_{i_1} = \overset{3}{T}{}_{i_1} = 0$ (см. (254), (255)), но тогда $R^i{}_{jik} = \rho g_{jk}$ при $i, j, k = 1, \ldots, 4$. В силу теоремы 1.1 ρ есть постоянное число, и h-пространство имеет постоянную кривизну.

Доказательство леммы 18.1 *для h-пространств типа {112}.* Если X — проективное движение с определяющей функцией ψ в жестком h-пространстве типа $\{112\}$ [2], то для тензора $b_{ij} = L_X g_{ij}$ выполняется уравнение Эйзенхарта

$$b_{ij,k} = 2g_{ij}\psi_{,k} + g_{ik}\psi_{,j} + g_{jk}\psi_{,i}. \tag{257}$$

Из условий интегрируемости

$$b_{mi}R^m{}_{jkl} + b_{mj}R^m{}_{ikl} = g_{ki}\psi_{,jl} + g_{kj}\psi_{,il} - g_{lj}\psi_{,ik} - g_{li}\psi_{,jk} \tag{258}$$

с учетом (252) и (253) получим

$$b_{i_1 3}R^{i_1}{}_{34i_1} = g_{34}\psi_{,i_1 3},\ b_{i_1 3}R^3{}_{343} = g_{34}\psi_{,i_1 3},\ b_{i_1 3}R^3{}_{j_1 j_1 3} = g_{j_1 j_1}\psi_{,i_1 3}$$

$(i_1 \neq j_1)$. Предположим, что $b_{i_1 3} \neq 0$, тогда

$$g_{34}^{-1}R^{i_1}{}_{34i_1} = g_{34}^{-1}R^3{}_{343} = g_{j_1 j_1}^{-1}R^3{}_{j_1 j_1 3} \quad (i_1 \neq j_1).$$

Подставив сюда соответствующие значения из (253), найдем $\overset{3}{T}{}_{i_1} = 0$ и в силу (254) и (255) $R^3{}_{i_1 i_1 4} = 0$, поэтому $R^i_{jkl} = 0$ при $i \neq k, l$, и h-пространство вопреки условию имеет постоянную кривизну. Следовательно, $b_{i_1 3} = \psi_{,i_1 3} = 0$. Точно так же из условий интегрируемости, используя полученные соотношения для b_{ij}, выводим

$$b_{i_1 j_1} = b_{i_1 j_2} = b_{33} = \psi_{,i_1 j_1} = \psi_{,i_1 j_2} = \psi_{,33} = 0 \quad (i_1 \neq j_1). \tag{259}$$

[2] Т. е. в h-пространстве типа $\{112\}$ непостоянной кривизны.

Обратимся к метрике (164). Полагая $(ijk) = (113)$ в (257) и учитывая (259), получим $\psi_{,3} = 0$. Уравнения (257) при $(ijk) = (i_1 i_1 j_1)$, $i_1 \neq j_1$, а также равенства $\psi_{,1p} = 0$, $p = 2, 4$, приводят к соотношениям

$$f'_{k_1} \sum_{i_1} (-1)^{i_1} e_{i_1} (f_{i_1} - x^4)^{-2} b_{i_1 i_1} + 2(f_1 - f_2)^2 \psi_{,k_1} = 0,$$

$$\partial_{12}\psi + \frac{1}{2}(f_1 - f_2)^{-1}(f'_2\psi_{,1} - f'_1\psi_{,2}) = 0, \tag{260}$$

$$\partial_{14}\psi + (f_1 - x^4)^{-1}\left(\psi_{,1} - \frac{1}{2}f'_1\psi_{,4}\right) = 0.$$

Интегрируя их в предположении $f'_{i_1} \neq 0$, найдем

$$\psi = a_1 \left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha + x^4 \right) = a_1 \varphi, \ ^3 \tag{261}$$

где φ — функция (165), определенная леммой 18.1, ч. т. д. В случае, когда одна из функций f_{i_1}, например, f_2 постоянна, из уравнений (257) при $(ijk) = (134), (141)$ найдем $f'_1\psi_{,4} - 2\psi_{,1} = 0$, далее из (260) получим (261). Наконец, в оставшемся случае $f'_1 = f'_2 = 0$ из (258) при $(ijkl) = (2424)$ и (257) при $(ijk) = (242)$ выводим $\partial_{44}\psi = 0$, отсюда вновь следует (261).

Для метрики (174) лемма 18.1 доказывается так же.

Доказательство теоремы 18.1 *для h-пространства типа {112}.* Пусть b_{ij} удовлетворяет в пространстве (164) уравнениям $b_{ij,k} = 0$. Так как условия интегрируемости этих уравнений получаются из (258) при $\psi = \mathrm{const}$, то из (259) имеем $b_{i_1 j_1} = b_{i_1 j_2} = b_{33} = 0$ $(i_1 \neq j_1)$. Интегрируя уравнения $b_{11,k} = 0$, найдем $b_{11} = a_2 g_{11}$ $(a_2 = \mathrm{const})$. Поскольку при этом из уравнений $b_{i_1 4, i_1} = 0$ следует $b_{i_1 i_1} g_{34} = g_{i_1 i_1} b_{34}$, то $b_{22} = a_2 g_{22}$, $b_{34} = a_2 g_{34}$. Из (258) при $\psi = \mathrm{const}$ с помощью (253) и (254) получим $\rho(b_{44} - a_2 g_{44}) = 0$. Так как ρ (254) тождественно равняется нулю только в плоском пространстве $(f'_1 = f'_2 = \theta' = 0)$, то $b_{44} = a_2 g_{44}$. Следовательно, $b_{ij} = a_2 g_{ij}$. Подобным образом теорема 18.1 доказывается для h-пространства (174).

[3]Здесь и далее опускается несущественная аддитивная постоянная.

46. Рассмотрим h-пространства типа $\{13\}$ (метрики (193), (196) и (199)). Вычислив тензоры кривизны указанных метрик, легко убедиться в том, что они не могут иметь постоянной кривизны, каковы бы ни были входящие в них произвольные функции. Поэтому все h-пространства типа $\{13\}$ являются жесткими. Так как доказательства леммы 18.1 и теоремы 18.1 для различных метрик (193), (196) и (199) мало отличаются друг от друга, мы приведем их только для одной из метрик, например, (193).

Из компонент $R^i{}_{jkl}$ $(i \neq k, l)$ метрики (193) отличны от нуля только $R^\mu{}_{114}$, $R^2{}_{\mu 34}$, $R^3{}_{424}$ и $R^2{}_{131}$ $(\mu = 2, 3)$, а для компонент $R^i{}_{\alpha\beta i}$ выполняется равенство (252), где $g_{\alpha\beta}$ — нулевые компоненты метрического тензора. Учитывая это, из (258) найдем

$$b_{1l} = b_{23} = \psi_{,1l} = \psi_{,23} = 0 \quad (l = 2, \ldots, 4).$$

Далее из (257) получим $\psi = (1/2)a_1(x^1 + 3x^4) = a_1\varphi$ $(a_1 = \mathrm{const})$, где φ — функция (195), определенная леммой 18.1, ч. т. д.

Теорема 18.1 доказывается прямым интегрированием уравнений $b_{ij,k} = 0$, которое становится легко выполнимым, если воспользоваться равенствами $b_{1l} = b_{23} = 0$ $(l = 2, 3, 4)$, вытекающими из условий интегрируемости.

47. h-пространство типа $\{1111\}$ определяется метрикой Леви-Чивита (134). Если эта метрика не имеет постоянной кривизны, то она принадлежит к основному типу (§ 12) и одновременно определяет жесткое h-пространство (§ 15). Доказательство теоремы 4.5 (см. § 4) для положительно определенных метрик Леви-Чивита опирается исключительно на особые свойства тензора кривизны этих метрик, представленные равенствами (66). Так как эти равенства выполняются и для неопределенных метрик Леви-Чивита, в чем можно убедиться непосредственной проверкой, то теорема 4.5 справедлива для всех метрик Леви-Чивита основного типа.

В данном случае это означает, что компонента ξ^i любого проективного движения $X = \xi^i\partial_i$ в пространстве (134) непостоянной кривизны зависит только от переменной x^i. Тогда $L_X g_{ij} \equiv b_{ij} = 0$, если $i \neq j$. С помощью этих равенств из (257) получим систему уравнений

$$\partial_k\rho_i = 2\psi_{,k}, \quad \partial_i\rho_i = 4\psi_{,i} \quad \left(k \neq i,\ \rho_i \equiv \frac{b_{ii}}{g_{ii}}\right),$$

общее решение которой имеет вид [68]

$$\psi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} \bar f_k, \quad \rho_i = \bar f_i + \sum_{k=1}^{4} \bar f_k, \tag{262}$$

где $\bar f_i$ — функция x^i. Из (257) при $j = k$ имеем

$$(\bar f_i - \bar f_j)\partial_i \ln|f_i - f_j| = \bar f_i'. \tag{263}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $\bar f_i - \bar f_j = a_1(f_i - f_j)$, следовательно, $\psi = (1/2)a_1 \sum_{i=1}^{4} f_i = a_1\varphi$, где φ — функция (136), определенная леммой 18.1.

Если тензор b_{ij} ковариантно постоянен, то в (262) следует положить $\psi = \mathrm{const}$. Тогда $\bar f_i$, ρ_i постоянны, и правая часть равенства (263) обращается в нуль. Так как мы рассматриваем пространства (134) непостоянной кривизны, то, по меньшей мере, одна из производных f_i', например, f_1', не равна нулю. Тогда $\bar f_1 - \bar f_j = 0$, и все функции $\bar f_i$ так же, как и ρ_i, равны между собой. Поэтому $b_{ij} = \rho g_{ij}$ $(\rho = \mathrm{const})$, как утверждается в теореме 18.1.

48. Рассмотрим h-пространство типа $\{11, 1\ \overset{*}{1}\}$. В комплексных координатах (x^1, x^2 вещественные, x^3, x^4 — комплексно сопряженные переменные) его метрика совпадает с рассмотренной в п. 47 метрикой Леви-Чивита (134) (см. § 12). Повторяя дословно рассуждения, приведенные в п. 47, получим общее решение уравнения (52) в комплексном пространстве (134) непостоянной кривизны

$$L_X g_{ij} = a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij} \quad (a_1, a_2 = \mathrm{const}),$$

где h_{ij} определяется формулой (135), g_{ij} — метрический тензор (теорема 18.2). Ясно, что этот результат сохранится, если перейти к новым вещественным переменным

$$\bar x^\alpha = x^\alpha,\ \bar x^3 = x^3 + x^4,\ \bar x^4 = i(x^4 - x^3) \quad (\alpha = 1, 2), \tag{264}$$

в которых метрика (134) примет вид (148), а h_{ij} будет определяться формулой (149). Условие непостоянства кривизны также останется в силе. Действительно, если метрика (134) имеет постоянную кривизну K, то выполняется тензорное равенство (17), которое справедливо в любой системе координат и поэтому остается неизменным при преобразовании (264).

§ 19. Жесткие h-пространства с кратными базисами элементарных делителей матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$

49. В этом параграфе теорема 18.1 и лемма 18.1 доказываются для жестких h-пространств, принадлежащих к типам $\{(11)2\}$, $\{1(12)\}$, $\{(11)11\}$, $\{(111)1\}$ и $\{(11)1\,\overset{*}{1}\}$. Согласно теореме 15.2 h-пространства типов $\{(112)\}$ и $\{(13)\}$, допускающие ковариантно постоянные векторные поля, и приводимые h-пространства типа $\{(11)(11)\}$ являются K-пространствами $(K = 0)$.

В соответствии с теоремой 13.2 h-пространства типа $\{(11)2\}$ определяются метриками (181) и (184). Метрика (184) допускает два ковариантно постоянных векторных поля $\underset{\mu}{\xi}{}^i = \delta^i_\mu$ $(\mu = 3, 4)$ и, следовательно, определяет K-пространство $(K = 0)$. Метрика (181) является полуприводимой и может быть записана в виде (217), где

$$B = x^{4^2}, \quad ds_2^2 = 2e_3\left(x^3 + \theta(x^4)\right)dx^3dx^4.$$

Из величин $P_{j_2k_2}$ (237) для метрики (181) отлична от нуля только $P_{44} = \left(x^3 + \theta(x^4)\right)^{-1}\theta'$. Поэтому из условия (238), определяющего вместе с (239) полуприводимое K-пространство V^{2+2}, при $j_2 = 3$, $k_2 = 4$ следует $K = 0$ и $P_{44} = \theta' = 0$. Так как при этом выполняется и (238), то равенство $\theta' = 0$ есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы (181) было K-пространством, при этом неравенство $\theta' \neq 0$ определяет жесткое h-пространство.

Ввиду (236) из условий интегрируемости (258) уравнений (257) в предположении $\theta' \neq 0$ найдем

$$\psi_{,i_1l} = \psi_{,33} = b_{i_1l} = b_{33} = 0, \quad g_{34}\psi_{,i_1i_1} = g_{i_1i_1}\psi_{,34} \quad (i_1 \neq l). \tag{265}$$

Рассматривая совместно уравнения (257) и (258), получим $\psi = a_1x^4 = a_1\varphi$, где φ — функция (183) (лемма 18.1); теорема 18.1 доказывается обычным образом с помощью равенств (265), в которых следует положить $\psi = \mathrm{const}$.

50. Жесткие h-пространства типа $\{1(12)\}$ (188) определяются условием $T_1 \neq 0$, как это следует из лемм 17.1 и 17.2. Ненулевые компоненты тензора кривизны метрики (188) определяются формулами (245) и (246). С их помощью из уравнений (258) при условии $T_1 \neq 0$ найдем

$$b_{1i} = b_{2j} = b_{3k} = \psi_{,1i} = \psi_{,2j} = \psi_{,3k} = 0 \quad (i \neq 1, j \neq 2, k \neq 4),$$

отсюда, произведя ряд выкладок, получим $\psi = (1/2)a_1 f = a_1\varphi$, где φ — функция (190); это доказывает лемму 18.1. Теорема 18.1 доказывается прямым интегрированием уравнений $b_{ij,k} = 0$ с учетом равенств $b_{1i} = b_{2j} = b_{3k} = 0$ $(i \neq 1,\ j \neq 2,\ k \neq 4)$, которые следуют из условий интегрируемости.

51. Рассмотрим метрики Леви-Чивита (137) и (142), определяющие h-пространства типов $\{(11)11\}$ и $\{(111)1\}$. Вычислив тензоры кривизны этих метрик, можно так же, как в предыдущих случаях, доказать лемму 18.1 и теорему 18.1. Вместо этого можно воспользоваться тем, что жесткие h-пространства рассматриваемого вида совпадают с пространствами Леви-Чивита основного типа, для которых, по определению, присоединенная метрика (147) не имеет постоянной кривизны. Покажем это на примере h-пространства (137). Согласно определению 15.2 оно является K-пространством, если гиперповерхности с основной формой

$$e_1 \prod_{\alpha=3,4}(f_\alpha - f_1)dx^{1^2} + e_3 \prod_{\alpha=1,4}(f_\alpha - f_3)dx^{3^2} + e_4 \prod_{\alpha=1,3}(f_\alpha - f_4)dx^{4^2} \quad (266)$$

имеют постоянную кривизну K. С другой стороны, составляя присоединенную метрику для (137), получим

$$e_1 \prod_{\alpha=3,4}(f_\alpha - f_1)dy^{1^2} + e_3 \prod_{\alpha=1,4}(f_\alpha - f_3)dy^{3^2} + e_4 \prod_{\alpha=1,3}(f_\alpha - f_4)dy^{4^2}, \quad (267)$$

где f_3 (f_4) так же зависит от y^3 (y^4), как f_3 (f_4) в (266) от x^3 (соответственно x^4), f_1 — постоянная, одна и та же для (266) и (267). Если (267) имеет постоянную кривизну, то пространство Леви-Чивита (137) является исключительным (§ 12). Так как, очевидно, из постоянства кривизны одной из метрик (266), (267) следует постоянство кривизны другой метрики, то всякое K-пространство рассматриваемого вида является исключительным пространством Леви-Чивита, и наоборот[4].

Поэтому для жестких h-пространств(137) и (142) выполняется теорема 4.5 (см. п. 47, первый абзац), отсюда так же, как для h-пространств типа $\{1111\}$ (§18), выводятся теорема 18.1 и лемма 18.1.

52. Согласно результатам п. 33 h-пространства типа $\{(11)1\ \overset{*}{1}\}$ имеют метрику (151), которая в комплексных переменных совпадает с метрикой (137). Отсюда следует, что теорема 18.1 и лемма 18.1

[4]Нетрудно проверить, что это замечание справедливо для всех h-пространств, определяемых метриками Леви-Чивита.

справедливы также для h-пространств типа $\{(11)1\,\overset{*}{1}\}$. Это можно доказать и непосредственно, воспользовавшись координатной системой (152).

Метрика (152) является полуприводимой и может быть записана в виде (217), где

$$ds_2^2 = e_3 \left(dx^{3^2} - B(x^3, x^4) dx^{4^2}\right).$$

Используя формулы (237), из уравнений (155) получим

$$\frac{P_{44}}{g_{44}} = \frac{P_{33}}{g_{33}} + \frac{2e_3\sigma}{B} P_{34}.$$

Если положить здесь $P_{34} = 0$, то из (236) и (237) следует равенство

$$\overset{0}{R}{}^{i_0}{}_{j_0k_0l_0} = 2K\delta^{i_0}_{[k_0} g_{l_0]j_0} \quad (i_0, j_0, k_0, l_0 = 1, 3, 4)$$

для тензора кривизны $\overset{0}{R}{}^{i_0}{}_{j_0k_0l_0}$ метрики (218). Величина K оказывается постоянной вследствие теоремы 1.1, поэтому (152) является K-пространством (см. § 15).

Наоборот, если (152) является K-пространством, то выполняются равенства (238), (239), из которых следует $P_{34} = 0$. Таким образом, условие $P_{34} = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы (152) было K-пространством, а условие $P_{34} \neq 0$ определяет жесткое h-пространство. Из уравнений (258) при условии $P_{34} \neq 0$ в силу (236) получим

$$b_{i_1j_2} = b_{33} + b_{44} = \psi_{,i_1j_2} = \psi_{,33} + \psi_{,44} = 0 \quad (i_1 = 1, 2; j_2 = 3, 4).$$

Далее из (257) найдем

$$\psi_{,3}\sigma_{,4} = \psi_{,4}\sigma_{,3}, \quad \partial_{33}\psi + \partial_{44}\psi = 0.$$

Так как $\sigma \neq \text{const}$ ($P_{34} = 0$ при $\sigma = \text{const}$), то $\psi = a_1\sigma = a_1\varphi$, где φ — функция (154). Доказана лемма 18.1. Теорема 18.1 доказывается столь же просто.

Глава 5.

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ

Мы располагаем теперь всеми необходимыми данными для того, чтобы приступить к непосредственному решению основной задачи — определению максимальных проективных алгебр Ли в пространствах, определяемых полями тяготения. Согласно теореме 18.2 все проективные движения в каждом из жестких h-пространств получаются интегрированием уравнений (249): $L_X g_{ij} \equiv \xi_{(i,j)} = a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij}$ $(a_1, a_2 - \mathrm{const})$, где h_{ij} — известный тензор, определенный вместе с g_{ij} в гл. 3. Данная глава посвящена интегрированию уравнений (249) в жестких h-пространствах.

В § 20—24 определяются все жесткие h-пространства, допускающие негомотетические проективные движения, и для каждого из них указывается максимальная проективная алгебра Ли вместе с ее базисными векторными полями. Рассматриваемые классы пространств не пересекаются, так как *любые два жестких h-пространства различных типов, допускающие негомотетические проективные движения, неизометричны друг другу*[1].

Действительно, пусть дано жесткое h-пространство типа χ_1, допускающее негомотетическое проективное движение. Как отмечалось, для любого негомотетического проективного движения X в этом пространстве выполняется условие $L_X g_{ij} = a_1 h_{ij} + a_2 g_{ij}$, где $c_1 \neq 0$ и c_2 — некоторые постоянные, а h_{ij} — билинейная форма типа χ_1. Понятно, что прибавление к h_{ij} слагаемого, пропорционального метрической форме g, изменяя собственные значения формы h, не меняет ее характеристики. Это замечание не теряет силу, если умножить h на по-

[1] Два псевдоримановых пространства называются изометричными, если существует пребразование координат, которое переводит одну метрическую форму в другую.

стоянное ненулевое число, поэтому $L_X g$ принадлежит типу χ_1. Таким образом, производная Ли метрического тензора g_{ij} вдоль любого негомотетического проективного движения в жестком h-пространстве типа χ_1 относится к типу χ_1.

Пусть теперь даны два жестких h-пространства $\overset{1}{V}$ и $\overset{2}{V}$, принадлежащих к разным типам χ_1 и χ_2, каждое из которых допускает негомотетические проективные движения. Предположим, что $\overset{1}{V}$ и $\overset{2}{V}$ изометричны. Тогда их метрические формы $\overset{1}{g}_{ij}$ и $\overset{2}{g}_{ij}$ могут быть преобразованы друг в друга заменой координат. Так как характеристика тензора и, следовательно, его принадлежность к типу инвариантны относительно преобразований координат (см. § 5), то после преобразования $\overset{1}{g}_{ij}$ в $\overset{2}{g}_{ij}$ окажется, что $\overset{2}{V}$ допускает негомотетическое проективное движение типа χ_1, что противоречит предыдущему результату. Следовательно, $\overset{1}{V}$ и $\overset{2}{V}$ неизометричны.

§ 20. Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств типа $\{112\}$

53. Согласно теореме 13.1 h-пространства типа $\{112\}$ определяются следующими метриками:

$$\begin{aligned}&g_{ij}dx^idx^j = (f_1 - f_2)\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha(f_\alpha - x^4)^2 dx^{\alpha^2} + 2e_3(x^3+\theta)\times\\ &\underset{\alpha=1,2}{\Pi}(f_\alpha - x^4)dx^3dx^4 - e_3(x^3+\theta)^2\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - x^4)dx^{4^2},\end{aligned} \tag{268}$$

$$g_{ij}dx^idx^j = (f_1 - f_2)\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha dx^{\alpha^2} + 2e_3\underset{\alpha=1,2}{\Pi} f_\alpha dx^3dx^4 - e_3\sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha dx^{4^2}, \tag{269}$$

где f_α $(\alpha = 1,2)$ — функция x^α, θ зависит от x^4. Имеет место

Л е м м а 20.1. *Если $\xi^i\partial_i$ — проективное движение в жестком h-пространстве типа $\{112\}$, то $\xi^p = \xi^p(x^p)$ $(p = 1,2,4)$, $\xi^3 = \xi^3(x^3,x^4)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с определением 15.2 метрики (268) и (269) задают жесткие h-пространства, если они не имеют постоянной кривизны. Если $\xi^i\partial_i$ — проективное движение в жестком h-пространстве типа $\{112\}$, то полагая $(ijkl) = (1334), (1223)$ в уравнениях (57) и используя формулы (252)—(255), получим

$$(R^1_{314} - R^3_{334})\partial_3\xi^1 = (R^3_{232} - R^1_{212})\partial_3\xi^1 = 0.$$

Если $\partial_3\xi^1 \neq 0$, то $\overset{3}{T}{}_{i_1} = 0$, и, следовательно, $R^i_{jkl} = 0$ при $i \neq k, l$. Но тогда выполняются условия леммы 18.2, и h-пространство имеет постоянную кривизну. Поэтому $\partial_3\xi^1 = 0$, и уравнение (249) при $(ij) = (13)$ дает $\partial_1\xi^4 = 0$. Подобным образом получаются остальные соотношения.

Рассмотрим метрику (268), выделив три случая: 1) $f_1' \neq 0$, $f_2' \neq 0$; 2) $f_1' \neq 0$, $f_2' = 0$; 3) $f_1' = f_2' = 0$ (случай $f_1' = 0, f_2' \neq 0$ простым переобозначением $f_1 \leftrightarrow f_2$, $x^1 \leftrightarrow x^2$ приводится ко второму случаю). Интегрируя с помощью леммы 20.1 уравнения (249), где согласно теореме 18.2 компоненты h_{ij} определяются формулой (165), в первом случае получим

$$\xi^\alpha = -\frac{1}{2}a_1\int f_\alpha dx^\alpha + \frac{1}{2}(a_2 - 3a_3)x^\alpha + a_{4+\alpha} \quad (\alpha = 1, 2), \tag{270}$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}(a_2 - 3a_3 - a_1x^4)(x^3 + \theta) - \xi^4\theta', \tag{271}$$

$$\xi^4 = a_1{x^4}^2 + a_3x^4 + a_4, \tag{272}$$

где $a_1, \ldots, a_6$ — постоянные, удовлетворяющие вместе с функциями $f_\alpha(x^\alpha)$ и $\theta(x^4)$ уравнениям

$$a_1(u_\alpha u_\alpha'' + 2u_\alpha'^2) - a_2x^\alpha u_\alpha'' + a_3\left(3x^\alpha u_\alpha'' + 2u_\alpha'\right) + 2(a_4 - a_{4+\alpha}u_\alpha'') = 0 \tag{273}$$

$$\left(u_\alpha \equiv \int_{x_0^\alpha}^{x^\alpha} f_\alpha dx^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2\right),$$

$$a_1x^4(2x^4\theta'' + 5\theta') - a_2\theta' + a_3(2x^4\theta'' + 5\theta') + 2a_4\theta'' = 0. \tag{274}$$

Предположим, что все проективные движения ξ в некотором V^n определяются из уравнений

$$L_\xi g_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_k \underset{k}{h}{}_{ij}, \tag{275}$$

где $\underset{k}{h}{}_{ij}$ — известные тензоры, удовлетворяющие в V^n уравнению Эйзенхарта, a_k — произвольные постоянные. Пусть часть уравнений (275) проинтегрирована, так что $\xi^i = \sum_{k=1}^q a_k A_k^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, а остальные уравнения приведены к виду

$$\sum_{k=1}^q a_k T_k^\alpha = 0. \tag{276}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_p$ — постоянные из правой части уравнений (275), $a_{p+1}, \ldots, a_q$ — постоянные интегрирования, A_k^i и T_k^α зависят только от констант и функций (а также их производных), определяющих компоненты метрического тензора g_{ij}, при этом некоторые из величин A_k^i, T_k^α могут тождественно равняться нулю. Дифференцируя равенства (276), получим новые уравнения, которые будут иметь тот же вид, что и (276). Уравнения (276) вместе со всеми их дифференциальными следствиями образуют систему Θ однородных линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i. Число тех из параметров a_i, удовлетворяющих этой системе, которые могут задаваться произвольно, определяет порядок действующей алгебры Ли. Поэтому справедлива

Л е м м а 20.2. *Для того чтобы V^n допускало r-мерную максимальную алгебру Ли P_r, необходимо и достаточно, чтобы ранг Rk системы Θ однородных линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i, образованной уравнениями* (276) *и всеми их дифференциальными следствиями, равнялся $q - r$.*

В рассматриваемом случае $q = 6$, а система (276) образована уравнениями (273) и (274). Выполнив элементарные преобразования, выпишем те строки матрицы системы Θ, которые соответствуют уравнениям (273) и их ближайшим дифференциальным следствиям:

$$\begin{pmatrix}
{u_1'}^2 & 0 & u_1' & 1 & u_1'' & 0 \\
(5/2)u_1'u_1'' & u_1'' & (5/2)u_1'' & 0 & u_1''' & 0 \\
3u_1'u_1''' + (5/2)(u_1'')^2 & 2u_1''' & 4u_1''' & 0 & u_1^{IV} & 0 \\
(u_2')^2 & 0 & u_2' & 1 & 0 & u_2'' \\
(5/2)u_2'u_2'' & u_2'' & (5/2)u_2'' & 0 & 0 & u_2''' \\
3u_2'u_2''' + (5/2)(u_2'')^2 & 2u_2''' & 4u_2''' & 0 & 0 & u_2^{IV}
\end{pmatrix} \tag{277}$$

Поскольку $u''_\alpha = f'_\alpha \neq 0$, то ранг матрицы (277) $\mathrm{Rk} \geq 2$, и в соответствии с леммой 20.2 размерность максимальной проективной алгебры Ли P_r в пространстве (268) $r \leq 4$. Рассмотрим возможные варианты.

P_4, $\mathrm{Rk} = 2$. Приравнивая нулю миноры третьего порядка матрицы (277), получим $(u''_1)^2 u''_2 = 0$ вопреки условию $f'_\alpha \neq 0$.

P_3, $\mathrm{Rk} = 3$. Имеем $u'_1 u'''_1 - (5/2)(u''_1)^2 = 0$, $u''_1 u'''_1 u''_2 = 0$, что также противоречит предположению о том, что $u''_\alpha = f'_\alpha \neq 0$.

P_2, $\mathrm{Rk} = 4$. Если потребовать, чтобы ранг матрицы (277) равнялся четырем, то получим уравнение $5u^{IV}_\alpha u''_\alpha - 8(u'''_\alpha)^2 = 0$. Интегрируя его и подставляя результат в (273), найдем $f_\alpha = \beta_\alpha (x^\alpha)^{-2/3} + \delta$, $a_2 = -5\delta a_1$, $a_4 = -\delta(a_3 + \delta a_1)$, $a_5 = a_6 = 0$ (β, δ – const), после чего уравнение (274) примет вид

$$a_1 \left[x^4(2x^4\theta'' + 5\theta') + \delta(5\theta' - 2\delta\theta'')\right] + a_3 \left(2(x^4 - \delta)\theta'' + 5\theta'\right) = 0.$$

Ясно, что рассматриваемое пространство допускает двумерную проективную алгебру Ли тогда и только тогда, когда коэффициенты у параметров a_1, a_3 в последнем равенстве обращаются в нуль, при этом $\theta = \alpha(x^4 - \delta)^{-3/2} + \gamma$ (α, γ – const). Если ввести новые переменные $x^{3'} = x^3 + \gamma$, $x^{4'} = x^4 - \delta$ и перейти в алгебре Ли к новому базису $\bar{a}_1 = a_1$, $\bar{a}_2 = a_3 + 2\delta a_1$, то получим следующий результат.

Жесткое h-пространство (268) типа $\{112\}$ при $f_\alpha = \beta_\alpha (x^\alpha)^{-2/3}$, $\theta = \sigma (x^4)^{-3/2}$ (σ, β_α – const) допускает максимальную проективную алгебру Ли P_2, натянутую на векторные поля

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = 3\sum_{\alpha=1}^{2} \beta_\alpha (x^\alpha)^{1/3} p_\alpha + \left(x^3 x^4 - \frac{2\sigma}{\sqrt{x^4}}\right) p_3 - 2{x^4}^2 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_2 = 3\sum_{i=1}^{3} x^i p_i - 2x^4 p_4.$$

Здесь и далее $p_i \equiv \partial_i$, $\underset{\text{п}}{X}, \underset{\text{а}}{X}, \underset{\text{г}}{X}$ и $\underset{\text{и}}{X}$ означают соответственно неаффинное проективное, негомотетическое аффинное, неизометрическое гомотетическое и изометрическое движения.

Если функции f_1, f_2 и θ удовлетворяют уравнениям (273) и (274) ($a_1 = 1$), то метрика (268) допускает 1-мерную проективную алгебру Ли с генератором $\underset{\text{п}}{X} = \xi^i p_i$, где ξ^i определяется формулами (270), в которых следует положить $a_1 = 1$.

Во втором и третьем случаях $f_2' = 0$. Если ввести новую переменную $x^{4'} = x^4 - f_2$ и обозначить разность $f_1 - f_2$ через $\bar{f}_1$, то (268) примет вид (штрихи и черта опущены)

$$g_{ij}dx^i dx^j = f_1\left(e_1(f_1 - x^4)^2 dx^{1^2} + e_2 x^{4^2} dx^{2^2}\right) - 2e_3 x^4 \times \\ (f_1 - x^4)(x^3 + \theta)dx^3 dx^4 + e_3(x^3+\theta)^2(2x^4 - f_1)dx^{4^2}. \tag{278}$$

Интегрируя с помощью леммы 20.1 уравнения (249) для этой метрики и анализируя на основе леммы 20.2 полученные решения, придем к следующим результатам.

Жесткое h-пространство (278) типа $\{112\}$ при $f_1 = \beta(x^1)^{-2/3}$, $\theta = \alpha(x^4)^{-3/2}$ (α, β – const) допускает 3-мерную максимальную проективную алгебру Ли P_3 с 2-мерной изометрической подалгеброй I_2 и генераторами

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 3\beta\sqrt[3]{x^1}p_1 + \left(x^3x^4 - \frac{2\alpha}{\sqrt{x^4}}\right)p_3 + x^{4^2}p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_2 = 3\sum_{i=1}^{3} x^i p_i - 2x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_3 = p_2.$$

В перечисленных ниже случаях h -пространство (278) допускает 2-мерную проективную алгебру Ли $P_2 = \{\{I_1, \underset{\text{п}}{X}_2\}\}$ с 1-мерной изометрической подалгеброй $I_1 = \{\{\underset{\text{и}}{X}_1 = p_2\}\}$ (двойные фигурные скобки означают линейную оболочку).

A.I.

$$\theta = a\int_{x_0^4}^{x^4} |x^4 - \alpha|^{\gamma}|x^4|^{-(\gamma+5/2)}dx^4,$$

$$\begin{cases} x^1 = b\int_{t_0}^{t} |t-\alpha|^{\gamma}|t|^{-(\gamma+5/2)}dt + c, \\ f_1 = t, \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}_2 = 2b|f_1 - \alpha|^{\gamma+1}|f_1|^{-(\gamma+3/2)}p_1 + \alpha(2\gamma+3)x^2p_2 +$$

$$\left((\alpha(2\gamma+3)-x^4)(x^3+\theta)-2x^4(x^4-\alpha)\theta'\right)p_3+2x^4(x^4-\alpha)p_4;$$

A.II.

$$\theta = a\int_{x_0^4}^{x^4}\beta e^{\beta/(2x^4)}|x^4|^{-5/2}dx^4,$$

$$\begin{cases} x^1 = b\int_{t_0}^{t} e^{\beta/(2t)}|t|^{-5/2}dt+c, \\ f_1 = t, \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = 2b|f_1|^{-1/2}e^{\beta/(2f_1)}p_1-\beta x^2p_2-$$

$$\left((\beta+x^4)(x^3+\theta)+2{x^4}^2\theta'\right)p_3+2{x^4}^2p_4;$$

A.III.

$$\theta = a\int_{x_0^4}^{x^4}|x^4-\alpha|^{-3/2}(x^4)^{-1}dx^4,$$

$$\begin{cases} x^1 = (1/\alpha)\left(c+t-b\int_{t_0}^{t}(t^2+b)^{-1}dt\right), \\ f_1 = \alpha(1+bt^{-2}), \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = tp_1+x^4\left(2(x^4-\alpha)\theta'+x^3+\theta\right)p_3-2x^4(x^4-\alpha)p_4;$$

A.IV.

$$\theta = a\int_{x_0^4}^{x^4}|x^4|^{-3/2}|x^4+\beta|^{-1}dx^4,$$

$$\begin{cases} x^1 = (1/\beta)\left(c+t-b\int_{t_0}^{t}(t^2+b)^{-1}dt\right), \\ f_1 = \beta bt^{-2}, \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = tp_1+\beta x^2p_2+(x^4+\beta)\left(x^3+\theta+2x^4\theta'\right)p_3-2x^4(x^4+\beta)p_4$$

($\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ — постоянные).

В пространстве (278) при

$$f_1=\alpha,\ \theta = c\int_{x_0^4}^{x^4}(\alpha-x^4)^{5\beta/(2\alpha)}(-x^4)^{-5(\alpha+\beta)/(2\alpha)}dx^4 \quad (\alpha,\beta,c-\text{const})$$

действует 3-мерная максимальная проективная алгебра Ли P_3 с подалгеброй I_2 трансляций и базисными элементами

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = (2\alpha + 5\beta)x^1 p_1 + (3\alpha + 5\beta)x^2 p_2 +$$

$$\left(2x^4(\alpha - x^4)\theta' + (3\alpha + 5\beta - 2x^4)(x^3 + \theta)\right) p_3 + 2x^4(x^4 - \alpha)p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_2 = p_1, \quad \underset{\text{и}}{X}_3 = p_2.$$

Приведем без выкладок, схожих с предыдущими, результаты для жестких h-пространств (269) типа $\{112\}$.

Пространство с метрической формой

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{x^{1^2}} - \frac{\beta}{x^{2^2}}\right) \sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha dx^{\alpha^2} + \frac{2e_3\alpha\beta}{(x^1x^2)^2} dx^3 dx^4 - e_3\left(\frac{\alpha}{x^{1^2}} + \frac{\beta}{x^{2^2}}\right) dx^{4^2}$$

(α, β — const) допускает 4-мерную максимальную проективную алгебру Ли P_4 с 3-мерной подалгеброй I_3 изометрий и базисными элементами

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = \frac{\alpha}{x^1} p_1 + \frac{\beta}{x^2} p_2 + x^4 p_3,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_2 = x^1 p_1 + x^2 p_2 + 3x^3 p_3 + x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_3 = p_3, \quad \underset{\text{и}}{X}_4 = p_4.$$

Приведенные ниже формулы определяют h-пространства (269) типа $\{112\}$, допускающие 3-мерную проективную алгебру Ли

$$P_3 = \{\{\underset{\text{и}}{X}_1 = p_3, \underset{\text{и}}{X}_2 = p_4, \underset{\text{п}}{X}_3\}\}$$

с 2-мерной подалгеброй трансляций.

B.I.

$$f_i = \frac{\alpha}{\cos^2(\beta_i x^i + \gamma_i)},$$

$$\underset{\text{п}}{X}_3 = \alpha \sum_{i=1}^{2} \beta_i^{-1} \tan(\beta_i x^i + \gamma_i) p_i + (2\alpha x^3 - x^4)p_3;$$

B.II.

$$f_i = \frac{\alpha}{\cosh^2(\beta_i x^i + \gamma_i)},$$

$$\underset{\text{п}}{X}_3 = \alpha\sum_{i=1}^{2}\beta_i^{-1}\tanh(\beta_i x^i+\gamma_i)p_i + (2\alpha x^3 - x^4)p_3;$$

B.III.

$$f_i = -\alpha\tan^2(\beta_i x^i+\gamma_i),$$

$$\underset{\text{п}}{X}_3 = \alpha\sum_{i=1}^{2}\beta_i^{-1}\tan(\beta_i x^i+\gamma_i)p_i + (x^4-\alpha x^3)p_3 + \alpha x^4 p_4;$$

B.IV.

$$f_i = \alpha\tanh^2(\beta_i x^i+\gamma_i),$$

$$\underset{\text{п}}{X}_3 = \alpha\sum_{i=1}^{2}\beta_i^{-1}\tanh(\beta_i x^i+\gamma_i)p_i + (x^4-\alpha x^3)p_3 + \alpha x^4 p_4;$$

B.V.

$$\begin{cases} f_i = t_i, \\ x^i = b_i\int_{t_i^0}^{t_i}|t_i-\alpha|^{\gamma}|t_i|^{-(\gamma+3/2)}dt_i + c_i, \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}_3 = 2\sum_{i=1}^{2}b_i|f_i-\alpha|^{\gamma+1}|f_i|^{-(\gamma+1/2)}p_i +$$

$$\left(\alpha(2\gamma+3)x^3-x^4\right)p_3 + \alpha(2\gamma+1)x^4p_4$$

($\alpha, \gamma, \beta_i, \gamma_i, b_i, c_i, t_i^0$ — постоянные, $i=1,2$).

Пространство с основной формой

$$ds^2 = (f_1-\alpha)\sum_{\sigma=1}^{2}e_\sigma dx^{\sigma^2} + 2e_3\alpha f_1 dx^3dx^4 - e_3(f_1+\alpha)dx^{4^2} \quad (\alpha = \mathrm{const})$$

допускает 4-мерную максимальную проективную алгебру Ли $P_4 = \{\{I_3, \underset{\text{п}}{X}_4\}\}$ с изометрической подалгеброй I_3 с базисом $\underset{\text{и}}{X}_i = p_i$, $i = 1,2,3$, в следующих случаях.

C.I.

$$f_1 = \frac{\alpha}{\cos^2(\beta x^1+\gamma)},$$

$$\underset{\text{п}}{X}_4 = \alpha\beta^{-1}\tan(\beta x^1+\gamma)p_1 + \alpha x^2 p_2 + (2\alpha x^3 - x^4)p_3;$$

C.II.

$$f_1 = \frac{\alpha}{\cosh^2(\beta x^1 + \gamma)},$$

$$\underset{\text{п}}{X}_4 = \alpha\beta^{-1}\tanh(\beta x^1 + \gamma)p_1 + \alpha x^2 p_2 + (2\alpha x^3 - x^4)p_3;$$

C.III.

$$f_1 = -\alpha \tan^2(\beta x^1 + \gamma),$$

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = \alpha\beta^{-1}\tan(\beta x^1 + \gamma) + (x^4 - \alpha x^3)p_3 + \alpha x^4 p_4;$$

C.IV.

$$f_1 = \alpha \tanh^{-2}(\beta x^1 + \gamma),$$

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = \alpha\beta^{-1}\tanh(\beta x^1 + \gamma) + (x^4 - \alpha x^3)p_3 + \alpha x^4 p_4;$$

C.V.

$$\begin{cases} f_1 = t, \\ x^1 = a\int_{t_0}^{t} |t-\alpha|^{\gamma}|t|^{-(\gamma+3/2)}dt + b, \end{cases}$$

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2a|f_1 - \alpha|^{\gamma+1}|f_1|^{-(\gamma+1/2)}p_1 + 2\alpha(\gamma+1)x^2 p_2 +$$

$$\left[\alpha(2\gamma+3)x^3 - x^4\right]p_3 + \alpha(2\gamma+1)x^4 p_4$$

($\alpha, \beta, \gamma, a, b$ — постоянные).

Для h-пространств типа $\{112\}$ полностью решен вопрос о допускаемых ими проективных алгебрах Ли, более широких, чем алгебры Ли инфинитезимальных гомотетий. Если h-пространство типа $\{112\}$ непостоянной кривизны (т. е. жесткое h-пространство типа $\{112\}$) допускает максимальную проективную негомотетическую алгебру Ли P_r, то $r \leq 4$, при этом P_r содержит подалгебру I_{r-1} инфинитезимальных изометрий, т. е. гомотетическая подалгебра алгебры Ли P_r сводится к изометриям.

§ 21. Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств типа $\{13\}$

54. В этом параграфе будут рассмотрены h-пространства типа $\{13\}$ (см. теорему 14.1):

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\Phi B^3 dx^{1^2} + e_2 B dx^{3^2} + e_2 x^2(Bx^2 - 4A)dx^{4^2} + 4e_2 ABdx^2dx^4 + 2e_2(Bx^2 - 2A)dx^3dx^4, \tag{279}$$

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\Phi dx^{1^2} + e_2x^1(dx^{3^2} + 2dx^2dx^4 + dx^{4^2}) - 2e_2dx^3dx^4, \tag{280}$$

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1 x^{4^3} dx^{1^2} + e_2 dx^{3^2} + 4e_2 A dx^2 dx^4 + 2e_2x^2dx^3dx^4 + e_2 x^{2^2} dx^{4^2}, \tag{281}$$

где

$$A = x^3 + \theta(x^4), \quad B = x^1 - x^4, \tag{282}$$

$\Phi = \Phi(x^1)$ и $\theta = \theta(x^4)$ — произвольные функции. Все h-пространства, определенные этими метриками, являются жесткими (п. 46). Справедлива

Л е м м а 21.1. *Если бесконечно малое преобразование* $x^{i'} = x^i + \xi^i\delta t$ *является проективным движением в жестком* h*-пространстве типа* $\{13\}$, *то* 1) $\xi^p = \xi^p(x^p)$ $(p = 1, 4)$; $\partial_1\xi^2 = 0$; $\xi^3 = \xi^3(x^3, x^4)$ *для* h*-метрик* (279) *и* (281); 2) $\xi^1 = \xi^1(x^1)$, $\partial_1\xi^p = 0$ $(p = 2, 3)$; $\xi^4 = \xi^4(x^3, x^4)$ *для* h*-метрики* (280).

Приведем доказательство для h-метрики (279). Используя сведения о тензоре кривизны этой метрики, приведенные в п. 46, из уравнения (57) при $(ijkl) = (4412)$ найдем $\partial_1\xi^4(R^4_{424} + R^1_{412}) = 0$. Если $\partial_1\xi^4 \neq 0$, то $R^4_{424} + R^1_{412} = 0$, отсюда

$$\frac{3}{4}\frac{e_1e_2}{x^3+\theta} - \frac{x^3+\theta}{(x^1-x^4)^4\Phi} = \frac{x^3+\theta}{(x^1-x^4)^3\Phi}\left[\frac{4}{x^1-x^4} + \frac{\Phi'}{\Phi}\right].$$

Дифференцируя это равенство дважды по x^3, получим $e_1e_2 = 0$; следовательно, $\partial_1\xi^4 = 0$. Подобным образом получаются остальные соотношения.

Рассмотрим метрику (279). Интегрируя с помощью доказанной леммы уравнения (249), где согласно теореме 18.2 h_{ij} — тензор, определенный формулой (194), получим

$$\xi^p = a_1 x^{p^2} + (a_2 - a_3)x^p + a_4 \quad (p = 1, 4), \tag{283}$$

$$\xi^2 = \frac{1}{2}(3a_3 - a_1 x^4)x^2 - \frac{1}{2}a_1 x^3 - a_2 x^2 + a_5, \tag{284}$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}(3a_1 x^4 + a_3)x^3 + a_1 \int_{x_0^4}^{x^4} \theta(x^4)dx^4 - a_5 x^4 + a_6, \tag{285}$$

где $a_1, \ldots, a_6$ — постоянные, удовлетворяющие уравнениям

$$a_1 w x^1 + a_2(w-1) - a_3 w + a_4 \Phi^{-1}\Phi' = 0 \quad (w \equiv x^1\Phi^{-1}\Phi' + 5), \tag{286}$$

$$a_1\left(u'' x^{4^2} - \frac{3}{2}u' x^4 + u\right) + a_2 u'' x^4 - a_3\left(x^4 u'' + \frac{1}{2}u'\right) +$$
$$a_4 u'' - a_5 x^4 + a_6 = 0 \quad \left(u \equiv \int_{x_0^4}^{x^4} \theta(x^4)dx^4\right). \tag{287}$$

Эти уравнения образуют систему (276), где $q = 6$. Согласно лемме 20.2 пространство допускает максимальную проективную алгебру Ли P_r тогда и только тогда, когда ранг Rk матрицы системы, образованной уравнениями (286), (287) и всеми их дифференциальными следствиями, равняется $6 - r$. Так как в данном случае $\mathrm{Rk} \geq 2$, то имеются следующие возможности.

P_4, $\mathrm{Rk} = 2$; получаются два несовместных условия: $w = 1$, $w = 0$, исключающие возможность существования 4-мерной проективной алгебры Ли в рассматриваемом пространстве.

P_3, $\mathrm{Rk} = 3$; имеются два уравнения: $x^1\Phi^{-1}\Phi' + 5 = 0$ и $(\Phi^{-1}\Phi')' = 0$, несовместность которых означает, что метрика (279) не допускает 3-мерную проективную алгебру Ли.

P_2, $\mathrm{Rk} = 4$. Рассмотрим два случая: $w' = 0$ и $w' \neq 0$. В первом случае выполняются уравнения $w^2(w-5) = w(w-1)(w-5) = 0$, и так как $w \neq 5$ (в противном случае из (286) следует $a_1 = 0$, и проективная группа состоит, самое большее, из гомотетий), то $w = 0$, $\Phi = c(x^1)^{-5}$ (c — const), $a_2 = a_4 = 0$. Если теперь рассмотреть строки матрицы, отвечающие уравнению (287) и его дифференциальным следствиям, то условие $\mathrm{Rk} = 4$ приведет к уравнению $u^{\mathrm{IV}} x^4 + (5/2)u''' = 0$. Разрешив его, придем к выводу, что пространство (279), $\Phi = c(x^1)^{-5}$,

$\theta = a|x^4|^{-1/2} + 2bx^4$ $(a, b, c - \text{const})$ допускает 2-мерную проективную алгебру Ли P_2 с 1-мерной изометрической подалгеброй и базисными элементами

$$\underset{n}{X}_1 = 2x^{1^2}p_1 - (x^2x^4 + x^3)p_2 + (4a\sqrt{x^4} + 3x^3x^4 + 2bx^{4^2})p_3 + 2x^{4^2}p_4,$$
$$\underset{\text{и}}{X}_2 = 2x^1p_1 + 3(2b - x^2)p_2 - (x^3 + 6bx^4)p_3 + 2x^4p_4.$$

Во втором случае $(w' \neq 0)$ найдем $\Phi = c(x^1+\alpha)^{-5}$, $\theta = a|x^4+\alpha|^{-1/2} + 2b(x^4+\alpha)$, где α, a, b, c — const. После замены переменных $x^{p'} = x^p+\alpha$ $(p = 1, 4)$ этот случай приводится к предыдущему.

Наконец, всякое пространство с основной формой (279), где $\Phi(x^1)$ удовлетворяет уравнению (286), в котором положено $a_1 = 1$:

$$\Phi(x^1) = c\exp\left(-\int \frac{5x^1 + 4a_2 - 5a_3}{x^{1^2} + (a_2 - a_3)x^1 + a_4}dx^4\right) \quad (c - \text{const}),$$

а функция $\theta(x^4)$ является решением уравнения (287) $(a_1 = 1)$:

$$\left(x^{4^2} + (a_2 - a_3)x^4 + a_4\right)u'' - \frac{1}{2}(3x^4 + a_3)u' + u = a_5x^4 - a_6$$
$$\left(u \equiv \int_{x_0^4}^{x^4} \theta(x^4)dx^4\right), \tag{288}$$

допускает 1-мерную проективную алгебру Ли с генератором $\underset{\text{п}}{X} = \xi^i p_i$, где ξ^i определяются формулами (283), в которых следует положить $a_1 = 1$. [2]

Результаты для метрик (280) и (281) приведем без выкладок, аналогичных предыдущим.

Пространство (280), $\Phi = c(x^1)^{-2}$ $(c - \text{const})$, допускает 2-мерную проективную алгебру Ли с изометрической подалгеброй I_1 и базисными элементами

$$\underset{n}{X}_1 = 2x^{1^2}p_1 - x^3p_2 + x^4p_3,$$
$$\underset{\text{и}}{X}_2 = -2x^1p_1 + (3x^2 + 2x^4)p_2 + x^3p_3 - x^4p_4.$$

[2] О решении однородного уравнения, соответствующего (288) и во многих случаях приводящегося к гипергеометрическому уравнению, см. ([40], с. 633). Общее решение неоднородного уравнения при известном решении однородного уравнения находится известным образом ([73], с. 199).

Следующие пространства (280) допускают 1-мерную проективную алгебру Ли $P_1 = \{\{\underset{\text{п}}{X}\}\}$.

D.I

$$\Phi = \frac{a}{{x^1}^2 e^{b/x^1}} \quad (a, b - \text{const}),$$

$$\underset{n}{X} = 2{x^1}^2 p_1 + (bx^2 - x^3)p_2 + (bx^3 + x^4)p_3 + bx^4 p_4;$$

D.II.

$$\Phi = \frac{c(x^1)^{b/a}}{(x^1 + a)^{2+b/a}} \qquad (a \neq 0),$$

$$\underset{\text{п}}{X} = 2x^1(x^1 + a)p_1 + \left[(b - a)x^2 - x^3 - 2ax^4\right] p_2 + \left[x^4 + (a + b)x^3\right] p_3 + (3a + b)x^4$$

$(a, b, c$ — const).

Метрика (281), $\theta = ax^4$ $(a$ – const) допускает 4-мерную проективную алгебру Ли $P_4 = \{\{\underset{\text{п}}{X}{}_1, H_3\}\}$ с 3-мерной гомотетической подалгеброй $H_3 = \{\{\underset{\text{г}}{X}{}_2, I_2\}\}$ и 2-мерной изометрической подалгеброй $I_2 = \{\{\underset{\text{и}}{X}{}_3, \underset{\text{и}}{X}{}_4 = p_1\}\}$:

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = x^4(2x^3 + ax^4)p_3 + {x^4}^2 p_4,$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_2 = (x^2 - a)p_2 + (3x^3 + ax^4)p_3 + 2x^4 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_3 = 3x^1 p_1 + 2(x^2 - a)p_2 + 2ax^4 p_3 - 2x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_4 = p_1.$$

В случае $\theta = a\ln|x^4| + bx^4$ $(a, b$ – const) в пространстве (281) действует 3-мерная проективная алгебра Ли с изометрической подалгеброй I_2 и базисными элементами

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = -ap_2 + x^4\left(2(x^3 + a\ln|x^4|) + bx^4 - a\right)p_3 + {x^4}^2 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_2 = 3x^1 p_1 + 2(x^2 - b)p_2 + 2(bx^4 + a)p_3 - 2x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_3 = p_1.$$

Наконец, в перечисленных ниже случаях пространство (281) допускает 2-мерную проективную алгебру Ли $P_2 = \{\{I_1, \underset{\text{п}}{X}\}\}$ с 1-мерной подалгеброй изометрий $I_1 = \{\{p_1\}\}$.

E.I.

$$\theta = \int_1^{x^4} e^{a/x^4} dx^4 + bx^4,$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = -ax^1 p_1 + a(b - x^2)p_2 + \left((2x^4 - a)(x^3 + \theta) - {x^4}^2 \theta'\right) p_3 + {x^4}^2 p_4;$$

E.II.

$$\theta = c \int_1^{x^4} \left(1 + \frac{a}{x^4}\right)^b dx^4 + kx^4,$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = -a\left(b + \frac{1}{2}\right) x^1 p_1 + ab(k - x^2)p_2 + \left[(2x^4 + a(1-b))(x^3 + \theta) - \right.$$

$$\left. x^4(x^4 + a)\theta'\right] p_3 + x^4(x^4 + a)p^4;$$

E.III.

$$\theta = c\left[x^4 \ln|x^4| - (x^4 + a)\ln|x^4 + a|\right] + bx^4,$$

$$\underset{\text{п}}{X}{}_2 = -\frac{1}{2} a x^1 p_1 + acp_2 + \left[(2x^4 + a)(x^3 + \theta) - x^4(x^4 + a)\theta'\right] p_3 +$$

$$x^4(x^4 + a)p_4$$

(a, b, c, k — постоянные).

Приведенные результаты дают исчерпывающее решение вопроса о максимальных алгебрах Ли проективных движений в жестких h-пространствах типа $\{13\}$. Как мы видели, максимальная размерность таких алгебр Ли равняется четырем.

§ 22. Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств типа $\{1(12)\}$

55. Согласно п. 43 h-пространство типа $\{1(12)\}$ с основной формой

$$ds^2 = e_1 d{x^1}^2 + e_2 f d{x^2}^2 + 2e_3 f dx^3 dx^4 - e_3(1 + f\theta) d{x^4}^2, \tag{289}$$

где $e_i = \pm 1$; $i = 1, 2, 3$, $f = f(x^1)$ и $\theta = \theta(x^2, x^4)$ — функции указанных переменных (см. теорему 13.3), является жестким, если $f \neq ce^{\alpha x^1}$ (α, c – const). Имеет место

Л е м м а 22.1. *Если $\xi^i\partial_i$ — проективное движение в жестком h-пространстве типа $\{1(12)\}$, то $\xi^p = \xi^p(x^p)$ $(p = 1, 4)$, $\xi^2 = \xi^2(x^2, x^4)$ и $\partial_1\xi^3 = 0$.*

Действительно, из (57) при $(ijkl) = (1334), (2314)$ с помощью формул (245) и (246) найдем $T_1\partial_3\xi^1 = T_1\partial_1\xi^2 = 0$. Так как в соответствии с леммой 17.2 метрика (289) при $T_1 = 0$ определяет K-пространство, то $\partial_3\xi^1 = \partial_1\xi^2 = 0$. Подобным образом получаются остальные равенства.

Эта лемма значительно облегчает интегрирование уравнений (249), в которых h_{ij} — тензор, определенный формулой (189) (теорема 18.2). В итоге получим

$$\xi^1 = a_1\int_{x_0^1}^{x^1} f(x^1)dx^1 + a_4x^1 + a_5, \quad \xi^2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4)x^2 + \sigma(x^4),$$

$$\xi^3 = a_3x^3 - e_2e_3\sigma'(x^4)x^2 + \tau(x^4), \quad \xi^4 = a_4x^4 + a_2,$$

где σ и τ — функции x^4, $a_1, \ldots, a_5$ — постоянные, удовлетворяющие вместе с f и θ уравнениям

$$a_1(zz'' - z'^2) + a_3z' + a_4(x^1z'' - z') + a_5z'' = 0, \quad z \equiv \int_{x_0^1}^{x^1} f(x^1)dx^1, \tag{290}$$

$$\xi^2\partial_2\theta + \xi^4\partial_4\theta + 2(e_2e_3\sigma''x^2 - \tau') + (a_4 - a_3)\theta = 0. \tag{291}$$

Уравнение (290) и его дифференциальные следствия образуют систему Θ алгебраических уравнений относительно параметров a_1, a_3, a_4, a_5; число k произвольных из этих параметров равняется $4 - \mathrm{Rk}$, где Rk — ранг матрицы системы Θ. Исследуя возможные случаи $k = 4, 3, 2$ (при этом $\mathrm{Rk} = 0, 1, 2$), нетрудно убедиться, что всякий раз выполняется условие $T_1 = 0$ (см. (246)), определяющее K-пространство. Следовательно, для жестких h-пространств $k \le 1$. Так как $a_1 \ne 0$ (в противном случае проективная алгебра Ли сводится к гомотетической подалгебре), то, поделив уравнение (290) на a_1 и обозначив $a_3 = \beta a_1$, $a_4 = \gamma a_1$, $a_5 = \alpha a_1$, будем иметь

$$z''(z + \gamma x^1 + \alpha) = z'(z' + \gamma - \beta). \tag{292}$$

Если постоянная γ равна нулю, то из последнего уравнения следует $f'/f = \mathrm{const}$, и снова $T_1 = 0$, поэтому полагаем $\gamma \ne 0$. Интегрируя это уравнение, получим для $\beta = \gamma$

$$\begin{cases} f = t, \\ x^1 = c_1 \displaystyle\int_{t_0}^{t} t^{-1} e^{-\gamma/t} dt + c_2, \end{cases} \tag{293}$$

$$\xi^1 = a_1 c_1 f e^{-\gamma/f} \equiv a_1 y(x^1), \tag{294}$$

для $\beta \neq \gamma$

$$\begin{cases} f = t - \gamma, \\ x^1 = c_1 \displaystyle\int_{t_0}^{t} |t-\beta|^{\gamma/(\beta-\gamma)} |t-\gamma|^{\beta/(\gamma-\beta)} dt + c_2, \end{cases} \tag{295}$$

$$\xi^1 = a_1 c_1 |f|^{\gamma/(\gamma-\beta)} |f+\gamma-\beta|^{\beta/(\beta-\gamma)} \equiv a_1 y(x^1) \tag{296}$$

$(\beta, \gamma, c_1, c_2$ — const). При этом

$$\xi^2 = \frac{1}{2} a_1 (\beta+\gamma) x^2 + \sigma(x^4), \tag{297}$$

$$\xi^3 = a_1 \beta x^3 - e_2 e_3 \sigma' x^2 + \tau(x^4), \quad \xi^4 = a_1 \gamma x^4 + a_2, \tag{298}$$

а уравнение (291) принимает вид

$$\xi^2 \partial_2 \theta + \xi^4 \partial_4 \theta + 2(e_2 e_3 \sigma'' x^2 - \tau') + a_1(\gamma - \beta)\theta = 0. \tag{299}$$

Дифференцируя его дважды по x^2, найдем

$$\xi^2 \partial_{22} \theta + \xi^4 \partial_{24} \theta + 2 e_2 e_3 \sigma'' + \frac{1}{2} a_1 (3\gamma - \beta) \partial_2 \theta = 0, \tag{300}$$

$$\xi^2 \partial_2 u + \xi^4 \partial_4 u + 2 a_1 \gamma u = 0, \quad u \equiv \partial_{22} \theta. \tag{301}$$

Рассмотрим по отдельности два случая: 1°. $\partial_2 u \neq 0$, 2°. $\partial_2 u = 0$.

1°. Если $\partial_2 u \neq 0$, то, разделив уравнение (301) на $\partial_2 u$ и дифференцируя затем два раза по x^2, приняв во внимание (297), получим систему уравнений относительно параметров a_1, a_2. Исследуя ее обычным образом и интегрируя уравнения (299), (300), получим следующие результаты.

Пространства с метрической формой (289), в которой f определяется формулами (293) или (295), допускает 3-мерную максимальную проективную алгебру Ли $P_3 = \{\{\underset{n}{X}_1, I_2\}\}$ с двумерной изометрической подалгеброй I_2, если

F.I.

$$\beta = \gamma, \quad \theta = c\ln|x^2+\phi| + \nu x^2 + \mu,$$
$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2y(x^1)p_1 + 2\gamma(x^2+\phi-x^4\phi')p_2 + \gamma\left[2x^3 + 2e_2e_3x^2x^4\phi'' + \right.$$
$$\left. cx^4 + \int \nu(\phi - x^4\phi')dx^4 + \int x^4\mu' dx^4\right]p_3 + 2\gamma x^4 p_4; \tag{302}$$

F.II.

$$\beta = -\gamma, \quad \theta = c\exp a(x^2+\phi) + \nu x^2 + \mu,$$
$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2y(x^1)p_1 - 2\gamma\left(x^4\phi' + \frac{2}{a}\right)p_2 + \gamma\left(2e_2e_3x^2(\phi' + x^4\phi'') - 2x^3 + \right.$$
$$\left. 2\int\mu dx^4 + \int x^4\mu' dx^4 - \int\nu\left(x^4\phi' + \frac{2}{a}\right)dx^4\right)p_3 + 2\gamma x^4p_4; \tag{303}$$

F.III.

$$\beta \neq \gamma, -\gamma, 3\gamma, \quad \theta = c(x^2+\phi)^{2(\beta-\gamma)/(\beta+\gamma)} + \nu x^2 + \mu,$$
$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2y(x^1)p_1 + \big((\beta+\gamma)(x^2+\phi) - 2\gamma x^4\phi'\big)p_2 + \big(2\beta x^3 -$$
$$e_2e_3x^2((\beta+\gamma)\phi' - 2\gamma\phi' - 2\gamma x^4\phi'') + (\gamma-\beta)\int\mu dx^4 + \tag{304}$$
$$\gamma\int x^4\mu' dx^4 + \frac{1}{2}(\beta+\gamma)\int\nu\phi dx^4 - \gamma\int\nu x^4\phi' dx^4\Big)p_3 + 2\gamma x^4 p_4$$

(a, c — const). Во всех трех случаях μ, ϕ — функции x^4; $\nu \equiv 2e_2e_3\phi''$, а изометрическая подалгебра I_2 порождается генераторами

$$\underset{\text{и}}{X}_2 = -\phi' p_2 + \frac{1}{2}(\mu + \nu x^2 - e_2e_3\phi'^2)p_3 + p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_3 = p_3.$$

В формулах (302)—(304) $y(x^1)$ — функция, определенная равенствами (294) при $\beta = \gamma$ и (296) при $\beta \neq \gamma$.

Метрика (289), в которой функция $f(x^1)$ определяется формулами (293) или (295), а

$$\theta = (x^4)^{2(a-1)}\Phi\left(\frac{x^2}{(x^4)^a} - \int\frac{\phi(x^4)}{(x^4)^{(a+1)}}dx^4\right) + \nu x^2 + \mu(x^4),$$

$$\nu = (x^4)^{a-2}\left(c - 2e_2e_3\int \phi''(x^4)(x^4)^{1-a}dx^4\right),$$

где c — const, $a = (1/2)\gamma^{-1}(\beta+\gamma)$, Φ, ϕ и μ — функции указанных аргументов, допускает 2-мерную максимальную проективную алгебру Ли с базисными элементами

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2y(x^1)p_1 + ((\beta+\gamma)x^2 + 2\gamma\phi)p_2 + \Bigg((\gamma-\beta)\int \mu dx^4 +$$

$$2\beta x^3 - 2e_2e_3\gamma x^2\phi' + \gamma\int \nu\phi dx^4 + \gamma\int x^4\mu' dx^4\Bigg)p_3 + 2\gamma x^4 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_2 = p_3,$$

где $y(x^1)$ вычисляется по формуле (294), если $\beta = \gamma$, и формуле (296), если $\beta \neq \gamma$.

2°. В случае $\partial_2 u = 0$ уравнение (301) принимает простой вид

$$a_1\gamma(x^4u' + 2u) + a_2u' = 0. \tag{305}$$

Это уравнение вместе с его дифференциальными следствиями образует систему алгебраических уравнений относительно параметров a_1, a_2. Пусть ранг матрицы этой системы будет Rk, где Rk ≤ 2. При Rk $= 2$ имеем $a_1 = a_2 = 0$, и проективная группа состоит, самое большее, из гомотетий. Исключая этот случай, получим две возможности.

G.I: Rk $= 1$. Так как $a_1 \neq 0$, то обозначив $a_2/(a_1\gamma) \equiv b$ и проинтегрировав уравнение (305), после замены $x^{4'} = x^4 + b$, опустив штрихи, получим

$$\theta = cx^{4^{-2}}x^{2^2} + \nu(x^4)x^2 + \mu(x^4), \tag{306}$$

(c — const, ν и μ — функции x^4). Подставив θ (306) в (300) и (299), можно определить $\sigma(x^4)$ и $\tau(x^4)$. Из (300) следует уравнение

$$\sigma'' + \frac{e_2e_3c}{(x^4)^2}\sigma = \frac{1}{4}e_2e_3a_1\left[(\beta-3\gamma)\nu - 2\gamma x^4\nu'\right].$$

Если обозначить через σ_0 решение соответствующего однородного уравнения (с нулевой правой частью), то генераторы проективной алгебры Ли можно записать в виде

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2y(x^1)p_1 + \left[e_2e_3J + (\beta+\gamma)x^2\right]p_2 + \Big(2\beta x^3 - x^2J' -$$

$$(\beta-\gamma)\int \mu dx^4+\gamma\int x^4\mu' dx^4+\frac{1}{2}e_2e_3\int \nu J dx^4\Big)p_3+2\gamma x^4p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_2=2\sigma_0p_2+\left(\int \nu\sigma_0 dx^4-2e_2e_3x^2\sigma_0'\right)p_3,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_3=2\sigma_0\int \sigma_0^{-2}dx^4p_2+\left(\int\left(\nu\sigma_0\int\sigma_0^{-2}dx^4\right)dx^4-\right.$$

$$\left.2e_2e_3x^2\left(\sigma_0^{-1}+\sigma_0'\int\sigma_0^{-2}dx^4\right)\right)p_3,\quad \underset{\text{и}}{X}{}_4=p_3,$$

где

$$J\equiv\frac{1}{2}(\beta-3\gamma)\sigma_0\int\left(\sigma_0^{-2}\int\nu\sigma_0dx^4\right)dx^4-\gamma\sigma_0\int\left(\sigma_0^{-2}\int\nu' x^4\sigma_0dx^4\right)dx^4,$$

σ_0 равняется соответственно $\sqrt{|x^4|}$ при $c=e_2e_3/4$, $|x^4|^{p+1/2}$ при $c=e_2e_3(1/4-p^2)$ и $\sqrt{|x^4|}\sin(p\ln|x^4|)$ при $c=e_2e_3(1/4+p^2)$; $y(x^1)$ определяется формулами (294) либо (296).

G.II: Rk $=0$. В этом случае $u=0$,

$$\theta=\nu(x^4)x^2+\mu(x^4),$$

где ν и μ — функции x^4. Определив из уравнений (299) и (300) функции $\sigma(x^4)$, $\tau(x^4)$ и подставив их в (297), найдем генераторы проективной алгебры Ли:

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1=2y(x^1)p_1+\left[(\beta+\gamma)x^2+e_2e_3J_1\right]p_2+\Big(2\beta x^3-J_1'x^2+$$

$$(\gamma-\beta)\int\mu dx^4+\gamma\int x^4\mu' dx^4+\frac{1}{2}e_2e_3\int\nu J_1dx^4\Big)p_3+2\gamma x^4p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_2=-e_2e_3J_2p_2+\left(J_2'x^2-\frac{1}{2}e_2e_3\int\nu J_2dx^4+\mu\right)p_3+2p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_3=2x^4p_2+\left(\int\nu x^4dx^4-2e_2e_3x^2\right)p_3,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_4=2p_2+\int\nu dx^4p_3,\quad \underset{\text{и}}{X}{}_5=p_3;$$

здесь

$$J_1 \equiv \int dx^4 \left(\int dx^4 \left(\frac{1}{2}(\beta - 3\gamma)\nu - \gamma x^4 \nu' \right) \right), \quad J_2 \equiv \int \nu dx^4,$$

$y(x^1)$ вычисляется по формулам (294) или (296).

Из полученных в этом параграфе результатов следует, что размерность максимальной проективной негомотетической алгебры Ли в жестком h-пространстве типа $\{1(12)\}$ равняется пяти, и любая проективная алгебра Ли P_r, не сводящаяся к преобразованиям подобия, содержит изометрическую подалгебру I_{r-1} на единицу меньшей размерности.

§ 23. Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств типа $\{(11)2)\}$

56. В данном параграфе будут рассмотрены жесткие h-пространства типа $\{(11)2\}$ с основной формой (см. теорему 13.2):

$$ds^2 = x^{4^2} ds_1^2 + 2e_3 \left[x^3 + \theta(x^4)\right] dx^3 dx^4, \; ds_1^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2}, \tag{307}$$

определяемые условием $\theta' \neq 0$ (п. 49).

Л е м м а 23.1. *Если $X = \xi^i \partial_i$ — проективное движение в жестком h-пространстве типа $\{(11)2\}$, то $\partial_{l_\beta} \xi^{i_\alpha} = 0$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \alpha \neq \beta$; $i_1, l_1 = 1, 2$; $i_2, l_2 = 3, 4$).*

Используя свойства тензора кривизны метрики (307) (п. 49), из уравнений (57) при $(ijkl) = (333i_1)$, $i_1 = 1, 2$, имеем $\theta' \partial_{i_1} \xi^4 = 0$. Так как $\theta' \neq 0$ в жестком h-пространстве (307), то $\partial_{i_1} \xi^4 = 0$. Из уравнений (53) с помощью равенств (265) ($b_{ij} \equiv L_X g_{ij}$), которые при условии $\theta' \neq 0$ выполняются для любого проективного движения в h-метрике (307), получим $\partial_3 \xi^{i_1} = 0$. Остальные соотношения выводятся так же.

Интегрируя с помощью доказанной леммы уравнения (249), в которых тензор h_{ij} определяется формулой (182) (теорема 18.2), найдем

$$\xi^{i_1} = \eta^{i_1}(x^{l_1}),$$

$$\xi^3 = \frac{1}{2}(x^3 + \theta)(a_1 x^4 + a_2 + a_3) - \xi^4 \theta',$$

$$\xi^4 = a_1 x^{4^2} + (a_2 - a_3) x^4,$$

где $\eta^{i_1}\partial_{i_1}$ — инфинитезимальная гомотетия в

$$ds_1^2 = \overset{1}{g}_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} : \quad L_\eta \overset{1}{g}_{i_1 j_1} = 2a_3 \overset{1}{g}_{i_1 j_1},$$

а θ вместе с постоянными a_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяет уравнению

$$a_1 x^4 u + a_2(u - 1) - a_3 u = 0, \qquad \left(u \equiv x^4 \frac{\theta''}{\theta'} + \frac{3}{2}\right).$$

Это уравнение и его дифференциальные следствия образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров a_i. Исследуя эту систему с помощью обычной схемы (см. лемму 20.2), придем к следующим результатам.

H.I. Если ds_1^2 не допускает нетривиальных (т. е. неизометрических) гомотетий, то в пространстве (307), $\theta = a|x^4|^{-1/2}$ $(a - \mathrm{const})$, действует максимальная проективная алгебра Ли $P_{1+\tau}$, где $\tau \leq 3$ — размерность изометрической алгебры Ли в ds_1^2, с базисом

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = \left(\frac{1}{2} x^3 x^4 + a\sqrt{|x^4|}\right) p_3 + {x^4}^2 p_4, \tag{308}$$

$$\underset{\text{и}}{X}_{1+k} = \sum_{i_1=1}^{2} \underset{k}{\zeta}^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} \quad (k = 1, \ldots, \tau) - \text{ и.д. в } ds_1^2. \tag{309}$$

Если ds_1^2 допускает нетривиальное г.д. $\eta^{i_1}\partial_{i_1}$: $L_\eta \overset{1}{g}_{i_1 j_1} = 2 \overset{1}{g}_{i_1 j_1}$, то к генераторам (308) добавляется еще один

$$\underset{\text{и}}{X} = \sum_{i_1=1}^{2} \eta^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} + \frac{1}{2} x^3 p_3 - x^4 p_4. \tag{310}$$

H.II. Пространство (307),

$$\theta = c \int |x^4|^{a-3/2} |x^4 + b|^{-a} dx^4 \quad (a, b, c = \mathrm{const},\ a \neq 1, b \neq 0)$$

допускает максимальную проективную алгебру Ли

$$P_r = \{\{\underset{\text{п}}{X}_1, \underset{\text{и}}{X}_{1+k}\}\},$$

совпадающую по размерности с гомотетической алгеброй Ли в ds_1^2:

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = \sum_{i_1=1}^{2} \eta^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} + \Big[\frac{1}{2}(x^4 + (2a-1)b)(x^3 + \theta) -$$

$$x^4(x^4 + b)\theta'\Big] p_3 + x^4(x^4 + b) p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_{1+k} = \sum_{i_1=1}^{2} \underset{k}{\zeta}^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} \quad (k = 1, \dots, r-1 \leq 3),$$

где $\underset{\text{и}}{X}_{1+k}$ есть и.д. в ds_1^2, а η^{i_1} задает гомотетии в ds_1^2:

$$L_\eta \overset{1}{g}_{i_1 j_1} = 2b(a-1) \overset{1}{g}_{i_1 j_1}.$$

Если ds_1^2 не допускает нетривиальных гомотетий, то максимальная проективная алгебра Ли состоит из инфинитезимальных изометрий. Заметим, что в этом случае нетривиальное преобразование подобия в подпространстве $x^p = \text{const}$ $(p = 3, 4)$ индуцирует в объемлющем пространстве неаффинное проективное движение $\underset{\text{п}}{X}_1$.

H.III. Пространство (307),

$$\theta = c \int \frac{dx^4}{|x^4 + b| \sqrt{|x^4|}} \qquad (b, c - \text{const}, b \neq 0),$$

допускает максимальную проективную алгебру Ли

$$P_{1+\tau} = \{\{\underset{\text{п}}{X}_1, \underset{\text{и}}{X}_{1+k}\}\},$$

где τ — размерность изометрической подалгебры, состоящей из и.д. в ds_1^2:

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = (x^4 + b)\left(\frac{1}{2}(x^3 + \theta - 2x^4\theta')p_3 + x^4 p_4\right),$$

$$\underset{\text{и}}{X}_{1+k} = \sum_{i_1=1}^{2} \underset{k}{\zeta}^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} \quad (k = 1, \dots, \tau \leq 3) - \text{и.д. в } ds_1^2.$$

H.IV. Максимальная проективная алгебра Ли в пространстве (307),

$$\theta = a \int \frac{dx^4}{|x^4|^{3/2} e^{c/x^4}} \qquad (a, c - \text{const}, c \neq 0),$$

состоит из изометрий, если ds_1^2 не допускает нетривиальных гомотетий. В противном случае в (307) действует негомотетическая проективная алгебра Ли $P_{1+\tau}$ с базисом

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = \sum_{i_1=1}^{2} \eta^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} + \left(\frac{1}{2}(x^4 + 2c)(x^3 + \theta) - x^{4^2}\theta'\right) p_3 + x^{4^2} p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_{1+k} = \sum_{i_1=1}^{2} \underset{k}{\zeta}{}^{i_1}(x^1, x^2) p_{i_1} \quad (k = 1, \ldots, \tau \leq 3) - \text{и.д. в } ds_1^2.$$

где η^{i_1} определяет гомотетии в ds_1^2: $L_\eta \overset{1}{g}{}_{i_1 j_1} = 2c \overset{1}{g}{}_{i_1 j_1}$.

Из приведенных результатов следует, что максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли P_r в жестком h-пространстве типа $\{(11)2\}$ имеет порядок $r = 5$ и достигается в пространстве (307),

$$\theta = \frac{a}{\sqrt{|x^4|}}, \quad ds_1^2 = \sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha dx^{\alpha^2} \quad (a = \text{const}).$$

P_5 содержит 1-мерную проективную подалгебру P_1, порожденную генератором $\underset{\text{п}}{X}{}_1$ (308), и 4-мерную изометрическую подалгебру I_4, натянутую на трансляции p_α $(\alpha = 1, 2)$, вращения $e_1 x^1 p_2 - e_2 x^2 p_1$ в ds_1^2 и и.д. $\underset{\text{и}}{X}$ (310), где $\eta^{i_1} = x^{i_1}$.

В заключение заметим, что вопрос об инфинитезимальных изометриях в псевдоримановом пространстве V^2 решен в [94] (§ 74); метрическая форма любого V^2, допускающего нетривиальную гомотетию, приводится к виду

$$ds^2 = e^{2x^1} a_{ij}(x^2) dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2),$$

а инфинитезимальная гомотетия задается формулой $\underset{\text{г}}{X} = p_1$ (см. (61)).

§ 24. Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств простого типа

57. Как указывалось ранее (пп. 46, 51), жесткие h-пространства, определенные метриками Леви-Чивита

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} \Phi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{p} \underset{\beta}{\Pi}{}'(f_\beta - f_\alpha) ds_\alpha^2, \tag{311}$$

совпадают по форме (с точностью до сигнатуры) с пространствами Леви-Чивита основного типа. Поэтому теорема 18.2 является обобщением на случай произвольной сигнатуры теоремы 4.6 (Г. Фубини, А. С. Солодовников), доказанной для положительно определенных пространств Леви-Чивита основного типа. Действительно, вследствие теоремы 18.2 и формулы (133) все негомотетические проективные движения в жестком h-пространстве (311) получаются интегрированием уравнений

$$(\xi_{i,j}+\xi_{j,i})dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_1(f_\alpha+\sum_{\beta=1}^{p} f_\beta)+a_2\right)\Phi_\alpha \equiv$$

$$(a_1 h_{ij}+a_2 g_{ij})dx^i dx^j, \tag{312}$$

где $a_1 \neq 0$. Если обозначить $1/a_1$ через a и $a_2/(5a_1)$ через b , то преобразованные уравнения

$$a(\xi_{i,j}+\xi_{j,i})dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{p}\left((f_\alpha+b)+\sum_{\beta=1}^{p}(f_\beta+b)\right)\Phi_\alpha$$

совпадут с уравнениями (67) из теоремы 4.6. Так как для пространств Леви-Чивита основного типа независимо от сигнатуры выполняется теорема Г. Фубини 4.5, устанавливающая зависимость компонент ξ^{i_α} только от переменных x^{k_α} той же группы (п. 47), то ясно, что теоремы 4.7 и 4.8 будут справедливы и в случае произвольной сигнатуры, т. е. для жестких h-пространств (311).

Максимальная 7-мерная проективная негомотетическая алгебра Ли P_7 в жестком h-пространстве (311) достигается в субпроективном пространстве Кагана

$$ds^2 = (f_4 - f_1)\sum_{i=1}^{4} e_i dx^{i^2}, \quad f_1^2 + cf_1 + a = 0, \quad (e_i = \pm 1, f_1, a, c - \mathrm{const}) \tag{313}$$

где f_4 — функция x^4, удовлетворяющая уравнению

$$f_4' = \exp\left(\frac{3}{2}\int\frac{f_4+c}{f_4^2+cf_4+a}df_4\right).$$

P_7 содержит проективную подалгебру P_1 с генератором

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}(f_1 - c)x^\alpha p_\alpha + \frac{f_4^2 + cf_4 + a}{f_4'}p_4$$

и подалгебру I_6 и.д., состоящую из трансляций p_α и вращений

$$e_\alpha x^\alpha p_\beta - e_\beta x^\beta p_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

в $ds_1^2 = \sum_{\alpha=1}^3 e_\alpha dx^{\alpha^2}$.

58. Рассмотрим жесткие h-пространства (148) типа $\{11, 1\,\overset{*}{1}\}$ и (151) типа $\{(11)1\,\overset{*}{1}\}$. Если учесть, что эти пространства описываются в комплексных переменных $x^3 = (1/2)(\bar{x}^3 + i\bar{x}^4)$, $x^4 = (1/2)(\bar{x}^3 - i\bar{x}^4)$ метриками Леви-Чивита основного типа (134), (137) ($f_3 = \sigma + i\tau$, $f_4 = \sigma - i\tau$, пп. 47, 52; см. также п. 33), все проективные движения в них получаются интегрированием уравнений (312), где h_{ij} определяются формулами (135),(138) (теорема 18.2), и для каждого проективного движения в комплексном пространстве выполняется теорема Г.Фубини (пп. 47, 52), то станет очевидным, что сказанное в п. 57 переносится сюда без каких-либо изменений, и задача заключается в том, чтобы перейти в формулах (68)—(70) к вещественным переменным. Так как $f_3(x^3)$ и $f_4(x^4)$ — комплексно сопряженные функции, то из (68) следует, что ξ^3 и ξ^4 — комплексно сопряженные функции комплексно сопряженных переменных соответственно x^3 и x^4:

$$\xi^3(x^3) = \eta^3(\bar{x}^3, \bar{x}^4) + i\eta^4(\bar{x}^3, \bar{x}^4), \quad \xi^4(x^4) = \eta^3(\bar{x}^3, \bar{x}^4) - i\eta^4(\bar{x}^3, \bar{x}^4),$$

где η^3 и η^4 — гармонически сопряженные функции вещественных переменных $\bar{x}^3$ и $\bar{x}^4$. Приняв это во внимание, получим следующие результаты.

К.I. Все проективные движения $\eta^i \partial_i$ в пространстве [3]

$$ds^2 = (f_1 - f_2)\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^\alpha e_\alpha[(\sigma - f_\alpha)^2 + \tau^2]dx^{\alpha^2} +$$

$$8e_3\tau\left(\prod_{\alpha=1,2}(f_\alpha - \sigma) - \tau^2\right)dx^3dx^4 + 4e_3\tau^2\sum_{\alpha=1}^{2}(f_\alpha - \sigma)\left(dx^{4^2} - dx^{3^2}\right)$$

$$(f_\alpha = f_\alpha(x^\alpha);\ \alpha = 1, 2)$$

[3] Черта над x далее опускается.

непостоянной кривизны, в том случае, если они не сводятся к гомотетиям, получаются интегрированием уравнений

$$\eta^\alpha \frac{df_\alpha}{dx^\alpha} = f_\alpha^2 + cf_\alpha + a, \quad 2\frac{d\eta^\alpha}{dx^\alpha} = -f_\alpha - 3c \quad (\alpha = 1, 2), \tag{314}$$

$$\eta^3 \partial_3 \sigma - \eta^4 \partial_3 \tau = \sigma^2 - \tau^2 + c\sigma + a, \tag{315}$$

$$\eta^4 \partial_3 \sigma + \eta^3 \partial_3 \tau = \tau(c + 2\sigma), \tag{316}$$

$$\partial_3 \eta^3 = -\frac{1}{2}(\sigma + 3c) \quad \partial_3 \eta^4 = -\frac{\tau}{2} \tag{317}$$

для всех возможных значений постоянных c и a. К этим уравнениям следует добавить условия гармонической сопряженности

$$\partial_3 \sigma = \partial_4 \tau, \quad \partial_4 \sigma = -\partial_3 \tau, \quad \partial_3 \eta^3 = \partial_4 \eta^4, \quad \partial_4 \eta^3 = -\partial_3 \eta^4. \tag{318}$$

Уравнения для функций σ и τ $(\sigma, \tau \neq \mathrm{const})$ удобно записать в комплексных переменных:

$$\frac{df}{dz} = \exp\left(\frac{5}{2}\int \frac{(f+c)df}{f^2 + cf + a}\right), \ f = f(x^3 + ix^4) \equiv f(z), \ \sigma = \Re f, \ \tau = \Im f.$$

Максимальная проективная алгебра Ли P_r в (194) содержит неаффинное п.д. $\underset{\text{п}}{X} = \underset{0}{\eta}{}^i p_i$, где $\underset{0}{\eta}{}^i$ удовлетворяет уравнениям (314), (318), и изометрическую подалгебру размерности $r - 1 \leq 2$ $(r \leq 3)$. Изометрии имеют вид сдвигов по тем координатам x^α $(\alpha = 1, 2)$, которым соответствуют постоянные функции f_α, либо в том случае, если σ, τ постоянны (для этого необходимо $a > c^2/4$), состоят из трансляций p_3, p_4.

Исключение составляют пространства $f_\alpha = A_\alpha x^{\alpha^{-2/3}}$ (не суммировать), $\sigma = \Re\left(Az^{-2/3}\right)$, $\tau = \Im\left(Az^{-2/3}\right)$, $(A_\alpha, A - \mathrm{const}, \alpha = 1, 2)$, для которых максимальная проективная алгебра Ли порождается генераторами

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = \sum_{\alpha=1}^{2} A_\alpha \sqrt[3]{x^\alpha} p_\alpha + (x^3\sigma - x^4\tau)p_3 + (x^4\sigma + x^3\tau)p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_2 = x^i p_i,$$

к которым в случае, если одна величин A_1, A_2 равна нулю, присоединяются трансляции по соответствующей координате.

К.II. Все жесткие h-пространства с основной формой

$$\begin{gathered} ds^2 = \left[(\sigma - f_1)^2 + \tau^2\right] ds_1^2(x^1, x^2) + \\ 4e_3\tau\left[\tau({dx^4}^2 - {dx^3}^2) + 2(f_1 - \sigma)dx^3 dx^4\right] \end{gathered} \tag{319}$$

(f_1 − const; σ и τ — гармонически сопряженные функции x^3, x^4; $ds_1^2 = \overset{1}{g}_{\alpha\beta}(x^1, x^2)dx^\alpha dx^\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ — произвольная двумерная метрическая форма), допускающие проективные движения, отличные от гомотетий, определяются из следующих условий:

$$\eta^\alpha = \zeta^\alpha, \quad \eta^3 = -cx^3 + b_1, \quad \eta^4 = -cx^4 + b_2 \quad (\alpha = 1, 2), \tag{320}$$

$$f_1^2 + cf_1 + a = 0, \tag{321}$$

$$\eta^3\partial_3\sigma - \eta^4\partial_3\tau = \sigma^2 - \tau^2 + c\sigma + a, \tag{322}$$

$$\eta^4\partial_3\sigma + \eta^3\partial_3\tau = (2\sigma + c)\tau, \tag{323}$$

где $\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^1, x^2)$ задают гомотетии в ds_1^2:

$$L_\zeta \overset{1}{g}_{\alpha\beta} = -2c \overset{1}{g}_{\alpha\beta}, \tag{324}$$

a, b_1, b_2, c — (вещественные) постоянные, σ, τ, η^3 и η^4 удовлетворяют (318).

Уравнения (320) для σ и τ можно записать в комплексных переменных в виде

$$\int \frac{df}{f^2 + cf + a} = \int \frac{dz}{b_1 + ib_2 - cz} + \text{const},$$

где $f = f(x^3 + ix^4) \equiv f(z)$, $\sigma = \Re f$, $\tau = \Im f$. Все проективные движения в (319), если они не сводятся к гомотетиям, являются линейными комбинациями п.д. $\underset{0}{\eta}{}^i\partial_i$, удовлетворяющего (320),(324), с изометриями в ds_1^2. Исключение составляют пространства

$$f_1 = 0, \ \sigma = \frac{b_1x^3 + b_2x^4}{x^{3^2} + x^{4^2}}, \quad \tau = \frac{b_2x^3 - b_1x^4}{x^{3^2} + x^{4^2}} \quad (b_1, b_2 - \text{const}),$$

для которых все проективные движения получаются комбинированием проективных движений

$$\underset{\text{п}}{X}{}_1 = b_1p_3 + b_2p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_2 = \zeta^\alpha p_\alpha + k(x^3p_3 + x^4p_4),$$

где $\zeta^\alpha = \zeta^\alpha(x^1, x^2)$ определяет в ds_1^2 преобразование подобия:

$$L_\zeta \overset{1}{g}_{\alpha\beta} = k \overset{1}{g}_{\alpha\beta}.$$

Если ds_1^2 не допускает преобразований подобия или допускает только изометрии, то следует считать $k = 0$, а преобразование в ds_1^2 тождественным ($\zeta^\alpha \equiv 0$) или изометрическим. Отсюда вытекает, что максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли в рассматриваемых пространствах есть P_5. В справедливости перечисленных результатов можно убедиться непосредственной проверкой.

Из приведенных в этой главе результатов следует, что максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли в жестком h-пространстве есть G_7; она достигается в субпроективном пространстве Кагана (313).

Глава 6.

АЛГЕБРЫ ЛИ ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ K-ПРОСТРАНСТВ

§ 25. Алгебры Ли проективных движений K-пространств ($K \neq 0$)

59. В этом параграфе определяются максимальные алгебры Ли проективных движений в K-пространствах ($K \neq 0$). Так как всякое K-пространство при $K \neq 0$ является пространством $\Pi^4(K)$ (теорема 16.2), то согласно результатам § 8 для определения максимальной проективной алгебры Ли P_r достаточно найти общее решение уравнения

$$\varphi_{,ijk} + K(2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}) = 0 \qquad (325)$$

в этом пространстве. Аффинная алгебра Ли в K-пространстве при $K \neq 0$ совпадает со своей изометрической подалгеброй (теорема 8.2). Вследствие теоремы 17.2 изучение K-пространств ($K \neq 0$) сводится к исследованию K-пространств типа $\{(111)1\}$, которые являются пространствами $V_1(K)$ непостоянной кривизны. В соответствии с результатами п. 27 метрика K-пространства типа $\{(111)1\}$ в случае $K \neq 0$ может быть приведена к одной из форм (226)—(229), из которых благодаря лемме 16.3 рассмотрению подлежит только форма

$$ds^2 = e^{2x^4} ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 {dx^4}^2, \quad K = -e_4 = \pm 1, \qquad (326)$$

где $ds_0^2 = \overset{0}{g}_{i_0 j_0}(x^1, x^2, x^3) dx^{i_0} dx^{j_0}$ $(i_0, j_0 = 1, 2, 3)$ есть 3-мерная метрика ненулевой кривизны (в противном случае из (223) следует, что ds^2 имеет постоянную кривизну K).

Используя (222), выпишем ненулевые коэффициенты связности метрики (326):

$$\Gamma^{i_0}_{j_0 k_0} = \overset{0}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0}, \; \Gamma^{i_0}_{4 i_0} = 1, \; \Gamma^4_{i_0 j_0} = -e_4 e^{2x^4} \overset{0}{g}_{i_0 j_0} \quad (i_0, j_0, k_0 = 1, 2, 3).$$

Из уравнения (325) с $(ijk) = (444)$ при $K = -e_4$ получим

$$\varphi = \underset{1}{a}(x^1, x^2, x^3)e^{2x^4} + \underset{2}{a}(x^1, x^2, x^3)e^{-2x^4} + \underset{3}{a}(x^1, x^2, x^3), \tag{327}$$

а уравнения (325) с $(ijk) = (44k_0)$ дают $\underset{2}{a}_{,k_0} = 0$, т. е. $\underset{2}{a} = \mathrm{const}$. Если положить $(ijk) = (i_0 j_0 4)$ в (325), то после несложных выкладок найдем

$$\underset{3}{a}_{|i_0 j_0} = 4e_4 \underset{2}{a} \overset{0}{g}_{i_0 j_0} \quad (\underset{2}{a} = \mathrm{const}), \tag{328}$$

где чертой обозначена ковариантная производная относительно метрики ds_0^2. Наконец, уравнения (325) с $(ijk) = (i_0, j_0, k_0)$ приводятся к равенствам

$$\underset{1}{a}_{|i_0 j_0 k_0} = 6e_4 \overset{0}{g}_{(i_0 j_0} \underset{3}{a}_{|k_0)}. \tag{329}$$

Легко проверить, что если выполняются соотношения (328) и (329), то функция φ из (327) является общим решением уравнения (325). Рассмотрим два случая: $\underset{2}{a} \neq 0$ и $\underset{2}{a} = 0$.

Если $\underset{2}{a} \neq 0$, то уравнение (328) приводится к виду $\underset{3}{\hat{a}}_{|i_0 j_0} = \overset{0}{g}_{i_0 j_0}$ и согласно § 7 в некоторой системе координат, полученной преобразованием переменных x^{i_0} из ds_0^2, не меняющим вида метрики (326), будем иметь

$$ds_0^2 = x^{3^2} ds_1^2 + e_3 dx^{3^2}, \quad ds_1^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2},$$

$$ds^2 = x^{3^2} e^{2x^4} ds_1^2 + e_3 e^{2x^4} dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}. \tag{330}$$

Эта метрика определяет полуприводимое пространство V^{2+2}. С помощью леммы 16.4 и формул (236), (237) нетрудно доказать, что оно является K-пространством, $K = -e_4$. Тогда из леммы 16.7 следует, что любое решение φ уравнений (325) зависит только от x^3, x^4, поэтому $\underset{1}{a}$ и $\underset{3}{a}$ в формуле (327) есть функции x^3. Далее уравнения (328), (329) легко интегрируются:

$$\varphi = c_1(x^{3^4} e^{2x^4} + e^{-2x^4} + 2e_3 e_4 x^{3^2}) + c_2 x^{3^2} e^{2x^4} + c_3 e^{2x^4}$$

(c_1, c_2, c_3 – const) и, вычислив по формуле (99) генераторы проективной алгебры Ли, получим

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = 2x^3(e_3 x^{3^2} + e_4 e^{-2x^4})p_3 + e_4(x^{3^4} e^{2x^4} - e^{-2x^4})p_4,$$

$$\underset{\text{п}}{X}_2 = e_3 x^3 p_3 + e_4 x^{3^2} e^{2x^4} p_4, \quad \underset{\text{п}}{X}_3 = e^{2x^4} p_4.$$

Согласно теореме 8.4 и следствию 8.1 максимальная проективная алгебра Ли в K-пространстве (330) содержит, помимо перечисленных проективных движений, еще только изометрии, которые можно определить с помощью леммы 16.8:

$$\underset{\text{и}}{X}_4 = x^3 p_3 - p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_{4+k} = \underset{k}{\zeta}^{\alpha}(x^1, x^2) p_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2; k = 1, \ldots, \tau \leq 3),$$

где $\underset{\text{и}}{X}_{4+k}$ — изометрические движения в $ds_1^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2}$.

При $\underset{2}{a} = 0$ уравнение (328) определяет ковариантно постоянное векторное поле для метрики ds_0^2. Если эта метрика не допускает ковариантно постоянных векторных полей, то $\underset{3}{a} = \text{const}$, и из (329) найдем

$$\underset{1}{a}_{|i_0 j_0 k_0} = 0. \tag{331}$$

В силу теоремы 6.1 в трехмерном пространстве, не допускающем ковариантно постоянных векторных полей, не существует ковариантно постоянных симметричных тензоров $a_{i_0 j_0}$, отличных от фундаментального тензора. Поэтому из (331) следует $\underset{1}{a}_{|i_0 j_0} = \alpha \overset{0}{g}_{i_0 j_0}$ $(\alpha = \text{const})$.

При $\alpha \neq 0$ согласно § 7 получим K-пространство (330). При $\alpha = 0$ получим уравнение $\underset{1}{a}_{|i_0 j_0} = 0$, которое имеет тривиальное решение $\underset{1}{a} = \text{const}$, так как по условию ds_0^2 не допускает ковариантно постоянных векторных полей. Тогда общее решение уравнения (325) имеет вид $\varphi = c_1 e^{2x^4} + \text{const}$ $(c_1 = \text{const})$. Вследствие теоремы 8.4 и формулы (99) соответствующее пространство допускает 1-мерную проективную алгебру Ли с генератором

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = e^{2x^4} p_4; \tag{332}$$

максимальная проективная алгебра Ли включает еще только изометрии.

Записав для метрики (326) уравнения Киллинга $\xi_{(i,j)} = 0$, после несложных преобразований найдем

$$\xi^{i_0} = \frac{1}{2} e_4 e^{-2x^4} \overset{0}{g}{}^{i_0 j_0} f_{,j_0} + \overset{0}{g}{}^{i_0 j_0} \eta_{j_0}(x^{l_0}), \quad \xi^4 = f(x^{l_0}), \tag{333}$$

где η_{j_0} и f удовлетворяют в ds_0^2 уравнениям

$$\eta_{i_0|j_0} + \eta_{j_0|i_0} = -2f \overset{0}{g}_{i_0 j_0}, \quad f_{|i_0 j_0} = 0. \tag{334}$$

Так как по предположению метрика ds_0^2 не допускает ковариантно постоянных векторных полей, то $f = \mathrm{const}$, при этом первое уравнение из (334) определяет гомотетии в ds_0^2.

Трехмерные римановы пространства, допускающие гомотетические движения, определены в диссертации Н. С. Липатова [47]. Если гомотетии в ds_0^2 сводятся к изометриям, то $f = 0$ в (333) и (334). В этом случае максимальная проективная алгебра Ли в K-пространстве (326) натянута на проективные движения (332) и базисные изометрии в ds_0^2. Если, в частности, ds_0^2 имеет постоянную ненулевую кривизну, то метрика (326) определяет субпроективное пространство Кагана основного случая (см. § 16), и проективная алгебра Ли P_r имеет максимальный порядок $r = 7$.

Если метрика ds_0^2 допускает гомотетии $\eta^{i_0} p_{i_0} : \eta_{(i_0|j_0)} = -\overset{0}{g}{}_{i_0 j_0}$, то изометрическая алгебра Ли в K-пространстве (326) порождается векторными полями

$$\underset{\text{и}}{X}{}_2 = \eta^{i_0}(x^{l_0}) p_{i_0} + p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_{2+k} = \underset{k}{\zeta}{}^{i_0}(x^{l_0}) p_{i_0} \quad (k = 1, \ldots, \tau < 6),$$

где $\underset{k}{\zeta}{}^{i_0}(x^{l_0})$ — изометрические движения в ds_0^2.

Предположим, теперь, что метрика ds_0^2 допускает ковариантно постоянное векторное поле $\underset{3}{a}{}_{|i_0}$ [1]. Если это поле неизотропное, то ds_0^2 приводится к виду

$$ds_0^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2} + e_3 dx^{3^2} \quad (\underset{3}{a} = c x^3),$$

при этом

$$ds^2 = e^{2x^4}(e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2}) + e_3 e^{2x^4} dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}.$$

Используя (236) и (237), можно доказать, что эта метрика определяет полуприводимое K-пространство V^{2+2}, $K = -e_4$, с двумерной главной частью; при этом из леммы 16.7 и формулы (327) следует $\varphi = \underset{1}{a}(x^3) e^{2x^4} + c x^3$ (c – const), и уравнение (329) принимает вид

$$\underset{1}{a}{}''' \delta^3_{i_0} \delta^3_{j_0} \delta^3_{k_0} = 6 e_4 c \, \overset{0}{g}{}_{(i_0 j_0} \, \delta^3_{k_0)}.$$

---

[1] Мы предполагаем, что ds_0^2 допускает одно ковариантно постоянное векторное поле. Если в пространстве ds_0^2 существуют два независимых ковариантно постоянных векторных поля, то оно является плоским, так как в римановом пространстве V^n ненулевой кривизны может существовать самое большее $n-2$ ковариантно постоянных векторных полей [86].

Полагая здесь $(i_0 j_0 k_0) = (113), (333)$, найдем $c = 0$, $\underset{1}{a}''' = 0$,

$$\varphi = (c_1 x^{3^2} + c_2 x^3 + c_3) e^{2x^4} + \mathrm{const} \quad (c_1, c_2, c_3 - \mathrm{const}).$$

Согласно следствию 8.1 максимальная проективная алгебра Ли в K-пространстве (325) порождается проективными векторными полями

$$\underset{\text{п}}{X}_1 = e_3 x^3 p_3 + e_4 x^{3^2} e^{2x^4} p_4, \quad \underset{\text{п}}{X}_2 = e_3 p_3 + 2 e_4 x^3 e^{2x^4} p_4, \quad \underset{\text{п}}{X}_3 = e^{2x^4} p_4,$$

а также генераторами изометрической подалгебры

$$\underset{\text{и}}{X}_4 = p_3, \quad \underset{\text{и}}{X}_{4+k} = \underset{k}{\zeta}^{\alpha}(x^1, x^2) p_\alpha \quad (\alpha = 1, 2;\ k = 1, \ldots, \tau \le 3) \tag{335}$$

в случае, если $ds_1^2 = \overset{1}{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2}$ не допускает нетривиальных гомотетий, и

$$\underset{\text{и}}{X}_4 = p_3, \ \underset{\text{и}}{X}_5 = \eta^\alpha(x^1, x^2) p_\alpha - x^3 p_3 + p_4, \tag{336}$$

$$\underset{\text{и}}{X}_{5+k} = \underset{k}{\zeta}^{\alpha}(x^1, x^2) p_\alpha \quad (\alpha = 1, 2) \tag{337}$$

в случае, если ds_1^2 допускает г.д. η: $L_\eta \overset{1}{g}_{\alpha\beta} = -2 \overset{1}{g}_{\alpha\beta}$; $\underset{k}{\zeta}^{\alpha}(x^1, x^2)$ в формулах (335), (336) определяют изометрии в ds_1^2.

Рассмотрим случай, когда ds_0^2 допускает изотропное ковариантно постоянное векторное поле $\underset{3}{a}_{|i_0}$. Легко показать, что ds_0^2 можно привести к виду

$$ds_0^2 = e_1 dx^{1^2} + 2 dx^2 dx^3 + \theta(x^1, x^3) dx^{3^2} \quad (e_1 = \pm 1), \tag{338}$$

при этом $\underset{3}{a} = c x^3 + \mathrm{const}$, где c — постоянная. Ненулевые коэффициенты связности и компоненты тензора кривизны метрики (338) определяются равенствами

$$-e_1 \overset{0}{\Gamma}{}^1_{33} = \overset{0}{\Gamma}{}^2_{13} = \frac{1}{2} \partial_1 \theta, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^2_{33} = \frac{1}{2} \partial_3 \theta,$$

$$e_1 \overset{0}{R}{}^1_{331} = \overset{0}{R}{}^2_{113} = \frac{1}{2} \partial_{11} \theta \neq 0. \tag{339}$$

Используя (339), из условий интегрируемости уравнений (329):

$$\underset{1}{a}_{|k_0} R^{k_0}_{i_0 j_0 l_0} = \underset{1}{a}_{|k_0} \overset{0}{R}{}^{k_0}_{i_0 j_0 l_0} = 0,$$

найдем $\underset{1}{a}_{|\alpha} = 0$ $(\alpha = 1, 2)$. Поэтому $\underset{1}{a}_{|i_0 j_0} = \underset{1}{a}'' \delta^3_{i_0} \delta^3_{j_0}$. Так как $\delta^3_{i_0}$ — ковариантно постоянное векторное поле, то продифференцировав последнее уравнение по x^{k_0} и подставив результат в (329), получим $\underset{1}{a}''' = \underset{3}{a}_{|k_0} = 0$. В итоге общее решение уравнения (325) в K-пространстве с основной формой

$$ds^2 = e^{2x^4} \left(e_1 dx^{1^2} + 2dx^2 dx^3 + \theta(x^1, x^3) dx^{3^2} \right) + e_4 dx^{4^2} \tag{340}$$

имеет вид $\varphi = (c_1 x^{3^2} + c_2 x^3 + c_3) e^{2x^4} + \mathrm{const}$, где c_1, c_2, c_3 — постоянные. Отсюда с помощью (99) получим генераторы 1-параметрических проективных групп

$$\underset{n}{X}_1 = x^3 (p_2 + e_4 x^3 e^{2x^4} p_4), \quad \underset{n}{X}_2 = p_2 + 2 e_4 x^3 e^{2x^4} p_4, \quad \underset{n}{X}_3 = e^{2x^4} p_4.$$

Максимальная проективная алгебра Ли в (340) содержит еще только изометрии, которые определяются формулами (333) и (334).

Покажем, что уравнения (334) определяют в ds_0^2 специальное конформное движение, являющееся коллинеацией кривизны. Действительно, для любого конформного движения $\xi^i p_i$ в V^n выполняются уравнения (п. 23)

$$L_\xi g_{ij} = \psi g_{ij}, \quad L_\xi \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} (\delta^i_j \psi_{,k} + \delta^i_k \psi_{,j} - g_{jk} g^{ih} \psi_{,h})$$

(см. (45)). Подставив это в (43), найдем

$$L_\xi R^i_{jkl} = \frac{1}{2} \left(\delta^i_l \psi_{,kj} - \delta^i_k \psi_{,lj} + g^{ih} g_{jk} \psi_{,lh} - g^{ih} g_{jl} \psi_{,kh} \right).$$

Так как в нашем случае $\psi = -2f$ и $f_{|i_0 j_0} = 0$, то $\psi_{|i_0 j_0} = 0$, и конформное движение η в ds_0^2 сохраняет тензор кривизны: $L_\eta \overset{0}{R}{}^{i_0}_{j_0 k_0 l_0} = 0$. Отсюда, предполагая $\partial_{11} \theta \neq 0$ (при $\partial_{11}\theta = 0$ ds_0^2 имеет нулевую кривизну), в силу (339) найдем $\eta^1 = \eta^1(x^1, x^3)$, $\eta^3 = \eta^3(x^3)$. Далее уравнения (334) легко интегрируются. В итоге получим следующий результат: метрика (338) допускает специальное конформное преобразование (334), если и только если

$$\theta = \frac{e^{2J}}{\left(x^{3^2} + a\right)^2} F \left(\frac{x^1}{e^J} + b \int \frac{dx^3}{\left(x^{3^2} + a\right) e^J} \right), \tag{341}$$

где F — функция указанного аргумента; $J \equiv \int (x^3 + c)(x^{3^2} + a)^{-1} dx^3$; a, b, c — постоянные.

Конформное преобразование (334) в ds_0^2 индуцирует в K-пространстве (340) изометрическое движение

$$\underset{\text{и}}{X}_4 = \left[(x^3 + c)x^1 - b\right] p_1 - (1/2)(e_1 x^{1^2} + e_4 e^{-2x^4} - 4cx^2)p_2 + \\ (x^{3^2} + a)p_3 - (x^3 + c)p_4. \tag{342}$$

Максимальная изометрическая алгебра Ли в K-пространстве (340), (341) содержит еще изометрии в ds_0^2 : $\underset{\text{и}}{X}_{4+k} = \underset{\text{k}}{\zeta}^{i_0}(x^1, x^2, x^3)p_{i_0}$, к которым в случае, если ds_0^2 допускает нетривиальные гомотетии:

$$\eta_{(i_0|j_0)} = -\overset{0}{g}_{i_0 j_0},$$

добавляется $\underset{\text{и}}{X} = \eta^{i_0}(x^1, x^2, x^3)p_{i_0} + p_4$. В случае, если функция θ не имеет вида (341), максимальная изометрическая алгебра Ли в K-пространстве (340) определяется так же, однако движение (342) отсутствует.

Для полного решения вопроса об изометриях в K-пространстве (340) осталось определить гомотетические (в частности, изометрические) алгебры Ли $\check{H}_s\{\{Y_i\}\}$ метрики ds_0^2 (338). Эта задача решается обычным образом (см. следующий параграф). Далее перечисляются все возможные случаи; для каждой допустимой алгебры Ли $\check{H}_s$ указывается вид функции θ и базисные векторные поля Y_i.

$\check{H}_1$ и.д. :

θ – произвольная функция x^1, x^3, $\quad \underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2$.

$\check{H}_2$ г.д. (и.д.) :

$$\theta_{\mathrm{I}} = e^{2ax^3} F\left(x^1 e^{-ax^3} + \int e^{-ax^3}\phi(x^3)dx^3\right) + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3),$$

$$\mu = e^{ax^3}\left(c - 2e_1 \int e^{-ax^3}\phi'' dx^3\right),$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2,$$

$$\underset{\text{г}}{Y}_2 = (ax^1 - \phi)p_1 + \left(2ax^2 + e_1\phi' x^1 + \frac{1}{2}\int \mu\phi dx^3 + a\int \nu dx^3 - \frac{1}{2}\nu\right)p_2 + p_3;$$

$$\theta_{\mathrm{II}} = F\left(x^1 + \phi(x^3)\right) + (c - 2e_1\phi'')x^1 + \nu(x^3),$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = -2\phi' p_1 + (2e_1\phi'' x^1 + c\phi - e_1(\phi')^2 - \nu)p_2 + 2p_3;$$

$$\theta_{\mathrm{III}} = (x^3)^{2a-2} F\left(\frac{x^1}{(x^3)^a} - \int \frac{\phi(x^3)dx^3}{(x^3)^{1+a}}\right) + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3),$$

$$\mu(x^3) = (x^3)^{a-2}(c + 2e_1\int (x^3)^{1-a}\phi'' dx^3) \quad (a \neq 0),$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{г}}{Y}_2 = (ax^1 + \phi)p_1 + \left((2a-1)x^2 - e_1\phi' x^1 - \frac{1}{2}\int \mu\phi dx^3 + \right.$$

$$\left.(a-1)\int \nu dx^3 - \frac{1}{2}\int x^3\nu' dx^3\right)p_2 + x^3 p_3;$$

$$\theta_{\mathrm{IY}} = (x^3)^{-2} F\left(x^1 - \int \frac{\phi dx^3}{x^3}\right) + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3),$$

$$\mu(x^3) = \frac{1}{(x^3)^2}\left[c - 2e_1(\phi - x^3\phi')\right],$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = \phi p_1 - \left(x^2 + e_1\phi' x^1 + \frac{1}{2}\int \mu\phi dx^3 + \right.$$

$$\left.\int \nu dx^3 + \frac{1}{2}\int x^3\nu' dx^3\right)p_2 + x^3 p_3.$$

$$\check{H}_3 \text{ г.д. (и.д.)}:$$

$$\theta_{\mathrm{V}} = k\exp a(x^1 + \phi(x^3)) + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3), \quad \mu = -2e_1\phi'',$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = -\left(x^3\phi' + \frac{2}{a}\right)p_1 + \left(e_1x^1(\phi' + x^3\phi'') - x^2 - \int \nu dx^3 - \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\int x^3\nu' dx^3 - \frac{2}{a}e_1\phi' + \frac{1}{2}\int x^3\mu\phi' dx^3\right)p_2 + x^3 p_3,$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_3 = -2\phi' p_1 + (2e_1\phi'' x^1 - \nu - e_1(\phi')^2)p_2 + 2p_3;$$

$$\theta_{\mathrm{VI}} = k\ln|x^1 + \phi(x^3)| + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3), \quad \mu = -2e_1\phi'',$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = -2\phi' p_1 + (2e_1x^1\phi'' - e_1(\phi')^2 - \nu)p_2 + 2p_3,$$

$$\underset{\text{г}}{Y}_3 = (x^1 + \phi - x^3\phi')p_1 + \Big(x^2 + e_1x^1x^3\phi'' -$$

$$\frac{1}{2}\int(x^3\nu' + \mu\phi)dx^3 - \frac{1}{2}kx^3 + \frac{1}{2}\int x^3\mu\phi' dx^3\Big)\, p_2 + x^3p_3;$$

$$\theta_{\mathrm{VII}} = k|x^1 + \phi(x^3)|^{2+1/a} + \mu(x^3)x^1 + \nu(x^3), \ \mu = -2e_1\phi'' \ (a \neq -1/2, -1),$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = -2\phi' p_1 + (2e_1x^1\phi'' - e_1(\phi')^2 - \nu)p_2 + 2p_3,$$

$$\underset{\text{г}}{Y}_3 = -(x^3\phi' + 2a(x^1 + \phi))p_1 + \Big(e_1x^1(x^3\phi' + 2a\phi)' - (1+4a)x^2 +$$

$$\frac{1}{2}\int x^3\mu\phi' dx^3 + a\int\mu\phi dx^3 - \frac{1}{2}\int x^3\nu' dx^3 - (1+2a)\int\nu dx^3\Big)\, p_2 + x^3p_3.$$

$\check{H}_4$ г.д. :

$$\theta_{\mathrm{VIII}} = \nu(x^3){x^1}^2 + \alpha(x^3)x^1 + \beta(x^3) \quad (\nu(x^3) \neq 0),$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_1 = p_2, \quad \underset{\text{и}}{Y}_2 = \lambda_0 p_1 - \left(\frac{J}{2} + e_1x^1\lambda_0'\right)p_2,$$

$$\underset{\text{и}}{Y}_3 = \lambda_0\int\frac{dx^3}{\lambda_0^2}p_1 - \left(e_1\left(\lambda_0'\int\frac{dx^3}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda_0}\right)x^1 +\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\int\alpha\lambda_0\left(\int\frac{dx^3}{\lambda_0^2}\right)dx^3\right)p_2,$$

$$\underset{\text{г}}{Y}_4 = \left(x^1 - \frac{1}{2}e_1\lambda_0\int\frac{Jdx^3}{\lambda_0^2}\right)p_1 + \Big(2x^2 + \int\beta dx^3 +$$

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0'\int\frac{Jdx^3}{\lambda_0^2} + \frac{J}{\lambda_0}\right)x^1 + \frac{1}{4}e_1\int\left(\alpha\lambda_0\int\frac{Jdx^3}{\lambda_0^2}\right)dx^3\Big)\, p_2$$

$$\left(J \equiv \int\alpha\lambda_0 dx^3\right);$$

λ_0 — ненулевое частное решение уравнения $\lambda_0'' - e_1\nu\lambda_0 = 0$.

$$\check{H}_5 \text{ г.д. :}$$

$$\theta_{\mathrm{IX}} = p(x^1)^2 + \alpha(x^3)x^1 + \beta(x^3) \quad (p = \mathrm{const} \neq 0).$$

Алгебра $\check{H}_5$ получается присоединением к базису алгебры $\check{H}_4$ г.д. (см. выше) генератора

$$\underset{\text{и}}{Y}_5 = e_1\lambda_0 J_1 p_1 - \left(\beta + \frac{1}{2}e_1 \int \alpha\lambda_0 J_1 dx^3 + x^1(\lambda_0 J_1)'\right) p_2 + 2p_3,$$

где

$$J_1 \equiv \int \left(\frac{1}{\lambda_0^2} \int \alpha' \lambda_0 dx^3\right) dx^3,$$

$\lambda_0 = \cos(\sqrt{-e_1 p}\; x^3)$, если $e_1 p < 0$, и $\lambda_0 = \exp(\sqrt{e_1 p}\; x^3)$, если $e_1 p > 0$.

$$\theta_{\mathrm{X}} = p\left(\frac{x^1}{x^3}\right)^2 + \alpha(x^3)x^1 + \beta(x^3) \quad (p = \mathrm{const} \neq 0);$$

в ds_0^2 действует $\check{H}_5 = \{\{\check{H}_4, \underset{\text{и}}{Y}_5\}\}$,

$$\underset{\text{и}}{Y}_5 = e_1 J_2 p_1 - \left(2\int \beta dx^3 + \int x^3 \beta' dx^3 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}e_1 \int \alpha J_2 dx^3 + e_2 J_2' x^1 + 2x^2\right) p_2 + 2x^3 p_3,$$

где

$$J_2 \equiv \lambda_0 \int \left(\frac{1}{\lambda_0^2} \int \lambda_0 (x^3\alpha' + 2\alpha) dx^3\right) dx^3,$$

$\lambda_0 = \sqrt{x^3}$ при $p = -e_1/4$, $\lambda_0 = (x^3)^{(1+\sqrt{1+4e_1 p})/2}$ при $4e_1 p > -1$ и $\lambda_0 = \sqrt{x^3}\sin((1/2)\sqrt{-4e_1 p - 1}\ln|x^3|)$ при $4e_1 p < -1$.

В перечисленных формулах α, β, ν, ϕ — произвольные функции x^3, F — произвольная функция указанного аргумента, $\underset{\text{и}}{Y}$ и $\underset{\text{г}}{Y}$ — соответственно изометрические и гомотетические движения в пространстве ds_0^2 (338), a, c, k, p — постоянные.

Из приведенных результатов следует, что максимальная проективная алгебра Ли P_r в K-пространстве ($K \neq 0$) имеет размерность $r = 8$. Она достигается в K-пространстве (340), если функция θ принимает одну из следующих форм:

$$\theta_A = p(x^1)^2 + \alpha(x^3)x^1 + \beta(x^3) \quad (p = \mathrm{const} \neq 0),$$

$$\theta_B = p\left(\frac{x^1}{x^3}\right)^2 + \alpha(x^3)x^1 + \beta(x^3) \quad (p = \mathrm{const} \neq 0),$$
$$\theta_C = \frac{1}{\left({x^3}^2 + a\right)^2}\left({x^1}^2 + \mu(x^3)x^1 + \tau(x^3)\right),$$

где

$$\mu(x^3) = 2be^J \int \frac{dx^3}{\left({x^3}^2 + a\right)e^J}, \quad \tau(x^3) = b^2e^{2J}\left(\int \frac{dx^3}{\left({x^3}^2 + a\right)e^J}\right)^2$$
$$\left(J \equiv \int \frac{x^3 + c}{{x^3}^2 + a}dx^3\right),$$

α и β — произвольные функции x^3; a, b, c — постоянные.

§ 26. Алгебры Ли аффинных движений пространств, допускающих два ковариантно постоянных векторных поля

60. Согласно теореме 15.2 указанные в заголовке пространства принадлежат к K-пространствам ($K = 0$). Помимо пространств, допускающих ковариантно постоянные векторные поля, к K-пространствам ($K = 0$) относятся приводимые пространства и пространства П. А. Широкова (см. конец § 17). Если характер и строение максимальной проективной алгебры Ли в целом одинаковы для всех жестких h-пространств и для всех K-пространств в случае $K \neq 0$, то K-пространства при $K = 0$ отличаются большим разнообразием проективно-групповых свойств. Они допускают все возможные виды проективных движений, начиная от изометрических и кончая неаффинными проективными движениями. Поэтому для K-пространств при $K = 0$, в отличие от случая $K \neq 0$, нельзя указать единого алгоритма для определения максимальной проективной алгебры, и методы исследования здесь весьма разнообразны.

В данном и следующих параграфах будут определены максимальные проективные (в частности, аффинные) алгебры Ли во всех K-пространствах ($K = 0$). Отправной точкой в наших рассуждениях будет служить тот факт, что для любого проективного движения в K-пространстве ($K = 0$) выполняется условие $\varphi_{,ij} = 0$, где φ — определяющая функция (теорема 16.1) и, следовательно, в K-пространстве ($K = 0$), допускающем неаффинное проективное движение, обязательно существует ковариантно постоянное векторное поле.

Метрика пространства-времени, в котором существуют два линейно независимых ковариантно постоянных векторных поля, в подходящей системе координат может быть приведена к одной из двух следующих форм (§ 10):

$$ds^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2} + e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}, \tag{343}$$

$$ds^2 = -dx^{1^2} - dx^{3^2} - 2dx^2 dx^4 + \theta(x^1, x^4) dx^{4^2}. \tag{344}$$

Отметим, что последняя метрика совпадает с метрикой (204), определяющей h-пространство типа $\{(13)\}$.

В § 10 было показано, что максимальная проективная алгебра Ли в рассматриваемых пространствах ненулевой кривизны является аффинной (теорема 10.4); там же были определены генераторы негомотетических аффинных алгебр Ли (122), (123) и было доказано, что максимальные аффинные алгебры Ли содержат еще только гомотетии. В данном параграфе будут определены максимальные алгебры Ли в пространствах (343) и (344).

61. Метрика (343) получается из метрики (217), если положить в ней

$$ds_1^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2 \Phi(x^1, x^2) dx^{2^2},\ B(x^3, x^4) \equiv 1,\ ds_2^2 = e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2},$$

поэтому для проективных движений в пространстве (343) справедлива лемма 16.7. Интегрируя с помощью этой леммы обобщенные уравнения Киллинга для инфинитезимальных гомотетий в пространстве (343) и принимая во внимание формулу (122), получим следующий результат.

Если ds_1^2 не допускает нетривиальных гомотетий, то аффинная алгебра Ли A_r в (343) имеет размерность $6 + \tau$, где τ — размерность изометрической алгебры Ли в ds_1^2. Гомотетическая алгебра Ли сводится к изометрической подалгебре и имеет размерность $3 + \tau$. Базисные элементы алгебры A_r имеют вид

$$\begin{gathered} \underset{\text{а}}{X}_1 = x^3 p_3, \quad \underset{\text{а}}{X}_2 = x^4 p_4, \quad \underset{\text{а}}{X}_3 = e_3 x^4 p_3 + e_4 x^3 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_4 = p_3, \\ \underset{\text{и}}{X}_5 = p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_6 = e_3 x^4 p_3 - e_4 x^3 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_{6+k} = \underset{k}{\zeta}{}^{\alpha}(x^1, x^2) p_\alpha, \end{gathered} \tag{345}$$

где $\underset{k}{\zeta}{}^{\alpha} p_{\alpha}$ $(\alpha = 1, 2;\ k = 1, \ldots, \tau)$ — изометрические движения в ds_1^2.

Если $ds_1^2 = \overset{1}{g}{}_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ допускает гомотетическое движение

$$\eta^{\alpha}(x^1, x^2) p_{\alpha}, \quad L_{\eta} \overset{1}{g}{}_{\alpha\beta} = 2 \overset{1}{g}{}_{\alpha\beta},$$

то к движениям (345) присоединяется инфинитезимальная гомотетия $\underset{\text{г}}{X} = \eta^{\alpha} p_{\alpha} + x^3 p_3 + x^4 p_4$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$.

62. Рассмотрим метрику (344). Справедлива

Л е м м а 26.1. *Если* $X = \xi^i \partial_i$ *— гомотетическое движение в пространстве* (344) *ненулевой кривизны, то* $\partial_p \xi^q = \partial_{\alpha} \xi^{\mu} = 0$ *при* $\alpha = 1, 2$*;* $\mu = 3, 4$*;* $p = 2, 3$*;* $q = 1, 4$.

Для доказательства рассмотрим условия интегрируемости

$$L_X R^i{}_{jkl} = 0$$

уравнений

$$L_X g_{ij} = 2c g_{ij} \quad (c - \text{const}). \tag{346}$$

Положив $(ijkl) = (1214), (1314), (2214)$ и (2314), получим $\partial_{11}\theta \partial_p \xi^q = 0$ при $p = 2, 3$; $q = 1, 4$. Так как при $\partial_{11}\theta = 0$ пространство (344) оказывается плоским (см. § 10), то $\partial_p \xi^q = 0$. Подобным образом выводятся остальные соотношения.

Интегрируя с помощью доказанной леммы уравнения (346), найдем

$$\xi^1 = cx^1 + \lambda(x^4), \quad \xi^2 = (2c - a_7)x^2 + a_6 x^3 - \lambda' x^1 + \mu(x^4) + a_4,$$
$$\xi^3 = cx^3 - a_6 x^4 + a_5, \quad \xi^4 = a_7 x^4 + a_8, \tag{347}$$

где $a_4, \ldots, a_8$ — постоянные, λ и μ — функции x^4, удовлетворяющие вместе с θ уравнению

$$(cx^1 + \lambda)\partial_1\theta + (a_7 x^4 + a_8)\partial_4\theta + 2\lambda'' x^1 - 2\mu' + 2(a_7 - c)\theta = 0. \tag{348}$$

Если считать в этом уравнении θ произвольной функцией, удовлетворяющей единственному условию $\partial_{11}\theta \neq 0$, то, приняв во внимание результаты § 10, придем к следующему выводу.

Любое пространство с линейным элементом (344) допускает 6-мерную аффинную алгебру Ли с базисом

$$\underset{a}{X}_1 = x^3p_3, \quad \underset{a}{X}_2 = x^4p_2, \quad \underset{a}{X}_3 = x^4p_3 + x^3p_2, \tag{349}$$

$$\underset{и}{X}_4 = p_2, \quad \underset{и}{X}_5 = p_3, \quad \underset{и}{X}_6 = x^3p_2 - x^4p_3. \tag{350}$$

Если в уравнении (348) не требовать произвольности функции θ, то условия его интегрируемости приводят к уравнениям для этой функции, которые позволяют ее определить. При этом, если θ принимает определенный частный вид, соответствующее пространство допускает более широкую аффинную алгебру Ли за счет увеличения размерности изометрической подалгебры и появления нетривиальной гомотетии.

Дифференцируя (348) дважды по x^1, получим

$$(cx^1 + \lambda)\partial_{11}\theta + (a_7x^4 + a_8)\partial_{14}\theta + 2\lambda'' + (2a_7 - c)\partial_1\theta = 0,$$

$$(cx^1 + \lambda)\partial_1 u + (a_7x^4 + a_8)\partial_4 u + 2a_7u = 0 \quad (u \equiv \partial_{11}\theta). \tag{351}$$

Рассмотрим два случая.

а) Если $\partial_1 u \neq 0$, то разделив (351) на $\partial_1 u$ и дифференцируя полученное уравнение два раза по x^1 и один раз по x^4, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров c, a_7, a_8:

$$c + Aa_7 + Ba_8 = 0,$$

$$\partial_1 Aa_7 + \partial_1 Ba_8 = 0,$$

$$\partial_4 Aa_7 + \partial_4 Ba_8 = 0,$$

где $A \equiv 2\partial_1(u/\partial_1 u) + x^4B$, $B \equiv \partial_1(\partial_4 u/\partial_1 u)$. Ранг Rk матрицы этой системы удовлетворяет условию $1 \leq \mathrm{Rk} \leq 3$. Исследуя все возможные случаи с помощью леммы 20.2, получим следующий результат.

Перечисленные ниже пространства с основной формой (344) допускают максимальную 7-мерную аффинную алгебру Ли с гомотетической (изометрической) подалгеброй H_4, базис которой, помимо генераторов (349), содержит еще $\underset{г}{X}_7$ ($\underset{и}{X}_7$).

L.I.

$$\theta = e^{2ax^4}\Phi(x^1e^{-ax^4} + \int e^{-ax^4}\phi(x^4)dx^4) + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4),$$

$$\alpha(x^4) = e^{ax^4}\left(c + 2\int e^{-ax^4}\phi'' dx^4\right) \quad (a, c - \text{const},\ a \neq 0),$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_7 = (ax^1 - \phi)p_1 + \left(2ax^2 + \phi' x^1 - \frac{1}{2}\int \alpha\phi dx^4 - \right.$$
$$\left. a\int \beta dx^4 + \frac{1}{2}\beta\right) p_2 + ax^3 p_3 + p_4;$$

L.II.
$\theta = \Phi\left(x^1 + \phi(x^4)\right) + (c + 2\phi'')x^1 + \beta(x^4) \quad (c = \text{const}),$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_7 = -2\phi' p_1 + \left(2\phi'' x^1 - c\phi - (\phi')^2 + \beta\right) p_2 + 2p_4;$$

L.III.

$$\theta = (x^4)^{2a-2}\Phi\left(\frac{x^1}{(x^4)^a} - \int \frac{\phi(x^4)}{(x^4)^{a+1}} dx^4\right) + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4),$$

$$\alpha(x^4) = (x^4)^{a-2}\left(c - 2\int \left(x^4\right)^{1-a}\phi'' dx^4\right) \quad (a, c - \text{const},\ a \neq 0),$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_7 = (ax^1 + \phi)p_1 + \left((2a-1)x^2 - \phi' x^1 + \frac{1}{2}\int \alpha\phi dx^4 + \right.$$
$$\left.(1-a)\int \beta dx^4 + \frac{1}{2}\int x^4\beta' dx^4\right) p_2 + ax^3 p_3 + x^4 p_4;$$

L.IV.

$$\theta = \frac{1}{(x^4)^2}\Phi\left(x^1 - \int \frac{\phi}{x^4} dx^4\right) + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4),$$

$$\alpha(x^4) = x^{4^{-2}}\left(c + 2(\phi - x^4\phi')\right) \quad (c - \text{const}),$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_7 = 2\phi p_1 + \left(\int \alpha\phi dx^4 - 2\phi' x^1 - 2x^2 + 2\int \beta dx^4 + \int x^4\beta' dx^4\right) p_2 + 2x^4 p_4.$$

В приведенных формулах β, ϕ — произвольные функции x^4, F — произвольная функция указанного аргумента.

В приведенных ниже пространствах (344) действует 8-мерная максимальная аффинная алгебра Ли A_8 с подалгеброй H_5 г.д. (и.д.), натянутая на генераторы (349), $\underset{\text{и}}{X}{}_7$ и $\underset{\text{г}}{X}{}_8$ ($\underset{\text{и}}{X}{}_8$).

L.V.

$$\theta = b\exp a(x^1+\phi(x^4)) + 2\phi''x^1 + \beta \qquad (a, b - \mathrm{const}),$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_7 = -(ax^4\phi' + 2)p_1 - \left(ax^2 - a(x^4\phi'' + \phi')x^1 - a\int \beta dx^4 - \right.$$

$$\left. \frac{a}{2}\int x^4\beta' dx^4 + 2\phi' + a\int \phi''\phi' x^4 dx^4\right) p_2 + ax^4 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_8 = -2\phi' p_1 + (2\phi'' x^1 - (\phi')^2 + \beta)p_2 + 2p_4;$$

L.VI.

$$\theta = b\ln|x^1 + \phi(x^4)| + 2\phi''x^1 + \beta(x^4) \qquad (b = \mathrm{const}),$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_7 = -2\phi' p_1 + (2x^1\phi'' - (\phi')^2 + \beta)p_2 + 2p_4,$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_8 = 2(x^1 + \phi - x^4\phi')p_1 + \left(2x^2 + 2x^1x^4\phi'' + \int (x^4\beta' + 2\phi\phi'')dx^4 + \right.$$

$$\left. bx^4 - 2\int \phi'\phi'' x^4 dx^4\right) p_2 + 2x^3p_3 + 2x^4p_4;$$

L.VII.

$$\theta = b(x^1 + \phi(x^4))^{2+1/a} - 2e_1\phi''x^1 + \beta(x^4),$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_7 = -2\phi' p_1 + \left(2x^1\phi'' + \beta - (\phi')^2\right) p_2 + 2p_4,$$

$$\underset{\text{г}}{X}{}_8 = -\left(x^4\phi' + 2a(x^1 + \phi)\right) p_1 - \left((1+4a)x^2 - x^1(x^4\phi' + 2a\phi)' - \right.$$

$$e_1\int \phi'\phi'' x^4 dx^4 - 2e_1 a\int \phi\phi'' dx^4 - \frac{1}{2}\int x^4\beta' dx^4 -$$

$$\left. (1+2a)\int \beta dx^4\right) p_2 - 2ax^3p_3 + x^4p_4$$

(β, ϕ — произвольные функции x^4, $a = \mathrm{const} \neq -1/2, -1$).

б) Если $\partial_1 u = 0$, то u зависит только от x^4. Положим $u \equiv \partial_{11}\theta = 2\nu(x^4)$, тогда уравнение (351) примет вид $a_7(x^4\nu' + 2\nu) + a_8\nu' = 0$; продифференцируем его по x^4 и далее исследуем ранг Rk матрицы полученной таким образом системы Θ алгебраических уравнений относительно параметров a_7, a_8.

$\mathrm{Rk} = 2$. В этом случае $a_7 = a_8 = 0$, $\theta = \nu(x^4){x^1}^2 + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4)$, и из (348) следуют уравнения

$$\lambda'' + \nu\lambda = \frac{1}{2}c\alpha, \quad \mu' = \frac{1}{2}\alpha\lambda - c\beta. \tag{352}$$

$\mathrm{Rk} = 1$. Приравнивая нулю определитель системы Θ, получим уравнение

$$(x^4\nu' + 2\nu)\nu'' - \nu'(x^4\nu' + 2\nu)' = 0,$$

которое имеет два решения: $\nu = p = \mathrm{const}$ и $\nu = k(x^4 - l)^2$, где k, l — постоянные интегрирования. В первом случае $\theta = p{x^1}^2 + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4)$ и вследствие неравенства нулю $2p = \partial_{11}\theta$ из (351) следует $a_7 = 0$. Далее из (348) найдем

$$\lambda'' + p\lambda = \frac{1}{2}(c\alpha - a_8\alpha'), \quad \mu' = \frac{1}{2}\alpha\lambda - c\beta + \frac{1}{2}a_8\beta'. \tag{353}$$

Во втором случае из (351) получим $a_8 = -la_7$ и, из (347), $\xi^4 = a_7(x^4 - l)$. После преобразования ${x^4}' = x^4 - l$, опустив штрихи, имеем

$$\theta = \frac{k}{(x^4)^2}{x^1}^2 + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4), \quad \xi^4 = a_7x^4.$$

Подставив это в (348), найдем

$$\begin{gathered}\lambda'' + (k/(x^4)^2)\lambda = (1/2)\left(c\alpha - a_7(x^4\alpha' + 2\alpha)\right), \\ 2\mu' = \alpha\lambda + 2(a_7 - c)\beta + a_7x^4\beta'.\end{gathered} \tag{354}$$

$\mathrm{Rk} = 0$. В этом случае $u = \partial_{11}\theta = 0$, и метрика (344) имеет постоянную нулевую кривизну.

Найдя решения уравнений (352)—(354) и подставив их в (347), получим следующий результат.

L.VIII. Метрика (344),

$$\theta = \nu(x^4){x^1}^2 + \alpha(x^4)x^1 + \beta(x^4), \tag{355}$$

(α, β и $\nu \neq 0$ — функции x^4), допускает 9-мерную аффинную алгебру Ли A_9 с гомотетической подалгеброй H_6. Базис в A_9 содержит помимо (349) следующие операторы:

$$\underset{\text{и}}{X}{}_7 = \lambda_0 p_1 + \left(\frac{1}{2}\int \alpha\lambda_0 dx^4 - \lambda_0' x^1\right)p_2,$$

$$\underset{\text{и}}{X}_8 = \lambda_0 \int \frac{dx^4}{\lambda_0^2} p_1 +$$

$$\left(\frac{1}{2} \int \alpha\lambda_0 \left(\int \frac{dx^4}{\lambda_0^2}\right) dx^4 - x^1 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \lambda_0' \int \frac{dx^4}{\lambda_0^2}\right)\right) p_2, \tag{356}$$

$$\underset{\text{г}}{X}_9 = \left(x^1 + \frac{1}{2}\lambda_0 J\right) p_1 + \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^1 \left(\lambda_0' J + \frac{1}{\lambda_0} \int \alpha\lambda_0 dx^4\right) -\right.$$

$$\left.\int \beta dx^4 + \frac{1}{4} \int \alpha\lambda_0 J dx^4\right) p_2 + x^3 p_3 \quad \left(J \equiv \int \frac{1}{\lambda_0^2} \left(\int \alpha\lambda_0 dx^4\right) dx^4\right),$$

где λ_0 — ненулевое частное решение уравнения $\lambda_0'' + \nu(x^4)\lambda_0 = 0$.

L.IX. Если в (355) $\nu = p = \mathrm{const}$, то метрика (344) допускает 10-мерную максимальную аффинную алгебру Ли A_{10} с подалгеброй H_7 г.д. Базис этой алгебры содержит операторы (349), (356), а также

$$\underset{\text{и}}{X}_{10} = -\lambda_0 J_1 p_1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \int \alpha\lambda_0 J_1 dx^4 + x^1 (\lambda_0 J_1)'\right) p_2 + 2p_4, \tag{357}$$

где

$$J_1 \equiv \int \frac{1}{\lambda_0^2} (\int \alpha' \lambda_0 dx^4) dx^4.$$

В (356) и (357) $\lambda_0 = \cos(\sqrt{p}x^4)$, если $p > 0$, и $\lambda_0 = \exp(\sqrt{-p}x^4)$, если $p < 0$.

L.X. Наконец, если в (355) $\nu = p(x^4)^{-2} \neq 0$, то в (344) также действует 10-мерная максимальная аффинная алгебра Ли A_{10} с подалгебрами H_7 г.д. и I_6 и.д., натянутая на базисные генераторы (349),(356) и

$$\underset{\text{и}}{X}_{10} = -J_2 p_1 + \left(2 \int \beta dx^4 + \int x^4 \beta' dx^4 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2} \int \alpha J_2 dx^4 + J_2' x^1 - 2x^2\right) p_2 + 2x^4 p_4,$$

где

$$J_2 \equiv \lambda_0 \int \frac{1}{\lambda_0^2} \left(\int \lambda_0 (x^4 \alpha' + \alpha) dx^4\right) dx^4;$$

здесь и в формулах (356) $\lambda_0 = \sqrt{x^4}$ при $p = 1/4$, $\lambda_0 = (x^4)^{(1+\sqrt{1-4p})/2}$ при $p < 1/4$ и $\lambda_0 = \sqrt{x^4} \sin(\sqrt{p - 1/4} \ln |x^4|)$ при $p > 1/4$.

§ 27. Алгебры Ли проективных движений пространств П. А. Широкова

63. В данном параграфе будет решен вопрос об алгебрах Ли проективных движений в 4-мерных пространствах П. А. Широкова (§ 7) с основной формой

$$ds^2 = (x^4)^2 ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2}. \tag{358}$$

Если эта метрика допускает ковариантно постоянное векторное поле, то согласно лемме 7.1 в некоторой системе координат она приводится к виду

$$ds^2 = (x^4)^2 ds_1^2(x^1, x^2) + e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2} \tag{359}$$

либо

$$ds^2 = (x^4)^2 ds_1^2(x^1, x^2) + 2dx^3 dx^4, \tag{360}$$

где ds_1^2 — метрическая форма переменных x^1, x^2. Так как всякое 4-мерное пространство П. А. Широкова является K-пространством, $K = 0$ (§ 17), то определяющая функция φ любого проективного движения в нем удовлетворяет условию $\varphi_{,ij} = 0$ (теорема 16.1).

Рассмотрим метрики (359) и (360), определяющие полуприводимые K-пространства ($K = 0$) с двумерной главной частью (ср. (242)). Общее решение уравнения $\varphi_{,ij} = 0$ легко находится с помощью леммы 16.7: $\varphi = a_1 x^3$ для метрики (359), и $\varphi = a_1 x^4$ для метрики (360) (a_1 — произвольная постоянная). С помощью леммы 16.6 из уравнений (52) найдем

$$L_X g_{ij} = 2a_1(x^3 g_{ij} + e_3 x^3 \delta_i^3 \delta_j^3 + e_4 x^4 \delta_{(i}^3 \delta_{j)}^4) + 2a_2 \delta_i^3 \delta_j^3 + 2a_3 g_{ij} \tag{361}$$

для метрики (359) и

$$L_X g_{ij} = 2a_1(x^4 g_{ij} + x^4 \delta_{(i}^3 \delta_{j)}^4 + x^3 \delta_i^4 \delta_j^4) + 2a_2 \delta_i^4 \delta_j^4 + 2a_3 g_{ij} \tag{362}$$

для метрики (360) (a_1, a_2, a_3 – const). Все проективные движения в пространствах (359), (360) определяются интеграцией уравнений соответственно (361) и (362). Эта задача существенно облегчается благодаря лемме 16.8. В итоге придем к следующим результатам.

Максимальная проективная алгебра Ли P_r в K-пространстве (359), $K = 0$, имеет порядок $4 + \tau$, где $\tau \leq 3$ — размерность изометрической алгебры Ли в ds_1^2. Алгебра P_r содержит аффинную подалгебру A_{r-1}, гомотетическую подалгебру H_{r-2} и порождается генераторами

$$\underset{п}{X}{}_1 = (x^3)^2 p_3 + x^3 x^4 p_4, \quad \underset{\text{а}}{X}{}_2 = x^3 p_3, \quad \underset{\text{г}}{X}{}_3 = x^3 p_3 + x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_4 = p_3,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_{4+k} = \underset{k}{\zeta}{}^{\alpha}(x^1, x^2)p_\alpha \quad (\alpha = 1, 2; k = 1, \ldots, \tau \leq 3) - \text{ и.д. в } ds_1^2.$$

Если ds_1^2 в (360) не допускает нетривиальных гомотетий, то K-пространство (360), $K = 0$, допускает проективную алгебру Ли $P_{4+\tau}$ с базисом

$$\underset{n}{X}{}_1 = x^3 x^4 p_3 + {x^4}^2 p_4, \quad \underset{\text{а}}{X}{}_2 = x^4 p_3, \quad \underset{\text{г}}{X}{}_3 = x^3 p_3 + x^4 p_4,$$

$$\underset{\text{и}}{X}{}_4 = p_3 \quad \underset{\text{и}}{X}{}_{4+k} = \underset{k}{\zeta}{}^{\alpha}(x^1, x^2)p_\alpha \quad (\alpha = 1, 2; k = 1, \ldots, \tau \leq 3) - \text{ и.д. в } ds_1^2.$$

Если ds_1^2 допускает инфинитезимальную гомотетию η: $L_\eta \overset{1}{g}{}_{\alpha\beta} = 2 \overset{1}{g}{}_{\alpha\beta}$, то к этим генераторам добавляется $\underset{\text{и}}{X} = \eta^\alpha(x^1, x^2)p_\alpha + x^3 p_3 - x^4 p_4$ $(\alpha = 1, 2)$.

64. Обратимся к пространству П. А. Широкова (358). Если оно допускает неаффинное проективное движение ($\varphi \neq \text{const}$), то в нем существует ковариантно постоянное векторное поле: $\varphi_{,ij} = 0$, и его метрика в подходящей системе координат определяется одной из формул (359), (360). Поэтому будем предполагать, что пространство (358) не допускает ковариантно постоянных векторных полей; тогда определяющая функция φ любого проективного движения в нем постоянна, и максимальная проективная алгебра Ли в (358) является аффинной. Если в пространстве (358) существует негомотетическое аффинное векторное поле, то в силу теоремы 14.5 это пространство допускает ковариантно постоянное векторное поле (тогда вновь получим метрики (359) и (360)) либо является приводимым пространством $V^2 \times V^2$. Вопрос о проективных алгебрах Ли в пространствах $V^2 \times V^2$ исследуется в следующем параграфе.

§ 28. Алгебры Ли проективных движений приводимых пространств

65. Всякое четырехмерное локально приводимое пространство-время есть $V^2 \times V^2$ либо $V^3 \times V_1$ и является K-пространством, $K = 0$ (теорема 15.2), поэтому произвольное проективное движение в нем удовлетворяет условию $\varphi_{,ij} = 0$, где φ — определяющая функция.

Метрика любого $V^2 \times V^2$ может быть приведена к диагональному виду:

$$ds^2 = e_1 dx^{1^2} + e_2\Phi(x^1, x^2)dx^{2^2} + e_3 dx^{3^2} + e_4\theta(x^3, x^4)dx^{4^2} \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} ds^2_\alpha. \tag{363}$$

Согласно п. 40 (§ 16) отличные от нуля компоненты тензора кривизны этой метрики имеют вид

$$R^{i_\alpha}_{j_\alpha i_\alpha j_\alpha} = \overset{\alpha}{R}{}^{i_\alpha}_{j_\alpha i_\alpha j_\alpha} = \overset{\alpha}{T} g_{j_\alpha j_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2; i_1 = 1, 2; i_2 = 3, 4), \tag{364}$$

где $\overset{\alpha}{R}{}^{i_\alpha}_{j_\alpha i_\alpha j_\alpha}$ — компоненты тензора кривизны, составленного для

$$ds^2_\alpha = g_{i_\alpha j_\alpha} dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha},$$

$\overset{\alpha}{T}$ — функция x^{i_α}. Если (363) имеет постоянную кривизну K, то в числе других выполняется равенство

$$R^{i_\alpha}_{j_\beta i_\alpha j_\beta} = K g_{j_\beta j_\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta),$$

из которого следует $K = 0$. Таким образом, приводимое пространство $V^2 \times V^2$ имеет постоянную кривизну K, если и только если оно плоское ($K = 0$). Если одна из величин $\overset{\alpha}{T}$, например, $\overset{2}{T}$, тождественно равна нулю, то метрика ds^2_2 имеет нулевую кривизну (см. (364)) и преобразованием координат приводится к виду $e_3 dx^{3^2} + e_4 dx^{4^2}$, при этом метрическая форма (363) определяет пространство (343), допускающее два ковариантно постоянных векторных поля (§ 26). Поэтому будем предполагать, что $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ при $\alpha = 1, 2$. Справедливы предложения:

Л е м м а 28.1. *Если $X = \xi^i \partial_i$ — проективное движение в метрике* (363) *и $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ при $\alpha = 1, 2$, то $L_X g_{ij} = h_{ij} = 0$ при $i \neq j$.*

Пусть φ — определяющая функция проективного движения X. Вследствие условия $\varphi_{,ij} = 0$ левая часть уравнения (55) обращается в нуль. Полагая в этом уравнении $(ijkl) = (i_\alpha j_\beta i_\alpha k_\alpha)$, $(i_\beta i_\beta i_\beta l_\beta)$, где $i_\beta \neq l_\beta$, получим

$$h_{m i_\alpha} R^m_{j_\beta i_\alpha k_\alpha} + h_{m j_\beta} R^m_{i_\alpha i_\alpha k_\alpha} = 0, \quad h_{i_\beta m} R^m_{i_\beta i_\beta l_\beta} = 0.$$

Отсюда с помощью (364) и условия $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ выводим $h_{j_\beta k_\alpha} = h_{i_\beta l_\beta} = 0$ $(i_\beta \neq l_\beta)$.

Л е м м а 28.2. *Если $X = \xi^i \partial_i$ — проективное движение в метрике (363) и $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ при $\alpha = 1, 2$, то компоненты ξ^{i_α} зависят только от x^{k_α}.*

Если в уравнении (57) положить $(ijkl) = (i_\alpha j_\beta k_\alpha i_\alpha)$, $k_\alpha \neq i_\alpha$, то оно примет вид

$$R^{i_\alpha}_{k_\alpha k_\alpha i_\alpha} \partial_{j_\beta} \xi^{k_\alpha} = 0, \text{ или } \overset{\alpha}{T} g_{k_\alpha k_\alpha} \partial_{j_\beta} \xi^{k_\alpha} = 0$$

(не суммировать), следовательно, $\partial_{j_\beta} \xi^{k_\alpha} = 0$.

Т е о р е м а 28.1. *Максимальная проективная алгебра Ли в приводимом пространстве $V^2 \times V^2$ ненулевой кривизны есть аффинная алгебра Ли.*

Действительно, если $\overset{\alpha}{T} = 0$ при $\alpha = 1, 2$, то $V^2 \times V^2$ плоское. Если одна из величин $\overset{\alpha}{T}$ обращается в нуль, то пространство (365) допускает два ковариантно постоянных векторных поля, и максимальная проективная алгебра Ли в нем является аффинной (теорема 10.4). Наконец, в случае $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ при $\alpha = 1, 2$ из уравнений (52) при $(ijk) = (i_\alpha j_\beta i_\alpha)$ найдем

$$\partial_{i_\alpha}(L_X g_{i_\alpha j_\beta}) - \Gamma^{l_\alpha}_{i_\alpha i_\alpha} L_X g_{l_\alpha j_\beta} = g_{i_\alpha i_\alpha} \varphi_{,j_\beta}.$$

Так как $L_X g_{i_\alpha j_\beta} = L_X g_{l_\alpha j_\beta} = 0$ в силу леммы 28.1, то $\varphi_{,j_\beta} = 0$; следовательно, $\varphi = \mathrm{const}$ и X есть аффинное движение.

Если пространство (363), $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ $(\alpha = 1, 2)$, допускает негомотетическое аффинное движение X, то $(L_X g_{ij})_{,k} = h_{ij,k} = 0$. Если в этом уравнении положить $(ijk) = (11k), (33k)$, то в силу леммы 28.1 оно примет вид $\partial_k h_{ii} = 0$ $(i = 1, 3)$, отсюда следует постоянство компонент h_{ii} $(i = 1, 3)$. Затем из уравнения (55) при $(ijkl) = (i_\alpha k_\alpha i_\alpha k_\alpha)$ с учетом (364) получим $h_{k_\alpha k_\alpha} g_{i_\alpha i_\alpha} = g_{k_\alpha k_\alpha} h_{i_\alpha i_\alpha}$.

Положим $h_{11} = 2e_1(a_1 + a_2)$, $h_{33} = 2e_3 a_2$, где a_1, a_2 — постоянные, при этом

$$L_X g_{ij} = 2a_1(g_{11}\delta^1_i \delta^1_j + g_{22}\delta^2_i \delta^2_j) + 2a_2 g_{ij}. \tag{365}$$

Эти уравнения определяют все аффинные движения в пространстве (364), $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ $(\alpha = 1, 2)$. Отсюда следует, что максимальная аффинная алгебра Ли A_r, $r > 1$, существующая в $V^2 \times V^2$, $\overset{\alpha}{T} \neq 0$ $(\alpha = 1, 2)$, содержит гомотетическую подалгебру размерности $r - 1$. Лемма 28.2 позволяет записать уравнения (365) в форме

$$L_{\xi^{i_1}} g_{i_1 j_1} = 2(a_1 + a_2) g_{i_1 j_1}, \quad L_{\xi^{i_2}} g_{i_2 j_2} = 2a_2 g_{i_2 j_2},$$

т. е. ξ^{i_1} (ξ^{i_2}) определяют гомотетии в двумерных пространствах $ds_\alpha^2 = g_{i_\alpha j_\alpha} dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, произведение которых образует рассматриваемое пространство $V^2 \times V^2$. Если оба пространства V^2 не допускают нетривиальных гомотетий, как это, например, будет в случае, когда оба V^2 имеют постоянную кривизну, то аффинная алгебра Ли в $V^2 \times V^2$ сводится к изометрической подалгебре.

Пусть обе метрики ds_α^2 допускают нетривиальные гомотетии:

$$L_{\eta^{i_1}} g_{i_1 j_1} = 2 g_{i_1 j_1}, \quad L_{\zeta^{i_2}} g_{i_2 j_2} = 2 g_{i_2 j_2}.$$

Тогда максимальная аффинная алгебра Ли A_r в $V^2 \times V^2$ порождается генераторами

$$\underset{\text{а}}{X}{}_1 = \eta^{i_1} p_{i_1}, \quad \underset{\text{г}}{X}{}_2 = \eta^{i_1} p_{i_1} + \zeta^{i_2} p_{i_2}, \quad \underset{\text{и}}{X}{}_{2+k} \ \ (k \leq 4) - \text{ и.д. в } ds_1^2, ds_2^2.$$

Если только одна из метрик ds_α^2, например, ds_1^2, допускает нетривиальное г.д.: $L_{\eta^{i_1}} g_{i_1 j_1} = 2 g_{i_1 j_1}$, то максимальная аффинная алгебра Ли A_r в $V^2 \times V^2$ содержит аффинное движение $\underset{a}{X}{}_1 = \eta^{i_1} p_{i_1}$ и изометрическую подалгебру размерности $r - 1 \leq 5$, включающую инфинитезимальные изометрии в ds_1^2 и ds_2^2.

66. Рассмотрим приводимое пространство $V^3 \times V^1$ с основной формой

$$ds^2 = ds_0^2(x^1, x^2, x^3) + e_4 dx^{4^2}, \tag{366}$$

где

$$ds_0^2 = g_{i_0 j_0}(x^1, x^2, x^3) dx^{i_0} dx^{j_0} \quad (i_0, j_0 = 1, 2, 3)$$

— 3-мерная метрическая форма. Если ds_0^2 — отрицательно определенная метрика, а $e_4 = +1$, то ds_0^2 можно рассматривать как прямое произведение трехмерного пространства с определенной метрикой, не меняющейся со временем, и одномерного пространства, играющего роль времени; такие пространства определяют в теории Эйнштейна статические поля тяготения ([54], § 60).

Если $X = \xi^i \partial_i$ — проективное движение с определяющей функцией φ в пространстве (366), то $\varphi_{,ij} = 0$. Интегрируя эти уравнения, получим

$$\varphi = a_1 x^4 + \psi(x^1, x^2, x^3),$$

где a_1 — произвольная постоянная, а функция ψ является решением уравнения $\psi_{|i_0 j_0} = 0$, в котором черта означает ковариантное дифференцирование относительно метрики ds_0^2. Если эта 3-мерная метрика допускает ковариантно постоянное векторное поле, то оно ковариантно постоянно и в $V^4 = V^3 \times V^1$, так как из коэффициентов связности метрики (366) отличны от нуля только $\Gamma^{i_0}_{j_0 k_0} = \overset{0}{\Gamma}{}^{i_0}_{j_0 k_0}$, составленные относительно $g_{i_0 j_0}$. В этом случае V^4 (366) допускает два линейно независимых ковариантно постоянных векторных поля (см. § 26). Поэтому будем считать, что метрика ds_0^2 не допускает ковариантно постоянных векторных полей. Тогда $\psi = \mathrm{const}$ и

$$\varphi = a_1 x^4 + \mathrm{const}. \tag{367}$$

Из уравнений (54) при $(i, j) = (i_0 j_0)$ найдем

$$L_X g_{i_0 j_0} \equiv h_{i_0 j_0} = 2a_1 x^4 g_{i_0 j_0} + a_{i_0 j_0}(x^1, x^2, x^3), \;\; a_{i_0 j_0 | k_0} = 0.$$

В силу теоремы 6.1 и сделанного предположения имеем $a_{i_0 j_0} = a_2 g_{i_0 j_0}$, где a_2 — произвольная постоянная. Из уравнений (54) при $(ijk) = (i_0 44)$ получим $h_{i_0 4} = \sigma_{i_0}(x^1, x^2, x^3)$. Далее из (54), положив $(ijk) = (i_0 4 k_0)$, найдем

$$\sigma_{i_0 | k_0} = a_1 g_{i_0 k_0}. \tag{368}$$

Отсюда $\partial_{k_0} \sigma_{i_0} = \partial_{i_0} \sigma_{k_0}$, при этом существует функция σ_0 переменных x^{k_0} такая, что $\sigma_{|i_0} = \sigma_{i_0}$, и уравнение (368) принимает вид

$$\sigma_{|i_0 j_0} = a_1 g_{i_0 j_0}. \tag{369}$$

Если $a_1 \neq 0$, то согласно § 7 в некоторой системе координат метрика ds_0^2 приводится к виду

$$ds_0^2 = {x^3}^2 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + e_3 {dx^3}^2 \quad (i_1, j_1 = 1, 2),$$

где $g_{i_1 j_1}$ не зависит от x^3, x^4. При этом основная форма в V^4 принимает вид

$$ds^2 = {x^3}^2 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + e_3 {dx^3}^2 + e_4 {dx^4}^2 \quad (i_1, j_1 = 1, 2)$$

и с точностью до преобразования переменных x^3, x^4 совпадает с метрикой (359), рассмотренной в § 27. Поэтому будем считать, что $a_1 = 0$; в этом случае $\varphi = \text{const}$ (см. (367)), и проективная алгебра Ли в V^4 (366) является аффинной.

Так как по предположению ds_0^2 не допускает ковариантно постоянных векторных полей, то из (369) следует $\sigma_{|i_1} = \sigma_{i_1} = h_{i_1 4} = 0$. Наконец, из уравнения (54) при $(ij) = (44)$ найдем $h_{44} = a_2 e_4 + a_3$ (a_2, a_3 — const). В итоге для произвольного а.д. $X = \xi^i \partial_i$ выполняется равенство

$$L_X g_{ij} = a_2 g_{ij} + a_3 \delta_i^4 \delta_j^4,$$

где a_2 и a_3 — произвольные постоянные. Если положить $\xi_i = \bar{\xi}_i + (1/2) a_3 x^4 \delta_i^4$, то с учетом равенства $(\delta_i^4)_{,j} = 0$ получим $\bar{\xi}_{(i,j)} = 2a_2 g_{ij}$. Следовательно, если метрика ds_0^2 не определяет пространство П. А. Широкова и не допускает ковариантно постоянных векторных полей, то произвольное аффинное движение в V^4 (366) можно представить в виде суммы

$$\xi_i = \bar{\xi}_i + \frac{1}{2} a_3 x^4 \delta_i^4,$$

где $\bar{\xi}_i \partial_i$ есть инфинитезимальная гомотетия.

Отсюда, по аналогии с теоремой 9.2, можно доказать, что в рассматриваемом случае максимальная аффинная алгебра Ли A_r в V^4 (366) содержит гомотетическую подалгебру H_{r-1} размерности $r-1$; поэтому для определения A_r достаточно найти базис алгебры Ли H_{r-1} и присоединить к нему согласно теореме 9.1 аффинное векторное поле $\underset{\text{a}}{X}_1 = e_4 g^{ij} x^4 \delta_i^4 p_j = x^4 p_4$.

Запишем обобщенные уравнения Киллинга, определяющие гомотетические движения в V^4 (366):

$$\begin{gathered} \xi^{i_0} \partial_{i_0} g_{j_0 k_0} + g_{i_0 j_0} \partial_{k_0} \xi^{i_0} + g_{i_0 k_0} \partial_{j_0} \xi^{i_0} = 2c g_{j_0 k_0}, \\ g_{i_0 k_0} \partial_4 \xi^{k_0} + e_4 \partial_{i_0} \xi^4 = 0, \quad \partial_4 \xi^4 = c \quad (c = \text{const}); \end{gathered} \tag{370}$$

отсюда выводим

$$\xi^{k_0} = -e_4 f_,^{k_0} x^4 + \eta^{k_0}(x^1, x^2, x^3), \quad \xi^4 = c x^4 + f(x^1, x^2, x^3).$$

Представив ξ^{k_0} в первое уравнение системы (370) и приняв во внимание, что $\partial_4 g_{i_0 j_0} = 0$, получим

$$f_{|i_0 j_0} = 0, \quad \eta_{i_0|j_0} + \eta_{j_0|i_0} = 2c g_{i_0 j_0}.$$

Так как по предположению ds_0^2 не допускает ковариантно постоянных векторных полей, то $f = \text{const}$.

Если ds_0^2 допускает гомотетическое движение [2]: $\eta_{i_0|j_0} + \eta_{j_0|i_0} = 2g_{i_0 j_0}$, то гомотетическая алгебра Ли в (366) порождается векторными полями

$$\underset{\text{г}}{X}_2 = \eta^{i_0} p_{i_0} + x^4 p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_3 = p_4, \quad \underset{\text{и}}{X}_{3+k} = \underset{k}{\zeta}^{i_0}(x^1, x^2, x^3) p_{i_0},$$

где $\underset{k}{\zeta}^{i_0} p_{i_0}$ — изометрические движения в ds_0^2. При этом максимальная аффинная алгебра Ли в $V^3 \times V^1$ (366) есть

$$A_r = A_{3+\tau} = \{\{\underset{\text{а}}{X}_1, \underset{\text{г}}{X}_2, \underset{\text{и}}{X}_3, \underset{\text{и}}{X}_{3+k}\}\} \quad (k = 1, \ldots, \tau),$$

где τ — размерность изометрической алгебры Ли метрики ds_0^2.

Если ds_0^2 не допускает гомотетий, отличных от изометрий, то гомотетическая алгебра Ли в (366) сводится к изометрической подалгебре. Последняя состоит из трансляций $\underset{\text{и}}{X}_2 = p_4$ и изометрий в ds_0^2.

§ 29. Алгебры Ли проективных движений пространств, допускающих ковариантно постоянные векторные поля

67. Если пространство-время допускает неизотропное ковариантно постоянное векторное поле, то оно принадлежит к приводимым пространствам, рассмотренным в предыдущем параграфе. Метрическая форма всякого пространства-времени, допускающего изотропное ковариантно постоянное векторное поле, может быть приведена к виду (§ 15)

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta + 2dx^3 dx^4 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{371}$$

Эта метрика определяет h-пространство типа $\{(112)\}$ (теорема 13.4). Так как для всех типов h-пространств, за исключением указанного, до конца решена задача определения всех допускаемых ими проективных

[2] См. [47].

и аффинных движений, то для завершения полной классификации полей тяготения по проективным и аффинным алгебрам Ли достаточно найти проективную алгебру Ли в пространстве (371) при самых общих предположениях о его метрике. Действительно, если при каких-либо частных значениях входящих в метрику произвольных функций соответствующее пространство допускает, помимо аффинных движений типа $\{(112)\}$, еще какое-нибудь негомотетическое проективное движение X, то производная Ли $L_X g$ вдоль X будет иметь структуру одного из рассмотренных ранее типов. Но тогда, в соответствии с принципом классификации по алгебраической структуре производной Ли $L_X g_{ij}$ (см. гл. 3), это пространство также будет принадлежать к одному из рассмотренных ранее типов пространств [3], для которых полностью решена задача определения всех допускаемых ими проективных и аффинных движений.

Обратимся к метрике (371). Она допускает ковариантно постоянное векторное поле $\lambda^i = \delta^i_3$ и, следовательно, допускает негомотетическое аффинное движение

$$\underset{\text{а}}{X_1} = x^3 p_4 \tag{372}$$

и изометрическое движение

$$\underset{\text{и}}{X_2} = p_4. \tag{373}$$

Нетрудно видеть, что аффинное движение (372) соответствует характеристике $\{(112)\}$ тензора $L_X g_{ij}$. Легко проверить, что метрика (371) при произвольных входящих в нее функциях $g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)$ не допускает других проективных движений, кроме (372) и (373). Поэтому найденные генераторы порождают искомую проективную алгебру Ли.

§ 30. Классификация полей тяготения по алгебрам Ли проективных движений

68. Полученные в этой главе результаты дают полное решение проблемы классификации псевдоримановых пространств V^4 лоренцевой сигнатуры $(---+)$, определяемых полями тяготения, по максимальным алгебрам Ли проективных движений, более широким, чем алгебры Ли гомотетических движений (табл. 1).

[3] Это будет, очевидно, K-пространство ($K = 0$), допускающее изотропное ковариантно постоянное векторное поле, т. е. либо пространство (343), $e_4 = -e_3$, либо одно из пространств (344), (360).

Все пространства V^4 можно разделить на четыре класса, указанных в первой графе табл. 1. Заштрихованные клетки в графе II показывают, что соответствующий класс пространств допускает указанный вид движений. Символы $\underset{\text{и}}{r},\ \underset{\text{г}}{r},\ \underset{\text{а}}{r},\ \underset{\text{п}}{r}$ в графе III служат для обозначения размерностей максимальных изометрической, гомотетической, аффинной и проективной алгебр Ли в V^4; $I_i,\ H_i$ и A_i означают соответственно максимальные изометрические, гомотетические и аффинные подалгебры максимальной проективной алгебры Ли P_r.

Необходимый признак жесткого h-пространства типа χ, допускающего негомотетическое проективное движение X, заключается в принадлежности производной Ли $h = L_X g$ к типу χ, указанному в графе IV; любые два жестких h-пространства разных типов неизометричны друг другу (гл. 5). Достаточные признаки всех жестких h-пространств установлены в гл. 4 в соответствии с определениями, введенными в § 15. Для остальных классов пространств V^4 в графе IV приведены необходимые и достаточные тензорные признаки.

Из приведенных результатов следует

Т е о р е м а 30.1. 1) *Если пространство-время непостоянной кривизны допускает неаффинную проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит аффинную подалгебру A_τ размерности $\tau \geq r-3$.*

2) *Всякая негомотетическая аффинная алгебра Ли A_r в пространстве-времени непостоянной кривизны содержит гомотетическую подалгебру H_τ размерности $\tau \geq r-3$.*

Этот результат находится в тесной связи со следующим утверждением, вытекающим из теоремы 14.6 и выкладок, приведенных в гл. 6.

Т е о р е м а 30.2. *Максимальное число линейно независимых ковариантно постоянных симметричных двухвалентных тензоров, отличных от фундаментального тензора, существующих в пространстве-времени ненулевой кивизны, равняется трем.*

Максимальная негомотетическая проективная алгебра Ли P_r, достигаемая в пространстве-времени непостоянной кривизны, имеет размерность $r = 10$. Эта алгебра Ли является аффинной и имеет гомотетическую подалгебру H_7. Она действует в пространстве-времени, допускающем два ковариантно постоянных векторных поля (максимальное число для неплоских пространств V^4), и является K-пространством, $K = 0$. Аффинный характер максимальной проективной алгебры Ли в не проективно-евклидовых пространствах V^4 находится в полном согласии с результатами И. П. Егорова, полученными из самых общих соображений для пространств аффинной связности (см. § 3, п. 22).

Пространства-времена ненулевой кривизны, допускающие два независимых ковариантно постоянных векторных поля, обладают целым рядом замечательных свойств. В соответствии с определением K-пространства ($K = 0$) они допускают семейства вполне геодезических поверхностей постоянной нулевой кривизны; они принадлежат к классу проективно-рекуррентных пространств W^4 (§ 10) и классу пространств Γ_4^2 (теорема 10.5), одновременно, в соответствии с теоремами 15.2 и 16.1, являясь пространствами $\Pi_4(K)$, $K = 0$. Наконец, среди них содержатся пространства непостоянной кривизны максимальной проективной подвижности. Определяемые этими пространствами поля тяготения допускают важную физическую интерпретацию, связанную с гравитационными и электромагнитными волнами [23], [137], [140] (см. также [99]).

Среди всех пространств V^4 только плоские пространства и пространства П. А. Широкова, в которых существует ковариантно постоянное векторное поле (§ 27), допускают все возможные виды проективных движений, начиная от инфинитезимальных изометрий и кончая неаффинными проективными движениями. Всякое проективное движение $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ в этих пространствах обладает свойством $\xi_{(i,j)kl} = 0$, обобщающим известное свойство проективных преобразований евклидова пространства.

Найденные в этой книге пространства и симметрии ждут своих исследователей, которые откроют их глубокий физический смысл, – сомневаться в его существовании нет оснований.

Т а б л и ц а 6.1. *Классификация пространств V^4, определяемых полями тяготения, по алгебрам Ли проективных движений*

I	II				III	IV
Класс	Допускаемые движения				Максим. негомот. проект. алгебра Ли	Тип
	и.д.	г.д.	а.д.	п.д.		
Жесткие h-простр.	////	////		////	P_7 $\underset{\text{п}}{r} = \underset{\text{г}}{r} + 1$	$\{1111\}, \{11, 1\overset{*}{1}\}$, $\{(11)1\overset{*}{1}\}, \{(111)1\}$, $\{(11)11\}, \{112\}$, $\{(11)2\}, \{1(12)\}$, $\{13\}$
K-простр. ($K \neq 0$)	////			////	P_8 $\underset{\text{п}}{r} \leq \underset{\text{и}}{r} + 3$	$\{(111)1\}, \{(11)11\}$, $\{(11)1\overset{*}{1}\}, \{(111)1\}$, $\{(11)11\}, \{(11)2\}$, $\{1(12)\}, \{13\}$. Н. и д. признак: $f_{,ij} = Kfg_{ij}$
K-простр. ($K = 0$)	////	////	////	////	$P_{10} \equiv A_{10}$ $\underset{\text{п}}{r} \leq \underset{\text{а}}{r} + 1$ $\underset{\text{а}}{r} \leq \underset{\text{г}}{r} + 3$	$\{(111)1\}, \{(11)11\}$, $\{(11)1\overset{*}{1}\}, \{(11)2\}$, $\{1(12)\}, \{(11)(11)\}$, $\{(112)\}, \{(13)\}$. Н. и д. признаки: 1.$f_{,ij} = \mathrm{const} \cdot g_{ij}$; 2.$c_{\alpha\beta,\gamma} = 0,\ c_{\alpha\beta} = c^{\delta}_{\alpha} c_{\delta\beta} \neq g_{\alpha\beta}$
Простр. постоянной кривизны $K \neq 0$	////			////	P_{24} $\underset{\text{п}}{r} = \underset{\text{и}}{r} + 14$ $P_{24} \supset A_{10}$ $A_{10} \equiv H_{10}$ $H_{10} \equiv I_{10}$	$R^i_{jkl} = 2K\delta^i_{[k} g_{l]j}$
Простр. нулевой кривизны	////	////	////	////	P_{24} $\underset{\text{п}}{r} = \underset{\text{и}}{r} + 14$ $P_{24} \supset A_{20}$ $A_{20} \supset H_{11}$ $H_{11} \supset I_{10}$	$R^i_{jkl} = 0$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аминова А. В. *Проективные преобразования некоторых римановых пространств* // Гравитация и теория относительн. – 1970. – № 7. – С. 118–120.

[2] Аминова А. В. *О проективных преобразованиях пространств Эйнштейна* // Гравитация и теория относительн. – 1970. – № 7. – С. 121–126.

[3] Аминова А. В. *Группы проективных преобразований некоторых полей тяготения* // Гравитация и теория относительн. – 1970. – № 7. – С. 127–131.

[4] Аминова А. В. *О полях тяготения, допускающих группы проективных движений* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 197, № 4. – С. 807–809.

[5] Аминова А. В. *Проективные группы в полях тяготения (I)* // Гравитация и теория относительн. – 1971. – № 8. – С. 3–13.

[6] Аминова А. В. *Проективные группы в полях тяготения (II)* // Гравитация и теория относительн. – 1971. – № 8. – С. 14–20.

[7] Аминова А. В. *О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел* // Препринт ИТФ АН УССР 71-85Р. Киев, 1971.

[8] Аминова А. В. *Проективно-групповые свойства некоторых римановых пространств* // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР – 1974. – Т. 6. – С. 295–316.

[9] Аминова А. В. *Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности* // Тр. Геом. семин. ВИНИТИ АН СССР – 1974. – Т. 6. – С. 317–346.

[10] Аминова А. В. *Проективные группы в пространствах-временах, допускающих два постоянных векторных поля* // Гравитация и теория относительн. – 1976. – № 10. – С. 9–22.

[11] Аминова А. В. *Проективные преобразования как симметрии дифференциальных уравнений* // Казань: Изд-во КГУ, 1991. – Деп. в ВИНИТИ, № 1706–В91.

[12] Aminova A. V. *Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds* // Tensor, N.S. – 1993. – V. 54. – P. 91–100.

[13] Аминова А. В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезически-*

ми // УМН. – 1993. – №2. – С. 107–164.

[14] Аминова А. В. *Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 2. – С. 3–11.

[15] Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. *Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка* // Матем. сб. – 2006. – Т. 197, № 7.— С. 3-28.

[16] Аминова А. В. *Проективные симметрии и законы сохранения в K-пространствах, определяемых полями тяготения* // Изв. Вузов. Физика. - 2008. – Т. 51, № 4. – С. 30-37.

[17] Аминова А. В. *Проективно-геометрическая теория систем дифференциальных уравнений второго порядка: теоремы выпрямления и симметрии* / Аминова А. В., Аминов Н. А.-М. // Матем. сб. – 2010. – Т. 201, № 5. -– С. 3–13.

[18] Аминова А. В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* – М.: Изд-во "Янус-К 2003. - 619 с.

[19] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. *Введение в теорию квантованных полей.* – ГИТТЛ, 1957.

[20] Голиков В. И. *О проективных преобразованиях пространств Эйнштейна* // Сб. аспирантск. работ (точн. науки). – Казань: Изд-во КГУ, 1962. – С. 15–22.

[21] Голиков В. И. *Поля тяготения с общими геодезическими* // – Канд. дисс., Казань, 1963.

[22] Голиков В. И. *О геодезическом отображении полей тяготения общего вида* // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. – 1963. – № 12. – С. 97–129.

[23] Голиков В. И. *О физической интерпретации одного риманова пространства* // Гравитация и теория относительн. – 1965. – № 2. – С. 23–34.

[24] Егоров И. П. *О коллинеациях пространств проективной связности* // ДАН СССР. – 1948. – Т. 61. – № 4. – С. 605–608.

[25] Егоров И. П. *Коллинеации пространств проективной связности* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 80. – № 5. – С. 709–712.

[26] Егоров И. П. *Движения в пространствах аффинной связности.* – Казань: Изд-во КГУ, 1965.

[27] Егоров И. П. *Автоморфизмы в обобщенных пространствах* // Итоги науки и техн. Пробл. геом. – М.: ВИНИТИ. – 1980. – Т. 10. – С. 147–191.

[28] Жукова Л. И. *Римановы пространства с проективной группой* // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. – 1971. – Т. 124. – С. 13–18.

[29] Жукова Л. И. *Проективные преобразования в римановых пространствах (изотропный случай)* // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. – 1971. – Т. 124. – С. 19–25.

[30] Жукова Л. И. *О группах проективных преобразований некоторых римановых пространств* // Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. – 1971. – Т. 124. – С. 26–30.

[31] Жукова Л. И. *Римановы пространства, допускающие проективные преобразования* // Изв. вузов. Матем. – 1973. – № 6. – С. 37–41.

[32] Ибрагимов Н. Х. *Группы обобщенных движений* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 187. – № 1. – С. 25–28.

[33] Ибрагимов Н. Х. *Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.* – Новосибирск: Изд-во НГУ. – 1972.

[34] Ибрагимов Н. Х. *К теории групп преобразований Ли–Беклунда* // Матем. сб. – 1979. – Т. 109. – № 2. – С. 229–253.

[35] Ибрагимов Н. Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983.

[36] Ибрагимов Н. Х. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание, 1989.

[37] Каган В. Ф. *Основы теории поверхностей.* – Ч.1. М.-Л.: ОГИЗ. 1947. – Ч.2. М.—Л.: ОГИЗ. 1948.

[38] Каган В. Ф. *Субпроективные пространства.* – М.: ГИФМЛ, 1961.

[39] Кайгородов В. Р. *Не конформно плоские релятивистские пространства рекуррентной кривизны* // Гравитация и теория относительн. – 1971. – № 8. – С. 109–115.

[40] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: ИЛ, 1950.

[41] Кручкович Г. И. *К теории римановых пространств $V(K)$* // Сиб. матем. журн. – 1961. – Т. 2. – № 3. – С. 400–413.

[42] Кручкович Г. И. *Об одном классе римановых пространств* // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. – 1961. – № 11. – С. 103–128.

[43] Кручкович Г. И. *Уравнения полуприводимости и геодезическое соответствие пространств Лоренца* // Тр. Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-та. – 1963. – Вып. 24. – С. 74–87.

[44] Кручкович Г. И. *О пространствах $V(K)$ и их геодезических отображениях* // Тр. Всесоюзн. заочн. энергетич. ин-та. – 1967. – Вып. 33. – С. 3–18.

[45] Кручкович Г. И., Солодовников А. С. *Постоянные симметрические тензоры в римановых пространствах* // Изв. вузов. Матем. – 1959. – № 3. – С. 147–158.

[46] Лаптев Б. Л. *Производная С. Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1938. – Т. 10, сер. 3. .

[47] Липатов Н. С. *Трехмерные римановы пространства, допускающие нетривиальные гомотетические движения. Свободные поля тяготения высокой подвижности.* – Канд. дисс., Казань, 1963.

[48] Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976.

[49] Петров А. З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики* // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1949. – Т. 109. – № 3. – С. 7–36.

[50] Петров А. З. *К теореме о главных осях тензора* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1949. – Т. 14, сер. 3. – С. 37–51.

[51] Петров А. З. *О пространствах, определяющих поля тяготения* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 81. – № 2. – С. 149–152.

[52] Петров А. З. *О геодезическом отображении пространств Эйнштейна* // Изв. вузов. Матем. – 1961. – № 2. – С. 130–136.

[53] Петров А. З. *Пространства Эйнштейна.* – М.: ГИФМЛ, 1961.

[54] Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966.

[55] Петров А. З. *Моделирование физических полей* // Гравитация и теория относительн. – 1968. – № 4–5. – С. 7–21.

[56] Петров А. З. *О моделировании путей движения пробных тел в поле гравитации* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 186. – № 6. – С. 1302–1304.

[57] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.* – М.: Наука, 1973.

[58] Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – М.: ГИТТЛ, 1953.

[59] Синюков Н. С. *О геодезическом отображении римановых пространств на симметрические римановы пространства* // ДАН СССР. – 1954. – Т. 98. – № 1. – С. 21–23.

[60] Синюков Н. С. *Нормальные геодезические отображения римановых пространств* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 4. – С. 266–267.

[61] Синюков Н. С. *Эквидистантные римановы пространства* // Научн. ежег. Одесса. – 1957. – С. 133–135.

[62] Синюков Н. С. *Об одном инвариантном преобразовании римановых пространств с общими геодезическими* // ДАН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 6. – С. 1312–1314.

[63] Синюков Н. С. *Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств* // ДАН СССР. – 1963. – 151. – № 4. – С. 781–782.

[64] Синюков Н. С. *К теории геодезического отображения римановых пространств* // ДАН СССР. – 1966. – Т. 169. – № 4. – С. 770–772.

[65] Синюков Н. С. *Бесконечно малые почти геодезические преобразования аффинносвязных и римановых пространств* // Укр. геом. сб. – 1971. – Вып. 11. – С. 87–95.

[66] Синюков Н. С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979.

[67] Синюков Н. С. *Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств* // Итоги науки и техн. Пробл. геом. – М.: ВИНИТИ. – 1982. – Т. 13. – С. 3–26.

[68] Солодовников А. С. *Проективные преобразования римановых пространств* // УМН. – 1956. – Вып. 11. – С. 45–116.

[69] Солодовников А. С. *Пространства с общими геодезическими* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 2. – С. 201–203.

[70] Солодовников А. С. *Геодезические классы пространств $V(K)$* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 1. – С. 33–36.

[71] Солодовников А. С. *Пространства с общими геодезическими* // Тр.

семин. по вект. и тенз. анализу. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – Вып. II. – С. 43–102.

[72] Солодовников А. С. *Группа проективных преобразований в полном аналитическом римановом пространстве* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 186. – № 6. – С. 1262–1265.

[73] Степанов В. В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[74] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. I.* – М.: Ин. лит., 1939.

[75] Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. II.* – М.: Ин. лит., 1948.

[76] Фиников С. П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

[77] Фок В. А. *Теория пространства, времени и тяготения.* – М.: Физматгиз, 1961.

[78] Чеботарев Н. Г. *Теория групп Ли.* – М.–Л. – 1940.

[79] Шандра И. Г. *Горизонтально эквидистантные расслоенные пространства* // Изв. вузов. Матем. – 1988. – № 12. – С. 76–79.

[80] Шандра И. Г. *Пространства $V(K)$ и Йордановы алгебры.* // Тр. Геом. семин. – Казань, 1992. – Т. 1. – С. 99–104.

[81] Шандра И. Г. *Геодезические отображения эквидистантных пространств и Йордановы алгебры пространства $V(K)$* // Дифф. геом. многообразий фигур. – Калининград: Изд-во КГУ, 1992. – № 24. – С. 104–111.

[82] Шандра И. Г. *О геодезической подвижности римановых пространств* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 1. – № 4. – С. 620–626.

[83] Shandra I. G. *Special types of concircular vector fields on semi-Riemannian manifolds* // Webs and Quasigroup. – Tver.: TSU, 2000. – P. 168–177.

[84] Шандра И. Г. *О концикулярных тензорных полях и геодезических отображениях псевдоримановых пространств* // Изв. вузов. Матем. – 2001. – № 1. – С. 75–86.

[85] Широков А. П. *Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 102. – № 3. – С. 461–464.

[86] Широков П. А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва. – 1925. – Т. 25. – № 2. – С. 86–114.

[87] Широков П. А. *Исследование тензорного дифференциального уравнения $D_iD_jD_k\varphi = 0$ для римановых пространств* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1926. – Т. 1. – № 3. – С. 123–134.

[88] Широков П. А. *О сходящихся направлениях в римановых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те.– 1934–1935. – Т. 7. – № 3. – С. 77–78.

[89] Широков П. А. *Симметрические конформно-евклидовы пространства* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. – 1938. – Т. 11. – № 3. –

С. 9–27.
[90] Широков П. А. *Тензорное исчисление.* – Казань: Изд-во КГУ, 1961.
[91] Широков П. А. *Избранные труды по геометрии.* – Казань: Изд-во КГУ, 1966.– С. 383–389.
[92] Широков П. А., Широков А. П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М.: ГИФМЛ, 1959.
[93] Эйзенхарт Л. П. *Непрерывные группы преобразований.* – М.: Ин. лит., 1947.
[94] Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948.
[95] Adati T., Matsumoto K. *On some transformations in Riemannian recurrent spaces* // Tru. Math. – 1967. – № 3. – P. 8–12.
[96] Beltrami E. *Teoria fondamentale degli spazii di curvature costante* // Ann. di Mat. – 1868. – № 2. – P. 232–255., Opere III. – P. 406–409.
[97] Bompiani E.. *Spazi Riemanniani luoghidi varietá totamento geodetiche* // Rendiconti di Palermo. – 1924. – V. 48. – P. 121–134.
[98] Brickell F., Yano Kentaro. *Concurrent vector fields and Minkowski structures* // Kodai Math. Semin. Repts. – 1974. – V. 26. – № 1. – P. 22–28.
[99] Cariglia M., Duval M., Gibbons G.W., Horvathy P.A. *Eisenhart lifts and symmetries of time-dependent systems* // Ann. Phys. – 2016. – № 373. – P. 631–654.
[100] Davis W. R. *Conservation laws in Einstein's general theory of relativity* // Lanczos Festshrift. Acad. Press. London, 1973.
[101] Davis W. R., Moss M. K. *Conservation laws in general relativity, I. Space-times admitting motions* // Nuovo cim. – 1965. – V. 38. – № 4. – P. 1531–1557. [260]
[102] Davis W. R., Moss M. K. *Conservation laws in general relativity, II. Space-times admitting certain symmetry properties more general than motions* // Nuovo cim. – 1965. – V. 38. – № 4. – P. 1558–1569.
[103] Davis W. R., Oliver D. R., Jr. *Matter field space-times admitting mappings satisfying vanishing contraction of the Ricci tensor* // Ann. Inst. H. Poincare. – 1978. – V. A28. – № 2. – P. 197–206.
[104] Deszcz R. *Uwagi o kolineacjach rzutowych w pewnych klasach przestrzeni Riemanna* // Pr. nauk. Inst. matem. i fiz. teor. PWr. – 1973. – № 8. – P. 3–9.
[105] Dini U. *Sopra una problema che si presenta nella teoria generale delle rapprezentazioni geografiche di una superficie su di un'altra* // Ann. di Mat. – 1869. – V. 3. – № 7. – P. 269–293.
[106] Einstein A. *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* // Ann. Phys. – 1916. – V. 49. – № 7. – P. 769–822.
[107] Einstein A., Infeld L. *On the motion of particles in general relativity theory.* // Canad. J. Math. – 1949. – V. 1. – P. 209.
[108] Ferrand J. *Concircular transformations of Riemannian manifolds* // Ann. acad. sci. fenn. – 1985. – Ser. A1. – № 10. – P. 163–171.
[109] Forgacs P., Manton N. S. *Space-time symmetries in gauge theories* //

Commun. Math. Phys. – 1980. – V. 72. – № 1. – P. 15–35.

[110] Fubini G. *Sui gruppi trasformazioni geodetiche* // Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. – 1903. – V. 53. – № 2. – P. 261–313

[111] Ishihara S. *Groups of projective transformations and groups of conformal transformations* // J. Math. Soc. Japan. – 1957. – V. 9. – № 2. – P. 195–227.

[112] Katzin G. H., Levine Jack, Davis W. R. *Curvature collineations: A fundamental symmetry propety of space-times of general relativity defined by the vanishing Lie derivative of the Riemann curvature tensor* // J. Math. Phys. – 1969. – 10. – № 4. – P. 617–629.

[113] Katzin G. H., Levine J. *Note on equations of projective collineations* // Tensor, N. S. – 1968. – 19. – № 2. – P. 162–164.

[114] Katzin G. H., Levine J. *Related first integral theorem: A method for obtaining conservation laws of dynamical systems with geodesic trajectories in Riemannian spaces admitting symmetries* // J. Math. Phys. – 1968. – V. 9. – № 1. – P. 8–15.

[115] Katzin G. H., Levine J. *Charge conservation as concomitant of conformal motions coupled to generalized gauge transformations* // J. Math. Phys. – 1980. – 21. – № 4. – P. 902–908.

[116] Kauffmann L. H. *Transformations in special relativity* // Int. J. Theor. Phys. – 1985. – V. 24. – № 3. – P. 223–236.

[117] Kerr R. P., Debney G. C., Jr. *Einstein spaces with symmetry groups* // J. Math. Phys. – 1970. – V. 11. – № 9. – P. 2807–2817.

[118] Kersten P., Matrtini R. *The harmonic map and Killing fields for self-dual* $SU(3)$ *Yang–Mills equations* // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1984. – V. 17. – № 5. – P. L227–L230.

[119] Kim In-Bae. *Special concircular vector fields in Riemannian manifolds* // Hiroshima Math. J. – 1982. – V. 12. – № 1. – P. 77–91.

[120] Knebelman M. S. *Homothetic mappings of Riemann spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 9. – № 6. – P. 927–928.

[121] Kobayashi Sh. *Transformation groups in differential geometry* – Ergeb. Math., 70. Berlin e.a. Springer., 1972
(Пер. на рус. яз.: К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1986).

[122] Kobayashi Sh. *Projective invariant metrics for Einstein spaces* // Nagoya Math. J. – 1979. – V. 73. – P. 171–174.

[123] Kobayashi Sh., Nomizu K. *Foundations of differential geometry* – V. 1. Int. Publ. New-York–London–Sydney, 1969 (Пер. на рус. яз.: К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1981, Т. 1., Т. 2).

[124] Königs M. G. *Sur les geodetiques integrales quadratiques* // Прилож. II к G. Darboux. Lecons sur la theorie generale des surfaces. IV. – 1896. – P. 368–404.

[125] Koyanagi T. *On a certain property of a Riemannian space admitting a special concircular scalar field* // J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. – 1972. –

Ser. I. – V. 22. – №№ 3, 4. – P. 154–157.

[126] Levi–Civita T. *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche* // Ann. di Mat. – 1896. – V. 24. – № 2. – P. 255–300.

[127] Masami Fujii. *Some Riemannian manifolds admitting a concircular scalar field* // Math. J. Okayama Univ. – 1973. – V. 16. – № 1. – P. 1–9.

[128] Misra R.B. *The projective transformation in Finsler space* // Ann. Soc. Sci. Bruxelles, Ser. 1. – 1966. – V. 80. – № 3. – P. 227–239.

[129] Noether E. *Invariante Variationsprobleme* // Nachr. D. König. Gesellsch D. Wiss., Göttingen: Math. Phys. Klasse. – 1918. – № 2. – P. 235–257 (См. перевод в сб. "Вариационные принципы механики" , Физматгиз, 1959.)

[130] Okumura M. *On some types of connected spaces with concircular vector fields* // Tensor, N. S. – 1962. – V. 12. – № 1. – P. 33–46.

[131] Palais R. S. *A global formulation of the Lie theory of transformation groups* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1957. – № 22.

[132] Prvanovitch M. *Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci-recurrent Riemannian spaces* // Tensor, N. S. – 1962. – V. 12. – № 3. – P. 219–226.

[133] Roter W. D. *Some remarks on infinitesimal projective transformations in reccurent and Ricci-recurrent spaces* // Colloq. math. – 1966. – V. 15. – № 1. – P. 121–127.

[134] Schouten J. A. *Ricci–Calculus.* – Springer–Verlag, 1954.

[135] Schouten I. A. *On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements* // Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam. – 1924. – 27. – P. 407–427.

[136] Schur F. *Über den Zusammenhang der Räume konstanter Krümmungs masses mit den projectiven Raumen* // Math. Ann. – 1886. – V. 27. – P. 537–567.

[137] Sciama D. W. *Recurrent radiation in general relativity* // Proc. Cambr. Phil. Soc. –1961. – 75. – № 2. – P. 436–439.

[138] Sumitomo T. *Projective and conformal transformations in compact Riemannian manifolds* // Tensor, N. S. – 1959. – V. 9. – № 2. – P. 113–135.

[139] Takano K. *On projective motion in a space with recurrent curvature* // Tensor, N. S. – 1962. – V. 12. – P. 28–32.

[140] Takeno H. *Gravitational null field admitting a parallel null vector field. – The space-times H and P* // Tensor, N. S. – 1962. – 12. – № 3 – P. 197–218.

[141] Takeno H., Kitamura S. *On the space-time admitting a parallel null vector field* // Tensor, N. S. – 1968. – V. 19. – № 2. – P. 207–216.

[142] Takeno H. *Concircular scalar field in spherically symmetric spacetimes, I* // Tensor, N. S. – 1969. – V. 20. – № 2. – P. 167–176.

[143] Tandai K. *Riemannian manifold admitting more than* $n-1$ *linearly independent solutions of* $\nabla^2\rho + c^2\rho g = 0$ // Hokkaido Math. J. – 1972. – V. 1. – № 1. – P. 12–15.

[144] Thomas T. Y. *On the projective and equi-projective geometries of paths* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1925. – V. 2. – P. 199–203.

[145] Vignon B. *Sur les vecteurs conformes fermes d'une variete pseudo-riemannienne* // C.r. Acad. sci. – 1973. – V. 276. – № 26. – P. AI689–AI691.

[146] Vries H. L. *Uber Riemannsche Raume, die infinitesimale konforme transformationen gestatten* // Math. Z. – 1954. – V. 60. – № 3. – P. 328–347.

[147] Witten E. *Some exact multipseudoparticle solutions of classical Yang-Mills theory* // Phys. Rev. Lett. – 1977. – V. 38. – № 3. – P. 121–124.

[148] Wolf J. A. *Spaces of constant curvature* – Berkley. California, 1972 (Пер. на рус. яз.: В о л ь ф Дж. Пространства постоянной кривизны. – М.: Наука, 1982).

[149] Yamaguchi S. *On infinitesimal projective transformations in non-Riemannian recurrent spaces* // Tensor, N. S. – 1967. – V. 18. – № 3. – P. 271–278.

[150] Yamaguchi S., Matsumoto K. *Notes on infinitesimalaffine transformations in AK_n^*-spaces* // Tru. Math. – 1966. – № 2. – P. 42–45.

[151] Yamaguchi S., Matsumoto M. *On Ricci-recurrent spaces* // Tensor, N. S. – 1968. – V. 19. – № 1. – P. 64–68.

[152] Yano K. *Concircular geometry, I-IV* // Proc. Acad. Japan. – 1940. – V. 16. – PP. 195–200, 354–360, 442–448, 505–511.

[153] Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North–Holland Publ. Co., 1957.

[154] Yano K. *Notes on isometries* // Colloq. math. – 1972. – V. 26. – P. 1–7.

[155] Yano K., Ishihara S. *Harmonic and relatively affine mappings* // J. Different. Geom. – 1975. – V. 10. – № 4 – P. 501–509.

[156] Yano K., Nagano T. *Some theorems on projective and conformal transformations* // Pros. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. – 1957. – V. A60. – № 4. – P. 451–458. Indagationes math. – 1957. – V. 19. – № 4. – P. 451–458.

[157] Yawata M. *On the affine Killing vectors in the tangent bundles* // Rept Chiba Inst. Technol. – 1984. – № 29. – P. 29–33.

[158] Yokote I. *Affine Killing vectors in the tangent bundles* // Kodai Math. J. – 1981. – V. 4. – № 3. – P. 383–398.

[159] Yorozu S. *Affine and projective vector fields on complete non-compact Riemannian manifold* // Yokohama Math. J. – 1983. – V. 31. – №№ 1, 2. – P. 41 – 46.

[160] Yorozu S. *Conformal and Killing vector fields on complete non-compact Riemannian manifolds* // Geom. Geod. and Relat. Top. Proc. Symp., Tokyo, Nov. 29 – Dec. 3, 1982. – Amsterdam, Tokyo, 1984. – P. 459–472.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Научное издание

Ася Васильевна Аминова

**ПРОЕКТИВНЫЕ СИММЕТРИИ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ**

Редактор
Л. Ш. Гизатуллина

Компьютерный набор
Н. В. Немкова

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано в печать 14.09.2018.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. л. 11,6.
Тираж экз. Заказ

Отпечатано в типографии
Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28