КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
Кафедра астрономии и космической геодезии

М.Г. СОКОЛОВА

АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Казань - 2025

УДК 528.01/.06

Принято на заседании учебно-методической комиссии
Института Физики
Протокол № 2 от 8 октября 2025 года

Рецензент:
кандидат географических наук, доцент
кафедры географии и картографии КФУ Е.М. Пудовик

Соколова М.Г.

Алгоритмы обработки геодезических измерений / М.Г. Соколова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2025. – 52 с.

Курс содержит краткое изложение основных вопросов теории ошибок геодезических измерений и алгоритмов обработки равноточных и неравноточных многократных измерений величин, измеренных прямыми и косвенными методами. Изложены основные понятия и термины теории ошибок, приведены типовые примеры решения задач, поясняющие применение теоретических положений к геодезическим измерениям, представлены задания для самостоятельной подготовки студентов.

Курс составлен в соответствии с утвержденной программой дисциплины «Теория математической обработки измерений». Материал может быть использован для студентов геодезических и профильных направлений (геология, география, землеустройство и кадастр).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОШИБОК

Классификация ошибок измерений

В курсе «Теория математической обработки геодезических измерений» изучаются свойства, закономерности распределения случайных ошибок, способы их учета и оценки точности полученных результатов измерений искомой величины. Основными задачами курса являются следующие:

- определение наиболее вероятного значения искомой величины по результатам ее измерений;
- оценка точности результата определения искомой величины и его достоверность.

Свойства случайных ошибок, проявляющиеся в их общей массе, положены в основу обработки измерений и наблюдений различных назначений.

Ошибки геодезических измерений подразделяют на грубые, систематические и случайные.

К *грубым* ошибкам относят ошибки, вызванные промахами и просчётами наблюдателя, неисправностями приборов, резким ухудшением внешних условий и др. С целью их обнаружения измерения выполняются многократно (не менее двух раз). Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, необходимо выявлять и исключать из обработки.

К *систематическим* относят ошибки, которые входят в результаты измерений по тому или иному закону как функции источников возникновения ошибок. В практике геодезических измерений применяют следующие способы уменьшения влияния систематических ошибок:

1. Устанавливают закон появления систематических ошибок, после чего ошибки уменьшают введением поправок в результаты измерений;

2. Применяют соответствующую методику измерений для того, чтобы систематические ошибки действовали не односторонне, а изменяли знаки;

3. Используют определённую методику обработки результатов измерений.

Случайные ошибки являются наиболее ярким примером случайной величины. Их закономерности обнаруживаются только в массовом проявлении. Случайные ошибки *неизбежны* при измерениях и не могут быть исключены из единичного измерения. Влияние их можно лишь ослабить, повышая качество и количество измерений, а также надлежащей математической обработкой результатов измерений. Причин возникновения случайных ошибок измерений много: влияние внешних условий, неточности изготовления и юстировки приборов, неточности выполнения операций наблюдателем и т.д. Очевидно, что случайные ошибки являются результатом суммирования большого числа независимых элементарных ошибок. На основании центральной предельной теоремы Ляпунова можно считать, что случайные ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения.

Основные понятия теории вероятности

Случайным называют такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по-иному. Всякое осуществление определённых условий и действий, при которых наблюдается изучаемое явление, называют опытом. Любая качественная характеристика опыта называется *событием*. Количественная характеристика опыта называется *случайной величиной.* Примерами случайных величин могут служить результаты измерений некоторой величины.

При выполнении определённого комплекса условий различают события достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* называют событие, которое обязательно произойдёт, например, событие появления белого шара при взятии одного шара из урны, содержащей только белые шары. *Невозможным* называют событие, которое никогда не происходит, например, событие появления чёрного шара при взятии одного шара из урны с белыми шарами. *Случайным* называют событие, которое при осуществлении определённого комплекса условий может или произойти, или не произойти. Виды случайных событий: *совместные* – события, которые при испытании могут происходить одновременно (например, попадание в цель и разрыв снаряда – события совместные); *несовместные* – события, которые не могут произойти вместе (например, появление герба и цифры при одном бросании монеты); *равновозможные* – события, имеющие одинаковую объективную возможность появления (например, выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты – события равновозможные); *полная группа событий* – такие события, одно из которых обязательно произойдёт при выполнении определённого комплекса условий (например, события выпадения граней с цифрами $1,2,\dots,6$ образуют полную группу, так как в результате бросания игральной кости одно из них обязательно произойдёт); *противоположные* – два несовместных события, образующих полную группу (событие, противоположное событию A, обозначают через $\bar{A}$, например, A – событие "попадание при выстреле", $\bar{A}$ – "промах при выстреле"); *независимые* – события, имеющие возможность появления, не зависящую от того, появились или не появились другие события (например, событие "выпадение герба" на первой монете не зависит от того, какая сторона монеты выпала на второй монете, если опыт состоит в одновременном подбрасывании двух монет); *зависимые* – события, у которых возможность появления зависит от того, произошли или не произошли другие события (например, если поражение цели достигается двумя попаданиями, то поражение цели при втором выстреле есть событие зависимое, так как оно может произойти лишь при условии первого попадания в цель).

С каждым событием связывают определённое число, называемое вероятностью. *Вероятность* – это численная мера степени объективной возможности появления события. Если достоверному событию приписать вероятность, равную единице, а невозможному событию – вероятность, равную нулю, то диапазон изменения вероятностей любых событий будет определяться выражением

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.1}$$

Существуют события, вероятности которых можно определить из условий самого опыта, не производя его. Для этого необходимо, чтобы элементарные события, составляющие полную группу, были попарно несовместными и равновозможными. Для таких событий возможен непосредственный подсчёт вероятностей, основанный на оценке доли "благоприятных" случаев.

Вероятность события вычисляют по формуле

$$P(A) = \frac{M}{N}, \tag{1.2}$$

где N – общее число случаев, M – число случаев, благоприятствующих появлению события A. Формулу (1.2) называют также классическим определением вероятности.

Относительной частотой события называют отношение числа появлений этого события к числу всех произведенных опытов:

$$Q = \frac{m}{n}. \tag{1.3}$$

При неограниченном увеличении числа опытов с вероятностью сколь угодно близкой к единице можно ожидать, что относительная частота события Q приближается к вероятности P его появления в отдельном испытании.

Математическую формулировку этой закономерности (*"устойчивости частоты"*) впервые дал Я. Бернулли в теореме, которая представляет собой простейшую форму *Закона больших чисел* и может быть записана в виде

$$вер.\lim_{n \to \infty} Q = P. \tag{1.4}$$

Относительную частоту часто называют *статистической вероятностью* события.

Если необходимо определить вероятность того, что при n независимых многократных испытаниях событие A появится ровно k раз, то применяют *формулу Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}, \tag{1.5}$$

где $P_n(k) -$ искомая вероятность; p – вероятность появления события A в каждом отдельном испытании (постоянная для всех испытаний); q – вероятность непоявления события A в отдельном испытании (очевидно, что $p + q = 1$); C_n^k — число сочетаний из n по k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1; n! = n \times (n-1)!; 0! = 1.$$

Если k придавать значения от 0 до n (т.е. $0,1,2, \dots, n$), а вероятности $P_n(k)$ вычислять по формуле Бернулли, то получится совокупность вероятностей: $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$, которая носит название *биномиального распределения вероятностей*. Заметим, $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$.

Вероятнейшим числом появлений события A при n многократных испытаниях называют число k_0, соответствующее наибольшей при данных условиях вероятности, т.е. $P_n(k_0) = max$, находится как

$$n \cdot p - q \leq k_0 \leq n \cdot p + p. \tag{1.6}$$

Следует заметить, что левая и правая части неравенства отличаются на единицу.

Случайные величины принято обозначать большими буквами конца латинского алфавита: X, Y, Z, а их возможные значения – малыми буквами с индексами, например: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Случайные величины могут быть *дискретными* (прерывными) и *непрерывными.*

Дискретной называют такую случайную величину, возможные значения которой можно заранее указать (например, число попаданий при n выстрелах; число выпадений герба при бросании монеты и т.д.).

Непрерывной называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый промежуток и не могут быть перечислены заранее (например, координаты точек попадания при стрельбе; ошибки результатов измерений).

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называют *законом распределения вероятностей.*

Таблица (ряд) распределения – простейшая форма задания закона распределения дискретных случайных величин (табл. 1).

Таблица 1.

Таблица распределения дискретной случайной величины

x	x_1	x_2	x_3	x_n
P	p_1	p_2	p_3	p_n

x_i - возможные значения случайной величины X,

p_i - соответствующие им вероятности, причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Многоугольник распределения. При графическом изображении ряда распределения в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывают все возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Затем наносят точки $(x_i; p_i)$ и соединяют их прямолинейными отрезками. Полученная фигура – многоугольник распределения также является формой задания закона распределения дискретной случайной величины.

Функция распределения – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее некоторого заданного x, т.е

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1.7)$$

С геометрической точки зрения $F(x)$ можно рассматривать как вероятность попадания случайной точки X на участок числовой оси, расположенный левее фиксированной точки x.

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;

3) $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Числовые характеристики случайной величины

Закон распределения характеризует полностью случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении ряда задач достаточно бывает указать только отдельные числовые параметры, характеризующие основные черты распределения; например, какое-то среднее значение (центр распределения), около которого группируются возможные значения случайной величины, или, например, число, характеризующее степень разброса этих значений относительно среднего, и т.д.

Математическое ожидание служит характеристикой центра распределения случайной величины. Применяют обозначения: $M(X)$, M_X. Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называют сумму произведений её возможных значений на их вероятности

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i. \quad (1.8)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется по формуле

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx. \quad (1.9)$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C – постоянная величина;
2. $M(CX) = C\,M(X)$,
3. $M(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = M(X_1) \pm M(X_2) \pm \cdots \pm M(X_n) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$;
4. $M(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) = M(X_1) \times M(X_2) \times \ldots \times M(X_n) = \prod_{i=1}^{n} M(X_i)$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины.

В теории вероятностей для характеристики основных свойств распределения часто применяют моменты.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называют математическое ожидание k-й степени этой случайной величины

$$\alpha_k = M(X^k). \quad (1.10)$$

Для дискретной случайной величины начальные моменты k-го порядка вычисляют по формуле

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \quad (1.11)$$

для непрерывной величины – по формуле

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi(x)dx. \quad (1.12)$$

При $k = 1$ имеем $\alpha_1 = M(X)$, т.е. приходим к математическому ожиданию случайной величины *X*.

Центральным моментом порядка k случайной величины *X* называют математическое ожидание *k*-й степени, соответствующей центрированной случайной величине $[X - M(X)]$

$$\mu_k = M[(X - M_X)^k]. \quad (1.13)$$

Центральные моменты дискретной случайной величины вычисляют по формуле

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_X)^k p_i, \quad (1.14)$$

для непрерывной величины – по формуле

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M_X)^k \varphi(x)dx. \quad (1.15)$$

Особое значение имеет центральный момент второго порядка, называемый *дисперсией.* Применяют обозначения: $D(X)$ и D_X.

$$\mu_2 = D(X) = M[(X - M_X)^2]. \quad (1.16)$$

Дисперсия характеризует степень разброса значений случайной величины относительно математического ожидания.

Свойства дисперсии:

а) $D(C) = 0$;

б) $D(C \times X) = C^2 \times D(X)$;

в) $D(C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_1^2D(X_1) + C_2^2D(X_2) + \cdots + C_n^2D(X_n)$, если $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Для наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться *средним квадратическим отклонением*

$$\sigma(X) = +\sqrt{D(X)} \quad (1.17)$$

или *средней квадратической ошибкой* (*СКО),* положительной величиной корня квадратного из дисперсии.

Нормальный закон распределения и его параметры

Случайная величина X с плотностью распределения вида

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.18)$$

и графиком плотности (кривая Гаусса), представленным на рис. 1, считается распределённой по нормальному закону.

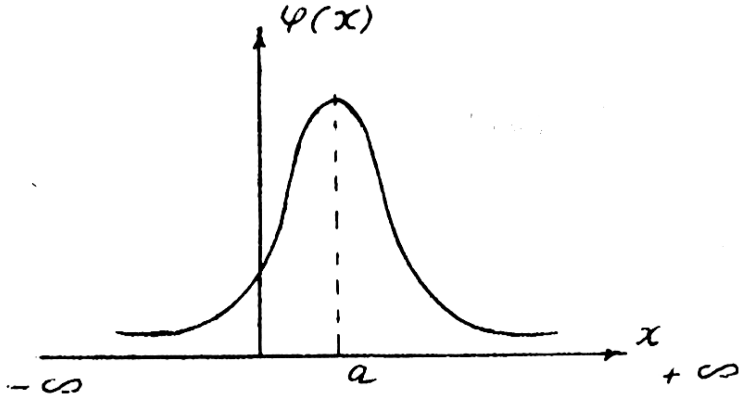

Рис. 1. Кривая плотности нормального закона

Кривая распределения по нормальному закону имеет симметричный колоколообразный вид. Величины a и σ^2, входящие в выражение (1.18), являются основными параметрами нормально распределённой случайной величины X: $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$. При изменении параметра a кривая $\varphi(x)$, не изменяя своей формы, перемещается вдоль оси абсцисс. При изменении параметра σ форма кривой изменяется (если $\sigma_1 > \sigma_2$, то параметру σ_2 соответствует более узкая в направлении оси ординат кривая, то есть меньший разброс значений x_i относительно параметра $a = M(X)$ и более высокое положение вершины кривой).

Теоремы, устанавливающие условия, при которых возникает нормальный закон, как предельный закон, известны в теории вероятностей под названием *центральной предельной теоремы* или *теоремы А.М. Ляпунова*. Эта теорема имеет большое значение для теории ошибок измерений. Теорема может быть сформулирована так: *если некоторая случайная величина есть сумма достаточно большого числа других случайных независимых величин, отклоняющихся от своих математических ожиданий на малые величины по сравнению с отклонением* *суммарной величины, то закон распределения этой суммарной случайной величины будет близок к нормальному.*

Можно полагать, что ошибки измерений $\Delta_i = x_i - X$ (x_i – результат измерения искомой величины, X – ее истинное значение) складываются из большого числа элементарных ошибок, каждая из которых вызвана действием отдельной причины, не зависящей от остальных. Влияние элементарных ошибок на результаты измерений мало по сравнению с влиянием суммарной ошибки Δ. На основании теоремы Ляпунова закон такой суммарной случайной величины (ошибки Δ) стремится к нормальному распределению.

Свойства случайных ошибок нормального закона распределения

При большом числе измерений случайные ошибки Δ обнаруживают свойства, которые определяются кривой Гаусса (рис. 1).

1. Для ряда результатов измерений с известным законом распределения абсолютные величины случайных ошибок с заданной вероятностью P не превзойдут определенного предела (свойство ограниченности):

$$P(|\Delta| \leq \sigma) = 0{,}683; \quad P(|\Delta| \leq 2\sigma) = 0{,}954; \quad P(|\Delta| \leq 3\sigma) = 0{,}997.$$

2. Положительные и отрицательные случайные ошибки, равные по абсолютной величине, равновозможны (свойство симметричности):

$$P(\Delta > 0) = P(\Delta < 0) = 0{,}5.$$

3. Малые по абсолютной величине случайные ошибки измерений встречаются чаще, чем большие (свойство унимодальности):

$$P(|\Delta| \leq \sigma) = 0{,}683; \quad P(\sigma \leq |\Delta| < 2\sigma) = 0{,}271; \quad P(2\sigma \leq |\Delta| < 3\sigma) = 0{,}043.$$

4. Среднее арифметическое случайных ошибок измерений по вероятности стремится к нулю с увеличением числа измерений, то есть математическое ожидание случайной ошибки измерения равно нулю (свойство компенсации):

$$\text{вер.} \lim [\Delta] / n = M(\mathrm{X}) = 0, \text{ где } n \to \infty.$$

Кроме среднего квадратического отклонения σ (или средней квадратической ошибки m), иногда применяют другие характеристики разброса случайной величины: среднее, предельное и вероятное отклонения (ошибки).

Среднее отклонение (средняя ошибка) ν_1 – это центральный абсолютный момент первого порядка

$$\nu_1 = M(|X - M(X)|). \qquad (1.19)$$

Предельное отклонение (предельная ошибка) равна

$$|\Delta_{\text{пред.}}| = 2\sigma \quad \text{или} \quad |\Delta_{\text{пред.}}| = 3\sigma. \qquad (1.20)$$

На основании этих теоретических расчетов устанавливают допуски в инструкциях, назначают предельные ошибки по правилу *три сигма*: результаты измерений, у которых ошибки превышают предельную, равную 2σ (или 3σ), бракуют, и измерения либо отбрасывают (не берут в обработку) или переделывают заново.

Вероятным отклонением r называют величину, равную половине длины участка, симметрично расположенного относительно математического ожидания, вероятность попадания на который равна 0,5. Вероятное отклонение находят из условия:

$$P(|X - M(X)| < r) = 0{,}5.$$

Для нормального закона распределения случайной величины *X* имеют место следующие соотношения:

$$\nu_1 = 0{,}80\sigma \;\; \text{и} \;\; r = 0. \qquad (1.21)$$

Выполнение этих соотношений свидетельствует о близости закона распределения исследуемого статистического ряда к нормальному закону распределения.

Задача 1.1. В ящике находится 10 бракованных и 15 стандартных изделий. Найти вероятность того, что извлечённая наугад деталь будет стандартной.

Решение. Общее число случаев $N = 25$; число случаев, благоприятствующих появлению стандартной детали $M = 15$. Искомая вероятность равна (формула 1.2)

$$P(A) = \frac{15}{25} = 0{,}6.$$

Задача 1.2. По цели произведено 20 выстрелов, причём отмечено 18 попаданий. Найти относительную частоту попадания в цель (1.3).

Решение:

$$Q = \frac{m}{n} = \frac{18}{20} = 0{,}9.$$

Задача 1.3. Случайная величина *X* задана функцией

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \le X \le 1, \\ 1 & \text{при } X > 1. \end{cases}$$

Найти плотность $\varphi(x)$, а также вероятность того, что в результате испытания случайная величина *X* примет значение, заключённое в интервале $(0{,}25; 0{,}75)$

Решение:

$$\varphi(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } X < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \le X \le 1, \\ 0 & \text{при } X > 1. \end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(0{,}25;\ 0{,}75)$ определяем по формуле (1.12). Принимая $\alpha = 0{,}25$ и $\beta = 0{,}75$, находим

$$P(0{,}25 < X < 0{,}75) = \int_{0{,}25}^{0{,}75} 2x dx = x^2 \Big|_{0{,}25}^{0{,}75} = 0{,}75^2 - 0{,}25^2 = 0{,}5,$$

$$P(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = 0{,}75^2 - 0{,}25^2 = 0{,}50.$$

Задача 1.4. Случайная величина *X* задана в виде табличного распределения (табл. 2). Найти параметры: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Таблица 2.

Исходные данные задачи 1.4.

x	0	1	2	3
p	0,34	0,44	0,19	0,03

Решение: применяя формулы (1.14), (1.22) и (1.23), имеем

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \times 0{,}34 + 1 \times 0{,}44 + 2 \times 0{,}19 + 3 \times 0{,}03 = 0{,}91;$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M_X)^2 p_i = (0 - 0{,}91)^2 \times 0{,}34 + (1 - 0{,}91)^2 \times 0{,}44 + $$
$$+ (2 - 0{,}91)^2 \times 0{,}19 + (3 - 0{,}91)^2 \times 0{,}03 = 0{,}64.$$

Дисперсию также можно найди и по формуле связи центральных и начальных моментов:

$$\mu_2 = D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2: \qquad (1.16)$$

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \times 0{,}34 + 1^2 \times 0{,}44 + 2^2 \times 0{,}19 + 3^2 \times 0{,}03 = 1{,}47;$$

$$\alpha_1 = M(X) = 0{,}91; D(X) = 1{,}47 - 0{,}91^2 = 0{,}64.$$

Находим СКО: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$.

Задача 1.5. Найти основные параметры непрерывной случайной величины *X*, закон распределения которой задан в задачи 1.1.3.

Решение: находим

$$M(X) = \int_0^1 x\varphi(x)dx = \int_0^1 x \times 2xdx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2; \alpha_2 = \int_0^1 x^2\varphi(x)dx = \int_0^1 x^2 \times 2xdx = \frac{2x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 = M(X) = \frac{2}{3}; D(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}, \text{ тогда}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Контрольные вопросы по теме 1

1. Случайные события. Классификация случайных событий. Вероятность события.

2. Случайные величины. Закон распределения случайной величины. Формы задания закона распределения случайной величины (дать общую характеристику).

3. Числовые характеристики случайной величины и их свойства.

4. Числовые характеристики рассеяния. Дисперсия случайной величины, ее свойства.

5. Приведите формулы определения математического ожидания случайной величины. Перечислите свойства математического ожидания.
6. Приведите формулы определения дисперсии случайной величины и ее свойства.
7. Как вычисляется вероятность попадания случайной величины при нормальном законе распределения в заданный интервал?
8. Перечислите и запишите свойства случайных ошибок (погрешностей) результатов измерений.
9. Запишите равномерный закон распределения и его основные характеристики.

ТЕМА 2. ИЗМЕРЕНИЯ МНОГОКРАТНЫХ ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Вычисление наиболее вероятного значения искомой величины

Равноточными называют измерения, полученные одним и тем же прибором, одним и тем же методом, одинаковым числом приёмов или в одинаковых условиях. Предположим, что некоторая величина А, истинное значение которой X, измерена равноточно непосредственно n раз. В результате измерений получены значения $x_1, x_2, \dots x_n$. Случайные ошибки измерений равны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= x_1 - X, \\ \Delta_2 &= x_2 - X, \\ &\dots \\ \Delta_n &= x_n - X. \end{aligned} \tag{2.1а}$$

Суммируя (квадратные скобки используем как знак суммы) левые и правые части уравнений, получим:

$$[\Delta] = [x]\ n \cdot X \tag{2.1б}$$

$$X = [x]/n - [\Delta]/n.$$

Последнее слагаемое на основании свойства компенсации случайных ошибок при большом числе n стремится к нулю, поэтому

$$X^* = [x]/n. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) показывает, что наиболее вероятным значением искомой величины А является среднее арифметическое результатов равноточных измерений. Определение наиболее надёжного значения измеряемой величины можно найти по другой формуле:

$$X^* = \frac{[x]}{n} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (2.3)$$

где x_0 – наименьшее значение из всех измерений x_i, тогда $\varepsilon_i = x_i - x_0$.

Абсолютные оценки точности искомой величины

Оценить точность полученного значения X^* – это значит определить, насколько близко найденное наиболее вероятное значение X искомой величины А к ее истинному значению. Для оценки точности применяют несколько критериев или параметров оценки точности, но все их можно разделить на две группы – абсолютные и относительные оценки точности.

Абсолютные оценки точности применяют тогда, когда точность измерения величины А не зависит от самого истинного ее значения.

Основным критерием точности результатов измерений является *средняя квадратическая ошибка* – оценка среднего квадратического отклонения, определяемая по формуле:

$$m = \sigma^*(x) = \sqrt{D^*(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)^2}{n}}. \qquad (2.4)$$

Для ряда истинных ошибок $\{\Delta_i\}$ (формулы 2.1а, 2.1б) при известном $X = M(x)$ формула (2.4) принимает вид (2.5а) и называется *формулой Гаусса*:

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \qquad (2.5а)$$

где $\Delta_i = x_i - X$; $[\Delta^2] = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2$ (квадратные скобки обозначают знак суммирования значений).

В случае, если истинное значение X искомой величины неизвестно, то применяется *формула Бесселя:*

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}}, \qquad (2.5б)$$

где величина $\upsilon_i = x_i - X^*$.

Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического:

$$M = m/\sqrt{n}. \qquad (2.6)$$

Средней ошибкой ϑ^* называют оценку среднего отклонения ν_1 (центрального абсолютного момента первого порядка (1.19)) и вычисляют по формуле:

$$\vartheta^* = \frac{[|\Delta|]}{n}. \qquad (2.7)$$

Вероятной ошибкой r^* *называют* оценку вероятного отклонения r (1.20). r^* – это такое значение случайной ошибки Δ, больше или меньше которого, по абсолютной величине, ошибки равновозможны

$$P(|\Delta| < r^*) = P(|\Delta| > r^*) = 0{,}5.$$

На практике r^* определяется величиной, которую находят, расположив все ошибки Δ_i в ряд в порядке возрастания их абсолютных величин. Вероятная ошибка r^* расположена в середине такого ряда.

Опытным путем установлено, что случайные ошибки $\boldsymbol{\Delta}$ и m взаимозависимы. При нормальном законе распределения случайных ошибок имеют место соотношения:

$$m = 1{,}25\vartheta^*; \qquad m = 1{,}48r^*. \qquad (2.8)$$

Соотношения (2.8) называют критериями нормального закона распределения случайных ошибок (тема 1, формулы (1.21).

Предельной ошибкой $\Delta_{\text{пред.}}$ называют такую ошибку, больше которой в ряде измерений ошибок не должно быть. В качестве предельных выбирают величины, определяемые по правилу (1.20)

$$\Delta_{\text{пред.}} = 2m \text{ и } \Delta_{\text{пред.}} = 3m.$$

Если взять интегральное распределение случайных ошибок, то число случайных ошибок $\boldsymbol{\Delta_i}$, имеющих значение от 0 до *m,* будет составлять 68,3%, от 0 до *2m* – 95,4% и от 0 до *3m* – 99,7%. Следовательно, число ошибок Δ_i со значением *3m* составляет всего 0,3% от всех ошибок (с вероятностями 0,954 и 0,997 соответственно).

Измерения с ошибкой больше, чем *3m* не берут в обработку, так как ошибки таких измерений относят к грубым ошибкам. Для повышения точности результатов иногда исключают измерения, ошибки которых больше, чем *2m*.

Относительные оценки точности искомой величины

Рассмотренные выше критерии точности $\Delta_i, m, \vartheta^*, r^*, \Delta_{\text{пред.}}$ называют *абсолютными ошибками*.

Относительной ошибкой называют отношение абсолютной ошибки к наиболее вероятному значению *X* искомой величины А. Таким образом, относительная ошибка записывается в виде дроби:

M/X – относительная средняя ошибка,

m/X – относительная средняя квадратическая ошибка,

$\Delta_{\text{пред}}/X$ – относительная предельная ошибка, и т.д.

Относительные оценки точности применяют тогда, когда точность измерения величины А зависит от самого ее истинного значения *X*. Принято относительные ошибки выражать в виде дроби, в числителе стоит единица

$$
\begin{aligned}
m/X &= 1/(X:m); \\
M/X &= 1/(X:M); \qquad (2.9) \\
\Delta_{\text{пред}}/X &= 1/(X:\Delta_{\text{пред}}).
\end{aligned}
$$

При этом знаменатель округляется до целого значения. Например, при $x = 145{,}68$ м и $m_x = 5{,}8$ см относительная средняя квадратическая ошибка равна

$$\frac{m_x}{x} = \frac{5{,}8}{145{,}68} \approx \frac{1}{2500}.$$

Интервальные оценки точности искомой величины

Интервальная оценка точности – это доверительный диапазон значений, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра исследуемой генеральной совокупности. Выше был рассмотрен вопрос об оценке неизвестного параметра одним числом – точечной оценке. В ряде задач требуется не только найти точечную оценку, но и оценить ее надежность, а также прогнозировать, с какой степенью уверенности можно ожидать, что эти оценки не выйдут за известные пределы. Такого рода задачи особенно актуальны при малом числе наблюдений. Построение доверительного интервала основано на задании доверительной вероятности t_β, накрывающей, например, неизвестное истинное значение X

$$\overline{x} - t_\beta M < X < \overline{x} + t_\beta M \ . \qquad (2.10)$$

с использованием статистического критерия Стьюдента (Приложение А). Входными данными критерия Стьюдента являются значения вероятности p и числа степеней свободы $r = n - 1$, например, $p = 0.9$, $r = n\text{-}1 = 10$ ($n = 11$ – число измерений), тогда по таблице (Приложение А) находим коэффициент $t_\beta = 1{,}8$ и по формуле (2.10) записываем границы интервала:

$$X^* - t_\beta M < X < X^* + t_\beta M,$$

где M – СКО среднего арифметического (2.6). Пусть наиболее вероятное значение угла равно $X^* = 67^\circ\, 33'44{,}7''$, $M = 0{,}75''$, тогда при $p = 0.9$, $r = 10$ имеем

$$67^\circ 33'44{,}7'' - 1{,}8 \times 0{,}75'' < X < 67^\circ 33'44{,}7'' + 1{,}8 \times 0{,}75'' \ ,$$

$$67^\circ 33'43{,}3'' < X < 67^\circ 33'46{,}1'' \ .$$

Ширина диапазона отражает, что более узкие интервалы указывают на более точные значения, а более широкие интервалы – на большую неопределённость.

Задача 2.1. Даны результаты равноточных независимых многократных измерений одного и того же угла (табл. 3). Определить следующие величины: $\bar{x}$, m, M, m_m, m_M.

Таблица 3.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 2.1.

<table>
<tr><th>№</th><th>Результаты измерений</th><th>ε_i</th><th>ε_i^2</th><th>υ_i</th><th>υ_i^2</th><th>примечания</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$67°33'44''$</td><td>+4</td><td>16</td><td>–0,7</td><td>0,49</td><td rowspan="12">$\Delta_{\text{окр.}} = \bar{x}_{\text{окр.}} - \bar{x} = +0{,}03''$
Контроль:
а) $[\upsilon] = -12 \times 0{,}03'' = -0{,}4''$;
б) $[\upsilon^2] = 334 - \frac{56^2}{12} = 72{,}7$.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$40''$</td><td>+0</td><td>0</td><td>–4,7</td><td>22,1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$43''$</td><td>+3</td><td>9</td><td>–1,7</td><td>2,89</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$45''$</td><td>+5</td><td>25</td><td>+0.3</td><td>0,09</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$46''$</td><td>+6</td><td>36</td><td>+1,3</td><td>1,69</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$43''$</td><td>+3</td><td>9</td><td>–1,7</td><td>2,89</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$48''$</td><td>+8</td><td>64</td><td>+3,3</td><td>10,9</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$45''$</td><td>+5</td><td>25</td><td>+0,3</td><td>0,09</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$48''$</td><td>+8</td><td>64</td><td>+3,3</td><td>10,9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$46''$</td><td>+6</td><td>36</td><td>+1,3</td><td>1,69</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$47''$</td><td>+7</td><td>49</td><td>+2,3</td><td>5,29</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$41''$</td><td>+1</td><td>1</td><td>–3,7</td><td>13,7</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td></td><td>+56</td><td>334</td><td>–0,4</td><td>72,72</td><td></td></tr>
</table>

Решение.

1. Вычисление среднего арифметического

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[\varepsilon]}{n} = 67°33'40'' + \frac{56''}{12} = 67°33'44{,}67''.$$

В качестве наиболее надёжного значения принимаем среднее арифметическое, округлённое до десятых долей секунды

$$\bar{x}_{\text{окр.}} = 67°33'44{,}7''.$$

2. Вычисление уклонений $\upsilon_i = x_i - \bar{x}_{\text{окр.}}$, а также сумм $[\upsilon]$, $[\upsilon^2]$, $[\varepsilon^2]$ непосредственно в таблице 3.1 и по контрольным формулам:

а) $[\upsilon] = -n\Delta_{\text{окр.}}$,

$$\text{b)}[\upsilon^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Расхождение между суммой $[\upsilon^2]$, которую получили непосредственно в таблице, и её контрольным значением допускается в пределах 2–3% от величины $[\upsilon^2]$. Как видно, контроль выполнен.

3. Вычисление средней квадратической ошибки отдельного результата измерений по формуле Бесселя:

$$m = \sqrt{\frac{[\upsilon^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{72,7}{11}} = 2,6''.$$

4. Вычисление средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения измеряемого угла:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{2,6''}{\sqrt{12}} = 0,75''.$$

5. Оценим точность полученных значений самих ошибок *m* и *M*

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{2,6''}{\sqrt{22}} = 0,55'',$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = 0,15''.$$

Ответ: $\bar{x} \pm M = 67°33'44,7'' \pm 0,8''$.

Задача 2.2. Прямым способом при одних и тех же условиях многократно измерена длина линии. Определить наиболее вероятное значение длины линии и оценить точность.

Таблица 4.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 2.2.

№	*D* (м)	$v=D_i- D^*$ (см)	v^2 (см^2)
1	455, 35	-1	1
2	455, 35	-1	1
3	455, 30	-6	36
4	455, 38	2	4
5	455, 41	5	25
Σ	[2276,79]		[67]

Решение.

1. Наиболее вероятное значение измеряемой величины:

$$[D] = 2276{,}79 \text{ (м)}; \quad D^* = [D]/n = 2276{,}79/5 = 455{,}36 \text{ (м)}.$$

2. Средняя квадратическая ошибка измерения:

$$m = \sqrt{\frac{67}{5-1}} = \sqrt{\frac{67}{4}} = 4 \text{ (см)} = 0{,}04 \text{ (м)}.$$

3. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического:

$$M = 4/\sqrt{5} = 2 \text{ (см)} = 0{,}02 \text{ (м)}.$$

4. Предельная ошибка:

$$\Delta_{\text{пред}} = 2 \cdot m = 8 \text{ (см)} = 0{,}08 \text{ (м)}.$$

5. Относительная средняя квадратическая ошибка:

$$1/(455{,}36:0{,}04) = 1/11384 = 1/10000.$$

6. Оценим точность значений самих ошибок m и M:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = 1{,}4 \text{ (см)},$$

$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0{,}6 \text{ (см)}.$$

Вычислим интервальную оценку наиболее вероятного значения D^* с вероятностью p = 0,95 и степенью свободы r = 5-1 = 4 (Приложение 1). Получаем следующие результаты:

$$t_\beta \cdot M = 3{,}2 \cdot 0{,}02 \text{ м} = 0{,}064 \text{ м};$$

$$455{,}36 - 0{,}06 \text{ м} < 455{,}36 \text{ м} < 455{,}36 \text{ м} + 0{,}06 \text{ м}.$$

Ответ: $D \pm M = 455{,}36 \pm 0{,}02$ (м).

Задача 2.3. В табл. 5 даны невязки суммы горизонтальных углов *β,* измеренных в треугольниках сети триангуляции. Выполнить исследование ряда невязок на нормальный закон распределения на основе анализа выполнения свойств случайных ошибок.

Таблица 5.

Исходные данные задачи 2.3.

№ треуг.	невязки Δ_i	№ треуг.	невязки Δ_i	№ треуг.	невязки Δ_i	№ треуг.	не-вязки Δ_i
1	–0,76″	9	+1,29″	17	+0,71″	25	+0,22″
2	+1,52″	10	+0,38″	18	+1,04″	26	+0,06″
3	–0,24″	11	–1,03″	19	–0,38″	27	+0,43″
4	+1,31″	12	+0,00″	20	+1,16″	28	–1,28″
5	–1,27″	13	–1,23″	21	–0,19″	29	–0,41″
6	–1,88″	14	–1,38″	22	+2,28″	30	–2,50″
7	+0,01″	15	–0,25″	23	+0,07″	31	+1,92″
8	–0,69″	16	–0,73″	24	–0,95″	32	–0,62″

Решение.

Невязки, вычисленные как $(\sum\beta - 180°)$ для каждого из 32-х треугольников, можно считать истинными ошибками Δ_i, так как известно истинное значение суммы углов в треугольнике, равное 180°.

1. Найдём значения ошибок (в секундах):

$$[\Delta > 0] = +12,40;\quad [\Delta < 0] = -15,79;\quad [\Delta] = -3,39;\quad [|\Delta|] = 28,19;$$

$$[\Delta^2] = 38,75;\quad [\Delta^3] = (-34,41 + 30,03) = -4,38;\quad [\Delta^4] = 120,70.$$

2. Вычисление оценок параметров нормального распределения M_Δ, σ_Δ (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение величины Δ)

$$M^*_\Delta = \frac{[\Delta]}{n} = \frac{-3,39}{32} = -0,106'',$$

$$\sigma^*_\Delta = m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{38,75}{32}} = 1,10''.$$

3. Вычисление средней ошибки ϑ^* (2.7)

$$\vartheta^* = 28,19/32 = 0,88'';$$

$$k_{1_{\text{практ.}}} = m/\vartheta^* = 1{,}10''/0{,}88'' = 1{,}25;\ k_{1_{\text{теор.}}} = 1{,}25.$$

Проверка выполнения условия

$\frac{m}{\vartheta^*} = \frac{1{,}10''}{0{,}88''} = 1.25$, соотношение (2.8) выполняется.

4. Определение вероятной ошибки r^*.

Располагаем истинные ошибки в ряд по возрастанию их абсолютных величин:

+0,00; +0,01; +0,06;+0,07; –0,19; +0,22; –0,24; –0,25; +0,38; –0,38; –0,41; +0,43; –0,62; –0,69; +0,71; –0,73; –0,76; –0,95; –1,03; +1,04; +1,16; –1,23; –1,27; –1,28; +1,29; +1,31; –1,38; +1,52; –1,88; +1,92; +2,28; –2,50.

Находим значение вероятной ошибки:

$$r^* = (|\Delta|_{16} + |\Delta|_{17})/2 = (0{,}73'' + 0{,}76'')/2 = 0{,}74''.$$

Проверяем выполнение условия

$\frac{m}{r^*} = \frac{1{,}10''}{0{,}74''}$ = 1,49 примерно равно 1,48.

5. Определение предельной ошибки (1.20)

$$\Delta_{\text{пред.}} = 3m = 3 \cdot 1{,}10 = 3{,}30''$$

ни одна из истинных ошибок ряда 32-х треугольников (см. табл.) не превышает по модулю значения предельной ошибки.

Ответ: рассматриваемый ряд истинных ошибок невязок суммы углов в треугольниках является действительно рядом случайных ошибок, подчиняющихся приближенно нормальному закону, так как выполняются свойства случайных ошибок:

а) среднее арифметическое $M^*(\Delta)$ практически равно нулю;

б) положительные и отрицательные ошибки, равные по абсолютной величине, равновероятны, примерно одинаково встречаются в ряду;

в) малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие, так выполняется соотношение $\frac{m}{\vartheta^*} = 1{,}25$;

г) случайные ошибки Δ ряда не превышает значение предельной ошибки, следовательно, отсутствуют грубые ошибки в измерениях;

д) приближенное распределение случайных ошибок измерений по нормальному закону также разрешает предположить, что систематические ошибки отсутствуют или являются незначительными.

Контрольные вопросы по теме 2

1. Какие ошибки исключают из обработки измерений на этапе предварительной обработке?
2. Что такое относительная ошибка?
3. Для чего используют предельную ошибку?
4. Запишите основные формулы, применяемые при обработке равноточных измерений одной величины.
5. В чем принципиальное различие формул Гаусса и Бесселя, применяемых для оценки точности однородных измерений?

ТЕМА 3. МНОГОКРАТНЫЕ ПРЯМЫЕ НЕРАВНОТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Понятие веса измерения

Неравноточными называют измерения, которые имеют различные дисперсии. Это имеет место, когда измерения производят при различных внешних погодных условиях, по разной методике, с помощью разных приборов. Средние квадратические ошибки m_i неравноточных измерений не равны между собой. Для совместной обработки неравноточных измерений вводят понятие веса. ***Весом*** называется величина, обратно пропорциональная дисперсии или квадрату σ среднего квадратического отклонения

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}. \qquad (3.1)$$

Значение величины c постоянно для всех измерений и выбирается произвольно. Для удобства вычислений значение коэффициента c (3.1) выбирают таким образом, чтобы значения весов были близкими к единице. Согласно (3.1) вес всегда величина положительная и не равная нулю. Значение веса выражает степень надежности измерения и поэтому является величиной безразмерной.

Ошибка единицы веса

При $p = 1$ $c = \sigma_i^2 = \sigma_0^2$ и формула веса принимает вид

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (3.2)$$

где σ_0^2 — дисперсия такого измерения, вес которого равен единице.

Дисперсии результатов измерений σ_i^2, как правило, неизвестны, поэтому их заменяют квадратами средних квадратических ошибок как

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}, \quad (3.3)$$

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \quad (3.4)$$

где μ – *ошибка единицы веса*, то есть средняя квадратическая ошибка измерения, вес которого равен единице.

Если известна средняя квадратическая ошибка единицы веса μ и вес i-го измерения, то можно вычислить среднюю квадратическую ошибку i-го измерения по формуле

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}. \quad (3.5)$$

Значение веса измерения можно назначить, не зная величины m этого измерения, на основе анализа причин возникновения ошибок различных геодезических измерений (длин, углов, превышений). Основой определения весов может быть выбран критерий числа приемов измерений, в этом случае величина веса будет прямо пропорциональна числу приемов. В нивелирной сети веса измеренных превышений назначают в зависимости, например, от длины нивелирного хода как

$$p_i = \frac{c}{L_i}, \quad (3.6)$$

где L_i – длина хода в км, при этом величина p_i безразмерная.

Таким образом, вес измерения выражает степень доверия к результатам измерения, выраженную числом. Чем больше вес измерения, тем точнее, надежнее его результат.

Математическая обработка прямых неравноточных измерений одной величины

Пусть имеется ряд многократных прямых неравноточных измерений одной и той же величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, истинное значение X которой неизвестно. Известны веса результатов измерений $p_1, p_2, \ldots p_n$. Математическая обработка ряда неравноточных измерений имеет следующий алгоритм действий.

1. Определение наиболее надёжного значения измеряемой величины – среднего весового (средневзвешенного) или общей арифметической средины (наилучшей оценки неизвестного истинного значения искомой величины):

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}, \qquad (3.7)$$

где x_0 – наименьшее значение из ряда $\{x_i\}$, а $\varepsilon_i = x_i - x_0$.

2. В случае, если истинное значение X искомой величины не известно, то определение по *формуле Бесселя* средней квадратической ошибки измерения с весом, равным единице:

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}, \qquad (3.8)$$

где $v_i = x_i - \bar{x}$ – уклонения от среднего весового, которые обладают свойствами:

а) $[pv] = 0$,

б) $[pv^2] = min$.

Если истинное значение X искомой величины известно, то используют *формулу Гаусса* (в формуле (3.8) знаменатель будет равен n).

3. Определение средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения измеряемой величины:

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\bar{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}. \qquad (3.9)$$

4. Вычисление ошибок самих ошибок, относительных ошибок при оценке точности линейных измерений и при необходимости интервальных оценок точности измерений.

Задача 3.1. Вес угла равен 9. Найти среднюю квадратическую ошибку этого угла, если ошибка единицы веса равна 15″.

Решение. Находим среднюю квадратическую ошибку угла (3.5)

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}, \quad m_i = \frac{15''}{\sqrt{9}} = 5''.$$

Задача 3.2. Отметка узлового репера получена по шести нивелирным ходам (табл. 6), известны средние квадратические ошибки по каждому ходу m_i (в мм). Найти наиболее надёжное значение отметки репера и произвести оценку точности.

Таблица 6.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 3.2.

№	H_i *(м)*	m_i *(мм)*	$p_i = \frac{c}{m_i^2}$	ε_i *(мм)*	$p_i\varepsilon_i$	$p_i\varepsilon_i^2$	v_i *(мм)*	$p_i v_i$	$p_i v_i^2$
1	196,529	6,3	0,25	+12	+3,00	+36,0	+1	+0,25	00,2
2	,522	8,4	0,14	+5	+0,70	+3,5	–6	–0,84	05,0
3	,517	9,1	0,12	+0	+0	+0	–11	–1,32	14,5
4	,532	4,3	0,54	+15	+8,10	121,5	+4	+2,16	08,6
5	,530	5,2	0,37	+13	+4,81	+62,5	+2	+0,74	01,5
	,520	7,5	0,18	+3	+0,54	+1,6	–8	–1,44	11,5
$\sum$			1,60		17,15	225,1		–0,45	41,3

Решение:

Веса вычисляем по формуле (3.3), принимая *c* = 10,

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}.$$

1. Вычисление наиболее надёжного значения отметки репера:

$$\bar{x} = x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = 196{,}517 \text{ м} + \frac{17{,}15\text{мм}}{1{,}60} = 196{,}53 \text{ м},$$

$$\bar{x}_{\text{окр.}} = 196{,}528\text{м}, \, \Delta_{\text{окр.}} = \bar{x}_{\text{окр.}} - \bar{x} = +0{,}3 \text{ мм}.$$

Вычисление уклонений от среднего весового $\upsilon_i = x_i - \bar{x}_{\text{окр.}}$, а также сумм $[p\varepsilon^2]$, $[p\upsilon]$, $[p\upsilon^2]$ непосредственно в таблице.

Контроль вычислений:

a) $[p\upsilon] = -\varDelta_{\text{окр.}}[p]$; $[p\upsilon] = -0{,}3 \times 1{,}60 = -0{,}48$;

b) $[p\upsilon^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}$; $[p\upsilon^2] = 225{,}1 - \frac{17{,}15^2}{1{,}60} = 41{,}3$.

2. Вычисление средней квадратической ошибки (СКО) измерения с весом, равным единице:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\upsilon^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{41{,}3}{5}} = 2{,}9\text{мм.}$$

3. Вычисление средней квадратической ошибки наиболее надёжного значения по формуле

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{2{,}9}{\sqrt{1{,}6}} = 2{,}3 \text{ мм.}$$

4. Оценим надёжность определения ошибок μ и $m_{\bar{x}}$:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = 0{,}92 \text{ мм;}$$

$$m_{m_{\bar{x}}} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}92}{\sqrt{1{,}6}} = 0{,}73 \text{ мм.}$$

Ответ: $\bar{x} \pm m_{\bar{x}} = 196{,}528\,\textit{м} \pm 2{,}3\,\textit{мм.}$

Задача 3.3. По прямым неравноточным измерениям горизонтального угла (табл. 7) найти средние квадратические ошибки (СКО) измерений, имеющих минимальный и максимальный веса.

Решение.

1. Определение весов. Значения весов примем пропорциональными числу приемов измерений в каждой серии. Чем больше число приемов, тем надежнее результат измерения угла, меньше его ошибка и, следовательно, больше его вес,

$$p_i = N/20,$$

при этом согласно (3.1) примем значение постоянного коэффициента *c* равным 1/20, чтобы веса принимали значения, близкие к единице.

Таблица 7.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 3.3.

№	x_i	Число приемов, N	p_i	$x_i \cdot p_i$	$\Delta_i^2=(X-x_i)^2$	$\Delta_i^2 \cdot p_i$
1	71° 38' 03''	4	0,2	2,6	25	5,0
2	71° 38' 06''	12	0,6	3,6	4	2,4
3	71° 38' 02''	2	0,1	0,2	36	3,6
4	71° 38' 10''	10	0,5	5,0	4	2,0
5	71° 38' 12''	4	0,2	2,4	16	3,2
6	71° 38' 05''	8	0,4	2,0	0	0
Сумма			[2,0]	[15,8]		[16,2]

2. Наиболее вероятное значение угла (используем только секунды, так как градусы и минуты не изменяются) вычисляем по формуле:

$$\bar{x} = \frac{[px]}{[p]},$$

$$\tilde{x} = 15{,}8 / 2{,}0 = 8{,}0'',$$

$$x = 71^\circ\ 38'\ 08''.$$

3. Ошибку единицы веса μ вычисляем как

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{16{,}2}{5}} = 1{,}8''.$$

4. Средняя квадратическая ошибка среднего арифметического М

$$m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{1{,}8}{\sqrt{2}} = 1{,}3''.$$

5. СКО для измерения с минимальным весом (измерение № 3, полученное по минимальному числу приемов N = 2 имеет наибольшую ошибку) вычисляем по формуле (3.5)

$$m_3 = \frac{\mu}{\sqrt{p_3}},\ \ m_3 = \frac{1.8''}{\sqrt{0{,}1}} = 5{,}7''.$$

6. СКО для измерения с максимальным весом (измерение № 2, полученное по максимальному числу приемов $N = 12$, имеет наименьшую ошибку) равно:

$$m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}, \quad m_2 = \frac{1.8''}{\sqrt{0,6}} = 1,4''.$$

Контрольные вопросы по теме 3

1. Определите понятие веса.
2. Рассмотрите зависимость точности измерений в зависимости от условий проведения угловых, линейных, нивелирных измерений.
3. В каких случаях невозможно вычислить вес измерения и как при этом назначают веса.
4. Перечислите свойства веса.
5. Приведите примеры неравноточных геодезических измерений при проведении нивелирных работ.
6. Приведите примеры неравноточных геодезических измерений при проведении угломерных работ.
7. Приведите примеры неравноточных геодезических измерений при проведении линейных работ.
8. Можно ли по величине веса измерения вычислить его СКО?

ТЕМА 4. МНОГОКРАТНЫЕ ДВОЙНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В геодезии часто приходится измерять большие группы однородных величин (превышений, углов, длин), причём каждую величину для контроля измеряют дважды. Такой класс измерений называют двойными измерениями однородной величины. Например, к такому классу относятся измерения превышений по черной и красной стороне рейке, выполненные на каждой станции, или измерение различных длин линий в прямом и обратном направлении. Все двойные измерения однородной величины объединяются и оценка точности выполняется по разностям каждого двойного измерения.

Математическая обработка равноточных двойных измерений

Пусть однородные величины $X_1,\ X_2, \dots ,\ X_n$ измерены равноточно дважды и получены результаты измерений:

$$x_1',\ x_2', \dots , x_n',$$
$$x_1'',\ x_2'', \dots ,\ x_n''.$$

Составим разности по формуле

$$d_i = x_i' - x_i''. \tag{4.1}$$

Наиболее надёжные значения определяемых величин в каждой паре находим по формуле:

$$\bar{x}_i = \frac{x_i' + x_i''}{2}. \tag{4.2}$$

Для оценки точности используем разности (4.1) применяют следующий алгоритм действий.

При отсутствии систематических ошибок разности d_i можно рассматривать как истинные ошибки самих разностей, так как истинное значение разностей равно нулю $M(\,d) = 0$. Применяя к ряду $\{d_i\}$ формулу Гаусса (2.5 а), находим:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{4.3}$$

Тогда средняя квадратическая ошибка отдельного результата измерений будет определяться по формуле:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{4.4}$$

Оценка точности наиболее надёжных значений определяется как среднее арифметическое из двух измерений по формуле:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{4.5}$$

Если в результатах измерений присутствуют систематические ошибки, то величина математического ожидания суммы разностей

$$M^*(\,d) = \bar{d} = \frac{[d]}{n} \tag{4.6}$$

существенно отличается от нуля. В этом случае из каждой разности необходимо исключить остаточное влияние систематических ошибок, т. е. получить разности

$$d_i' = d_i - \bar{d}_{\text{окр.}}. \tag{4.7}$$

Рассматривая разности d_i' как уклонения от среднего $\bar{d}_{\text{окр.}}$, применяем формулу Бесселя для оценки точности разности (2.5 б)

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{4.8}$$

Средние квадратические ошибки отдельного результата измерений и наиболее надёжных значений измеряемых величин находим по формулам:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}, \tag{4.9}$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_x}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \tag{4.10}$$

Заметим, что в этом случае необходимо выполнить контроль вычислений по формулам

$$[d'] = -n\Delta_{\text{окр.}}, \text{ где } \Delta_{\text{окр.}} = \bar{d}_{\text{окр.}} - \bar{d};$$
$$[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}. \tag{4.11}$$

Критерий выявления систематических ошибок двойных измерений

Для определения значимости отклонения $\bar{d}$ от нуля применяют неравенство

$$|[d]| \leq 2{,}5\,\frac{[|d|]}{\sqrt{n}}.$$

Иногда применяют более жёсткий критерий обнаружения систематических ошибок

$$|[d]| \leq 0{,}25[|d|], \tag{4.12}$$

который получен исходя из требования $\bar{d} = \delta_{\text{сист.}} \leq \frac{1}{5} m_d$.

Как правило, обработку двойных измерений начинают с проверки условия (4.12) на наличие систематических ошибок. Если неравенство (4.12) выполняется, то делают вывод о том, что систематическими ошибками можно пренебречь и оценку точности следует выполнять по формулам (4.4 и 4.5). Если неравенство (4.12) не выполняется, то делают заключение о том, что систематические ошибки необходимо учесть и выполнить обработку по формулам (4.7, 4.9, 4.10).

Математическая обработка неравноточных двойных измерений

Пусть каждая из однородных величин X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ измерена дважды и независимо, причём измерения в каждой паре равноточны, а пары между собой неравноточны. Известны веса p_i каждой пары результатов измерений и получены разности d_i с весами $p_{d_i} = \frac{p_i}{2}$.

Наиболее надёжные значения измеряемых величин в каждой паре измерений находит по формуле (4.2).

Критерий обнаружения систематических ошибок для неравноточных двойных измерений имеет вид:

$$\left|\left[d\sqrt{p}\right]\right| \le 0{,}25\left[\left|d\sqrt{p}\right|\right]. \tag{4.13}$$

Если неравенство выполняется, то делают заключение о том, что систематическими ошибками можно пренебречь и обрабатывают измерения по следующему алгоритму.

1. Определяют среднюю квадратическую ошибку измерения с весом, равным единице,

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \tag{4.14}$$

2. Вычисляют средние квадратические ошибки наиболее надёжных значений по формулам

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \tag{4.15}$$

Если условие (4.13) не выполняется, то необходимо найти остаточное влияние систематических ошибок

$$\bar{d} = \frac{[pd]}{[p]}$$

и исключить его из каждой разности. Получают разности, свободные от влияния систематических ошибок

$$d_i' = d_i - \bar{d}_{\text{окр.}}. \tag{4.16}$$

Оценка точности выполняется следующим образом.

1. Определяется средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \tag{4.17}$$

2. Вычисляются средние квадратические ошибки наиболее надёжных значений

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \tag{4.18}$$

Задача 4.1. Длина каждой из линий измерена дважды (туда и обратно) равноточно (табл. 8). Выполнить оценку точности по разностям двойных равноточных измерений.

Таблица 8.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 4.1.

№	x_i' (м)	x_i'' (м)	d_i (мм)	d_i^2	d_i'	$d_i'^2$
1	120,389	120,380	+9	81	+6,3	39,7
2	136,468	136,462	+6	36	+3,3	10,9
3	133,223	132,229	–6	36	–8,7	75,7
4	124,536	124,537	–1	1	–3,7	13,7
5	140,457	140,449	+8	64	+5,3	28,1
6	143,682	143,688	–6	36	–8,7	75,7
7	139,158	139,149	+9	81	+6,3	39,7
Σ				335	0,1	283,5
$[(d>0)] = +32$ $[(d<0)] = -13$			$[\lvert d\rvert] = 45$ $[d] = +19$			

Решение:

1. Составим ряд разностей $d_i = x_i' - x_i''$.

2. Согласно критерию обнаружения систематических ошибок (4.12) вычисляем левую и правую части неравенства:

$$|[d]| = 19; \quad 0{,}25[|d|] = 0{,}25 \times 45 = 11{,}2.$$

Вывод: левая часть неравенства оказалась больше его правой части, следовательно, систематическими ошибками пренебрегать нельзя.

3. Находим остаточное влияние систематических ошибок

$$\bar{d} = \frac{[d]}{n} = \frac{+19}{7} = +2{,}71 \text{ мм}; \ \ \bar{d}_{\text{окр.}} = +2{,}7 \text{ мм}$$

и исключаем его из каждой разности, находим d_i' и суммы $[d^2]$, $[d']$, $[d'^2]$ по формулам (4.11):

$$[d'] = -n\Delta_{\text{окр.}}:$$

$$\Delta_{\text{окр.}} = \bar{d}_{\text{окр.}} - \bar{d} = -0{,}01\text{мм},$$

$$[d'] = -7 \times (-0{,}01) \approx +0{,}1\text{мм},$$

$$\left[d'^2\right] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n},$$

$$\left[d'^2\right] = 335 - \frac{19^2}{7} = 283{,}4,$$

результат вычислений записываем в табл. 8.

4. Находим среднюю квадратическую ошибку одного измерения

$$m_x = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{283{,}5}{12}} = 4{,}86 \text{ мм} \approx 4{,}9 \text{ мм}.$$

5. Определяем среднюю квадратическую ошибку наиболее надёжных значений измеряемых величин

$$m_{\bar{x}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = 3{,}43 \text{ мм} \approx 3{,}4 \text{ мм}.$$

6. Находим относительные средние квадратические ошибки:

$$\frac{m_x}{S_{\text{ср.}}} = \frac{4{,}9}{134000} = \frac{1}{27000},$$

$$\frac{m_{\bar{x}}}{S_{\text{ср.}}} = \frac{3{,}4}{134000} = \frac{1}{39000}.$$

Контрольные вопросы по теме 4

1. Раскройте понятие равноточные двойные измерения. Приведите примеры.

2. Раскройте понятие неравноточные двойные измерения. Приведите примеры.

3. В какой последовательности, по каким формулам выполняется оценка точности по разностям двойных равноточных измерений?

4. В какой последовательности, по каким формулам выполняется оценка точности по разностям двойных неравноточных измерений?

5. Запишите неравенство, при выполнении которого можно принять гипотезу об отсутствии в разностях (d_i) систематической ошибки.

ТЕМА 5. КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И ИХ ОБРАБОТКА

Ошибка искомой величины как функции измеренных параметров

В геодезии часто искомые величины находят в результате вычислений как функции измеренных величин (аргументов). Очевидно, что ошибка функции будет зависеть как от ошибок измеренных аргументов, так и от вида самой функции. Пусть величина y есть функция параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{5.1}$$

где величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ измерены независимо. Известны их средние квадратические ошибки $m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}$. Тогда средняя квадратическая ошибка функции (5.1) вычисляется по формуле:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2. \tag{5.2}$$

Если величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ коррелированы, т.е. коэффициенты попарной корреляционной связи отличны от нуля, $r_{x_i x_j} \neq 0$, то средняя квадратическая ошибка функции вычисляется по формуле:

$$m_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 r_{x_i x_j} m_{x_i} \quad (5.3)$$

В формулах (5.2), (5.3) величины $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ – частные производные функции, взятые по точным значениям величин X_i, но вычисленные по их приближённым значениям, в качестве которых принимают измеренные значения x_i.

Вес искомой величины как функции измеренных параметров

Пусть дана функция

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где параметры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – независимо измеренные величины с известными весами $p_{x_1},\ p_{x_2}, \ldots,\ p_{x_n}$. Используя формулы (5.2) и (3.3), получаем следующую формулу для вычисления обратного веса функции:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_1}} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_2}} + \cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_i}}. \quad (5.4)$$

Если величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ коррелированы, то есть коэффициенты попарной корреляционной связи отличны от нуля, $r_{x_i x_j} \neq 0$, то обратный вес функции вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{p_y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_{x_i}} + 2\sum_{i<j} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_0 \frac{r_{x_i x_j}}{\sqrt{p_{x_i} p_{x_j}}} \quad (5.5)$$

Примеры математической обработки косвенных измерений

Задача 5.1. В треугольнике измерены два угла, известны их средние квадратические ошибки $m_{x_1} = 3{,}0''$, $m_{x_2} = 4{,}0''$. Найти среднюю квадратическую ошибку третьего угла.

Решение. Составляем функцию $y = 180° - x_1 - x_2$; тогда частные производные по каждому измеренному аргументу:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -1; \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -1;$$

$180°$ – постоянное число; x_1 и x_2 – независимо измеренные углы. Тогда по формуле (5.2) имеем:

$$m_y^2 = (-1)^2 \cdot 3^2 + (-1)^2 \cdot 4^2 = 25;$$

$$m_y = 5''.$$

Задача 5.2. Найти веса следующих функций:

1. $y = 2x_1 - 0{,}4x_2 + 0{,}5x_3;$
2. $y = 3x_1^2,$

если $p_{x_1} = 2$; $p_{x_2} = 0{,}2$; $p_{x_3} = 0{,}5$; $x_1 = 1$, $r_{x_i x_j} = 0$.

Решение:

1. $\frac{1}{p_y} = 2^2 \frac{1}{p_{x_1}} + (-0{,}4)^2 \frac{1}{p_{x_2}} + (0{,}5)^2 \frac{1}{p_{x_3}} = 3{,}3;\quad p_y = \frac{1}{3{,}3} = 0{,}30;$

2. $\frac{1}{p_y} = (6x_1)^2 \frac{1}{p_{x_1}} = 18;\ p_y = \frac{1}{18} = 0{,}06.$

Задача 5.3. Угол β измерен со средней квадратической ошибкой m = 5,0''. Определите среднюю квадратическую ошибку утроенного значения этого угла.

Решение:

Функция имеет вид: $f = 3\beta$. По формуле (5.2) вычисляем:

$$m_f = 3 \cdot m = 15{,}0''.$$

Задача 5.4. Определить среднюю квадратическую ошибку превышения, вычисленного по формуле

$$h = S \cdot tg\,\nu,$$

где S – горизонтальное проложение, ν – угол наклона.

Имеем $S = 143{,}5$ м; $\nu = +2°30'$; $m_S = 0{,}5$ м; $m_\nu = 0{,}5'$;

$\rho' = 3438' = 3{,}44 \cdot 10^3$ (число минут в радианах)

Решение. Находим превышение

$$h = S\,tg\,\nu = 6{,}2653 \text{ м}$$

затем по формуле (5.2) среднюю квадратическую ошибку по двум независимо измеренным аргументам S и ν

$$m_h^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \nu}\right)^2 m_\nu^{2*)},$$

где

$$\frac{\partial h}{\partial S} = tg\,\nu; \qquad \frac{\partial h}{\partial \nu} = \frac{S}{cos^2\,\nu},$$

тогда

$$m_h^2 = tg^2\,\nu \cdot m_S^2 + \left(\frac{S}{cos^2\,\nu}\right)^2 \frac{m_\nu^2}{\rho^2}.$$

$$tg^2\,\nu = 0{,}04366^2;\ cos^4\,\nu = 0{,}9990^4;\ \ S^2 = 143,5^2\ \text{м}^2;\ \rho^2 = 3438^2.$$

Окончательно получаем:

$$m_h = 3{,}0 \times 10^{-2}\text{м} = 3{,}0\ \text{см}.$$

Ответ: $h \pm m_h = 6{,}27\ \text{м} \pm 0{,}03\ \text{м}.$

Примечание. Для того чтобы оба слагаемых в этом выражении имели одинаковую размерность (в м^2), необходимо во втором слагаемом величину m_ν^2 разделить на ρ^2 (т.е. выразить m_ν в радианной мере).

Известно, что величина m_h должна быть получена с двумя (или тремя, если число начинается с единицы) значащими цифрами. Чтобы это требование обеспечить, необходимо в промежуточных вычислениях по формуле (5.2) удерживать в числах на одну значащую цифру больше, т.е. оставлять три (или четыре) значащие цифры, а сами числа следует представлять в стандартной форме. Например, число $0{,}04366^2$ необходимо записать так: $4{,}37^2 \times 10^{-4}$; число 3438^2 следует записать так: $3{,}44^2 \times 10^6$. Такие действия позволят упростить вычисления и, кроме того, дадут представление о величине влияния каждого источника ошибок на общую среднюю квадратическую ошибку функции.

Контрольные вопросы по теме 5

1. Раскройте понятие класс равноточных косвенных измерений.
2. Раскройте понятие неравноточных косвенных измерений.
3. Приведите примеры косвенных измерений в геодезии.
4. Что вы понимаете под функциональной зависимостью между определяемыми величинами?
5. Выведите формулу для вычисления веса функции средне взвешенного значения неравноточно измеренных величин.

6. Выведите формулу для вычисления средней квадратической ошибки функции средне взвешенного значения неравноточно измеренных величин.
7. Выведите формулу средней квадратической ошибки арифметической средины равноточно измеренных величин.
8. Запишите формулу оценки СКО высоты репера, полученного по семи превышениям разомкнутого нивелирного хода с привязкой к твердому реперу.

ТЕМА 6. ПРЕДРАСЧЕТ НЕОБХОДИМОЙ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ АРГУМЕНТОВ ПРИ ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТИ ИСКОМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Постановка обратной задачи теории ошибок измерений

Оценка искомой величины как функции измеренных параметров (аргументов) является прямой задачей теории ошибок. При решении обратной задачи рассчитывают точность измерений аргументов по заданному значению средней квадратической ошибки функции. *Обратная задача теории ошибок* – это расчет точности измерений аргументов по заданному значению средней квадратической ошибки функции. *Предрасчет точности аргументов* – определение необходимой точности измеряемых величин при заданной точности исходной величины. Задача предрасчета точности измеряемых параметров имеет место на этапе планирования геодезических измерений на основе технического задания и заданного класса точности определяемых искомых величин.

Пусть известна средняя квадратическая ошибка функции m_y:

$$y = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

независимых аргументов x_i, задана ее средняя квадратическая ошибка m_y, необходимо определить значения m_{x1}, m_{x2}, …, m_{xn} в формуле:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2. \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) неизвестных величин n и возможно множество решений. Для выбора единственного решения данную задачу решают при установлении дополнительного условия.

Принцип равного влияния ошибок аргументов

Предполагают, что слагаемые правой части формулы (6.1) равны, то есть равновозможно влияют на точность значения искомой функции. Поэтому применяют так называемый принцип равных влияний – требование, что влияние каждого источника ошибок на общую ошибку функции было одинаковым. Тогда имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2 = \frac{m_y^2}{n},$$

$$m_{x_i} = \frac{m_y}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|\sqrt{n}}. \quad (6.2)$$

Все величины m_{x_i} находят из решения уравнений (6.2), вычисляя значения частной производной функции по каждому измеренному аргументу. Принцип равных влияний применяют в случаях, когда измеряемые параметры, по которым вычисляется значение функции, неоднородны (неоднозначны по своей величине, например, длина линии и превышение, или имеют разные единицы размерности, например, градусы и метры).

Принцип равных среднеквадратических ошибок аргументов

Предполагают, что средние квадратические ошибки аргументов в формуле (6.1) равны между собой:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m.$$

Тогда средняя квадратическая ошибка аргумента равна:

$$m_y^2 = m_{x_i}^2 \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2,$$

$$m_{x_i} = \frac{m_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2}} \quad . \tag{6.3}$$

Этот принцип применяют тогда, когда измерения однородны (например, только углы, только превышения) или только значения одного порядка по величине.

Расчет ожидаемой точности измеряемых аргументов по заданному значению средней квадратической ошибки функции имеет большое прикладное значение при планировании будущих измерений и построения опорных сетей заданного класса точности.

Примеры расчета ожидаемой точности измеряемых величин

Задача 6.1. С какой точностью нужно измерить расстояние S и длину отрезка на рейке l, чтобы определить коэффициент дальномера со средней квадратической ошибкой $m_c = 0,5$; $S = 100$ м, $l = 1$ м.

Решение:

Функция имеет вид $c = S/l$

Частные производные от функции c по аргументам S и l равны

$$(\partial c/\partial l) = -S/l^2,$$

$$(\partial c/\partial S) = 1/l.$$

Средние квадратические ошибки аргументов определяем на основе принципа равных влияний по формуле:

$$m_l = (m_c \cdot l^2)/(S \cdot \sqrt{2}) = (0,5 \cdot 10^4)/(10^4 \cdot \sqrt{2}) = 0,35 \text{ см},$$

$$m_S = (m_c \cdot l)/(\sqrt{2}) = (0,5 \cdot 10^2)/(\sqrt{2}) = 35 \text{ см}.$$

Задача 6.2. Средняя квадратическая ошибка (СКО) единицы веса μ нивелирования по 10 ходам получилась равной 6,0 мм. Вес превышения каждого нивелирного хода определялся как $100/N$, где N – число станций в ходе. Вычислите СКО превышения на одну станцию и на один условный километр, считая в нем в среднем 10 станций.

Решение: СКО превышения на одну станцию.

Так как $p = 100/N$, то ошибка единицы веса – это ошибка превышения хода, который включает 100 станций

$$p = 100/100 = 1; \qquad \mu_{100} = 6 \text{ мм}.$$

Поэтому СКО превышения на одну станцию определяем при весе, равном

$$N = 1, \quad p = 100/1 = 100;$$

тогда $$\mu_{ст} = \mu_{100} / \sqrt{100} = 6/10 = 0{,}6 \text{ мм}.$$

СКО превышения на один условный километр, считая в нем 10 станций, равна:

$$N = 10, \quad p = 10;$$

тогда $$\mu_{км} = \mu_{100} / \sqrt{10} = 6/3{,}2 = 1{,}9 \text{ мм}.$$

Задача 6.3. Подсчитайте количество станций в нивелирном ходе II класса, если СКО отметки нивелирного хода не должна превышать 5 мм в наиболее слабом месте хода (середина нивелирного хода). Для нивелирования II класса СКО превышения на одну станцию не должно превышать 1 мм.

Решение: отметка репера является функцией измеренных превышений h и определяется по формуле:

$$H = f(h_1, h_2, \ldots h_n) = h_1 + h_2 + \ldots + h_n,$$

тогда СКО отметки репера как функции измеренных превышений будет равна

$$\sqrt{m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_{x_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_{x_i}^2.}$$

Так как величины ошибок измеренных превышений $m_1, m_2, \ldots, m_n$ заданы и равны 1 мм, а m_H равна 5 мм, то число станций n рассчитываем

$$m_H^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots + m_n^2 = n\sqrt{m_1^2},$$

$$m_H = m\sqrt{n},$$

тогда $$\sqrt{n} = m_H / m = 5/1;$$

$$n = 25.$$

С учетом определения СКО нивелирного хода в наиболее слабом его месте имеем

$$n = 25/2 \sim 12.$$

Такой же результат можно получить, если использовать принцип равных средних квадратических ошибок (6.3), так как измерения однородные и по величине, и по размерности.

Задача 6.4. Рассчитайте наибольшую длину нивелирного хода, если СКО превышения на 1 км не превышает 2 мм. Предельно допустимая СКО для III класса нивелирования в наиболее слабом месте хода равна 10 мм.

Решение: число станций в нивелирном ходе зависит от длины хода L, следовательно, чем больше длина хода, тем больше станций. Тогда имеем

$$m_H = m_{км}\sqrt{L};$$
$$\sqrt{L} = m_H / m_{км} = 10/5;$$
$$L = 25.$$

С учетом СКО нивелирного хода в наиболее слабом его месте

$$L = 25/2 \approx 13 \text{ км}.$$

Контрольные вопросы по теме 6

1. Приведите примеры необходимости предварительного расчета точности измеряемых аргументов при геодезических измерениях.
2. В чем принципиальная разность применимости между принципом равных влияний и принципом равных средних квадратических ошибок.
3. Запишите формулы средней квадратической ошибки коррелированных и некоррелированных результатов измерений.
4. В чем состоит «принцип равных влияний» и когда он используется в геодезической практике? Приведите примеры применения.
5. В чем состоит «равных средних квадратических ошибок» и для чего он используется в геодезической практике? Приведите примеры его применения.

ТЕМА 7. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПО НЕВЯЗКАМ В ПОЛИГОНАХ И ХОДАХ

Оценка точности измерения горизонтальных углов по угловым невязкам в полигонах

В результате измерений n горизонтальных углов в опорной сети полигонометрии получены f_β невязки углов в N полигонах. Тогда точность измерения одного угла определяется по формуле:

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_\beta^2}{n}\right]}{N}}. \tag{7.1}$$

В результате измерений горизонтальных углов в сети триангуляции получены f_β невязки углов в N треугольниках, тогда формула (7.1) преобразуется к виду:

$$m_\beta = \sqrt{\frac{\left[f_\beta^2\right]}{3N}}. \tag{7.2}$$

Оценка точности измерения превышений по невязкам в нивелирных полигонах и ходах

В результате измерений превышений получены f_h невязки в N полигонах геометрического нивелирования, причем ходы могут быть как замкнутые, так и разомкнутые ходы.

СКО измерения превышения, если в нивелирном ходе одна станция, то есть $n = 1$

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{n}\right]}{N}} \tag{7.3}$$

СКО измерения превышения, если длина L нивелирного хода равна 1 км, то есть L = 1 км

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{f_h^2}{L}\right]}{N}} \tag{7.4}$$

где n_i – число станций в ходах; L_i – длина ходов, км.

При измерении превышения h тригонометрическим методом превышение вычисляется по формуле:

$$h = d\ tg(v).$$

Тогда в результате измерений превышений получены f_h невязки в N полигонах тригонометрического нивелирования (полигоны)

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\dfrac{f_h^2}{D^2}\right]}{N}}, \qquad (7.5)$$

где d – длина линии, км, v – значение вертикального угла, D_i – периметры полигонов, км.

Задача 7.1. В результате измерений превышений в 6 разомкнутых ходах с различным значением станций получены значения невязок (f_h) (табл. 9) методом геометрического нивелирования.

Таблица 9.

Исходные данные и промежуточные вычисления задачи 7.1.

№ хода	f_h, (мм)	Число станций, n	f_h^2/n
1	-13	10	16,9
2	-16	15	17,1
3	+15	12	18,7
4	+13	9	18,8
5	-17	14	20,6
6	+15	17	13,2
сумма		77	105,3

Решение.

Вычисляем согласно формулы (7.3) СКО измерения превышения на одной станции

$$\mu = \sqrt{\frac{105{,}3}{77}} = 1 \text{ мм}.$$

Контрольные вопросы по теме 7

1. Нарисуйте схему измерений горизонтальных углов в 5 полигонах, в каждом из которых различное n число горизонтальных углов ($n_1 = 3$, $n_2 = 6$, $n_3 = 4$, $n_4 = 8$, $n_5 = 5$), запишите для данного примера формулу (7.1).
2. Нарисуйте схему измерений горизонтальных углов в 4 триангуляционных звеньях, запишите для данного примера формулу (7.2).

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. Бородин, А. Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие для вузов / А. Н. Бородин. — 10-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 256 с. — ISBN 978-5-507-47621-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/398477 (дата обращения: 17.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2. Емельянов, Г. В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие / Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 332 с. — ISBN 978-5-8114-3984-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206273 (дата обращения: 17.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Загретдинов Р.В. Основные инженерно-геодезические изыскания при строительстве сооружений: учебное пособие / Р.В. Загретдинов, Р.В. Комаров, А.Е. Сапронов, М.Г. Соколова. - Казань: Казан.ун-т, 2020. - 98 с. - Текст : электронный. - URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F_1435742789/Sokolova.Osnoi.iziskanii.pdf (дата обращения: 17.02.2025). - Режим доступа: открытый.
4. Поклад, Геннадий Гаврилович. Геодезия: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 120300 - Землеустройство и земельный кадастр и специальностям: 120301 - Землеустройство, 120302 - Земельный кадастр, 120303 - Городской кадастр / Г.Г. Поклад, С.П. Гриднев; М-во сел. хоз-ва Рос. Федерации, Воронеж. гос. аграр. ун-т им. К.Д. Глинки. - [4-е изд., перераб. и доп.]. - Москва: Академический Проект, 2013. - 537, [1] с. (190 экз. - НБ КФУ).
5. Практикум по геодезии: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 120300 - Землеустройство и земельный кадастр и специальностям: 120301 -

Землеустройство, 120302 - Земельный кадастр, 120303 - Городской кадастр / [Г. Г. Поклад и др.]; под ред. Г. Г. Поклада. - [2-е изд.]. - Москва: Академический Проект: Гаудеамус, 2012. - 485, [1] с. (70 экз. - НБ КФУ).

6. Соколова, Марина Геннадьевна. Основы обработки геодезических измерений [Электронный образовательный ресурс]; М-во образования и науки РФ, ФГАОУ ВПО «Казанский федер. ун-т», Ин-т физики. - Казань: Казанский федеральный университет, 2014. - URL: https://kpfu.ru/dc?p_id=78952 (дата обращения: 17.02.2025). - Режим доступа: для авториз. пользователей.
7. Туганбаев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / А. А. Туганбаев, В. Г. Крупин. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1079-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210536 (дата обращения: 17.02.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

ПРИЛОЖЕНИЕ. КРИТЕРИЙ СТЬЮДЕНТА

r	вероятность, p												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,0
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,13	0,27	0,40	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,13	0,26	0,40	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,13	0,26	0,40	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
11	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	0,13	0,26	0,40	0,54	0,70	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	0,13	0,26	0,39	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,13	0,26	0,39	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
30	0,13	0,26	0,39	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7