КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
Кафедра алгебры и математической логики

М. В. Зубков, Н. Н. Корнеева

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТЬ I

Казань – 2019

УДК 510.5

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии
Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
протокол № 4 от 21. 02. 2019*

Рецензент: профессор М.М.Арсланов

Зубков М. В., Корнеева Н. Н.

Упражнения и задачи по дискретной математике: часть I /
М. В. Зубков, Н. Н. Корнеева. – Казань: Казан. унт, 2019. – 70 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов первого курса Высшей школы информационных технологий и информационных систем КФУ. Оно содержит задачи и упражнения по теории булевых функций и теории графов. Имеются задачи, предназначенные для первоначальной проработки и освоения методов дискретной математики, а так же задачи для углубленного изучения предмета. Данное пособие может быть использовано при чтении курса дискретной математики в первом семестре.

УДК 510.5

Содержание

1 Множества и операции над ними

Понятие множества относится к числу первичных в математике: его нельзя определить через другие понятия. Можно дать следующее неформальное определение множества. *Множество* — это совокупность определенных и различных между собой объектов, мыслимая как единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами*. Если x является элементом множества M, то записывают $x \in M$, если не является, то $x \notin M$.

Множество можно задать различными способами:
1) перечислением его элементов: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;
2) предикатом (т.е. некоторым условием на элементы, выраженным в форме логического утверждения): $M = \{x |\ P(x)\}$;
3) порождающей процедурой: $M = \{a_n | a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})\}$.

Два множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B и обозначается $A \subseteq B$. Значит, два множества A и B равны тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством* B и обозначается $A \subset B$. Множество всех подмножеств множества A обозначают $P(A)$ или 2^A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Обычно предполагается, что существует *универсальное множество* U такое, что все рассматриваемые множества являются подмножествами U.

Операции над множествами:
1) *объединение множеств*: $A \cup B = \{x | x \in A$ или $x \in B\}$;
2) *пересечение множеств*: $A \cap B = \{x | x \in A$ и $x \in B\}$;
3) *разность множеств*: $A \setminus B = \{x | x \in A$ и $x \notin B\}$;
4) *симметрическая разность множеств*: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

5) *дополнение множества*: $\overline{A} = \{x | x \notin A\} = U \setminus A$;
6) *декартово произведение множеств*: $A \times B = \{(x, y) | x \in A$ и $y \in B\}$;
7) *декартова степень множества*: произведение множества A самого на себя n раз, т.е. $A^n = (\ldots((A \times A) \times A) \times \ldots \times A)$.

Свойства операций объединения, пересечения и дополнения множеств: для любых подмножеств A, B, C универсального множества U выполняются следующие соотношения:

1) $A \cup B = B \cup A$;
2) $A \cap B = B \cap A$;
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
6) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
7) $A \cup (A \cap B) = A$;
8) $A \cap (A \cup B) = A$;
9) $A \cup A = A$;
10) $A \cap A = A$;
11) $A \cup \emptyset = A$;
12) $A \cup U = U$;
13) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
14) $A \cap U = A$;
15) $\overline{(\overline{A})} = A$;
16) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
17) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
18) $A \cup \overline{A} = U$;
19) $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

1.1. Пусть $U = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ — универсальное множество и $A = \{1, 2, 5\}$ и $B = \{2, 3, 4, 5\}$ — его подмножества. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, 2^A.

1.2. Пусть $U = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ — универсальное множество и $A = \{x | 2 < x \leq 6\}$, $B = \{x | x$ — четно$\}$, $C = \{x | x \geq 4\}$ и $D = \{x | x = 2^y$ и $y \in \mathbb{N}\}$ — его подмножества. Найти $A \cup B$, $C \cap D$, $B \triangle C$, $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$, $\overline{\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}}$, $2^A \cap 2^B$, $2^D \setminus 2^B$.

1.3. Пусть $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{c, d\}$. Записать множества $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2.

1.4. Пусть $A = [0, 1] \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \times [0, 1]$. Изобразить на координатной плоскости множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

1.5. Построить диаграмму Эйлера-Венна для множеств:
1) $\overline{A \cap B}$ (если универсальное множество $U = A \cup B$);
2) $\overline{(A \cup B) \cap C}$ (если универсальное множество $U = A \cup B \cup C$).

1.6. Пусть M_2, M_3, M_5 — подмножества множества натуральных чисел, состоящие соответственно из всех чисел, кратных 2, 3, 5. С помощью операций над множествами выразить через них множества всех чисел:
1) делящихся на 6;
2) делящихся на 30;
3) взаимно простых с 30;
4) делящихся на 10, но не делящихся на 3.

1.7. Доказать следующие тождества:
1) $A \cup (A \cap B) = A$;
2) $A \cap (A \cup B) = A$;
3) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$;
4) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$;
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
7) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
8) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
10) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
11) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
12) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$;
13) $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$;
14) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;
15) $(A \cup B) \cap (\bar{B} \cup A) = A$;
16) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;
17) $A \triangle A = \emptyset$;
18) $A \triangle \emptyset = A$;

19) $A \triangle U = \overline{A}$;
20) $A \triangle (A \triangle B) = B$;
21) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;
22) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;
23) $A \cup B = (A \triangle B) \cup (A \cap B)$;
24) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$;
25) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$;
26) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
27) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
28) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
29) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

1.8. Методом математической индукции доказать, что n-элементное множество имеет 2^n подмножеств.

2 Элементы комбинаторики

Набор элементов $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$ из множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется *выборкой объема k из n элементов* или *(n,k)-выборкой.* Выборка называется *упорядоченной*, если в ней задан порядок следования элементов. Если порядок следования элементов в выборке не существенен, то выборка называется *неупорядоченной.* Упорядоченные выборки называются *размещениями*, неупорядоченные — *сочетаниями.* Как в упорядоченных, так и в неупорядоченных выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов. Каждое (n,k)-сочетание без повторений представляет собой подмножество мощности k множества из n элементов.

При подсчете числа различных комбинаций используются следующие два правила:

Правило произведения. Если объект A может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект B может быть выбран m способами, то выбор "A и B" в указанном порядке может быть осуществлен nm способами.

Правило суммы. Если объект A может быть выбран n способами, а объект B — другими m способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор "A или B" можно осуществить $n + m$ способами.

Имеют место следующие формулы (в этих формулах $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ и $0! = 1$): 1) *число (n,k)-размещений без повторений* — $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$; 2) *число (n,k)-размещений с повторениями* — $\overline{A}_n^k = n^k$; 3) *число (n,k)-сочетаний без повторений* — $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; 4) *число (n,k)-сочетаний с повторениями* — $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Числа C_n^k суть коэффициенты в разложении *бинома Ньютона* и называются *биномиальными коэффициентами*, т. е. для произвольных чисел a, b и целого положительного числа n справедливо следу-

ющее равенство:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

2.1. Сколькими различными способами можно расставить оценки (2, 3, 4, 5) четверым студентам так, чтобы никакие два студента не получили одну и ту же оценку?

2.2. Сколькими различными способами можно расставить оценки 4 и 5 десяти студентам?

2.3. Сколькими способами можно выбрать 3-х призеров из 10 участников соревнования?

2.4. Под словом понимаем последовательность заданных букв, вне зависимости имеет или нет этот набор букв смысловое содержание. Сколько трехбуквенных слов можно составить из букв слова “логика”?

2.5. Перевертыш — это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке. Сколько существует четырехзначных перевертышей? Сколько шестизначных?

2.6. Сколько существует в десятичной системе счисления
1) двузначных чисел;
2) двузначных чисел, в которых нет одинаковых цифр;
3) нечетных трехзначных чисел;
4) пятизначных чисел, которые делятся на пять;
5) пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

2.7. Сколькими способами можно составить список из 7 студентов?

2.8. Сколькими способами можно рассадить 7 гостей за круглый стол? Тот же вопрос для случая n гостей?

2.9. Сколькими способами можно распределить 3 билета среди 20 студентов, если:

1) распределяются билеты в разные театры и каждый студент может получить не более одного билета;

2) распределяются билеты в разные театры на разные дни и каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;

3) распределяются равноценные билеты на вечер и каждый студент может получить не более одного билета?

2.10. Сколькими способами можно выстроить 9 человек:

1) в колонну по одному;

2) в колонну по три, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту и нет людей одинакового роста?

2.11. Дано n предметов одного сорта и m предметов другого сорта. Найти число выборок, составленных из k предметов одного сорта и l предметов другого сорта.

2.12. Имеется колода из $4n$ ($n \geq 5$) карт, которая содержит карты четырех мастей по n карт каждой масти, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся:

1) пять последовательных карт одной масти;

2) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;

3) три карты с одним номером и две карты с другим;

4) пять карт какой-нибудь одной масти;

5) пять последовательно занумерованных карт;

6) в точности три карты из пяти с одним и тем же номером;

7) не более двух карт каждой масти.

2.13. Найти число подмножеств X множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $|X| = 3$;
2) $|X| = 5$, $1 \in X$;
3) $|X| = 6$, $2 \notin X$;
4) $|X| = 7$, $\{0, 1\} \subset X$, $2 \notin X$;
5) множество X состоит из трех четных и двух нечетных чисел;
6) $|X| \leq 5$.

2.14. На окружности отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, расположенные последовательно. Сколько существует:

1) хорд с концами в отмеченных точках;
2) треугольников с вершинами в отмеченных точках;
3) выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках;
4) треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой A_2A_8;
5) треугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой A_1A_5?

2.15. Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2) $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$;
3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$;
4) $\sum\limits_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$.

2.16. Используя бином Ньютона, доказать следующие равенства:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;
2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$;

4) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k = n(n-1)2^{n-2}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$;

6) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)2^n$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}$;

8) $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$;

9) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k}C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

3 Булевы функции и способы их задания

Пусть $B = \{0, 1\}$. Функция, определенная на множестве B^n со значениями в множестве B, называется *булевой функцией от n переменных.*

Булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n \geq 1$ можно задать таблицей значений, в которой аргументы выписываются в порядке возрастания их номеров (сверху вниз):

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	$\ldots$	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Такая таблица называется *таблицей значений* булевой функции, ее также называют *таблицей истинности.*

Подразумевая такое стандартное расположение наборов аргументов, булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удобно задавать в виде вектора значений $\alpha_f = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, где $\alpha_i = f(\sigma_i)$ и σ_i — это набор, соответствующий двоичной записи числа i ($i = 0, \ldots, 2^n - 1$).

Приведем таблицы для некоторых булевых функций от 1 и 2 переменных:

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x	y	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Эти функции имеют специальные обозначения и названия:

1) Функции 0 и 1 называются *(тождественным) нулем* и *(тождественной) единицей*, соответственно.

2) Функция f_1 — *тождественной* функцией и обозначается x.

3) Функция f_2 — *отрицанием* и обозначается $\overline{x}$ или $\neg x$.

4) Функция f_3 — *конъюнкцией* и обозначается $x_1 \& x_2$, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $x_1 x_2$ или $\min(x_1,\, x_2)$.

5) Функция f_4 называется *дизъюнкцией* и обозначается $x_1 \vee x_2$ или $\max(x_1,\, x_2)$.

6) Функция f_5 называется *суммой по модулю* 2 и обозначается $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 + x_2$.

7) Функция f_6 — *эквиваленцией (эквивалентностью)* и обозначается $x_1 \sim x_2$, $x_1 \equiv x_2$ или $x_1 \leftrightarrow x_2$.

8) Функция f_7 — *импликацией* и обозначается $x_1 \to x_2$.

9) Функция f_8 — *штрихом Шеффера* и обозначается $x_1 \mid x_2$.

10) Функция f_9 — *стрелкой Пирса* и обозначается $x_1 \downarrow x_2$.

Функции 0 и 1 иногда рассматриваются как нульместные, т. е. зависящие от пустого множества переменных.

Формулами над множеством связок $\{\neg,\, \vee,\, \oplus,\, \leftrightarrow,\, \to,\, |,\, \downarrow\}$ называются только выражения, которые могут быть получены с помощью следующих правил:

1) x — любая булева переменная,

2) если F и G — формулы, то $\overline{F}$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \oplus G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \to G)$, $(F \mid G)$, $(F \downarrow G)$ — формулы.

Аналогично, можно определить множество формул над любым множеством связок (булевых функций).

Для сокращения записи формул пользуются следующими соглашениями:

1) внешние скобки у формул опускают,

2) считают, что связка $\neg$ (т.е. $^-$) сильнее любой двухместной связки; связка $\wedge$ — сильнее, чем любая другая двухместная связка; связка $\vee$ — сильнее, чем любая другая двухместная связка, кроме $\wedge$.

Каждой формуле по индукции сопоставляется булева функция, которую она реализует:

1) x – сопоставляется тождественная функция $f(x) = x$,

2) если формулам F и G сопоставлены булевы функции, то формулам $\overline{F}$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \oplus G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \mid G)$, $(F \downarrow G)$ сопоставляются, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, сумма по модулю 2, эквивалентность, импликация, штрих Шеффера, стрелка Пирса от булевых функций сопоставленных F и G, соответственно.

Поэтому, в дальнейшем, функцию будем обозначать тем же символом, что и реализующую ее формулу.

Формулы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются *эквивалентными*, если на любом наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных значения функций $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, реализуемых соответствующими формулами, совпадают. Эквивалентные формулы обозначаются: $F = G$ или $F \equiv G$.

Построением таблицы значений можно убедиться в эквивалентности следующих пар формул. Их обычно называют *основными эквивалентностями алгебры логики*:

1. коммутативность: $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \oplus y = y \oplus x$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, $x|y = y|x$, $x \downarrow y = y \downarrow x$;

2. ассоциативность: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$, $x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z) = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$;

3. дистрибутивность: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \oplus z) = (x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$;

4. законы де Моргана: $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$;

5. правила поглощения: $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$;

6. $x \wedge (\overline{x} \vee y) = x \wedge y$, $x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$;

7. $x \wedge \overline{x} = 0$, $x \wedge 0 = 0$, $x \oplus x = 0$;

8. $x \vee \overline{x} = 1$, $x \vee 1 = 1$, $x \leftrightarrow x = 1$, $x \rightarrow x = 1$;

9. $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, $x \vee 0 = x$, $x \wedge 1 = x$, $x \oplus 0 = x$;

10. $x \oplus 1 = \overline{x}$, $x \rightarrow 0 = \overline{x}$, $x \leftrightarrow 0 = \overline{x}$, $x|x = \overline{x}$, $x \downarrow x = \overline{x}$;

11. $\overline{\overline{x}} = x$;

12. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y = x \wedge y \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = (\overline{x} \vee y) \wedge (x \vee \overline{y}) = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$, $x \oplus y = \overline{x \leftrightarrow y} = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y}) =$

$(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$;

13. $x|y = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

3.1. Построить таблицы истинности булевых функций, реализуемых следующими формулами:

1) $(x_1 \oplus \overline{\overline{x_1} \to x_2}) \wedge (x_2 \leftrightarrow x_1)$;
2) $(x_1 \to x_1\overline{x}_2) \vee (x_2 \downarrow \overline{x}_1)$;
3) $((x_1 \to \overline{x}_2) \vee (x_1 \oplus x_3)) \wedge (x_2|x_3)$;
4) $((\overline{x}_1 \wedge x_2) \downarrow (x_1|x_2)) \to (x_3 \to \overline{x}_2)$;
5) $\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2) \vee (\overline{x}_2 \to x_3)} \downarrow ((x_1 \oplus x_3) \vee x_2)$;
6) $\overline{\overline{x}_1 \to x_2} \oplus ((x_1 \to x_3) \leftrightarrow x_2) \wedge x_3$;
7) $\overline{(x_1 \vee \overline{x}_2) \to ((x_1 \downarrow \overline{x}_2)|x_3)} \downarrow x_2$;
8) $\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2) \to ((\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3 \to x_2)} \to \overline{x}_1 \wedge x_3$;
9) $(((x_1 \downarrow x_2)|x_3)|x_1) \downarrow x_2$;
10) $((x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \to x_2 \wedge x_3))|(x_1 \downarrow x_2)$;
11) $(x_1 \leftrightarrow x_3 \wedge \overline{x}_4) \vee (x_4 \vee x_1) \to x_2$;
12) $(x_1 \wedge \overline{x}_4 \to \overline{x}_2 \wedge x_3) \leftrightarrow (x_1 \vee \overline{x}_3)$;
13) $\overline{x_1 \vee x_2} \vee x_3 \to ((x_2 \vee x_3) \to x_1 \wedge \overline{x}_4)$;
14) $(((x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \to x_1) \vee \overline{x}_1 \wedge x_2) \to \overline{x}_4$.

3.2. Построив таблицы истинности булевых функций, проверить эквивалентны ли формулы, их реализующие:

1) $(x_1 \to x_2) \oplus ((x_2 \to \overline{x_3}) \to x_1 \wedge x_2)$ и $\overline{x_2 \wedge x_3 \to x_1}$;
2) $(x_1 \vee \overline{x_2}) \downarrow (\overline{x_1} \to (x_2 \to x_3))$ и $\overline{x_2 \to x_1 \vee x_3}$;
3) $x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_2 \wedge x_3)$ и $(x_1 \vee (x_2 \to x_3)) \wedge (x_1 \oplus x_2)$;
4) $\overline{(x_1 \downarrow x_2) \vee (x_1 \leftrightarrow x_3)}|(x_1 \oplus x_2 \wedge x_3)$ и $\overline{x_1} \wedge (x_2 \wedge x_3) \vee \overline{x_1 \to x_3}$;
5) $(\overline{x_1} \vee x_2) \to ((x_2 \downarrow \overline{x_3}) \to (x_1 \leftrightarrow x_1 \wedge x_3))$
и $x_1 \wedge x_2 \vee (\overline{\overline{x_1} \to x_1 \wedge \overline{x_2}} \to x_3)$;
6) $(x_1|\overline{x_2}) \to ((x_2 \downarrow \overline{x_3}) \to (x_1 \oplus x_3))$ и $x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \to x_3)$.

3.3. Построив таблицы истинности соответствующих булевых функций, доказать основные эквивалентности алгебры логики, приведенные перед задачами.

3.4. Построив таблицы истинности соответствующих булевых функций, убедиться в справедливости следующих эквивалентностей:

1) $x \vee y = (x \to y) \to y$;

2) $x \vee (y \leftrightarrow z) = x \vee y \leftrightarrow x \vee z$;

3)$x \wedge (y \leftrightarrow z) = (x \wedge y \leftrightarrow x \wedge z) \leftrightarrow x$;

4) $x \to (y \leftrightarrow z) = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$;

5) $x \vee (y \to z) = x \vee y \to x \vee z$;

6) $x \wedge (y \to z) = (x \to y) \to x \wedge z$;

7) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;

8) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;

9) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

3.5. Используя основные эквивалентности алгебры логики, доказать эквивалентность формул:

1) $(\overline{x}_1 \to x_2) \to (\overline{x_1} \wedge x_2 \leftrightarrow (x_1 \oplus x_2))$ и $(\overline{x_1 \wedge x_2} \to x_1) \to x_2$;

2) $(x_1 \wedge x_2 \vee (\overline{x}_1 \to x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow ((\overline{x_1} \to \overline{x_2}) \to x_3)$
и $(x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \oplus x_3)$;

3) $(x_1 \oplus x_2 \wedge x_3) \to (\overline{x_1} \to (x_2 \to x_3))$ и $x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_1)$;

4) $(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \wedge x_3) \to ((x_1 \to x_2) \to (x_2 \vee x_3 \to \overline{x_1}))$
и $(x_1 \to x_2) \to (\overline{x_2} \to \overline{x_1})$;

5) $(x_1 \wedge \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \wedge x_3) \oplus ((x_2 \to x_3) \to \overline{x_1} \wedge x_2)$ и $(x_1 \wedge (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \oplus x_2) \oplus x_3$;

6) $\overline{(x_1 \leftrightarrow x_2) \to (x_1 \to \overline{x_3})} \vee (x_1 \oplus \overline{x_2} \wedge x_3)$ и $x_1 \leftrightarrow (x_3 \to x_2)$.

3.6. Используя основные эквивалентности алгебры логики, выразить

1) отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, сумму по модулю 2, эквивалентность, импликацию, стрелку Пирса через штрих Шеффера;

2) отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию, сумму по модулю 2, эквивалентность, импликацию, штрих Шеффера через стрелку Пирса.

4 Нормальные формы

Литералом называется переменная или ее отрицание. Удобно обозначать литерал следующим образом:

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Элементарным конъюнктом называется конъюнкция нескольких литералов $x_{i_1}^{\sigma_1} \wedge x_{i_2}^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^{\sigma_k}$. Элементарный конъюнкт называется *полным*, если он содержит все переменные, входящие в функцию. Дизъюнкция нескольких элементарных конъюнктов называется *дизъюнктивной нормальной формой* (*ДНФ*). Дизъюнкция нескольких полных элементарных конъюнктов называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*).

Элементарным дизъюнктом называется дизъюнкция нескольких литералов $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_{i_k}^{\sigma_k}$. Элементарный дизъюнкт называется *полным*, если он содержит все переменные, входящие в функцию. Конъюнкция нескольких элементарных дизъюнктов называется *конъюнктивной нормальной формой* (*КНФ*). Конъюнкция нескольких полных элементарных дизъюнктов называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*).

Простейший (но весьма громоздкий) способ построения дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм для булевых функций состоит в использовании эквивалентных преобразований:

1) Сначала строится эквивалентная формула, содержащая только операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, используя эквивалентности из предыдущего параграфа: $x \to y = \overline{x} \vee y$, $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$, $x \oplus y = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge \overline{y})$, $x \mid y = \overline{x \wedge y}$, $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$.

2) С помощью законов де Моргана строится эквивалентная формула, содержащая только операции $\wedge$, $\vee$, $\neg$, в которой отрицание относится только к переменным.

3) Раскрываются скобки по законам дистрибутивности: для построения ДНФ используется первый закон дистрибутивности, для построения КНФ — второй.

4) Для построения совершенных нормальных форм (из построенных на третьем шаге ДНФ и КНФ) необходимо добавить недостающие переменные в конъюнкты и дизъюнкты. Если в элементарный конъюнкт/дизъюнкт не входит переменная x, то добавляем ее следующим образом:

$K = K \wedge 1 = K \wedge (x \vee \overline{x}) = K \wedge x \vee K \wedge \overline{x}$ (для построения СДНФ),

$D = D \vee 0 = D \vee (x \wedge \overline{x}) = (D \vee x) \wedge (D \vee \overline{x})$ (для построения СКНФ).

Совершенные дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы можно также построить по таблице истинности функции:

СДНФ: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n):f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}$,

СКНФ: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n):f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0} (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$.

Здесь знак конъюнкции $\wedge$ заменен на $\cdot$, который опускается при записи формулы.

4.1. С помощью эквивалентных преобразований построить ДНФ функции, заданной формулой:

1) $f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 x_2 \vee x_3)$;
2) $f = (\bar{x}_1 x_2 \oplus x_3)(x_1 x_3 \to x_2)$;
3) $f = (x_1 \equiv x_2) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \to x_3))$;
4) $f = (x_1 \downarrow x_2 x_3) \downarrow ((\bar{x}_1 | x_2) \downarrow x_3)$;
5) $f = \overline{x_1 \to (x_2 \to x_3)} \oplus (x_1 | (x_2 \oplus x_3))$;
6) $f = \overline{x_1 \bar{x}_2 \vee x_3} \equiv (x_1 \to x_2 \bar{x}_3)$;
7) $f = (x_1 \vee x_2 \bar{x}_3)(x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(\overline{x_1 x_2} \vee x_3)$;
8) $f = (x_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4)((\bar{x}_1 \vee x_4) \oplus x_2 x_3) \vee \bar{x}_2 (x_3 \vee \overline{x_1 \bar{x}_4})$;
9) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)(x_3 \to x_1 \bar{x}_4)$;

10) $f = (x_1 \downarrow x_2)((x_2 | x_3) \vee x_1\bar{x}_4)(x_1 \downarrow (x_3 | x_4))$.

4.2. С помощью эквивалентных преобразований построить КНФ функции, заданной формулой:

1) $f = ((x_1 \to x_2) \oplus (\bar{x}_1 | x_2))(x_1 \equiv x_2(x_1 \to x_2))$;
2) $f = \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\bar{x}_1 \to x_2)))$;
3) $f = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee (x_1 \to x_2 x_3)$;
4) $f = (\bar{x}_1 \to (x_2 \to x_3)) \oplus x_1\bar{x}_2 x_3$;
5) $f = (x_1 \equiv (x_2 \to x_3)) \vee (x_2 \to x_1 x_3)$;
6) $f = \bar{x}_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_4$;
7) $f = (x_1 \equiv x_2) \vee (x_1 x_3 \equiv x_4) \vee x_2\bar{x}_3$.

4.3. Используя дистрибутивный закон $x(y \vee z) = xy \vee xz$ и эквивалентности $x \cdot x = x$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $x \cdot 0 = 0$, $x \vee 0 = x$ и $x \vee xy = x$, перейти от заданной КНФ функции к ее ДНФ:

1) $f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
2) $f = x_1(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee \bar{x}_3)$;
3) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$;
4) $f = (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$;
5) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
6) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_4)(x_3 \vee \bar{x}_4)$;
7) $f = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_4)$.

4.4. Используя дистрибутивный закон $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ и эквивалентности $x \vee x = x$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \vee 1 = 1$, $x \cdot 1 = x$ и $x(x \vee y) = x$, перейти от заданной ДНФ функции к ее КНФ:

1) $f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3$;
2) $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$;
3) $f = \bar{x}_1 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$;
4) $f = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_1\bar{x}_2 x_3$;
5) $f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3$;
6) $f = x_1 x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_4 \vee x_3 x_4$;
7) $f = x_1 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3\bar{x}_4$.

4.5. Построить из заданной ДНФ функции ее СДНФ:
1) $f = x_1x_2 \vee \bar{x}_3$;
2) $f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3$;
3) $f = x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$;
4) $f = x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$;
5) $f = x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4$;
6) $f = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee x_3\bar{x}_4$;
7) $f = x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_4$.

4.6. Построить из заданной КНФ функции ее СКНФ:
1) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2)x_3$;
2) $f = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)\bar{x}_3$;
3) $f = (\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3)$;
4) $f = x_1\bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)$;
5) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$;
6) $f = (x_1 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \vee x_4)$;
7) $f = x_1\bar{x}_2x_3(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)$.

4.7. С помощью эквивалентных преобразований построить СДНФ функции, заданной формулой:
1) $f = x_1 \vee x_2 \to x_3$;
2) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1|x_2x_3)$;
3) $f = (x_1 \to x_2x_3x_4)(x_3 \to x_1\bar{x}_2)$;
4) $f = (x_1 \oplus x_2)(x_3 \to \bar{x}_2x_4)$.

4.8. С помощью эквивалентных преобразований построить СКНФ функции, заданной формулой:
1) $f = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3$;
2) $f = x_1x_2 \oplus x_3$;
3) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$;
4) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3x_4)$.

4.9. Построить СДНФ функции, заданной таблицей истинности:
1) $f = (1101)$;

2) $f = (1110)$;
3) $f = (0101\,0001)$;
4) $f = (0111\,1000)$;
5) $f = (1000\,1111)$;
6) $f = (0100\,1000\,1100\,0010)$;
7) $f = (1000\,0111\,0011\,0001)$;
8) $f = (1100\,1000\,1001\,0011)$.

4.10. Построить СКНФ функции, заданной таблицей истинности:
1) $f = (0110)$;
2) $f = (1000)$;
3) $f = (0101\,1101)$;
4) $f = (0010\,1110)$;
5) $f = (1001\,1000)$;
6) $f = (0101\,1111\,0111\,0011)$;
7) $f = (0110\,1110\,1110\,0101)$;
8) $f = (1100\,0111\,1110\,1100)$.

5 Сокращенные ДНФ

Импликантой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется конъюнкт $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такой, что $K \vee f = f$ (или $K \to f = 1$). Импликанта функции f называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любого литерала из K получается конъюнкт, не являющийся импликантой функции f. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращенной ДНФ* функции f.

Также среди ДНФ, реализующих функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно выделить:

минимальную ДНФ — ДНФ, состоящую из наименьшего числа литералов среди всех ДНФ функции f;

кратчайшую ДНФ — ДНФ, состоящую из наименьшего числа конъюнктов среди всех ДНФ функции f;

тупиковую ДНФ — такую ДНФ, что отбрасывание любого конъюнкта или литерала из нее приводит к ДНФ, не эквивалентной исходной ДНФ (функции f).

Число конъюнктов в ДНФ называют *длиной ДНФ*. Число литералов в конъюнкте называют *рангом конъюнкта*. Таким образом, минимальная ДНФ — это ДНФ с минимальной суммой рангов, кратчайшая ДНФ — это ДНФ наименьшей длины.

Существует множество методов построения сокращенной ДНФ. В этом параграфе приведем три метода.

Метод Блейка по произвольной ДНФ булевой функции строит сокращенную ДНФ. Он состоит в последовательном применении двух правил-операций, которые применяются слева направо:

1) *правило обобщенного склеивания*: $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2$. Операция обобщенного склеивания применяется до тех пор, пока это возможно. Она применяется как для конъюнктов исходной ДНФ, так и для конъюнктов, которые получились в ходе применения этой операции.

2) *правило поглощения*: $K_1 \vee K_1 K_2 = K_1$. Операция поглощения применяется только тогда, когда на первом шаге перестали получаться новые конъюнкты. Операция применяется до тех пор, пока это возможно.

Построенная после второго шага ДНФ будет сокращенной.

Метод Квайна по данной СДНФ булевой функции строит сокращенную ДНФ. Он также состоит в применении двух правил-операций, которые применяются слева направо:

1) *правило неполного склеивания*: $xK \vee \overline{x}K = xK \vee \overline{x}K \vee K$. Операция применяется к каждой паре конъюнктов ранга n из СДНФ, к которой она применима. После этого переходим к шагу 2.

2) *правило поглощения*: $K \vee x^{\sigma}K = K$ $(\sigma = 0, 1)$. С помощью операции поглощения удаляются конъюнкты ранга n с помощью конъюнктов ранга $n-1$.

После второго шага получается некоторая промежуточная ДНФ D_1. К конъюнктам ранга $n-1$ в D_1 снова применяются операции 1 и 2. Если проведено $k \geq 1$ этапов применения операций 1 и 2, то на $(k+1)$-ом этапе операции неполного склеивания и поглощения применяются к конъюнктам ранга $n-k$ ДНФ D_k. В результате получается ДНФ D_{k+1}. Алгоритм заканчивает работу, когда $D_{k+1} = D_k$. Сокращенной ДНФ будет ДНФ построенная на последнем этапе: D_{k+1}.

Метод Нельсона строит сокращенную ДНФ по КНФ булевой функции:

1) раскрываются скобки с использованием закона дистрибутивности: $x(y \vee z) = xy \vee xz$,

2) полученная на первом шаге ДНФ упрощается с использованием эквивалентностей: $x\overline{x}K = 0$, $xxK = xK$, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

После второго этапа получается сокращенная ДНФ.

5.1. Проверить, какие из конъюктов множества A являются импликантами функции f; проверить, какие из импликант являются простыми импликантами функции f:

1) $A = \{x_1,\, x_2,\, x_1\overline{x}_2\}$, $f = (1011)$;
2) $A = \{x_1,\, \overline{x}_3,\, x_1x_2,\, x_2\overline{x}_3\}$, $f = (0010\,1111)$;
3) $A = \{x_1\overline{x}_2,\, x_2x_3,\, x_1x_2x_3\}$, $f = (0111\,1110)$;
4) $A = \{x_1x_3,\, x_1\overline{x}_3,\, x_2\}$, $f = (0011\,1011)$;
5) $A = \{x_1\overline{x}_2,\, x_2\overline{x}_3,\, \overline{x}_2\}$, $f = (0010\,1111)$;
6) $A = \{x_1,\, \overline{x}_4,\, x_2\overline{x}_3,\, \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_4\}$, $f = (1010\,1110\,0101\,1110)$.

5.2. По заданной ДНФ D с помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ:

1) $D = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$;
2) $D = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3x_4$;
3) $D = x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_3\,\overline{x}_4$;
4) $D = \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4$;
5) $D = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3x_4$;
6) $D = \overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3$;
7) $D = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_4 \vee \overline{x}_2x_4$;
8) $D = x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2x_3$.

5.3. С помощью метода Квайна построить сокращенную ДНФ для функции f, заданной вектором своих значений:

1) $f = (0111\,0110)$;
2) $f = (0010\,1111)$;
3) $f = (1011\,1101)$;
4) $f = (1110\,0100)$;
5) $f = (0001\,1011\,1101\,1011)$;
6) $f = (0000\,1111\,1111\,0110)$;
7) $f = (0000\,1111\,0111\,1111)$;
8) $f = (1111\,1111\,0111\,1110)$.

5.4. По заданной КНФ с помощью метода Нельсона построить сокращенную ДНФ:

1) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;

2) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
3) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
5) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_3 \vee x_1)$;
6) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(x_2 \vee \overline{x}_3)(x_3 \vee \overline{x}_4)(x_4 \vee x_1)$;
7) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4)$;
8) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)$.

6 Геометрическое представление булевых функций

Множество B^n можно рассматривать как множество вершин единичного n-мерного куба. Зафиксируем набор чисел $\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_r}$ из 0 и 1 такой, что $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n$. Множество вершин $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ таких, что $\alpha_{i_1} = \sigma_{i_1}, \alpha_{i_2} = \sigma_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r} = \sigma_{i_r}$ называется $(n-r)$-*мерной гранью* куба B^n.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция от n переменных. Сопоставим такой функции подмножество вершин N_f булева куба B^n такое, что $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_f \Leftrightarrow f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$.

Очевидны следующие свойства указанного соответствия: если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

1) $K_g \subseteq K_f, K_h \subseteq K_f$;

2) $K_f = K_g \cup K_h$;

3) если K — элементарный конъюнкт, то N_K — грань куба B^n.

В частности, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$, то $N_{K_i} \subseteq N_f$ $(1 \leq i \leq m)$ и $N_f = N_{K_1} \cup N_{K_2} \cup \ldots \cup N_{K_m}$.

Таким образом, каждой ДНФ функции f соответствует покрытие множества N_f гранями $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_m}$. Верно и обратное, каждой грани N куба B^n соответствует некоторый элементарный конъюнкт K, и, следовательно, каждому покрытию гранями множества N_f соответствует ДНФ функции f. Покрытие называется *минимальным*, если из него нельзя удалить ни одной грани.

Грань $N_K \subseteq N_f$ называется *максимальной* (относительно N_f), если она не является собственным подмножеством никакой другой грани содержащейся в N_f, т.е. не существует грани $N_{K'}$ такой, что $N_K \subset N_{K'} \subset N_f$ и $N_K \neq N_{K'}$. Элементарный конъюнкт K, соответствующий максимальной грани N_K относительно N_f, является простым импликантом для f. Откуда следует, что покрытие N_f максимальными гранями соответствует сокращенной ДНФ функции f.

Еще один способ построения сокращенных ДНФ для функций, зависящих от небольшого числа переменных, состоит в использовании *минимизирующих карт Карно.* Этим методом удобно пользоваться при числе переменных функции не более четырех. Булева функция задается прямоугольной таблицей, в которой наборы значений переменных на каждой из сторон прямоугольника расположены в коде Грея (0-1 или 00-01-11-10). Значение функции в таблицу вносится в соответствии с набором значений переменных, указанных на пересечении строки и столбца (см. таблицу ниже для функции от 4-х переменных). Простому импликанту функции соответствует максимальный по включению прямоугольник из единиц, длина сторон которого есть степень двойки (т.е. прямоугольники могут иметь стороны: 1×1, 1×2, 1×4, 2×2, 2×4, 4×4). Кроме того, считается, что каждая клетка таблицы, примыкающая к одной из сторон прямоугольной таблицы, является соседней к клетке, примыкающей к противоположной стороне прямоугольной таблицы и расположенной на той же горизонтали или вертикали. Каждый прямоугольник соответствует грани n-мерного куба B^n и задается условиями: $x_{i_1} = \sigma_{i_1}$, $x_{i_2} = \sigma_{i_2}$, $\ldots$, $x_{i_r} = \sigma_{i_r}$. В этом случае ему соответствует конъюнкт $K = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$.

x_3 / x_4 / $x_1\ x_2$	0 / 0	0 / 1	1 / 1	1 / 0
0 0	$f(0,0,0,0)$	$f(0,0,0,1)$	$f(0,0,1,1)$	$f(0,0,1,0)$
0 1	$f(0,1,0,0)$	$f(0,1,0,1)$	$f(0,1,1,1)$	$f(0,1,1,0)$
1 1	$f(1,1,0,0)$	$f(1,1,0,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(1,1,1,0)$
1 0	$f(1,0,0,0)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,0,1,0)$

6.1. Построить сокращенную ДНФ функции f, используя геометрическое изображение N_f в n-мерном кубе B^n:

1) $f = (1111\,0100)$;

2) $f = (1101\,0011)$;
3) $f = (0101\,0011)$;
4) $f = (1110\,0111)$;
5) $f = (1111\,1000\,0100\,1100)$;
6) $f = (1111\,1111\,1111\,1000)$;
7) $f = (1110\,0110\,0000\,0111)$;
8) $f = (0001\,0111\,1110\,1111)$.

6.2. Найти все минимальные покрытия гранями множества N_f в n-мерном кубе B^n для заданных булевых функций:
1) $f = (1011\,0100)$;
2) $f = (1101\,1011)$;
3) $f = (0111\,0011)$;
4) $f = (1011\,1101)$;
5) $f = (1001\,1000\,0100\,1100)$;
6) $f = (1111\,1011\,1111\,1000)$;
7) $f = (0110\,0010\,0000\,0111)$;
8) $f = (1001\,1111\,1110\,1111)$.

6.3. Построить сокращенную ДНФ функции f с помощью минимизирующей карты Карно:
1) $f = (0101\,0111)$;
2) $f = (1011\,0000)$;
3) $f = (1101\,1011)$;
4) $f = (1110\,1111)$;
5) $f = (0001\,1011\,1101\,1111)$;
6) $f = (0011\,1101\,1111\,1101)$;
7) $f = (0011\,1101\,1101\,1110)$;
8) $f = (0010\,1011\,1101\,1111)$.

7 Тупиковые, минимальные и кратчайшие ДНФ

ДНФ функции f называется *тупиковой*, если отбрасывание любого литерала или любого элементарного конъюнкта дает ДНФ, не эквивалентную функции f. Для построения всех тупиковых ДНФ функции f можно воспользоваться *таблицами Квайна*. Строки таблицы Квайна для функции f соответствуют простым импликантам этой функции, а столбцы — наборам значений аргументов, при которых функция принимает значение 1. На пересечении строки, соответствующей простому импликанту K, и столбца, соответствующего набору аргументов α, стоит значение $K(\alpha)$.

По таблице составляем КНФ, в которой каждый элементарный дизъюнкт соответствует одному столбцу таблицы и включает в качестве слагаемых символы тех простых импликант, для которых в рассматриваемом столбце таблицы стоит "1". Используя законы дистрибутивности, законы поглощения и соотношение $x \cdot x = x$, приводим КНФ к некоторой ДНФ, в которой упрощения вида $x \vee xy = x$ невозможны. Каждому элементарному конъюнкту в полученной ДНФ соответствует одна тупиковая ДНФ функции f, состоящая из простых импликант, символы которых входят в рассматриваемый элементарный конъюнкт.

Напомним, что *кратчайшей ДНФ* функции f называется ДНФ имеющая наименьшее число элементарных конъюнктов среди всех ДНФ эквивалентных функции f. *Минимальной ДНФ* функции f называется ДНФ имеющая наименьшее число литералов среди ДНФ эквивалентных функции f. Кратчайшие и минимальные ДНФ являются тупиковыми.

Тупиковые ДНФ можно искать, используя также геометрическо представление булевой функции f. Покрытие множества N_f, состоящее из максимальных (относительно N_f) граней, называется *непри-*

водимым, если совокупность граней, получающаяся из исходной путем выбрасывания любой грани, не будет покрытием N_f. ДНФ, соответствующая неприводимому покрытию множества N_f, является тупиковой.

Аналогично, в случае *минимизирующих карт Карно* при построении тупиковой ДНФ функции отыскиваться “неприводимая” совокупность “прямоугольников”, покрывающая все единицы.

7.1. Привести пример булевой функции, у которой кратчайшая ДНФ не является минимальной.

7.2. Привести пример булевой функции, у которой минимальная ДНФ не является кратчайшей.

7.3. По заданной сокращенной ДНФ D построить все тупиковые, кратчайшие и минимальные ДНФ:

1) $D = xy \vee \bar{x}\bar{z} \vee y\bar{z}$;
2) $D = \bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}zw \vee x\bar{y}w \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{w}$;
3) $D = x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}y\bar{w} \vee \bar{x}\bar{z}\bar{w} \vee \bar{y}\bar{z}\bar{w}$;
4) $D = \bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{w}$;
5) $D = \bar{z}w \vee \bar{y}w \vee xw \vee yz\bar{w} \vee xyz$;
6) $D = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{z}w \vee \bar{y}w \vee \bar{x}w$;
7) $D = \bar{x}z \vee yz \vee xy \vee \bar{x}\bar{y}w \vee \bar{y}zw \vee xzw$;
8) $D = \bar{x}z \vee \bar{y}w \vee xy \vee yz \vee xw \vee zw$.

7.4. С помощью таблицы Квайна построить все тупиковые, кратчайшие и минимальные ДНФ функции f, заданной своим вектором значений:

1) $f = (0111\,1100)$;
2) $f = (0111\,1110)$;
3) $f = (0001\,1111)$;
4) $f = (1111\,1000\,0100\,1100)$;
5) $f = (1110\,1000\,0110\,1000)$;

6) $f = (1110\,0110\,0001\,0101)$;
7) $f = (0001\,0111\,1010\,1110)$;
8) $f = (0001\,1011\,1110\,0111)$.

7.5. Используя геометрическое изображение N_f в n-мерном кубе B^n, построить все тупиковые, кратчайшие и минимальные ДНФ функций, заданных в номере 6.1.

7.6. С помощью минимизирующей карты Карно построить все тупиковые, кратчайшие и минимальные ДНФ функций, заданных в номере 6.2.

8 Классы функций T_0 и T_1

Замыканием $[K]$ множества (класса) функций K называется совокупность функций, которые можно задать формулами над K. Если $[K] = K$, то класс функций K называется *замкнутым.*

Функция f *сохраняет константу 0* (*константу 1*), если выполняетя $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ ($f(1, 1, \ldots, 1) = 1$, соответственно). Класс функций, сохраняющих 0, обозначается T_0, а сохраняющих 1 — T_1. Оба класса являются замкнутыми и предполными, т.е. не содержатся ни в каком другом собственном замкнутом классе функций. Определения данных классов накладывают ограничения на значения функции ровно на одном наборе аргументов, следовательно, всего существует 2^{2^n-1} функций от n переменных в каждом из классов.

8.1. Найти число булевых функций от n переменных, содержащихся в $T_0 \cap T_1$ и $T_0 \cup T_1$.

8.2. Доказать, что классы функций T_0 и T_1 замкнуты.

8.3. Выяснить, принадлежит ли функция f классам T_0 и T_1:
1) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$;
2) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$;
3) $f = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1))$;
4) $f = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2$;
5) $f = (x_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2$;
6) $f = \overline{\overline{x}_1x_2}\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_1x_2x_3$;
7) $f = (1001\,0110)$;
8) $f = (1101\,1001)$;
9) $f = (1000\,0111\,1111\,0111)$;
10) $f = (0001\,1101\,1001\,1011)$.

8.4. При каких n функция f принадлежит классам T_0 и T_1:
1) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f = \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\right) \oplus x_n x_1$;

3) $f = \bigoplus\limits_{1 \le i < j \le n} x_i x_j$;

4) $f = \bigoplus\limits_{1 \le i < j \le n} (x_i \vee x_j)$;

5) $f = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

6) $f = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} (x_i \to (x_{i+1} \to x_{i+2}))$;

7) $f = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} ((x_i \to x_{i+1}) \to x_{i+2})$;

8) $f = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} (x_i \oplus x_{i+1} x_{i+2})$;

9) $f = \bigoplus\limits_{1 \le i < j < k \le n} (x_i x_j x_k)$;

10) $f = \bigoplus\limits_{1 \le i < j < k \le n} (x_i x_j \vee x_j x_k \vee x_i x_k)$;

11) $f = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$, где $\varphi_i \in T_1$ и самодвойственны, т.е. обладают свойством $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\varphi}_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$.

8.5. Доказать, что

1) $[\{x \vee y,\, x \oplus y\}] = T_0$;

2) $[\{x \vee y,\, x \equiv y\}] = T_1$;

3) $[\{xy,\, x \equiv y\}] = T_1$;

4) $[\{xy \oplus z\}] = T_0$;

5) $[\{xy \vee yz \vee xz,\, x \oplus y\}] = T_0$.

8.6. Система функций A называется базисом класса K, если $[A] = K$ и для любой собственной подсистемы A' системы A не верно, что $[A'] = K$. Верно ли, что множество A является базисом для K:

1) $A = \{xy \equiv z\}$, $K = T_1$;

2) $A = \{xy \vee z\}$, $K = T_0$;

3) $A = \{x \vee y,\, x\overline{y}\}$, $K = T_0$;

4) $A = \{x \equiv (yz \vee zt \vee ty)\}$, $K = T_1$.

9 Класс самодвойственных функций

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если выполняется условие: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Другими словами, функция самодвойственная тогда и только тогда, когда на противоположных наборах значений переменных она принимает противоположные значения. Таким образом, самодвойственная функция полностью определяется своими значениями на $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ наборах аргументов, и, следовательно, существует $2^{2^{n-1}}$ самодвойственных функций от n переменных. Класс самодвойственных функций обозначается S. Он является замкнутым и предполным. Имеет место лемма о несамодвойственной функции.

Лемма 9.1 (О несамодвойственной функции) *Если $f \notin S$, то подставляя вместо переменных функции x и $\overline{x}$ можно получить константу.*

9.1. Доказать, что класс самодвойственных функций замкнут.

9.2. Доказать лемму о несамодвойственной функции.

9.3. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:
1) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$;
2) $f = x_1 \vee x_2$;
3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
4) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee x\overline{y}z$;
5) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee xyz$;
6) $f = x_1 \to x_2$;
7) $f = x_1 \oplus x_2$;
8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2 \oplus x_3$;
9) $f = x_1x_2 \vee x_3$;
10) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3)$;
11) $f = x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \vee x_2)$;

12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$;
13) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\overline{x_3} \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$;
14) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus x_3$;
15) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_2 \to x_1)$.

9.4. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:
1) $f = (1010)$;
2) $f = (1001)$;
3) $f = (1001\,0110)$;
4) $f = (0110\,0110)$;
5) $f = (0111\,0001)$;
6) $f = (0100\,1101)$;
7) $f = (1100\,1001\,0110\,1100)$;
8) $f = (1110\,0111\,0001\,1000)$;
9) $f = (1000\,0011\,1000\,1100)$;
10) $f = (1001\,1011\,1011\,1001)$;
11) $f = (1100\,0011\,1010\,0101)$;
12) $f = (1100\,0011\,0011\,1100)$;
13) $f = (1001\,0110\,1001\,0110)$;
14) $f = (1101\,0100\,1011\,0010)$;
15) $f = (1010\,0101\,0101\,1010)$.

9.5. Определить, какие из переменных функции f следует заменить на x, а какие на $\bar{x}$, чтобы получить константу, указанную в лемме о несамодвойственной функции:
1) $f = (1011\,0110)$;
2) $f = (1101\,1000)$;
3) $f = (1010\,0100)$;
4) $f = (1100\,1110)$;
5) $f = (0110\,1000\,1110\,1011)$;
6) $f = (1000\,1101\,0010\,1100)$;
7) $f = (1001\,0110\,1001\,1010)$;
8) $f = (0111\,0001\,0011\,0001)$.

9.6. При каких $n \geq 2$ функция f является самодвойствнной:

1) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;

2) $f = \bigvee\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$;

3) $f = \bigoplus\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$;

4) $f = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$;

5) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \oplus (x_4 \vee x_5 \vee x_6) \oplus \ldots \oplus (x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n)$, $n = 3k$;

5) $f = (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1) \oplus (x_4x_5 \vee x_5x_6 \vee x_6x_4) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (x_{n-2}x_{n-1} \vee x_{n-1}x_n \vee x_nx_{n-2})$, $n = 3k$;

6) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

7) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n) \oplus (x_n \to x_1) \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.

10 Многочлены Жегалкина и линейные функции

Сумма по модулю 2 попарно различных элементарных конъюнктов, не содержащих отрицаний, называется *полиномом Жегалкина*. Константа 1 считается по определению элементарным конъюнктом, не содержащим отрицаний. Сумма, содержащая 0 элементарных конъюнктов, также считается полиномом Жегалкина, и, по определению, этот полином равен константе 0. Наибольший из рангов, входящих в полином, называется *степенью* этого *полинома*. Степень полинома 0 считается неопределенной.

Теорема 10.1 (И.И. Жегалкин) *Любая булева функция единственным образом представима в виде полинома Жегалкина.*

Здесь единственность понимается с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в элементарных конъюнктах.

Приведем несколько методов построения полиномов Жегалкина.

Далее мы будем использовать следующую нумерацию элементарных конъюнктов от n переменных: K_i содержит x_j в качестве сомножителя тогда и только тогда, когда в j разряде двоичного разложении числа i стоит 1.

Метод неопределенных коэффициентов. Пусть $P(x)$ полином Жегалкина для некоторой булевой функции $f(x)$ от n переменных. Его можно записать в виде:

$$P(x) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot K_1 + \ldots + \alpha_{2^n-1} K_{2^n-1}.$$

Для каждого набора $\alpha \in B^n$ составляется уравнение $f(\alpha) = P(\alpha)$. Получатся невырожденная система из 2^n уравнений содержащая 2^n неизвестных α_0, α_1, $\ldots$, α_{2^n-1}, которая имеет единственное решение.

Метод преобразования вектора значений. Индукцией по n, определим операцию T над векторами из B^{2^n}.

Если $n = 1$ и $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$, то $T(\alpha) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$.

Пусть операция T уже определена для векторов из B^{2^n} определим ее для векторов из $B^{2^{n+1}}$.

Если $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1})$, и

$$T((\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1}),$$

$$T((\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1})) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}),$$

то $T(\alpha) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1}, \gamma_0 + \delta_0, \gamma_1 + \delta_1, \ldots, \gamma_{2^n-1} + \delta_{2^n-1})$.

Если α_f — вектор значений функции f, а β_P — вектор коэффициентов полинома Жегалкина, то $\alpha_f = T(\beta_P)$ и $\beta_P = T(\alpha_f)$.

Метод эквивалентных преобразований. Любую функцию f можно задать в виде формулы над $\{\&, \vee, \overline{}\}$. Используя соотношение $x \vee y = \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$, следует избавиться от дизъюнкций в выражении. Далее, используя эквивалентность $\overline{x} = x + 1$ необходимо избавится от отрицаний. Затем, раскрыть скобки, воспользовавшись законом дистрибутивности $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$. И наконец, упростить полученное выражение, используя соотношения $x \cdot x = x$, $x \cdot 1 = x$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$.

Функция $f(x)$ называется *линейной*, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, т.е.

$$f(x) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n.$$

Класс всех линейных функций обозначается через L. Число линейных функций от n переменных равно 2^n. Класс L является замкнутым и предполным. Если $f \notin L$, то булева функция f называется *нелинейной*. Имеет место лемма о нелинейной функции.

Лемма 10.1 (О нелинейной функции) *Для $f \notin L$, подставляя вместо переменных функции* 0, 1, x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$ *можно получить* xy *или* $\overline{xy}$.

10.1. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для функций:

1) $f = x_1 | x_2$;
2) $f = (0100)$;
3) $f = x_1(x_2 \vee \overline{x}_3)$;
4) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$;
5) $f = (1001\,0110)$;
6) $f = (1110\,1000)$;
7) $f = (0000\,0111)$;
8) $f = (0110\,0110)$;
9) $f = (1000\,0000\,0000\,0001)$;
10) $f = (0001\,0001\,0010\,0000)$.

10.2. Методом преобразования вектора значений найти полиномы Жегалкина для функций:

1) $f = (1000)$;
2) $f = (0010)$;
3) $f = (0110\,1110)$;
4) $f = (1011\,0111)$;
5) $f = (1010\,0110)$;
6) $f = (1110\,1000)$;
7) $f = (0000\,0100\,0110\,0111)$;
8) $f = (1010\,1010\,1011\,0110)$;
9) $f = (0100\,0000\,0001\,0001)$;
10) $f = (0000\,0001\,0001\,0001)$.

10.3. Методом эквивалентных преобразований найти полиномы Жегалкина для функций:

1) $f = x_1 \to (x_2 \to \overline{x_1} x_2)$;
2) $f = x_1(x_2 \equiv x_3 \overline{x}_2)$;
3) $f = (x_1 \downarrow x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

4) $f = (x_1 \vee x_2)(x_2 | x_3)$;
5) $f = x_1 \downarrow ((x_1 \to \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3)$;
6) $f = (x_1 \to (x_2 \to x_3))((x_1 \to x_2) \to x_3)$;
7) $f = (x_1 \oplus x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;
8) $f = (x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_1 x_4)$;
9) $f = x_1 \vee (x_2 \to ((x_3 \to x_2) \to x_4))$;
10) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1 x_2 x_3$.

10.4. Методом эквивалентных преобразований СДНФ найти полиномы Жегалкина для функций:
1) $f = (1001)$;
2) $f = (1101)$;
3) $f = (0101\,1010)$;
4) $f = (0101\,0111)$;
5) $f = (1110\,0001)$;
6) $f = (1010\,1111)$;
7) $f = (0011\,1100\,1100\,0011)$;
8) $f = (0001\,1000\,1000\,0001)$.

10.5. Доказать, что число линейных функций от n переменных равно 2^n.

10.6. Найти число линейных функций существенно зависящих от n переменных.

10.7. Доказать, что класс линейных функций замкнут.

10.8. Доказать лемму о нелинейной функции.

10.9. Выяснить являются ли линейными функции:
1) $f = (1001)$;
2) $f = (1101)$;
3) $f = (1001\,0110)$;
4) $f = (1100\,0011)$;
5) $f = (1010\,0110)$;

6) $f = (1010\,0101)$;
7) $f = (1100\,1001\,0110\,1001)$;
8) $f = (1001\,0110\,0110\,1001)$;
9) $f = (0110\,1001\,0110\,1001)$;
10) $f = (1010\,0101\,1001\,1100)$;
11) $f = (1010\,0101\,0101\,1010)$;
12) $f = (1010\,0110\,0110\,0101)$;
13) $f = (0011\,1100\,1100\,0011)$;
14) $f = (1001\,1001\,0110\,0110)$.

10.10. Подставляя на места переменных нелинейной функции f функции 0, 1, x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, получить при помощи леммы о нелинейной функции одну из функций xy или $\overline{xy}$:
1) $f = x_1 \to x_2$;
2) $f = x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_3x_1$;
3) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$;
4) $f = (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3) \oplus \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;
5) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$;
6) 4) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\bar{x}_2 \vee x_3)$.

11 Класс монотонных функций

Определим отношение *частичного порядка* на наборах из B^n. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ два набора из B^n. Будем говорить, что $\alpha \le \beta$, если соответствующее неравенство выполняется покомпонентно, т.е. если $\alpha_i \le \beta_i$ для всех i от 1 до n.

Булева функция f называется *монотонной* если для любых двух наборов аргументов α и β таких, что $\alpha \le \beta$ имеет место $f(\alpha) \le f(\beta)$. В противном случае функция f называется *немонотонной.* Множество всех монотонных булевых функций обозначается через M. Класс монотонных функций является замкнутым и предполным. Справедлива лемма о немонотонной функции.

Лемма 11.1 (О немонотонной функции) *Если $f \notin M$, то подставляя вместо переменных функции 0, 1 и x можно получить $\overline{x}$.*

Проверку на монотонность булевой функции заданной своим вектором значений $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{2^n-1})$ удобно проводить следующим образом. Разделим вектор f на две равные части, которые обозначим $f^0 = (f_0, f_1, \ldots f_{2^{n-1}-1})$, $f^1 = (f_{2^{n-1}}, f_{2^{n-1}+1}, \ldots, f_{2^{n-1}-1})$ и сравним их. Если не верно, что $f^0 \le f^1$, то функция f не является монотонной, в противном случае продолжаем процедуру. На очередном шаге, каждый вектор f^σ полученный на предыдущем шаге делим на две равные части $f^{\sigma 0}$, $f^{\sigma 1}$ и сравниваем их между собой. Если хотя бы для одной из пар не верно, что $f^{\sigma 0} \le f^{\sigma 1}$, то функция f не является монотонной. Продолжаем процедуру до тех пор, пока получившиеся вектора можно делить пополам. Если ни на одном из шагов не получим, что функция не является монотонной, т.е. если все проверяемые неравенства верны, то функция f является монотонной.

11.1. Доказать, что класс монотонных функций замкнут.

11.2. Доказать лемму о немонотонной функции.

11.3. Доказать, что функция монотонна тогда и только тогда, когда у нее существует ДНФ не содержащая отрицаний.

11.4. Доказать, что функция монотонна тогда и только тогда, когда у нее существует КНФ не содержащая отрицаний.

11.5. Доказать, что функция монотонна тогда и только тогда, когда её сокращенная ДНФ не содержит отрицаний.

11.6. Выяснить, является ли данная функция f монотонной:
1) $f = (0110)$;
2) $f = (0011\,0111)$;
3) $f = (0101\,0111)$;
4) $f = (0110\,0110)$;
5) $f = (0001\,0111)$;
6) $f = (0101\,0011)$;
7) $f = (0010\,0011\,0111\,1111)$;
8) $f = (0001\,0101\,0111\,0111)$.

11.7. Проверить, является ли данная функция f монотонной:
1) $f = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \equiv x_2)$;
2) $f = x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
3) $f = x_1 \to (x_1 \to x_2)$;
4) $f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3$;
5) $f = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
6) $f = (x_1 \oplus x_2)x_1x_2$;
7) $f = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$;
8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_1$.

11.8. При каких $n \geq 1$ данная функция является f монотонной:
1) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;
2) $f = \bigoplus\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j$;

3) $f = x_1 x_2 \dots x_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n)$;
4) $f = x_1 x_2 \dots x_n \oplus \bigoplus\limits_{1 \le i \le n} x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$;
5) $f = \bigoplus\limits_{m=1}^{n} \bigoplus\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$.

11.9. Подставляя на места переменных немонотонной функции f функции 0, 1, x, получить при помощи леммы о немонотонной функции $\overline{x}$:
1) $f = x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2$;
2) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$;
2) $f = x_1 x_2 \oplus x_3$;
2) $f = x_1 \vee x_2 \bar{x}_3$;
5) $f = x_1 x_3 \oplus x_2 x_4$;
1) $f = (x_1 x_2 x_4 \to x_2 x_3) \oplus x_4$.

11.10. Найти число монотонных функций:
1) от 3-х переменных;
2) от 4-х переменных;
3) от 5-и переменных;
4) от 6-и переменных;
5) от 7-и переменных;
6) от 8-и переменных;
7) от 9-и переменных.

12 Полнота и замкнутые классы

Система (множество) функций K называется *полной* если ее замыкание совпадает со всем множеством булевых функций. Иначе говоря, суперпозицией функций из K можно получить любую булеву функцию.

Для проверки множества функций на полноту можно воспользоваться следующим критерием.

Теорема 12.1 (Э.Пост) *Система булевых функций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов* T_0, T_1, L, S, M.

Пользоваться этим критерием удобно следующим образом. Для системы функций составляется таблица в которой столбцы соответствуют пяти предполным классам, а строки — функциям исследуемой системы. На пересечении строки таблицы, соответствующей функции f, и столбца, соответствующего классу K, ставится "+" если $f \in K$, в противном случае ставится знак "−". Согласно критерию Поста, система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце есть хотя бы один знак минус.

Система функций A называется *базисом*, если она полна, и никакая собственная подсистема системы не является полной.

Если система A является полной, то описанная выше таблица может использоваться для нахождения всех базисов содержащихся в системе A. Не трудно видеть, что задача нахождения базиса по указанной таблице аналогична задаче нахождения минимального покрытия в разделе 7, и может быть решена аналогичным образом. А именно, по таблице составляем КНФ K, в которой каждый элементарный дизъюнкт соответствует одному столбцу таблицы, и включает в качестве слагаемых символы тех функций, для которых в таблице стоит "−", в рассматриваемом столбце. Используя законы дистрибутивности, законы поглощения и соотношение $x \cdot x = x$

приводим КНФ K к некоторой ДНФ D, в которой упрощения вида $x \vee xy = x$ невозможны. Каждому элементарному конъюнкту в D соответствует один базис, состоящий из функций символы которых входят в рассматриваемый элементарный конъюнкт.

12.1. Выяснить является ли система функций полной:
1) $F = \{xy,\, x \vee y,\, x \oplus y,\, xy \vee yz \vee zx\}$;
2) $F = \{xy,\, x \vee y,\, x \oplus y,\, xy \vee yz \vee zx\}$;
3) $F = \{1,\, \overline{x},\, x(x \equiv y) \oplus \overline{x}(y \oplus z),\, x \equiv y\}$;
4) $F = \{0,\, \overline{x},\, x(y \oplus z) \oplus (yz)\}$;
5) $F = \{\overline{x},\, x(y \equiv z) \equiv (y \vee z),\, x \oplus y \oplus z\}$;
6) $F = \{\overline{x},\, x(y \equiv z) \equiv yz,\, x \oplus y \oplus z\}$;
7) $F = \{xy(x \oplus y),\, xy \oplus y \oplus z\}$;
8) $F = \{1,\, xy(x \oplus z)\}$;
9) $F = \{1,\, x \to y, \overline{x} \to \overline{y}x,\, x \oplus y \oplus z\}$;
10) $F = \{x \to y,\, x \oplus y\}$.

12.2. Выяснить является ли система функций полной:
1) $F = \{(0110),\, (1100\,0011),\, (1001\,0110)\}$;
2) $F = \{(0111),\, (0101\,1010),\, (0111\,1110)\}$;
3) $F = \{(0111),\, (1001\,0110)$;
4) $F = \{(0101),\, (1110\,1000),\, (0110\,1001)\}$;
5) $F = \{(1001),\, (1110\,1000)\}$;
6) $F = \{(11),\, (0111),\, (0011\,0111)\}$;
7) $F = \{(10),\, (0011\,0111)\}$;
8) $F = \{(11),\, (00),\, (0011\,0101)\}$;
9) $F = \{(0111),\, (1011),\, (1000\,0001)\}$;
10) $F = \{(0110),\, (1001),\, (1000\,0001)\}$.

12.3. Является ли система функций базисом?
1) $F = \{x \to y,\, x \oplus y,\, x \vee y\}$;
2) $F = \{0,\, 1,\, x \oplus y \oplus z,\, x \vee y\}$;

3) $F = \{x \oplus y \oplus yz,\ x \oplus y \oplus 1\}$;
4) $F = \{xy \equiv z,\ xy \oplus z,\ xy \vee z\}$;
5) $F = \{x \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ xy \oplus yz \oplus zx,\ \overline{x}\}$;
6) $F = \{x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus yz \oplus zx,\ 0,\ 1\}$;
7) $F = \{x \oplus y,\ x \equiv yz\}$;
8) $F = \{xy \oplus yz \oplus zt,\ 0,\ 1,\ x \vee y\}$.

12.4. Выяснить является ли система функций полной. Если является полной, то найти все базисы содержащиеся в ней.

1) $f_1 = (x_2 \to x_3x_4) \to x_1x_3,\ f_2 = (1001\,1001\,0110\,0110)$, $f_3 = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3) \to x_2x_3,\ f_4 = (x_3 \oplus x_1)\overline{x}_2$;

2) $f_1 = x_1 \to (x_3 \to x_2),\ f_2 = (0011\,1100\,0011\,1100)$, $f_3 = (x_1 \to (x_2 \oplus x_3 \oplus x_2x_3)) \to x_2x_4,\ f_4 = \overline{x_1\overline{x}_2}$;

3) $f_1 = (x_1 \vee x_2x_3) \oplus x_1x_2,\ f_2 = (1100\,1100\,0011\,0011)$, $f_3 = (\overline{x}_2 \vee (x_1 \oplus x_3 \oplus x_1x_3)) \to x_3x_4,\ f_4 = x_1\overline{x}_2 \to x_1$;

4) $f_1 = x_1x_2 \vee (x_2 \oplus x_1x_3),\ f_2 = (1001\,1001\,1001\,1001)$, $f_3 = (\overline{x}_2\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \to x_2x_4,\ f_4 = x_1x_2 \to \overline{x}_1$.

12.5. Функция называется *шефферовой*, если она образует базис. При каких $n \geq 2$ функция является шефферовой:

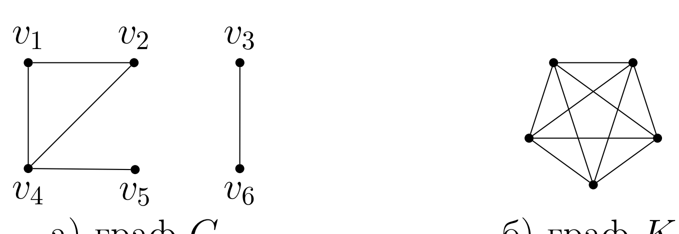
1) $f = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$;
2) $f = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n$;
3) $f = \bigvee\limits_{1 \leq i < j \leq n} \overline{x}_i\overline{x}_j$;
4) $f = 1 \oplus \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_ix_j$;
5) $f = 1 \oplus (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n) \oplus (x_n \to x_1)$;
6) $f = 1 \oplus (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n)$;
7) $f = (x_1|x_2) \oplus (x_2|x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1}|x_n) \oplus (x_n|x_1)$;
8) $f = (x_1|x_2) \oplus (x_2|x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1}|x_n)$;
9) $f = x_1x_2\ldots x_n \oplus (x_1 \to x_2)\&(x_2 \to x_3)\&\ldots$
$\ldots\&(x_{n-1} \to x_n)\&(x_n \to x_1)$.

12.6. Выяснить, полна ли система функций:
1) $F = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;
2) $F = (L \cap T_0 \cap T_1) \cup (S \setminus (T_0 \cap T_1))$;
3) $F = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;
4) $F = (L \cap T_1) \cup (S \setminus T_0)$;
5) $F = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;
6) $F = (M \setminus T_0) \cup (S \setminus L)$;
7) $F = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;
8) $F = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$;
9) $F = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;
10) $F = (M \cap S) \cup (T_0 \setminus M) \cup (T_1 \cap S)$.

13 Простейшие свойства графов и понятие изоморфизма

Графом называется пара множеств $G = (V, E)$, где V — произвольное непустое множество и E — множество двухэлементных подмножеств множества V. Элементы множества V называются *вершинами графа*, элементы множества E называются *ребрами графа*. Будем рассматривать графы только с конечным множеством вершин. Если $e = \{u, v\}$ — ребро графа, то вершины u и v называются концами ребра e. В этом случае говорят, что ребро e соединяет вершины u и v, а эти вершины называются *смежными*. Также говорят, что ребро e *инцидентно* вершинам u и v, а вершины u и v *инцидентны* ребру e. Отметим два крайних случая: граф называется *полным*, если любые две его вершины смежны, и *пустым*, если множество его ребер пусто. Полный граф с n вершинами обозначается K_n, пустой граф с n вершинами — N_n.

Любой граф $G = (V, E)$ может быть изображен на плоскости. Вершины графа представляются точками, а любое ребро e, инцидентное вершинам u и v, изображается кривой, соединяющей точки, соответствующие этим вершинам. Например, граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ и $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_6\}\}$, и граф K_5 могут быть изображены следующим образом.



а) граф G б) граф K_5

Рис. 1. Примеры изображения графов

Графы $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются *изоморфными*, записывается как $G \simeq G'$, если существует такая биекция $\varphi : V \longrightarrow V'$, что
$$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E'.$$

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом графа* $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Другими словами, подграф — это часть графа, которая сама является графом.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер графа G
$$W = v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_k v_{k+1},$$
где ребра имеют вид $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ $(i = \overline{1, k})$. Число k называется *длиной маршрута* W. Если $v_1 = v_{k+1}$, то маршрут называется *замкнутым*. Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь называется *простой*, если в ней все вершины, кроме, возможно, первой и последней, различны. Замкнутая цепь называется *циклом*. Замкнутая простая цепь называется *простым циклом*.

Вершины u и v называются *связанными*, если $u = v$ или существует маршрут, их соединяющий. Граф $G = (V, E)$ называется *связным*, если для любых двух вершин u и v существует маршрут, соединяющий эти вершины. То есть граф связный, если любые две его вершины связаны. *Компонентой связности* графа G называется максимальный связный подграф графа G.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ — графы, причем $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. *Объединением графов* G_1 и G_2 называется граф $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. *Суммой графов* G_1 и G_2 называется граф $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2)$, то есть к $E_1 \cup E_2$ добавляются все ребра, соединяющие каждую вершину из V_1 с каждой вершиной из V_2. *Дополнением графа* $G = (V, E)$ называется граф $\overline{G}$ с множеством вершин V, в котором вершины u и v смежны тогда и только тогда, когда они несмежны в G.

Реберным графом непустого графа $G = (V, E)$ называется граф $L(G)$ с множеством вершин E, причем вершины e_1 и e_2 графа $L(G)$ смежны тогда и только тогда, когда ребра e_1 и e_2 графа G смежны.

Приведем еще несколько семейств графов. *Полный двудольный граф* $K_{m,n}$ — граф, множество вершин которого может быть разбито на два подмножества, содержащих m и n вершин, причем любая пара вершин, лежащих в одном множестве, не смежна, а любая пара вершин, лежащих в разных множествах, смежна. То есть, $K_{m,n} = N_m + N_n$. Подграф графа $K_{m,n}$ называется *двудольным графом. Циклический граф* C_n — граф, содержащий n вершин и имеющий ровно один цикл, проходящий через все вершины. *Колесо* W_n — граф, состоящий из C_{n-1} и еще одной вершины, смежной со всеми остальными вершинами. То есть, $W_n = C_{n-1} + N_1$. Граф, соответствующий n-мерному кубу, обозначается E_n.

13.1. Пусть G_n — граф с n вершинами, причем вершины i и j смежны в точности тогда, когда НОД$(i, j) = \min(i, j)$. Изобразить графы G_4 и G_6. Записать матрицы смежности графов G_4 и G_6. Показать, что при $m \leq n$ граф G_m является подграфом в G_n.

13.2. Найти матрицы смежности графов K_n, N_n и C_n.

13.3. Описать связь между матрицами смежности графа и его дополнения.

13.4. Чем характерна матрица смежности двудольного графа?

13.5. Доказать "лемму о рукопожатиях": сумма степеней всех вершин любого графа равна удвоенному количеству его ребер.

13.6. Доказать, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

13.7. Доказать, что если в графе ровно две вершины нечетной степени, то они лежат в одной компоненте связности графа.

13.8. Найти количество ребер в графе K_n.

13.9. Доказать, что если граф с n вершинами изоморфен своему дополнению, то $n = 4k$ или $n = 4k+1$. Найти все графы, изоморфные своему дополнению, для $n = 4$ и $n = 5$.

13.10. Доказать, что в любом графе с $n \geq 2$ вершинами существуют по крайней мере 2 вершины с одинаковыми степенями.

13.11. Доказать, что для всякого $n \geq 3$ существует n-вершинный связный граф, содержащий $n-1$ вершин с неравными друг другу степенями.

13.12. Для произвольного графа доказать, что граф и его дополнение не могут быть одновременно несвязными.

13.13. Доказать, что реберный граф связного графа связен.

13.14. Доказать, что для произвольных графов G и H справедливы равенства:
1) $\overline{G \cup H} = \overline{G} + \overline{H}$;
2) $\overline{G + H} = \overline{G} \cup \overline{H}$.

13.15. Найти все неизоморфные друг другу графы, в которых:
1) 3 вершины;
2) 4 вершины;
3) 5 вершин и нет изолированных вершин.

13.16. Для графов из предыдущей задачи укажите связные и не связные графы. Для не связных графов определите количество компонент связности.

13.17. Найти все попарно не изоморфные 6-вершинные графы, состоящие:
1) из 4 компонент связности;
2) из 3 компонент связности;

3) из одной компоненты связности и имеющие 7 ребер и 2 висячие вершины.

13.18. Если графы G и H изоморфны, то для каждого $d \geq 0$ число вершин степени d в графах G и H одинаково. Доказать, что:

1) если в графах не более 4 вершин, то верно и обратное утверждение;

2) если в графах 5 и более вершин, то обратное утверждение не верно.

13.19. Обозначим $n_i(G)$ число вершин степени i в графе G. Построить все попарно не изоморфные графы, у которых:

1) $n_2(G) = 1$, $n_3(G) = n_4(G) = 2$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$;

2) $n_2(G) = 3$, $n_3(G) = 2$, $n_4(G) = 1$ и $n_i(G) = 0$ при $i \neq 2, 3, 4$.

13.20. Сколько существует попарно неизоморфных графов без петель со следующими наборами степеней вершин:

1) (2, 2, 3, 3, 3, 5);

2) (3, 3, 3, 3, 3, 3);

3) (2, 2, 2, 4, 5, 5).

13.21. Среди графов изображенных на рисунках 2–6, указать все пары изоморфных графов. Ответ обосновать.

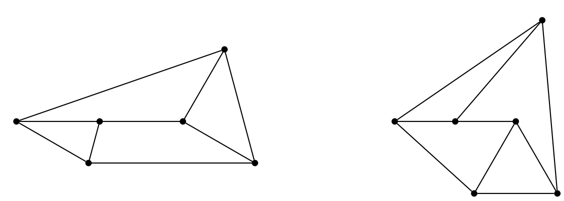


Рис. 2. К задаче 13.20

13.22. Доказать, что если $u \neq v$, то всякий маршрут, соединяющий u и v, содержит простую цепь их соединяющую.

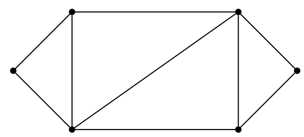


Рис. 3. К задаче 13.20

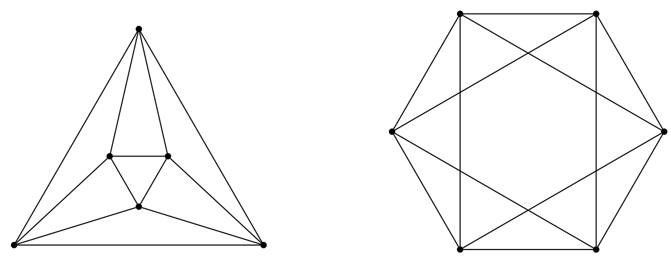


Рис. 4. К задаче 13.20

Рис. 5. К задаче 13.20

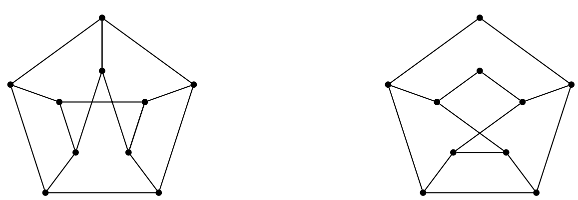


Рис. 6. К задаче 13.20

13.23. Доказать, что любой цикл содержит простой цикл. Причем каждая вершина и каждое ребро цикла принадлежат некоторому простому циклу.

13.24. Доказать, что если в графе существуют две различных простых цепи, соединяющие вершины u и v, то в графе существует простой цикл.

13.25. Пусть G_n — граф с $n \geq 2$ вершинами без петель и кратных ребер и степень каждой вершины $\geq (n-1)/2$. Доказать, что граф связен. Пояснить почему в условии нельзя заменить $(n-1)/2$ на $[(n-1)/2]$.

13.26. Доказать, что если из связного графа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором цикле, то новый граф будет также связным.

13.27. Показать, что если в графе степень каждой вершины больше 1, то в нем есть цикл.

13.28. Доказать, что если $d > 1$ и степень каждой вершины графа не меньше d, то в графе есть простой цикл длины не менее, чем $d + 1$.

14 Эйлеровы и Гамильтоновы графы

Эйлеровы графы. Одной из первых задач теории графов была задача о кенигсбергских мостах, решенная Л. Эйлером. В городе Кенигсберге (ныне Калининград) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки Прегель и друг с другом так, как показано на рисунке. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырёх частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Общая задача теории графов поставленная и решенная Эйлером, формулируется так: при каких условиях связный граф содержит цикл, проходящий через каждое его ребро?

Цикл, содержащий все ребра графа, называется *эйлеровым*. Граф, содержащий эйлеров цикл, называется *эйлеровым*. Содержащая все ребра графа незамкнутая цепь называется *эйлеровой цепью*. Граф, содержащий эйлерову цепь, называется *полуэйлеровым*.

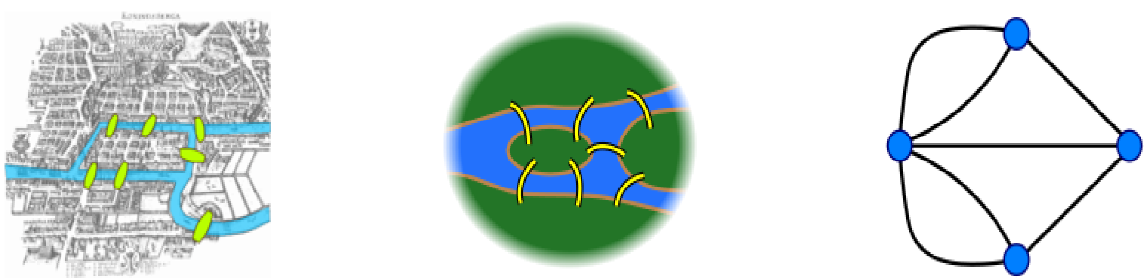


Рис. 7. Схема мостов в Кенигсберге

Гамильтоновы графы. Гамильтоновы путь, цикл и граф названы в честь ирландского математика У. Гамильтона, который впервые определил эти классы, исследовав задачу “кругосветного путешествия” по додекаэдру, узловые вершины которого символизировали крупнейшие города Земли, а рёбра — соединяющие их дороги.

Простой цикл называется *гамильтоновым циклом*, если он содержит все вершины графа. *Граф* называется *гамильтоновым*, если в нем есть гамильтонов цикл. Незамкнутая простая *цепь*, содержащая все вершины графа, называется *гамильтоновой цепью. Граф*, содержащий гамильтонову цепь, называется *гамильтоновым.* Для связного графа возникает задача определить, содержит он гамильтонов цикл или нет и если содержит, то найти этот цикл. Выяснить гамильтонов граф или нет существенно сложнее, чем проверить является ли он эйлеровым (в частности, эта задача является NP-полной). Более того, не существует хорошей характеризации (понятие "хорошей характеризации", в данном случае, может быть точно сформулировано), позволяющей определить гамильтоновость графа.

14.1. Доказать, что связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.

14.2. Доказать, что связный граф содержит эйлерову цепь тогда и только тогда, когда граф содержит ровно две вершины нечетной степени

14.3. Найти все значения m и n, при которых являются эйлеровыми графы:

1) K_n;
2) $K_{m,n}$;
3) W_n;
4) E_n.

14.4. При помощи алгоритма Флёри найдите эйлеровы циклы в графах:

14.5. Доказать, что дополнение $\overline{G}$ эйлерова графа G с n вершинами является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда граф $\overline{G}$ — связный и n — нечетно.

14.6. Доказать, что граф $N_k + N_{k+1} + \ldots + N_{k+l}$ при $l \geq 1$ не является эйлеровым.

14.7. Доказать, что реберный граф эйлерова графа эйлеров.

14.8. Найти все значения m и n, при которых являются гамильтоновыми графы:
1) K_n;
2) $K_{m,n}$;
3) W_n;
4) E_n.

14.9. Найти количество гамильтоновых циклов в графе $K_{m,m}$ при $m \geq 2$.

14.10. Доказать, что граф $N_k + N_{k+1} + \ldots + N_{k+l}$ при $l \geq 2$ гамильтонов.

14.11. Доказать, что реберный граф эйлерова графа и реберный граф гамильтонова графа гамильтоновы.

14.12. Найти пример графа, который:
1) не эйлеров и не гамильтонов;
2) эйлеров, но не гамильтонов;
3) гамильтонов, но не эйлеров;
4) эйлеров и гамильтонов.

14.13. Решите предыдущее упражнение для полуэйлеровости и полугамильтоновости, вместо эйлеровости и гамильтоновости.

14.14. Какие варианты реализуются, если рассматривать понятия эйлеровости, полуэйлеровости, гамильтоновости и полугамильтоновости?

14.15. Какие из следующих графов являются гамильтоновыми, полугамильтоновыми:

14.16. Может ли 1) конь; 2) ладья; 3) ферзь; 4) король побывать на каждой клетке доски 8×8 ровно один раз и последним ходом вернуться в исходную клетку? Тот же вопрос для доски 7×7?

14.17. (Теорема Дирака). Доказать, что если в графе с $n \geq 3$ вершинами степень каждой вершины не меньше чем $n/2$, то граф содержит гамильтонов цикл.

14.18. (Теорема Оре). Доказать, что если в граф с $n \geq 3$ вершинами сумма степеней для любых двух несмежных вершин не меньше n, то граф гамильтонов.

14.19. Найти пример графа, который:

1) гамильтонов, но не удовлетворяет условиям теоремы Оре;

2) удовлетворяет условиям теоремы Оре, но не теоремы Дирака;

3) содержит $n \geq 3$ вершин, степень ровно одной вершины равна $(n/2) - 1$, степени остальных вершин не меньше, чем $n/2$, но при этом граф не гамильтонов;

4) содержит $n \geq 3$ вершин, сумма степеней любой пары несмежных вершин (кроме одной пары $\{u, v\}$) не меньше, чем n, сумма же степеней u и v равна $n - 1$, но при этом граф не гамильтонов.

14.20. Пусть G_n – граф с вершинами $\{2, 3, \ldots, n\}$, причем вершины i и j смежны в точности тогда, когда НОД$(i, j) = 1$. Найти все значения n, при которых граф G_n не гамильтонов.

14.21. Построить связный негамильтонов граф с 9 вершинами, в котором степени всех вершин равны друг другу.

14.22. Граф называется k-связным, если граф, получающийся удалением произвольных k вершин и инцидентных им ребер, является связным. Докажите, что каждый 4-связный граф гамильтонов.

14.23. Пусть G — граф и d — натуральное число. Обозначим G^d граф с тем же множеством вершин, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда кратчайший путь между ними в G имеет длину d. Доказать, что если G — 2-связный граф, то G^2 гамильтонов.

15 Деревья и остовы

Граф без циклов называется *лесом.* Связный граф без циклов называется *деревом.*

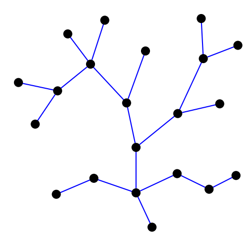


Рис. 8. Пример дерева

Ребро называется *мостом*, если при его удалении число компонент связности графа увеличивается.

Остовом связного графа $G = (V,\, E)$ называется подграф $G' = (V,\, E')$ с тем же множеством вершин, что и у графа G, и являющийся деревом. Последовательно удаляя ребра, принадлежащие циклам, можно убедиться, что любой связный граф имеет остов. Более того, если исходный граф не является деревом, то у него несколько остовов.

Остов наименьшего веса. Рассмотрим следующую задачу. Задано множество городов и известны стоимости постройки дорог между любой парой городов. Требуется построить сеть дорог минимальной стоимости, позволяющую попасть из любого города в любой другой.

На языке теории графов эта задача формулируется следующим образом. *Весовой функцией* (или, кратко, *весом*) на графе $G = (V,\, E)$ называется функция $\alpha : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, ставящая в соответствие каждому ребру графа G положительное вещественное число. *Весом подграфа* $G' = (V',\, E')$ графа G называется $\alpha(G') = \sum\limits_{e \in E'} \alpha(e)$ — сумма весов ребер графа G'.

Задача. Пусть G^α — связный граф $G = (V,\, E)$ вместе с некоторой весовой функцией α. Требуется найти остов графа G наименьшего веса.

Данную задача может быть решена алгоритмом Краскала или алгоритмом Прима.

Алгоритм Краскала.

Шаг 1. Пусть e_1 — ребро графа G наименьшего веса. Определим $E_1 = \{e_1\}$.

Шаг i+1. После шага i определено множество E_i такое, что граф $G_i = (V,\, E_i)$ не содержит циклов. Определим E_{i+1}. Находим ребро e_{i+1} графа G наименьшего веса такое, что $e_{i+1} \notin E_i$ и при добавлении этого ребра в граф G_i получившийся граф $G_{i+1} = (V,\, E_i \cup \{e_{i+1}\})$ не содержит циклов. Полагаем $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$.

Алгоритм останавливается после шага $n-1$. Результатом алгоритма является граф $T = (V,\, E_{n-1})$.

Алгоритм Прима.

Шаг 1. Выбираем произвольную вершину и определяем дерево $T_1 = (\{v\},\, \emptyset)$.

Шаг i+1. Пусть $T_i = (V_i,\, E_i)$ — дерево, построенное на предыдущем шаге. Находим ребро наименьшего веса $e = \{u,\, v\} \in E$ такое, что $u \in V_i$ и $v \notin V_i$. Определим $T_{i+1} = (V \cup \{v\},\, E_i \cup \{e\})$.

Алгоритм останавливается после шага $n-1$. Результатом алгоритма является граф $T_{n-1} = (V,\, E_{n-1})$.

Код Прюфера.

Каждому помеченному дереву с n вершинами можно взаимно однозначно поставить в соответствие последовательность из $n-2$ чисел $[a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-2}]$, которую мы будем называть *кодом Прюфера* для данного помеченного дерева.

Алгоритм кодирования дерева.

Пусть T_1 — исходное дерево.

Шаг i. Пусть v_i — висячая вершина дерева T_i с наименьшей меткой. Тогда a_i — вершина, смежная с v_i. Удаляем вершину v_i и инцидентное ей ребро из дерева T_i и обозначим получившееся дерево T_{i+1}. Если в дереве T_{i+1} больше двух вершин, то переходим к шагу $i+1$. В противном случае, алгоритм заканчивает свою работу.

Алгоритм декодирования дерева.

Шаг 1. Пусть $[a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n-2}]$ — код Прюфера и $B_0 = \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ — множество вершин помеченного дерева. Находим b_1 — наименьшее число из B_0, не встречающееся в коде Прюфера. Тогда дерево содержит ребро $(a_1,\, b_1)$. Полагаем $B_1 = B_0 \setminus \{b_1\}$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $1 < i < n-1$. В качестве элемента b_i возьмем наименьшее число из B_{i-1}, не входящее в $[a_i, \ldots,\, a_{n-2}]$. Тогда дерево содержит ребро $(a_i,\, b_i)$. Полагаем $B_i = B_{i-1} \setminus \{b_i\}$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $i = n-1$. Множество B_{n-2} содержит 2 элемента b_{n-1} и b_n. Тогда дерево содержит ребро $(b_{n-1},\, b_n)$. Алгоритм заканчивает свою работу.

15.1. Найти все попарно не изоморфные деревья с числом вершин:

1) $n \le 4$;
2) $n = 5$;
3) $n = 6$.

15.2. Найти все значения m и n, при которых являются деревьями графы:

1) K_n;
2) $K_{m,n}$;
3) W_n;
4) E_n.

15.3. Описать все графы, являющиеся деревьями вместе со своими дополнениями.

15.4. Описать все деревья, реберные графы которых являются деревьями.

15.5. Доказать, что всякое дерево с $n > 1$ вершинами является двудольным графом.

15.6. Доказать, что ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не принадлежит ни одному циклу.

15.7. Пусть $T = (V, E)$ — граф с n вершинами. Доказать, что утверждения 1) – 6) эквивалентны:

1) граф T является деревом;
2) граф T связный и имеет $n - 1$ ребро;
3) граф T не содержит циклов и имеет $n - 1$ ребро;
4) любые две вершины соединены единственной простой цепью;
5) граф связный и каждое ребро графа является мостом;
6) граф не содержит циклов, но добавление любого ребра дает граф с единственным простым циклом.

15.8. Доказать, что в дереве с $n \geq 2$ вершинами найдется по крайней мере две висячие вершины.

15.9. Найти все значения m и n, при которых в полном двудольном графе $K_{m,n}$ существует остов, дополнение которого (до исходного двудольного графа) снова есть остов.

15.10. Найти все попарно не изоморфные остовы графа:

1) C_n;
2) $K_{2,n}$;
3) K_6;
4) W_5.

15.11. Доказать, что алгоритм Краскала находит остов наименьшего веса.

15.12. Доказать, что алгоритм Прима находит остов наименьшего веса.

15.13. Найти остов наименьшего веса. Записать для него код Прюфера.

1) $a = (4, 3, 4, 5, 2, 1)$, $b = (1, 2, 2)$, $c = (5, 3, 4)$;
2) $a = (3, 1, 2, 3, 4, 1)$, $b = (2, 1, 2)$, $c = (5, 5, 4)$;
3) $a = (4, 3, 3, 2, 4, 3)$, $b = (2, 2, 3)$, $c = (2, 1, 1)$;
4) $a = (3, 2, 3, 4, 3, 4)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (4, 4, 5)$;
5) $a = (3, 4, 5, 2, 1, 4)$, $b = (1, 2, 2)$, $c = (4, 5, 3)$;
6) $a = (1, 2, 3, 3, 2, 1)$, $b = (2, 2, 2)$, $c = (4, 5, 5)$;
7) $a = (4, 2, 3, 3, 2, 4)$, $b = (3, 1, 2)$, $c = (1, 3, 1)$;
8) $a = (2, 3, 4, 3, 4, 3)$, $b = (2, 2, 3)$, $c = (5, 4, 4)$;
9) $a = (4, 2, 3, 4, 2, 4)$, $b = (1, 3, 2)$, $c = (2, 3, 2)$;
10) $a = (2, 4, 3, 4, 2, 2)$, $b = (2, 1, 1)$, $c = (3, 5, 3)$.

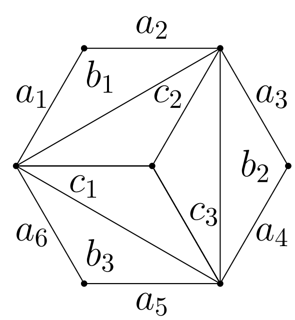


Рис. 9. К задаче 15.13

15.14. Пусть $G = N_1$ — граф с одной вершиной v и $H = C_n$ — циклический граф с n вершинами. Найти наименьший из весов остовов графа $G+H$, если каждое ребро в H имеет вес x, а каждое ребро, инцидентное вершине v, имеет вес y.

15.15. Пусть $G = K_m$, $H = K_n$, причем каждое ребро в G имеет вес x, а каждое ребро в H имеет вес y. Найти наименьший из весов остовов графа $G + H$, если каждое ребро, соединяющее вершину из G с вершиной из H, имеет вес z.

15.16. Если все ребра связного графа имеют один и тот же вес, то и все его остовы имеют одинаковый вес (какой?). Верно ли обратное утверждение?

15.17. Предположим, что одно ребро графа имеет вес y, а вес остальных ребер равен x, $x < y$. В каком случае ребро веса y входит в остов наименьшего веса?

15.18. Построить помеченное дерево по коду Прюфера.
1) $[1, 2, 1, 2, 2]$;
2) $[1, 2, 3, 2, 1, 4]$;
3) $[4, 6, 1, 3, 4, 2, 2]$;
4) $[4, 4, 4, 6, 2, 1, 1]$;
5) $[6, 2, 9, 2, 1, 2, 2, 5]$;
6) $[9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$;
7) $[2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6]$;
8) $[3, 1, 2, 1, 7, 1, 9, 1, 2]$;
9) $[9, 1, 5, 1, 9, 5, 4, 6, 6]$;
10) $[1, 2, 9, 8, 1, 5, 1, 6, 1, 7]$.

15.19. Доказать, что различным помеченным деревьям соответствуют различные коды Прюфера.

15.20. Доказать, что различным кодам Прюфера соответствуют различные помеченные деревья.

15.21. Доказать, что существует n^{n-2} помеченных деревьев с n вершинами.

16 Планарные графы

Плоским графом называется пара $G = (V, E)$, со следующими свойствами: 1) $V \subset \mathbb{R}^2$; 2) каждое ребро — это жорданова кривая с концами соединяющими вершины ребра; 3) различные ребра имеют различные множества концов; 4) различные ребра не имеют общих точек, возможно за исключением концов. *Планарным графом* называется граф, изоморфный плоскому. *Укладкой графа* в плоскости называется плоский граф, изоморфный данному. Заменяя в определении плоского графа $\mathbb{R}^2$ на подходящее пространство, можно определить укладку графа в это пространство. Например, определение укладки графа в $\mathbb{R}^3$ и на сфере оставляется в качестве упражнения. Отметим, что любой подграф плоского графа является плоским.

Множество на плоскости называется *линейно связным*, если любые две точки из этого множества можно соединить жордановой кривой, целиком лежащей в данном множестве. Связная компонента множества $\mathbb{R}^2 \setminus G$ называется *гранью плоского графа G*. Среди всех граней есть ровно одна неограниченная, ее называют *внешней гранью*. Отметим, что грань — это связная часть плоскости, ограниченная ребрами графа и не содержащая внутри себя других ребер.

Граф G' получается *подразбиением ребра $\{u, v\}$* из графа G, если G' получается из G добавлением новой вершины w и заменой ребра $\{u, v\}$ на два ребра $\{u, w\}$ и $\{w, v\}$. Граф G' называется *подразбиением графа G*, если его можно получить последовательным подразбиением ребер графа G. Два графа называются *гомеоморфными*, если они являются подразбиениями одного и того же графа.

16.1. Доказать, что для любого связного плоского графа справедливо соотношение: $n - m + f = 2$, где n — число вершин графа, m — число ребер, f — число граней.

16.2. Доказать, что для любого плоского графа справедливо соотношение: $n - m + f = 1 + k$, где n — число вершин графа, m — число ребер, f — число граней, k — число компонент связности.

16.3. Доказать, что для любого связного планарного графа с $n \geq 3$ вершинами и m ребрами выполняется неравенство: $m \leq 3n - 6$.

16.4. Доказать, что если у связного планарного графа с n вершинами и m ребрами каждый простой цикл содержит не менее $l \geq 3$ ребер, то $m \leq l(n-2)/(l-2)$.

Доказать, что для любого связного планарного графа с $n \geq 3$ вершинами и m ребрами выполняется неравенство: $m \leq 3n - 6$.

16.5. Выяснить, существует ли планарный граф, у которого:

1) 7 вершин и 16 ребер;

2) 8 вершин и 17 ребер.

16.6. Какое наибольшее число граней может быть у плоского 5-вершинного графа? Изобразите такой граф.

16.7. 1) Существует ли плоский 6-вершинный граф, у которого 9 граней?

2) Построить все попарно неизоморфные плоские 6-вершинные графы, имеющие 8 граней.

16.8. Доказать, что в планарном графе есть вершина степени не более 5.

16.9. Доказать, что если в планарном графе число вершин не меньше 4, то в нем есть по крайней мере 4 вершины степени не более 5.

16.10. Доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ не являются планарными.

16.11. Доказать, что любой граф укладывается в $\mathbb{R}^3$.

16.12. Доказать, что граф планарный тогда и только тогда, когда он укладывается на сфере.

16.13. Доказать, что K_5 и $K_{3,3}$ укладываются на торе.

16.14. Доказать, что K_5 и $K_{3,3}$ укладываются на ленте Мебиуса.

16.15. (Теорема Понтрягина-Куратовского). Доказать, что граф планарный тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

16.16. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, содержащий одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

16.17. Какие из пар деревьев в задаче 15.9 гомеоморфны.

16.18. Применяя критерий Понтрягина—Куратовского, проверить планарность графов:

1) графы из задачи 13.18;
2) графы изображенные на рис. 6;
3) графы изображенные на рис. 10:

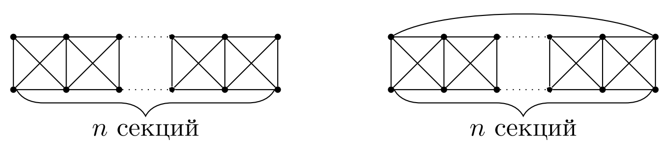


Рис. 10. К задаче 16.12

16.19. Какое наименьшее число ребер надо удалить из заданного графа, чтобы получился планарный граф:

1) K_6;
2) E_4 — граф, соответствующий четырехмерному кубу;
3) граф Петерсена?

16.20. Какое наименьшее число вершин надо удалить из графов в предыдущей задачи, чтобы получился планарный граф? Вершины удаляются вместе с инцидентными им ребрами.

Список литературы

[1] Альпин Ю. А., Ильин С. Н. Дискретная математика: графы и автоматы. Учебное пособие. – Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006. – 78 с.

[2] Гаврилов Г. П. Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: Физматлит, 2005.

[3] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.

[4] Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980.

[5] Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977.

[6] Харари Ф. Теория графов – М.: Мир, 1973.

[7] Эвнин А. Ю. Дискретная математика. Конспект лекций. – Челябинск: ЮУрГУ, 1998. – 177 с.

[8] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.