# СОДЕРЖАНИЕ

## Лекция 1. Концепции современного естествознания

Концепции современного естествознания

лекция 1

Конюхов Владимир Михайлович. 2.09.17.

проф. КПМ 1210, 8-917-251-01-93

Ест-е – комплекс наук изучающий живую и неживую природу

Основн. задача ест-я – познание и описание процессов в окружающем нас мире для реш-я практич.-х и теоретич.-х задач.

Основн. зад. перевести исследования всех наук на язык математики

Основн. метод – математич. моделирование

Роль мат. моделиров-я возрас-ет в связи с усложнением вся задачами экономики (необходимостью точных прогнозов различных процессов, кот. треб. проведен. многовар-х расчетов

Решение требует привлечен. современ-х комп. средств и технологий

Концепция ЕЕ – набор понятий и средств кот. реш-ся соотв-ие задачи познания мира

В рамках курса КСВ:

способы и методы мат. описания различных процессов, методы их решения с примен. вычислит. техники

ММ - система уравнений и дополнит-х соотношений, кот. описыв конкрет. процессы или явления.

ММ начинается: 1) с кач. описания задачи.
качествен. характеристики

Процессы - тепловые процесс, движение, магнитн. поля и т.д.

Явления - совокупн. взаимосвяз. процессов

2) определ-е колич-х характеристик, кот отражают различн. стороны рассматриваем-го процесса. Эти характ.-ки опред-ся на основе каких-либо опытов или экспериментов. Введение таких характ-к зависят от ур-ня моделируемых явлений

Пр: Опр-ть массу задан-го объема вещ-ва

3) установление взаимосвязей м-у кол-ми характ-ми процесса или явлений.

$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

Польза ММ:

построение непротиворечив. мат. модели позвол исследов. сам процесс теоретически возможно даже в тех областях, в кот не проводились эксперименты.

выбрать оптимальн. решения и применять

ах на практике.

• ! Непротиворечивость ММ – все ошибки представления о процессе устран-я в процессе мат. модели-я путем сравнения с экспериментальными данными.

Смысл ММ – св-ва решать и прогнозировать явления и различн. результат без проведения практических экспериментов.

4) Решение задач – применение конкретного математич. аппарата, кот позволяет устано-вить решение задачи, кот описыв данный процесс.

С усложнением задач происходит развитие и совершенствов. аппарата, позволяющих решать новые системы уравнений.

а) Аппарат диф-го ∫-го исчисления возник в связи необходимостью решения задач дви-жения с переменной массой, упругостей, развитием химии.

Но по мере усложнения возникли задачи, кот не возможно решить с помощью данного классич-го аппарата. Поэтому поя-вились приближенные методы вычисле-ния, кот позволяют решать задачи ∀ слож. и ориентиров-ка эти методы на приме-нении компьютера.

б) Приближенные методы вычислений эти методы относятся к классу дискретных методов.

5) Тестирование ММ – проверка адекват-ности её решения экспериментальным данным.

8

## Лекция 2. Теория поля: гипотеза об абсолютности времени

Так, мат позволяет установить непротиворечивость модели и её пригодность для дальнейшего прогнозирования

б) Решение оптимизационных задач в какой-то конкретной практической области

Зам.

∀ модель строится в рамках определ-х ограничений и допущений.

Если возникает необход-ть уточнения расхождений м-у расчётом и экспериментом, то необход. проанализир. второстеп-е факторы, кот были не учтены при постр. модели и проанализир. их влияние в конкретн. услов.

∀ решен. получ. в рамках ∀ модели с определённой погрешностью. Эта погрешность всегда сравнен-ся с треб., кот предъявл. к расчёту

.09.17.
Лекц. 2.

Теория поля

- позволяет строить мат. модели, описыв-ие явления во времени и простр-ве.

1) Время - первичное понятие, кот-е не может быть определено на основе каких-то других, к-ое позволяет описывать очерёдность событий и их последовательностей (раньше, сейчас, позже).

Для того чт. ... описывать событие необходимо уметь измерять время.

Исторически для измерения времени использовались периодические процессы кот-е характериз-ся регулярностью повторения и одинаковой продолжительн-ю

Для измерения времени использ-ся средние сутки:

$$1\,сек = \frac{1}{86\,400}\ сут$$

Точность измерения $t$ в сек: $10^{-12}$

Такой точности достаточно, чт. решать многие задачи, связанные с процессами на Земле и в пределах солнечн. системы.

! Такой подход явл. относительным

Данная модель измерения $t$ уточняется и изменяется

В настоящ. время за эталон единицы времени принимаются показания атомных часов, кот. основаны на периодичности комбинаций атомов в пределах кристаллической решетки данного числа

<u>Относительность $t$</u> – это его хар-ка, кот. в мире всегда имеет место из-за погрешности измерений $\forall$ прибором либо каким-то кол-вом одинаковых приборов

Гипотеза теории поля:

1 Время абсолютно

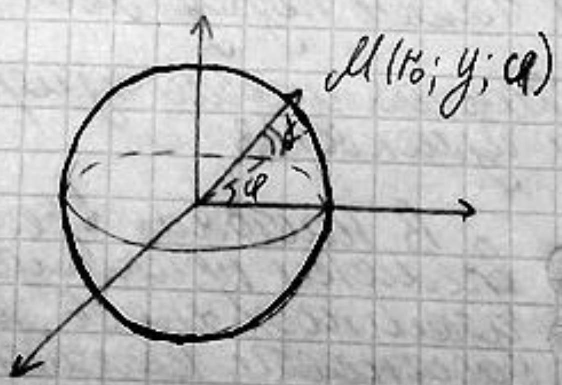
2. Пространство

Все процессы происходят как во t так и в пространстве.

связанно с определением положения тел в окруж. мире.

Для описания положения тел необходимо ввести систему отсчета с началом этой системы координат.

Опыт показывает, что окр. мир трехмерный т.е для определения положения достаточно 3-х чисел.


модель простр-ва т.е. его мат. опис-е какой-то системой координат должно отражать те св-ва, кот-е мы наблюдаем из опыта в окр. мире

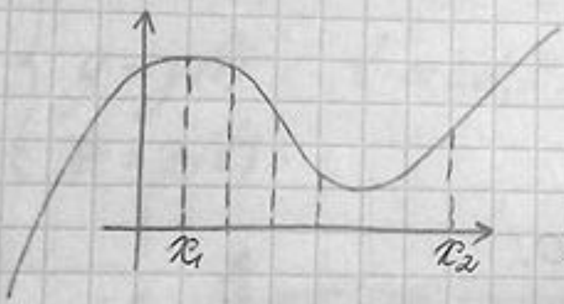
**3** **Траектория** — это мн-во точек простр-ва, кот. характеризуют положение тела в различные моменты врем.

Для описания траектории достаточно задать 3-ку чисел, кот. однозначно определяют положение точек

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta] \quad t \text{ - парам-р}$$

← параметрическое описание траектории

**4.** **Путь** — это длина дуги от нач. точки до конца тч. на траектории




для опред-я длины пути необходимо ввести способ, кот. позволяет вычислять длину на основе информации о траект-ии

Если траектория явл. прямой линией, то длина пути $S$ от тк. $T_1(x_1, y_1, z_1)$ до $T_2(x_2, y_2, z_2)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ - длина пути}$$

по т. Пифагора

в случ., если траектор. криволинейна, то длина пути м.б. вычислена по формуле

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h}^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} =$$

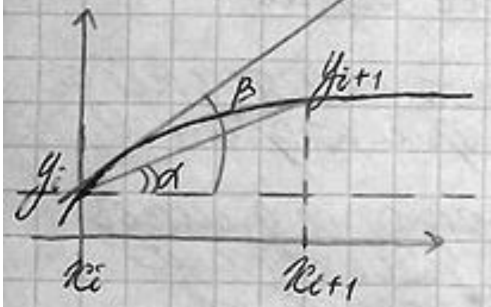
$$= h \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+\frac{y_{i+1}-y_i}{\underbrace{x_{i+1}-x_i}_{=h}}} \qquad (1)$$

**Опр.**

$$\frac{dy}{dx}(x_i) = \lim_{x_{i+1}-x_i \to 0} \frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{x_{i+1}-x_i} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{y(x_i+h)-y(x_i)}{h} = \operatorname{tg}\beta \quad (*)$$

β-угол наклона касат-й к оси X в тчк. $x_i$ на траек.

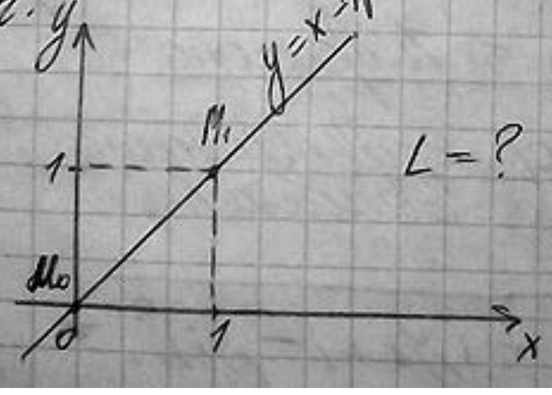



**Опр.** Рассм-м (1) при $h \to 0$:

$S \to L$ - длина пути криволинейной траект-

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (2)$$

Пр:




$L = ?$

Во формуле (2):

$$\frac{dy}{dx}(x) = 1 \leftarrow \operatorname{tg} 45^\circ \ (*)$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2}\, x \Big|_0^1 = \sqrt{2} \quad (2)$$

в общем случае:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}_{=dl}$$

если траектория задана парам-ки:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]: \quad \begin{cases} dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt \\ dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt \\ dz = \frac{dz}{dt} \cdot dt \end{cases}$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

## Лекция 3. Теория поля: гипотеза о модели пространства

лекция 3. 16.09.17

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}; \quad (3)$$

– длина элементарн. дуги

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Опр. Соотнош-е (3) было получ. в предположен., что пр-во явл-ся декартовым в кот-м расстоян. м-у т.к. измеряется по теор. Пифагора. Ф-я, кот позволяет измерять расстоян наз метрической ф-ей.
В соотнош-ии (3):

$$F\left(\vec{x}_1^{\,x}, \vec{x}_2^{\,y}, \vec{x}_3^{\,z}, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = F\left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) =$$

$$= F\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}} \quad (4)$$

Такой подход к измерению расстояний использованием метрической ф-ии (4) при движении траектории $\forall$ конфигурации

С 1926 была создана геометрия Лобачевск., кот показала, что метрич-я ф-я (4) показала, что её не достаточно для измер. расст. в не пределах солнечной системы.

Было введено -обобщение метрич. ф-ии:

$$F\left(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) = \left(\sum_{i,j=\overline{1,3}} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt}\right)^{1/2} \quad (5)$$

причём в общем случае $g_{ij} = g_{ij}(\vec{x})$

набор $\{g_{ij}\}$ - похоже на матрицу, но отлич-ся тем, что коэфиц-ты $g_{ij}$ имеют физическую природу обусловл-ю положением т.к. в простр-ве и могут зависеть от координат в этой т.к. Такие объекты наз тензорами.

$G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ - тензор (обобщ. понятие вектора)

Эл-ты $g_{ij}$ - наз метрическими коэфиц-ми

$G$ - метрический тензор

В частн. случае (4): $G = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, единичн. матр. - коэф. не мен-ся

т.е $g_{ii} = 1$, $i = \overline{1,3}$,

$g_{ij} = 0$, $i,j = \overline{1,3}$, $i \neq j$

! Заметим, что эти значения были обоснов-ы многочисл. вычислениями в пределах Земли.

Для того, чт. в общ. случ измерять расстоян необходимо проводит эксперим. ~~наб~~ для опре-дел. коэфиц $g_{ij}(\vec{x})$

Опр. Пр-ва, в кот. метрик. опред-ся формул (5) нзв пространствами Римана

Опр. Системой коорд-т будем нзв способ измерения положения тк. в простр-ве (декартова сист. коорд или сферич с.к, кот позвол. однозначно определить тк. в простр-ве)

Очевидно, что длина пути не должна зависеть от выбора системы коорд-т, т.е явл. инвариантной величиной.

Так, обр. м-у этими сист. коорд-т должна быть вполне определенное связь, кот. должны отраж. измен-е метрич-х коэффиц при переходе от одной сист. коорд. в другую.
·Критерием опред-я такой зависимости явл. условие инвариантности длины.

Пусть есть сист. коорд: $(x_1, x_2, x_3)$, в кот. определена метрич-я ф-я (5).
т.е
$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3; \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть есть друг. сист. коорд:
$$\left\{ y_{\substack{1\\2\\3}} = y_{\substack{1\\2\\3}}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = y_{\substack{1\\2\\3}}(t) \right.$$

нов зависим-ти, кот позвол. установить взаимооднознач. соот-я ~~[illegible]~~ м-у тройками чисел
$x_1, x_2, x_3$ и $y_1, y_2, y_3$, $t \in [\alpha, \beta]$ нов метр. ф-я

В сист. коор. $(y_1, y_2, y_3)$: $\vec{F}^*\left(\vec{y}, \frac{d\vec{y}}{dt}\right) =$
$$= \left( \sum_{ij=1}^{3} g^*_{ij} \frac{dy_i}{dt} \cdot \frac{dy_j}{dt} \right)^{1/2}$$

т.к. длина произв. пути не мен.

? - явл-ся ли коэффиц. в обеих сист. коорд. произвольными или нет.

Ответ на этот вопрос долж. б. получен из условия инвариантности длины.

Т.е. в сист. коорд:

$$L_{\vec{x}} = \quad = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{i,j=\overline{1,3}} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \right)^{1/2} dt =$$

$$= L_{\vec{y}} = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{i,j=1}^{3} g^{*}_{ij} \frac{dy_i}{dt} \cdot \boxed{\frac{dy_j}{dt}} \right)^{1/2} dt =$$ преобразуем с учетом

$$y_i = y_i(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \cancel{y_i(t)} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow \frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_i}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{dy_i}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_i}{dx_3} \cdot \frac{dx_3}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{dy_i}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dy_j}{dt}} = \sum_{m=1}^{3} \frac{dy_j}{dx_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}$$

подставл. все в

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{i,j=1}^{3} g^{*}_{ij} \sum_{k=1}^{3} \frac{dy_i}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} \sum_{m=1}^{3} \frac{dy_j}{dx_m} \cdot \frac{dx_m}{dt} \right)^{1/2} dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{k,m=1}^{3} \left( \sum_{i=\overline{1,j}} g^{*}_{ij} \cdot \cancel{\sum} \frac{dy_i}{dx_k} \cdot \frac{dy_j}{dx_m} \right) \frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{dx_m}{dt} \right)^{1/2} dt =$$

## Лекция 4. Теория поля: гипотеза непрерывности СС

$$= \int_{\alpha}^{b} \left( \sum_{k,m=\overline{1,3}} g_{km} \frac{dx_k}{dt} \cdot \frac{dx_m}{dt} \right)^{1/2} dt \Rightarrow где$$

метр. коэф. стар. сист. коорд.

$$\Rightarrow g_{km} = \sum_{i,j=1}^{3} g^{*}_{ij} \frac{dy_i}{dx_k} \cdot \frac{dy_j}{dx_m} \quad (6)$$

усл., кот. всегда д.б. вып. при переходе от одн. сист. коор. к другой

• Так. обр. в построенном Римановом пр-ве переходя от одной сист. отсчета к другой должно быть так. обр. то выполн-сь усл (6) - инв-ть длины пути.

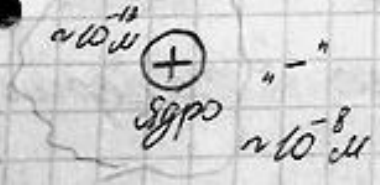
Построен-е мат-е пр-ва позволяет опред-ть положе-я тчк и расст-я в реальн. пр-ве при опред-х допущениях*

23.09.17.
4 лекц.

## Модель окружающего мира и вещ-ва.

Издревле было представл-е, что мир состоит из вещ-в...

По мере исследов-ий была выяснена атомарная структура вещ-ва




Возьмем вопр.: „Что будет, если пытаться измерить"...

однако по мере изуч. св-в света выяснилось, что он имеет двойственную природу, т.е ведет себя и как поток частиц, наз. ими фотонами и имеет волновые св-ва.

Пусть хотим измерить расстоян. светом, как волной:


$$\lambda \sim \frac{1}{\omega}$$

$\omega$ — частота колеб-й вещества

$\lambda$ — длина волны

Предположим, что будем мерить расстоян. ~~длиной волны~~ длиной волны, как некой неизменной характеристики.

Казалось, что с уменьш. расстояния $r$ мы могли бы все точнее измерять его в длинах волн, однако в данном случае на измерение расстояния начинает влиять свойство света как потока частиц.

Чем меньше мы будем рассматр. расстоян $x$, тем сильнее будет сказываться влияние фотонов на измерение длины.

Состояние (принцип) неопределенности Гейзенберга, кот. показ., что пределы точности измерений не безграничны.

Пусть $\Delta x$ - погрешность измерения расстоян.

$\Delta(m \cdot v_x)$ - погрешность измерения импульса частица с массой $m$.

Для измерения $v$ необходимо 2 экспериментальных замера:

$$(x_2 - x_1)/\Delta t$$

$$\underset{t+\Delta t}{\downarrow} \quad \underset{t}{\downarrow}$$

$$\Delta x \cdot \Delta(m \cdot v_x) \geq \frac{h}{2\pi}$$ (1) – соотнош-е неопр-ти

$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ кг·м/с – постоянная Планка

Принц. неопр.: произвед-е погрешности пары двух величин не может быть $\leq \frac{h}{2\pi}$

В(1) – это пара $\Delta x$ и $\Delta(m \cdot v_x)$

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \frac{h}{2\pi}$$ (2) – соотнош неопр-ти на уровне микромира

Эти принц. обоснов. экспериментально и привод к выводу, что описание микромира должно провод-ся в рамках дискретного представл-и на основе вер-го подхода к определению положения частиц с учетом имеющ-ся парных неопредел-ей.

Поэтому при изучен. процессов на микро уровне использ-ся квантовая механика, кот основ-а на двойств-и строения вещ-ва (на дискретности и волновой)

С другой стороны наши ощущен. позвол. сделать предположение о том, что окружающ-й нас мир явл-ся непрерывно заполненным каким-то вещ-вом,

т.о. в рамках практич-ой деят-ти и больш. масштабах, изучаемых явлений можно ввести представл. о характеристиках вещ-ва, как непрерывных ф-ях во времени и в пространстве

**Гипотеза 3. Теории поля:**

гипотеза о непрерывн окр.-го мира, кот рассмат как континуум (обладающ бесконечной делимостью)

Так. модель позволила разработать математич. аппарат для строгого описания св-в континуума (аппарат диф-го и $\int$-го вычисления)

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

При этом в рамках гипотезы континуума предполаг-ся, что $\forall$-е хар-ки вещ-ва или процессов явл-ся опред-ми в $\forall$-ой тч простр-ва в $\forall$-й момент времени.

Пр:

$\rho(x, y, z, t)$ - плотность в-ва (кг/м³), ф-я определ. в $\forall$ тч $x, y, z, t$

Зам

Конечно, в реальности в силу дискретного принципа строения вещ-ва на уровне микромира всегда найдется тч, в кот данное вещ-во отсутствует (газ)

$\rho$ - скалярная функц, кот в каждой тч. однозначно характериз-ся своим значением

Численное значен. плотности опред-ся на основе экспериментов при измерен

## Лекция 5. Подходы Лагранжа и Эйлера к описанию процессов в СС

внешних услов.

$T(x, y, z, t)$ – температ., кот характериз-т меру взаимод-я частиц на микро уровне (°C)

$\vec{v}(x, y, z, t)$ – скорость (м/с), векторн. характ-ка

### Подходы к описанию процессов в сплошных средах (СС)

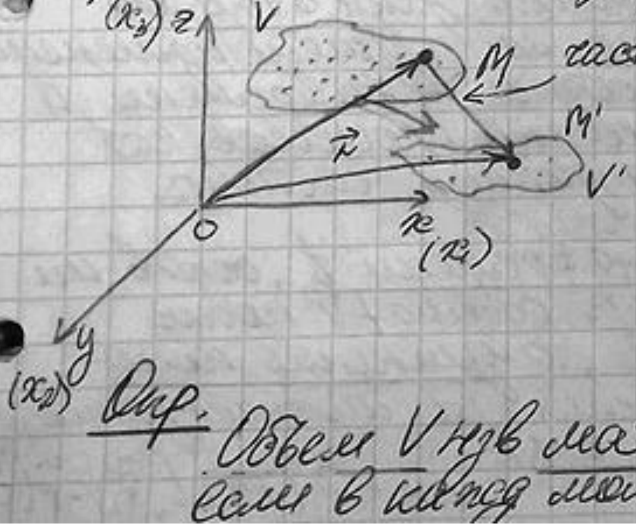
30.09.18.
5 лекция

После введения сплошной среды, как континуума, мы понимаем континуум непрерывной бесконечно делимой средой.

Так. образ. в кажд. т.к. конт-ма мы будем вводить характеристики изучаемых явлений. Для описания таких явлений, кот. мог. сопровожд-ся одновремен-но разными процессами использ-ся теория поля

① подход Лагранжа:

рассматр сист. коорд, можно выделить объем, в кот. содерж-ся частицы




частицы сс в t

Опр. Объем V н.з.в материальным объемом, если в кажд момент времени изуч- 18 чаемого времени, он содержит одни и те же частицы сплошной среды. В ходе этого процесса, положение, размер и форма первонач-го объема может меняться

Исходн. положение $\forall$ т. M определим радиус вектором $\vec{R} = \vec{i}X_1 + \vec{j}X_2 + \vec{k}X_3$

• Так. обр. вектор R в тк M можно рассматр-ть как ее имя или идентификатор, кот однозначно определ-т ее начальное положение внутри объема V

• Текущ положен. частицы сс, кот из тк. M перешла в тк $M' \in V'$ определим, как вектор $\vec{r}$

$\vec{r} = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} + x_3 \vec{k}$

Т. обр. процесс перемещ частицы из одной тк в другую можн рассм, как взаимооднозначное отображение объема V в объем V'. Такое отображение н/в деформацией матер-го объема и опис-ся ф-ей: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{R})$, или

(1') $x_1 = x_1(X_1; X_2; X_3)$,
$2 \ldots 2$
$3 \ldots 3 \ldots\ldots$

• Т. обр. суть подхода Лагранжа закл. в том что мы рассм-я частицы сс изучаем изменение их положение в простр-ве и во времени, а также те характеристики процессов, кот происх. в окрестности данной частицы

• Если ввести момент времени t, соотв-щий положе-ю частиц внутри объема V' после диформации: $t + \Delta t$, то изменение положения частиц за время $\Delta t$ можем запис как некот. прираш-е $\Delta \vec{r}$:

$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t, \vec{R}) - \vec{r}(t, \vec{R})$

фикс пол данной

Рассм.

(2) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\Big|_{R\text{-фикс}} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – скорость матер-ой частицы

– 3 соотношен для кажд из коорд $x_1, x_2, x_3$

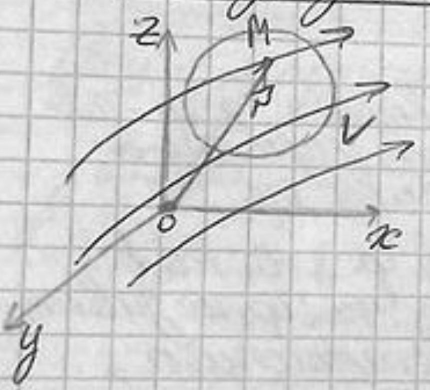
Аналогично опред-ся характ-ки процесса, свя-е с частицей R

одн

$A = A(t, \vec{R})$ – произв-я характеристика A

Данный подход н/в материальным или субстанциональн. подходом.

2) подход Эйлера:




есть сплошн. среда берем V тчк M, как бы мат-ся характ-ка этой точки в этой сплошн. ср

В дан. подходе ввод-ся сист. коорд. и рассм. произв-ый объем простр-ва, в кот входят и выход частицы сплошной среды, объем V остаётся неизменным, а частицы ее входят и выход из этого V;

Если взять произв. тчк M внутри объема V, то ее положе характ. радиусом вектора r.

При так. подх исслед-ся изменение характеристик кот происх. в данной тчк M с течением времени.

те $A = A(t, \vec{r})$

$r = (x, y, z)$

Пр. $A \equiv \rho$ или $T$ и т.д.

при таком подходе мы следим только за характеристик. процесса пренебрегая вопрос о положении частиц

## Вычисление скоростей А и их связь в различных подходах:

① Лагранж: $A = (\vec{R}, t)$:

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\vec{R}\text{-фикс}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t, \vec{R}) - A(t, \vec{R})}{\Delta t}$$

в данном случ. вектор $\vec{R}$ ведёт себя, как const при диф-ии ф-ии А.

$\frac{\partial A}{\partial t}$ – обычная локальная производная, хар-ая изменение какой-то ф-ии, изучаем-я относит-но фиксир. частицы ее

② Эйлер: $A = A(\vec{r}, t)$ А = ~~V~~-я ф-я от r и t и знач. этой ф. не завис. от имени частицы, а завис. только от рассм-ой т-к простр-ва и момент. времени t.

Для т.ог. найти связь м-у характ-ой в дан-й т-к и положен. частицы нам необход. знать траекторию движен. дан. частицы, т.е

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \Rightarrow A = A(\vec{r}(\vec{R}, t), t)$$

в дан. случ. ф. А стан-ся сложн. ф-ей от времени t

$\Rightarrow$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{R} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{R} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A}{\partial x_i} \cdot \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{R} =$$

## Лекция 6. Дифференциальные формы ЗС. 1) ЗСМ

$$=\left(\underbrace{\frac{\partial A}{\partial t}}_{\text{локальн}}+\underbrace{\vec{v}\cdot \operatorname{grad} A}_{\text{конвективное}}\right)\Big|_{M} \quad (3)$$ – полная (субстанциональная) произв-я

изменение кот. связ с перемещ сс

# Основное уравнение теории поля

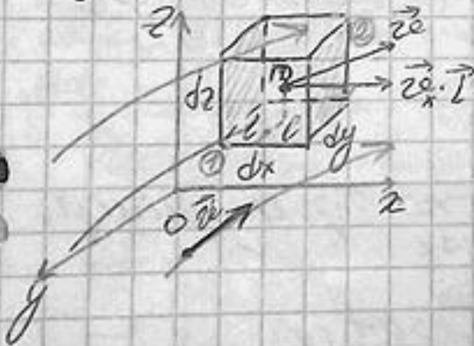
7.10.18. 6 лекция

## Законы сохранения диф-ой и ∫-ой формы

### I. Закон сохранения массы

Сущ-т 2 подхода к выводу ур-ий ЗСМ

1 подх: балансовые соотношения, кот. запис для ∞ малого объема сплошн. среды. наз. методом материального баланса




происх. движ. сплошн. среды в простр-ве и во t

т.к. $m(x,y,z)$ – центр пар-да

$dV=dxdydz$, располож в пр-ве отн-но СК $Oxyz$

$dV$ – ∞ малый объём, фикс

Пусть $M(t)=\rho(x,y,z,t)\cdot dV$ – масса сс в некот момент времени $t$ в объеме $dV$

Рас-им момент $t+\Delta t$, где $\Delta t$ – ∞ малый промежуток $t$,

пусть $\rho(x,y,z,t+\Delta t)$ – „новая“ плотность

22

СС в мом-т $t+\Delta t \Rightarrow M(t+\Delta t) =$

$= \rho(x,y,z,t+\Delta t)\cdot dV$ – „новая" масса СС

Тогда изменение массы в объеме $dV$ за время $\Delta t$ обозначим:

(1) $\Delta M = M(t+\Delta t) - M(t) = [\rho(x,y,z,t+\Delta t) - \rho(x,y,z,t)]dV$

Пусть $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \vec{i}\cdot v_x + \vec{j}\cdot v_y + \vec{k}\cdot v_z$ – вектор скор-ти в пр-ве при движ. СС, потоки массы проходят через все её грани.

Пусть $dM_1 = (\rho\cdot v_x)\cdot dy\,dz$ – расход сплошной среды через грань ①

– кол-во массы СС, проходящ через грань ① за единицу времени.

$dM_2 = (\rho v_x)_2 \cdot dy\,dz$ – поток массы через грань ②

Предполаг, что плотность СС мен-ся, т.е она сжимаема

$l = \frac{dx}{2}$

$dM_1 \approx \left[\rho v_x|_m - l\cdot \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Big|_m\right] dy\,dz$ – по форм Тейлора

$f(x+l) = f(x) + l\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{l^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x}(x)\ldots$

$(\rho v_x)_{\substack{1\\2}} = \rho(x \mathop{}_{+}^{-} \frac{dx}{2}, y, z, t)$

$dM_2 \approx \left[\rho v_x|_m + l\frac{\partial}{\partial x}\rho(v_x)\Big|_m\right] dy\,dz$

23

Тогда $dM_x$ - кол-во массы СС, накопл-ое в объеме $dV$ будет:

(2) $dM_x = dM_1 - dM_2 = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)dV$

(3) $dM_y = \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)dV$

мас.
- кол-во, кот может пройти через грани

(4) $dM_z = \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)dV$

Изменение массы $\Delta M$ (связано) = потокам массы (2)+(3)+(4) за время $\Delta t$ через соотв-ие грани

$[\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t)]\cdot dV=$

$=\Delta t[dM_x+dM_y+dM_z]=$ метод матер-го баланса

$=-dV\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]$ (5)

$\Delta t \to 0$
скор-ть измен плотн в СС

Далее (5)$/\Delta t$, $\Delta t\to 0$:

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0}$ (6) - ЗСМ в диф-ой форме

Рассм (6):

$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{\text{лок}}+\rho\cdot\operatorname{div}\vec{v}+\underbrace{\vec{v}\operatorname{grad}\rho}_{\text{конвекцион}} \Rightarrow$

$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}\vec{v}=0$ (7)

полная (субстанц) производн

Опр. (6) или (7) явл ур-ями неразрыв-ности СС.

## Лекция 7. Дифференциальные формы ЗС. 2) ЗСКД

Част. сл.

$$\rho = const \Rightarrow div\,\vec{v} = 0$$

Частн. сл.

Движ-е одномерное:

$$\vec{v} = (v_x, 0, 0) \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \Rightarrow v_x = v_x(t) -$$

– следствие несжимаемости СС

14.10.17

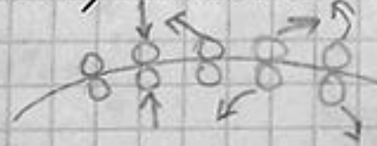
7 лекция

### II Закон сохранения кол-ва движ-я (КД) или импульса

Опр.

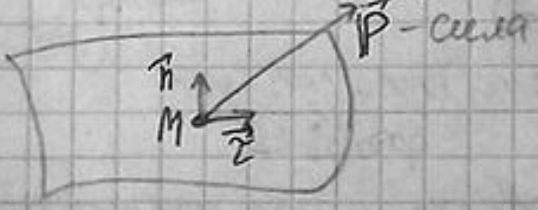
а) Массовыми силами н.з.в силы, кот действуют на каждую т.ч. сплошной среды. (сила тяжести, центробежн. сила)

б) поверхност. силы, силы кот возник. при взаимод-и СС, располож-е над и под рассматриваемой поверхностью



всегда взаимод-е частиц

Рас-им эл-т поверхн-ти:




$\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ – единичн., норм-е вектора в т.ч. M поверхн-ти

$$\vec{P} = \vec{n} \cdot P_n + \vec{\tau} \cdot P_\tau,$$

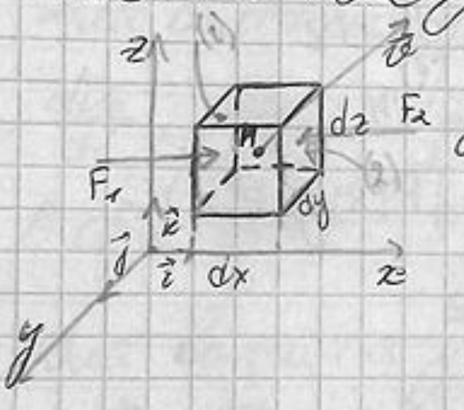
$P_n$ и $P_\tau$ – проекция вектора $P$ на направл-е $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$

Тогда $\vec{F}_{тр} = \vec{\tau} \cdot \mathbb{P}_\tau$ – сила, обусл-я трением частиц ср-ды располож-х в слоях сплошн. среды.

$\vec{P}_д = \vec{n} \cdot \mathbb{P}_n = \vec{n} \cdot P$ – сила давл-я, кот. действ. на площадку поверх-ти и обусловл-я сжимающ. или растягив-ми силами, возникающ. при „нормальн." взаимодейств. частиц сплошн. сред.

Будем выводить закон сохранения импульса методом материальн. баланса

(УЗСКД → метод мат. баланса)




Пусть т. $M(x,y,z)$ – центр парал-да с объемом $dV = dx\,dy\,dz$

Пусть $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) =$

$= v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$, где

$v_{x,y,z} = v_{x,y,z}(x,y,z,t)$ – компон. $\vec{v}$

Поскольку $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ – ускорение частицы в т. M – вектор: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow$

кол-во движения $m \cdot \vec{a}$ также явл-ся векторной величиной и имеет 3 составл-ие на кажд-ю из коорд. осей.

Вычислим кол-во движения вдоль оси x:

$$a_x \cdot dm = \frac{dv_x}{dt} \cdot \rho(x,y,z,t) \cdot dV$$ – сила инерции вдоль Ox

т.к. $F_x^{(u)} = a_x \cdot dm$; по II зак. Ньют.:

(1) $F_x^{(u)} = F_1 - F_2 + F_x^{(m)}$, где $F_x^{(m)}$ – массовая сила, кот действ на все частицы сс в напр. $Ox$,

$F_1$ и $F_2$ – поверхностные силы, кот действ-ют на грани (1) и (2) элемент-го объема

т.к. $f_x$ – плотность массовых сил, ⇒

$F_x^{(m)} = \rho(x, y, z, t) \cdot f_x \cdot dV$ – общ массов-я сила, кот действ на тело

$F_1 = P|_{(1)} \cdot dy\,dz$; $F_2 = P|_{(2)} \cdot dy\,dz$

т.к. $P(x, y, z, t)$ – давл-е в т. M:

$F_1 = P(x - \frac{dx}{2}, y, z, t)\,dy\,dz = [P(\overbrace{x, y, z, t}^{M}) - \frac{dx}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}(\underbrace{x, y, z, t}_{M})] \cdot dy\,dz$

на сколько давл отлич

$F_2 = P(x + \frac{dx}{2}, y, z, t)\,dy\,dz = [P(\overbrace{x, y, z, t}^{M}) + \frac{dx}{2} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}(\overbrace{x, y, z, t}^{M})]\,dy\,dz$

Зам. О. Для простоты, мы рассм-м случ. идеальной сс, в кот. отсутств. трение м-у слоями, т.е. все частицы облад абсолютной подвижностью, а сама среда не може сопротевл-ся сдвигающим усилиям, т.е $\vec{F}_{тр} = 0$

Такие среды наз невязкими или идеальн-ми,

27

а соотв-ие ур-я были получены Эйлером

$$\rho \cdot \frac{d\vartheta_x}{dt} \cdot \cancel{dV} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot dV + \rho \cdot f_x \cdot \cancel{dV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \frac{d\vartheta_x}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho \cdot f_x \quad (2)$$

аналогично:

$$\rho \frac{d\vartheta_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho f_y \quad (3)$$

$$\rho \frac{d\vartheta_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho f_z \quad (4)$$

Для описания движ-я сс необх опред-ть:

$$\frac{d\vartheta_x}{dt}, \ \frac{d\vartheta_y}{dt} \ \text{и} \ \frac{d\vartheta_z}{dt}$$

В общ. случае: $\vartheta_{x,y,z} = \vartheta_{x,y,z}(x, y, z, t)$

Для вычисл-я ускорен. рассм $d\vartheta_x$

$\vec{r} = (x, y, z)$ - при рассм. движе-я частицы, $x(t), y(t), z(t)$ движ-е рассм, как траектор. движе- этой част.

$$d\vartheta_x = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} \cdot dt + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} \cdot dz, \ (*)$$

где $dx = \vartheta_x \cdot dt$, $dy = \vartheta_y \cdot dt$, $dz = \vartheta_z \cdot dt$, т.е

$$\frac{dx}{\vartheta_x} = \frac{dy}{\vartheta_y} = \frac{dz}{\vartheta_z} = dt \quad (5)$$ - отнош-е в левой части не явл. произв.

Тогда $(*)/dt \Rightarrow$

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \vartheta_z \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} = 28$$

$$= \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_{\text{лок}} + \underbrace{\vec{v}\cdot grad\, v_x}_{\text{конвектив}}$$ – производн. по времени

⇒ (2), (3), (4) буд иметь вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, v_x = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, v_y = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, v_z = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \quad (8)$$

вект ускор тяж $F_g$

Векторная форма:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, \vec{v} = -grad\, P + \rho \vec{g} \quad (9)$$

Неизвестные $v_x, v_y, v_z, P$; $\rho = const$ – параметр, $\vec{g}$ – неизв.

ур-я (6), (7), (8) дополн-ся ур-ем неразрывн-ти

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (10) \Rightarrow$$

⇒ Сист. ур (6), (7), (8), (9) (10) явл. замкнутой, эта модель наз моделью Эйлера течения несжим-ой невязк. жидкости

## Лекция 8. Интегральные формы ЗС. 1) ЗСМ

закон. сохран

**Интегральные формы ЗС** 21.10.17. 8 лекция

Рас-им движущ. СС относит-но декартов. сист. коорд-т $xyz$


Все характ-ки СС опред-ся относит-но произв-и ... $(xyz)$.

$A = A(x, y, z, t)$ – в $\forall$ момент $t$

При выводе $\int$-ох формулировок законов рас-ся произвольн. объем пространства, через кот. происх. движение СС.

сигма

П. $V$-объем с границей $\Sigma$

Условие втекания или вытекания СС через поверхн $\Sigma$ определим нормалью $\vec{n}$ к этой поверхности: если нормаль $\vec{n}$ совпад. с направл. скорости, то поток вытекает, в противн. случ. втекает

**I ЗСМ (зак. сохр. массы) в $\int$-ой форме**

Рас-им два момента времени $t$ и $t+\Delta t$

сумма всех масс элемента-х V

П. $M(t) = \int_V \rho(x, y, z, t) \cdot dx\,dy\,dz$ - масса СС в мом. врем. $t$

$dV$ - мн-во эл-х объем в этом объеме

$M(t+\Delta t) = \int_V \rho(x, y, z, t+\Delta t) \cdot dV$ - масса СС в $V$ при $t+\Delta t$

Рас-им измен-е $\Delta M = M(t+\Delta t) - M(t)$ (за $\Delta t$), (1)

если $\Delta M \neq 0 \Rightarrow$ за счёт движ-я СС и процес-в

30

внутри области V происходило приобретение или потеря массы внутри этого объема
($\Sigma$ - условная граница: проницаемая)

• Изменение массы обусловлено потоком ее через границу $\Sigma$

Опр. Плотность потока массы через единичную подплощадку - величина вида:

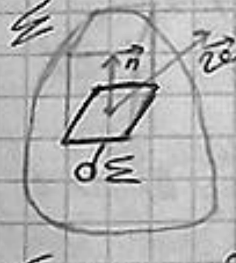
$$\rho \cdot v \left[\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{м}{с}\right] = \left[\frac{кг}{м^2 с}\right]$$

Опр. Общий поток массы через поверхн $\Sigma$:

$\rho \cdot v \cdot \Sigma$, где S - площ. поверхн $\Sigma$

$$\left[\frac{кг}{м^2 с}\cdot м^2\right] = \left[\frac{кг}{с}\right]$$

• Для определен-я $\Delta M$ найдём общий поток массы ее через поверхн. $\Sigma$ за время $\Delta t$:




Рас-им $\Sigma$ и возьм площ-ку $d\Sigma$

Элемент-й поток массы через $d\Sigma$:

$$-\rho(\cdot\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot d\Sigma$$

Тогда общий поток массы через $\Sigma$ за $\Delta t$:

$$-\int_t^{t+\Delta t}\int_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\,dt \quad (2)$$

Тогда (1) = (2) $\Rightarrow \int_V [\rho(x,y,z,t+\Delta t)-\rho(x,y,z,t)]\,dV$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\,dt = 0 \quad (3)$$ – интегр-я ф-ма ЗСМ

Рассм. ур-е неразр-ти:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0 \quad (4)$$

$\int$-ем (4) по объему $V$:

по времени $\quad$ $\int$ по простр-ву

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right] dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV + \int_V div(\rho\vec{v})\,dV = 0,$$

$$\int_V \rho\,dV\Big|_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t}\int_V div(\rho\vec{v})\,dV\,dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_V [\rho(x,y,z,t+\Delta t) - \rho(x,y,z,t)]\,dV +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t}\int_V div(\rho\vec{v})\,dV\,dt = 0 \quad (5)$$

Сравнив (5) и (3) $\Rightarrow$

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\cdot dt = \int_t^{t+\Delta t}\int_V div(\rho(\vec{v}))\,dV\cdot dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_t^{t+\Delta t}\left[\int_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\cdot \cancel{dt} - \int_V div(\rho\cdot\vec{v})\,dV\right]dt = 0$$

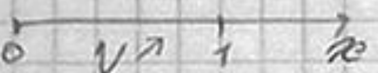
$$\Rightarrow [\ldots] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})\,dV = \int\limits_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma \quad (6)$$ – Формула Остр-Гаус.

расход массы по объему V

Формулой Остроградск. и Гаусса мы буд. пользов. для преобраз. ∫-ов по объему к ∫-лу по поверхности и наоборот.

Пр.: 1-ный случ.
1D:




$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)$$

$$v_y = v_z = 0$$

По форм. (6): $\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\,dx = \rho v_x \Big|_0^1 =$

$$= \underbrace{\rho(1)\cdot v_x(1)}_{\text{поток массы в т. } x=1 \text{ границ. } V} - \underbrace{\rho(0)\cdot v_x(0)}_{\text{в т. } x=0}$$

т. $x=0$ и $x=1$ – граница Σ

## Лекция 9. Интегральные формы ЗС. 2) ЗСКД

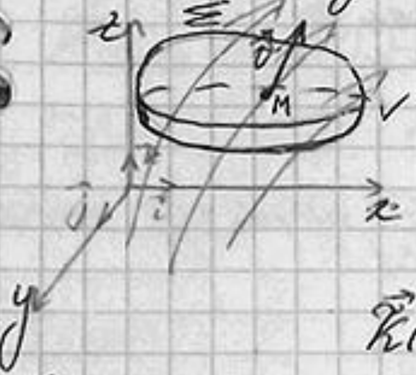
∫-я формулировка

28.10.17
9 лекция

ЗСКД (ЗСИ) импульса

Опр. Кол-во движ-я СС внутри объема V — векторная величина, кот. выр-ся 3-мя составляющ. вектора скорости:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \vec{i}\cdot v_x + \vec{j}\cdot v_y + \vec{k}\cdot v_z$$




$$K_{x,y,z}(t) = \int_V \rho(x,y,z,t)\cdot v_{x,y,z}(x,y,z,t)\,dV$$

кол-во движ-я в момент времени $t$

— компоненты вектора $\vec{K}(t)$:

$$\vec{K}(t) = \vec{i}\cdot K_x + \vec{j}\,K_y + \vec{k}\cdot K_z = (K_x, K_y, K_z)$$

Рас-им момент $t+\Delta t$ и опред-им кол-во движ:

$$\vec{K}_{x,y,z}(t+\Delta t) = \int_V \rho(x,y,z,t+\Delta t)\, v_{x,y,z}(x,y,z,t+\Delta t)\,dV$$

Обозн. изменен. кол-ва движ. внутри объема V за $\Delta t$ через: $\Delta K_{x,y,z} = K_{x,y,z}(t+\Delta t) - K_{x,y,z}(t)$

$\Delta K_x$ опред-ся:

1) приход или уход кол-ва движ-я через пов-ть Σ за время $\Delta t$ вследств. движ-я частиц сплошн. среды ⇒

34

оно равно:

$$=-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma (\rho v_x)\cdot(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\,dt \quad (*)$$ – картинка та же

2. За работу поверхностных сил (давлением):

$$=-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma p\cdot n_x\,d\Sigma\,dt \quad (**)$$ где $n_x$ – проекция вектора $\vec{n}$ компонента нормали на ось $x$:

$n_x=\vec{n}\cdot\vec{i}$, т.к

$\vec{n}=\vec{i}\cdot n_x+\vec{j}\,n_y+\vec{k}\cdot n_z$

cc

• Действие массовых сил на кажд частицу внутри объема V за время $\Delta t$:

$$=\int_t^{\Delta t+t}\iiint_V \rho\cdot F_x\,dV\,dt \quad (***)$$

$$\Longrightarrow \Delta K_x=-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma \rho v_x\cdot\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Sigma\,dt-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma p n_x\,d\Sigma\,dt+$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\iiint_V \rho F_x\,dV\,dt \quad (1)$$ – $\underline{\int\text{-ая формул. ЗСКД}}$

Аналогично с заменой $x\to y$, $x\to z$

$\Delta K_y$ и $\Delta K_z$

<u>Получим из (1) диф. форму ЗСКД</u>:

$$\iint_\Sigma \rho(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma=\iiint_V \operatorname{div}(\rho\cdot\vec{v})\,dV$$ – формула Остроград. Гаусс

Рассм. $-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma(\rho v_x)(\vec{v}\cdot\vec{n})\cdot d\Sigma\,dt=\left|\text{по т. Остр.}\right|=$ A''

$$= -\int_t^{t+\Delta t}\int_V div[(\rho\cdot v_x)\vec{v}]\,dVdt.$$

$$\circ \quad -\int_t^{t+\Delta t}\int_\Sigma p(\vec{n}\cdot\vec{i})d\Sigma dt = -\int_t^{t+\Delta t}\int_V \frac{\partial P}{\partial x}dVdt$$ (т.сл. ф. Остр-Гаусса)

когда $\vec{v} = 1\cdot\vec{i}$, а $(\vec{v}\cdot\vec{n}) = n_x\cdot 1$

Применим Т. о ср. к $K_{conv}$ и $K_\Sigma$

$$K_{conv} \approx -\Delta t\left[\int_V div[(\rho v_x)\vec{v}]dV\right]_{t=t'},$$

где $t' \in [t, t+\Delta t]$

$$K_\Sigma = -\Delta t\left[\int_V \frac{\partial P}{\partial x}dV\right]_{t=t'}$$

$$K_{mass} = \Delta t\left[\int_V \rho F_x dV\right]_{t=t'}$$

Подставим их в (1), $/\Delta t$, $\Delta t \to 0$:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}[\rho v_x]dV = -\int_V div[\rho v_x \vec{v}]dV -$$

$$-\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\cdot dV + \int_V \rho F_x\cdot dV \Rightarrow$$

$$\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial t}[\rho v_x] + div[\rho v_x\vec{v}] + \frac{\partial P}{\partial x} - \rho F_x\right\}dV = 0,$$

$$\Rightarrow \{\dots\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + div[\rho v_x \vec{v}] =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x \quad (2)$$ Аналогичн. $x \to y$, $x \to z$

Диф-я форма ЗСКД

36

## Лекция 10. Интегральные формы ЗС. 3) ЗСПЭ

11.11.17.
10 лекц.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \operatorname{div}[\rho v_x \vec{v}] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x \quad (*)$$

Преобразуем к формуле Ньютона

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \operatorname{div}[\rho\vec{v}] + \rho\vec{v}\operatorname{grad} v_x =$$

$$v_x\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho\vec{v}]\right) = 0 \text{ уравн. неразрывности}$$

локальн. перемен. конв. сост.

$$= \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{grad} v_x\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x$$

полн. произв.

(3)

$$\begin{cases} \rho\underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{=a_x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho F_x \text{ — аналог 2-го закона Ньютона} \\ \text{Аналогично} \\ \rho\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho F_y \\ \rho\frac{dv_z}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho F_z \end{cases}$$

Так. обр. уравн. (*) получ. ∫-ным методом не трудно свести к уравнениям Эйлера полученным методом матер-го баланса

# Закон сохранения полной энергии (ЗСПЭ)

О. Пусть $E$ — плотность полной энергии СС в т. $(x, y, z, t)$

$$E=\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)$$

полная энергия $\Pi=\rho\cdot E=\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)$

(кинетич. энерг) (внутр. энерг.)


П. $\mathcal{E}_t=\int_V\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)\right](x,y,z,t)\,dV$ — полн энерг. СС в V в момент $t$.

$\mathcal{E}_{t+\Delta t}=\int_V\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)\right](x,e,z,t)\,dV$ — ПЭ СС в V в м-т $t+\Delta t$

П. $\Delta\mathcal{E}=\mathcal{E}_{t+\Delta t}-\mathcal{E}_t$ — изменение ПЭ в V за $\Delta t$

Изменение $\Delta E$ обусловлено:

- приходом или уходом ПЭ через поверхность $\Sigma$ за время $\Delta t$

$$=\int_t^{t+\Delta t}\int_\Sigma \rho\left(\frac{v^2}{2}+e\right)\cdot\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\Sigma\,dt \quad (1.)$$

• работой поверх-х инобрен. сил: $F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$

$$-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma p\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\,d\Sigma\,dt+\int_t^{t+\Delta t}\iiint_V \rho(\vec{F}\cdot\vec{v})\,dV\,dt \quad (*)$$

$*$ – обусловлена работой механич. сил $P$ и $\vec{F}$

• процессы, кот вызваны изменениями ПЭ внутри объема $V$ и на его поверхности

а) внутрен. процессы м.б обусловлены внутренними источниками энергии распределен. по объему $V$.

$\exists$ $Q$ – плотность внутренних источников тепла („внутрен. энергия")

• Общ. кол-во тепла, накопленное в $V$ за $\Delta t$:

$$\int_t^{t+\Delta t}\iiint_V Q\,dV\,dt \quad (2)$$

б) процессами потери (приобретения) тепла (вэ) на поверхности $\Sigma$ за $\Delta t$

$$-\int_t^{t+\Delta t}\iint_\Sigma \vec{W}\vec{n}\,d\Sigma\,dt \quad (3)$$

Т.обр. ЗСПЭ в $\int$-ой форме:

$$\Delta E=\int_V\Big\{\Big[\rho\Big(\frac{v^2}{2}+e\Big)\Big](x,y,z,t+\Delta t)-\Big[\rho\Big(\frac{v^2}{2}+e\Big)\Big]\cdot$$

$$\cdot(x,y,z,t)\Big\}dV=(1)+(*)+(2)+(3)$$

## Лекция 11. Феноменологические законы

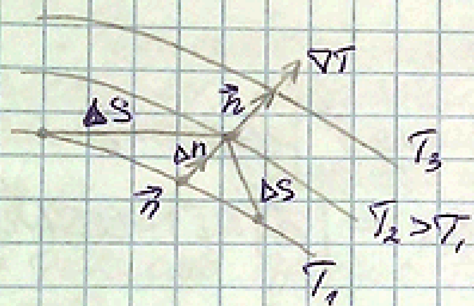
Феноменологические законы

18.11.17.
11 лекция

Некот. соотнош., кот. установл. на основе экспериментов и позвол. получ. дополнит. связи м-у различн. характеристик. рассматриваемых процессов.

Одной из так характеристик явл-ся поток, кот. возник-т из-за различия величин характеристик в различн. тчк. среды

Изотермы - линии $t$.




Диффузия - переход $t$ от более нагрет. к менее

$\Delta S$ - расстоян. м-у тчк на двух соседних изотермах

Рассм. $\frac{T_2-T_1}{\Delta S}$, где $\Delta S$

$\max\limits_{\Delta S} \frac{T_2-T_1}{\Delta S} = \frac{T_2-T_1}{\Delta n}$, где $\vec{n}$ - вектор нормали, направл. от одной изомен к друг

$\lim\limits_{\Delta S\to 0} \frac{T_2-T_1}{\Delta S} = \frac{\partial T}{\partial n}$ - скор. изменен $t$ (по направл. к данной тчк) вдоль нормали $n$

40