КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра физики

ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И НЕФТЕГАЗОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра геофизики и нефтегазовых технологий

Баширов Ф.И.

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Казань – 2018

УДК 531/534
ББК 22.2, 22.3

Принято на заседании учебно-методической комиссии института геологии и нефтегазовых технологий
Протокол № 4 от 23 марта 2018 года

Физическая механика: учебное пособие / Ф.И. Баширов – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 99 с.

Учебное пособие "ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА" предназначено для студентов института геологии и нефтегазовых технологий, обучающихся по направлению 05.03.01 «Геология» и 21.03.01 «Нефтегазовое дело» по дисциплине “Физика”.

Пособие написано на основе курса лекций по физике, которые читались автором студентам естественных факультетов Казанского Университета на протяжении последних 35 лет, а также студентам технических специальностей государственного университета г. Конакри (республика Гвинея, Западная Африка) в 1998 – 2010 годах. Изложены теоретические основы классической механики и ряда приложений: кинематика и динамика материальной точки, динамика твердого тела, упругие свойства твердых тел, элементы гидро и аэродинамики, механические колебания, волновые процессы, основы акустики. Главное внимание уделено рассмотрению физического смысла и графического представления основных понятий и законов.

Д.ф.м.н., профессор Баширов Ф.И.
Email: fbashir@mail.ru
10.01.2018

Ил: 106. Табл.: 2. Библиогр.: 6 наим.

Рецензент: Гайсин Н.К., д.ф.-м.н., проф. кафедры физики КНИТУ (КХТИ)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Объекты описания.

Телом называется физическая система, линейные размеры которой намного больше расстояний между микроскопическими частицами (атомами и молекулами), составляющими систему.

Материальной точкой (м.т.) называется тело, размерами и формой которого можно пренебречь в рассматриваемой задаче. Например, при изучении движения планет вокруг Солнца можно допустить, что и планеты, и Солнце – материальные точки, так как их размеры намного меньше взаимного расстояния. Другие примеры: Луна по отношению к Земле, машина на автостраде, книга в комнате. Понятие м.т. введено для того, чтобы находить приближенное решение физической проблемы.

Механическая система – это система тел, в том числе, и система м.т. Она состоит из совокупности м.т., которые находятся во взаимодействии, как между собой, так и с телами, которые не входят в эту систему.

Среди различных тел существуют тела, для которых внутренние расстояния не изменяются, то есть расстояние между двумя произвольными м.т. постоянно. Такие тела называются **абсолютно твердыми телами**. Размеры и форма абсолютно твёрдого тела не меняются при его движении. Каждое твёрдое тело может быть условно поделено на достаточно большое число элементарных частей так, чтобы размеры каждой из них были бы намного меньше размеров всего тела. Поэтому абсолютно твёрдое тело часто рассматривается как система жёстко связанных между собой материальных точек.

Механическая система является **свободной**, если взаимное положение отдельных частей системы может быть произвольным. Механическая система называется **связанной**, если положение одних произвольно взятых частей системы зависит от положения других частей этой системы.

Физическая механика и ее разделы.

Физическая механика или просто **механика** – раздел физики, в котором описывается наиболее простая форма движения материи: **механическое движение**, состоящее из изменения взаимного расположения тел или их частей в пространстве и во времени.

Классическая (ньютоновская) механика – раздел механики, в которой изучается движение тел, происходящее при скоростях много меньших по сравнению со скоростью распространения света в пустоте.

Релятивистская механика – раздел механики, в которой изучается движение тел, происходящее при скоростях, сравнимых со скоростью света $c \approx 3\cdot10^8$ м/с.

Квантовая (волновая механика) предназначена для изучения движения микрочастиц, то есть частиц, массы покоя которых сравнимы или меньше массы покоя атомов.

Статистическая механика – механика, в которой описывается движение тождественных частиц средствами теории вероятностей.

Три составные части классической механики.

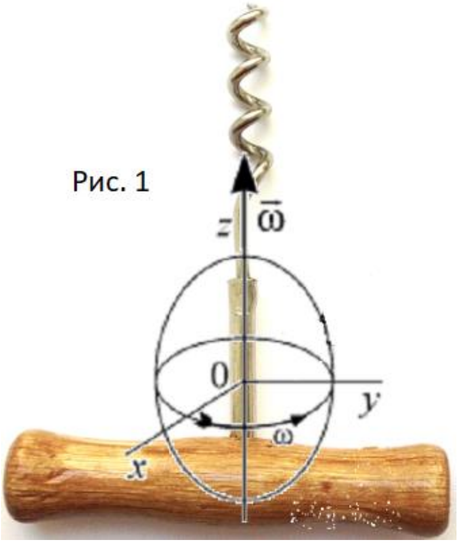
Статика посвящена изучению состояния механической системы в покое и условий ее равновесия.

Кинематика посвящена изучению движения тел без выяснения причин, которые это движение вызывают, т.е. без учета сил, действующих на тела и между телами.

Динамика посвящена изучению движения тел с учетом сил, которые действуют на тела и между телами, т.е. в совокупности с причинами, которые это движение вызывают.

Физические величины.

- **Скалярные величины** характеризуются только алгебраическим значением. Примеры: объем *V*, масса *m*, работа *A*.
- **Полярные векторные величины** характеризуются 3-мя типами данных: численным значением (модулем), точкой приложения и направлением. Для их обозначения применяется жирный шрифт (только в печатных изданиях) или над буквенным символом ставится стрелка (при их написании от руки). Примеры: радиус-вектор $\mathbf{r} \equiv \vec{r}$, сила $\mathbf{F} \equiv \vec{F}$, скорость $\mathbf{v} \equiv \vec{v}$, импульс $\mathbf{p} \equiv \vec{p}$, ускорение $\mathbf{w} \equiv \vec{w}$ или $\mathbf{a} \equiv \vec{a}$.
- **Аксиальные векторные величины** (*неполярные, осевые*) характеризуются 2-мя типами параметров: модулем и направлением. Примеры: угол поворота $\boldsymbol{\alpha} \equiv \vec{\alpha}$, угловая скорость $\boldsymbol{\omega} \equiv \vec{\omega}$, момент силы $\mathbf{M} \equiv \vec{M}$. Направление аксиального вектора определяется по правилу правого винта (буравчика, штопора). Так, если некоторое тело находится во вращательном движении с угловой скоростью **ω**, то направление вектора **ω** совпадает с направлением поступательного перемещения правого винта (буравчика), ручка которого поворачивается вместе с телом (рис.1).



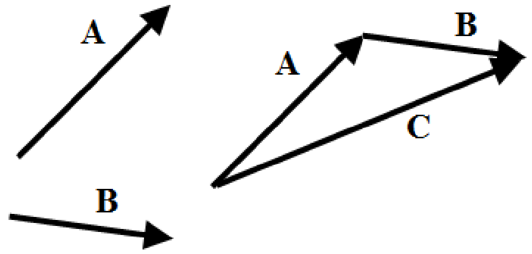
- **Тензорные величины** применяются для отображения зависимости между векторными величинами. Например, в кристаллах векторы электрического смещения **D** и напряженности электрического поля **E** связаны выражением: $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, или в тензорной форме $D_i = \varepsilon_{ij}\,\varepsilon_0\,E_j$, где ε_{ij} – тензор 2 ранга, состоящий из 9 компонентов.

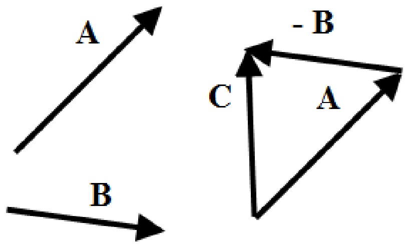
$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Действия над векторами.

Сложение векторов **A** и **B**: **A + B = C**

Разность векторов **A** и **B**: **A - B = C**

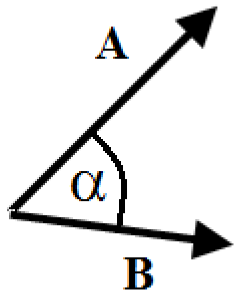


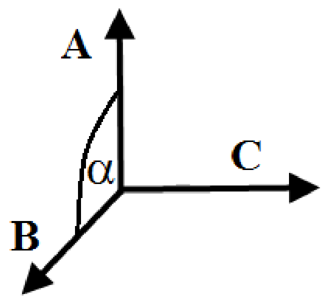


Произведение векторов A и **B**

Скалярное произведение:
AB = (AB) = $A{\cdot}B{\cdot}\cos\alpha = C$
(C – скалярная величина).

Векторное произведение:
A×B = [AB]= C,   C ⊥ A, C ⊥ B,
$C = A{\cdot}B{\cdot}\sin\alpha$**.**





Основные понятия и определения механики.

Радиус-вектор материальной точки – это вектор $\mathbf{r} \equiv \vec{r}$, проведённый из начала системы отсчета до этой точки. Например, $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ на рис. 2.

Траектория материальной точки – линия ∪AB (прямая или кривая), описываемая подвижной точкой в пространстве (рис. 2).

Путь (скалярная величина) ΔS или S – длина траектории ∪AB (рис. 2).

Вектор смещения (перемещения) – вектор $\Delta\mathbf{r} \equiv \Delta\vec{r}$, проведённый от одной точки $\mathbf{r}_A$ к другой точке $\mathbf{r}_B$ (рис. 2).

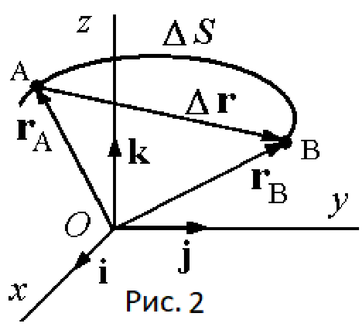


Рис. 2

Средняя скорость (скалярная величина) – средний путь, пройденный м.т. за единицу времени на заданном участке траектории: $\upsilon_{\text{ср}} = S / t$ или $\upsilon_{\text{ср}} = \Delta S / \Delta t$.

Вектор мгновенной скорости или просто **скорости** $\mathbf{v} \equiv \vec{\upsilon}$ – *приращение* вектора смещения материальной точки за единицу времени в окрестности заданной точки траектории (первая производная от радиус-вектора по времени):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_t' = \dot{\mathbf{r}}\,.$$

Вектор мгновенного ускорения или просто **ускорения** $\mathbf{w} \equiv \vec{w}$, $\mathbf{a} \equiv \vec{a}$ – приращение мгновенной скорости подвижной точки за единицу времени (первая производная от вектора скорости по времени):

$$\mathbf{w} = \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{v}_t' = \dot{\mathbf{v}} \quad \text{или} \quad \mathbf{w} = \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{r}_{tt}'' = \ddot{\mathbf{r}}\ .$$

Вектор силы $\mathbf{F} \equiv \vec{F}$ – действие одного тела на другое тело, в результате которого второе тело приобретает ускорение или/и деформируется.

Масса или **инерционная (инертная) масса** m – свойство тела, скаляр. В согласии со вторым законом Ньютона ($\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$) масса характеризует инерционное свойство тела сопротивляться действию внешней силы. Масса численно равна величине силы, которая сообщает телу единичное ускорение:

$$m = F/a\,.$$

Сила притяжения (тяготения) Земли $\mathbf{F}_{тяг}$ – вектор силы, с которой Земля притягивает тело (м.т.) согласно закону всемирного тяготения.

Сила тяжести $\mathbf{F}_{тяж}$ – результирующий вектор всех сил, действующих на тело, которое находится в свободном состоянии на Земле. Тело, не имеющее опоры или подвеса, под действием силы тяжести движется с ускорением, которое называется ускорением силы тяжести или **ускорением свободного падения g**. Сила тяжести присутствует всегда и не зависит от того, тело движется или покоится. Точка приложения силы тяжести приближенно совпадает с центром инерции (масс) тела (рис. 3*а*).

Вес тела – вектор силы **P**, с которой тело действует на горизонтальную опору или подвес, препятствующие ему свободно перемещаться на Земле. Точка приложения силы веса находится на поверхности соприкосновения тела и Земли или в точке подвеса (рис. 3*б*).

Импульс м.т. – вектор $\mathbf{p} \equiv \vec{p}$, равный произведению массы м.т. m на ее скорость **v**: $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ ($\vec{p} = m\vec{v}$). Импульс **p** направлен вдоль скорости **v** (рис. 3*в*).

Энергия W – свойство тела, характеризующее способность тела выполнить работу при определенных условиях (скаляр).

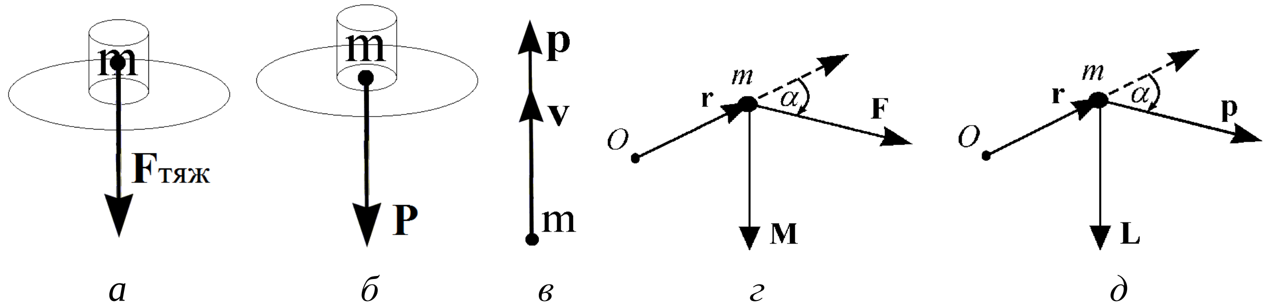


Рис. 3

Потенциальная энергия W_P – энергия, обусловленная пространственным положением тела, находящегося во взаимодействии с другими телами. Расчетная формула зависит от природы взаимодействия тела с окружением.

Кинетическая энергия W_C – энергия, которой тело обладает, когда оно находится в движении. Кинетическая энергия м.т. равна: $W_C = mv^2/2$.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} \equiv \vec{\omega}$ – аксиальный вектор, численно равный углу, на который радиус-вектор м.т. $\mathbf{r} \equiv \vec{r}$ поворачивается за единицу времени:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad \left(\text{или} \quad \vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\alpha}}\right).$$

Вектор углового ускорения $\boldsymbol{\beta} \equiv \vec{\beta}$ – аксиальный вектор, равный приращению вектора угловой скорости за единицу времени:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad \left(\text{или} \ \vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}}\right).$$

Момент силы $\mathbf{M} \equiv \vec{M}$ – аксиальный вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки приложения силы на вектор силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = [\mathbf{r}\ \mathbf{F}] = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F} = [\vec{r}, \vec{F}].$$

Направление момента силы определяется по правилу правого винта, и его модуль вычисляется по формуле: $M = rF\sin\alpha$, где α – угол между продолжением вектора $\mathbf{r}$ и вектором $\mathbf{F}$ (рис. 3*г*).

Момент импульса $\mathbf{L} \equiv \vec{L}$ – аксиальный вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки приложения импульса на вектор импульса $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\ \mathbf{p}] = [\vec{r}, \vec{p}].$$

Направление момента импульса определяется по правилу правого винта, и его модуль вычисляется по формуле: $L = r\,p\,\sin\alpha$, где α – угол между продолжением вектора $\mathbf{r}$ и вектором $\mathbf{p}$ (рис. 3*д*).

Момент инерции J (скаляр) – согласно основному закону динамики вращательного движения твердого тела около закрепленной оси

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{J}\mathbf{M} \quad \left(\text{или} \ \vec{\beta} = \frac{1}{J}\vec{M}\right)$$

характеризует инерционные свойства тела сопротивляться действию момента силы **M**. Момент инерции твердого тела около закрепленной оси численно равен моменту силы, сообщающему единичное угловое ускорение данному телу:

$$J = \frac{M}{\beta}.$$

Виды движения твердого тела.

– **пространственное:** отдельные точки тела могут занять любые положения в пространстве;
– **плоское:** отдельные точки тела перемещаются в параллельных плоскостях;
– **прямолинейное:** отдельные точки тела перемещаются вдоль прямых параллельных линий;
– **криволинейное:** траектории отдельных точек тела – кривые линии;
– **поступательное:** любая прямая линия, проведенная в теле, перемещается параллельно себе самой (форма траектории отдельных частей тела – одинаковая).
– **вращательное**: траектории отдельных частей тела – концентрические окружности (центры окружностей лежат на одной оси, проходящей через центр масс тела).

Примечание. *Понятия поступательное и вращательное движение не относятся к м.т., так как у точки нет частей. М.т. может совершать пространственное, плоское, прямолинейное и/или криволинейное движение. Движение м.т. по окружности – это не вращательное, а плоское криволинейное движение! Поэтому орбитальное движение Земли и других планет около Солнца не следует рассматривать как вращательное движение, а пространственное движение их центра масс по круговой траектории, т.е. Земля не вращается, а обращается вокруг Солнца. Вращательное движение Земли – это ее вращение вокруг оси, проходящей через полюсы*.

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Системы отсчета, траектория.

Механическое движение м.т. заключается в изменении ее пространственного положения по отношению к некоторому твёрдому телу или системе тел, которые условно покоятся. Движение любого тела – **относительное**. Совокупность тел отсчета и времени называется **системой отсчета**. С телами отсчета может быть жёстко связана некоторая пространственная система координат, в которой положение м.т. задается тремя независимыми координатами. В механике, чаще всего, используются следующие системы координат: прямоугольная (декартовая) система ($\mathbf{r} = \mathbf{r}(x,y,z)$ – рис. 4*а*), цилиндрическая система ($\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho,\varphi,z)$ – рис. 4*b*) и сферическая система ($\mathbf{r} = \mathbf{r}(r,\theta,\varphi)$ – рис. 4*в*).

В декартовой системе координат справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

$$x = r\cos\alpha\,,\ \ y = r\cos\beta\,,\ \ z = r\cos\gamma\,,$$

где α, β, γ – углы между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и осями Ox, Oy, Oz декартовой системы координат; **i**, **j**, **k** – орты (единичные векторы осей координат). Функции

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются направляющими косинусами радиус-вектора. Кроме того, справедливы равенства:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{и} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим координатам и обратно имеют вид:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad x = \rho\cos\varphi,$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}(y/x), \qquad y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = z, \qquad z = z.$$

Аналитические связи между декартовыми и сферическими координатами даются следующими выражениями:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}(y/x), \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right), \qquad z = r\cos\theta.$$

Движение м.т. считается вполне определенным, если указан однозначный закон зависимости ее пространственных координат (декартовых, цилиндрических или других) от времени: $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$ и $q_3 = q_3(t)$. Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, который соединяет начало координат O с движущейся точкой P (q_1, q_2, q_3). Если декартовые координаты точки P имеют значения x, y, z, то радиус-вектор точки P равен:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

где **i, j, k** – единичные векторы (орты), совпадающие с положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz и компонентами вектора $\mathbf{r}$ вдоль этих осей – векторами $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$ (рис. 4*а*), соответственно.

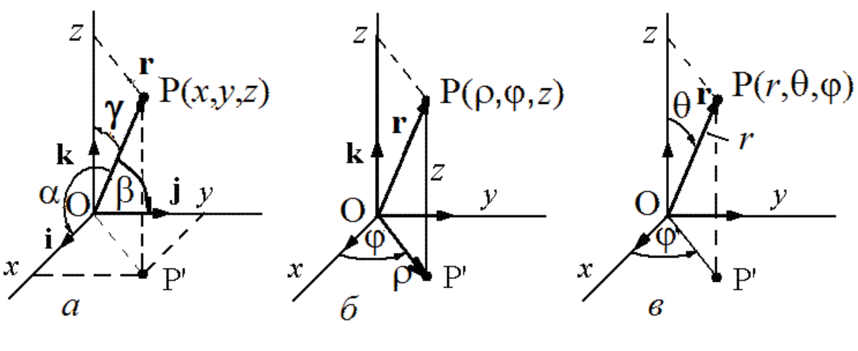


Рис. 4

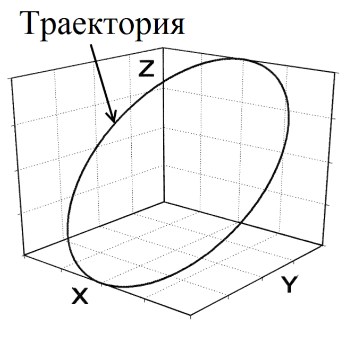


Рис. 5

Траектория – прямая или кривая линия, описываемая подвижной м.т. в пространстве. Траектория тела – это совокупность траекторий всех точек тела.

Система трех уравнений $q_i = q_i(t)$, где $i = 1, 2, 3$, называется *уравнением траектории* материальной точки, заданной *в параметрической форме.* Исключив параметр t из этих уравнений, находим функциональную зависимость между координатами точек пространства, через которые проходит траектория:

$$\begin{cases} f_1(q_1, q_2, q_3) = 0, \\ f_2(q_1, q_2, q_3) = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Траектория м.т. в параметрической форме имеет вид:

$$x = a\cos\omega t,\ \ y = b\sin\omega t,\ \ z = c\sin\omega t,$$

где a, b, c и ω – не равные нулю константы. Исключив параметр t (время), находим связи между координатами:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{c}z\,.$$

Форма траектории – эллипс, представленный линией пересечения двух поверхностей (рис. 5).

Радиус-вектор, скорость, ускорение.

Для изучения кинематики материальной точки требуется знание зависимости от времени его радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$. Пусть м.т. при своем движения переместилась по траектории из пункта А в пункт В, затратив на это время Δt (рис. 2). Длина участка траектории $\cup$АВ, по которой двигалась м.т., называется пройденным **путем** и обозначается S или ΔS. Радиус-вектор $\mathbf{r}_\text{A}$ ставится в соответствие пункту А, и $\mathbf{r}_\text{B}$ – пункту В. Приращение радиус-вектора $\mathbf{r}$ называется **вектором смещения (перемещения)** и обозначается $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_\text{B} - \mathbf{r}_\text{A}$. Его модуль Δr равен длине прямой линии, соединяющей 2 пункта траектории: Δr = АВ = $|\Delta\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_\text{B} - \mathbf{r}_\text{A}|$.

Длина прямой линии АВ короче длины кривой линии $\cup$АВ, поэтому $\Delta r < \Delta S$. Поделив это неравенство на конечное время движения Δt, получим новое неравенство $\Delta r/\Delta t < \Delta S/\Delta t$. Отношение $\Delta S/\Delta t = v_\text{ср}$ определяет значение средней скорости м.т. на траектории $\cup$АВ. Следовательно, отношение модуля смещения ко времени движения $\Delta r/\Delta t$ меньше средней скорости $\Delta S/\Delta t$.

Рассмотрим предельный случай, когда время движения бесконечно мало. Тогда пункты А и В находятся на бесконечно малом удалении друг от друга, прямая АВ и дуга $\cup$АВ становятся неразличимыми, и неравенство $\Delta r/\Delta t < \Delta S/\Delta t$ переходит в равенство

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = v \ \ \text{или} \ \ v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

которым определяется расчетное выражение модуля мгновенной скорости. Бесконечно малые по длине отрезок АВ и дуга $\cup$АВ сливаются в одну прямую линию AB, то есть dS = dr, и выражению $v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ можно поставить в соответствие векторную форму:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{r}_t' = \dot{\mathbf{r}}\ .$$

Таким образом, вектор мгновенной скорости м.т. $\mathbf{v}$ – это первая производная радиус-вектора этой точки по времени. Компонентами вектора мгновенной скорости становятся производные по времени соответствующих проекций радиус-вектора на оси координат.

В декартовой системе координат справедливы выражения:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z\,,\ \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}\,,\ v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\,,$$

$$v_x = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \ v_y = \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\ \ v_z = \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

В цилиндрических координатах –

$$v_\rho = \dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\ \ v_\theta = \rho\dot{\theta} = \rho\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\ \ v_z = \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\mathbf{v} = v_\rho\frac{\vec{\rho}}{\rho} + v_\theta\frac{\vec{\theta}}{\theta} + v_z\mathbf{k}\quad \text{и}\quad v^2 = {v_\rho}^2 + {v_\theta}^2 + {v_z}^2.$$

В сферических координатах –

$$v_r = \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\ \ v_\theta = r\cdot\dot{\theta} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\ \ v_\varphi = r\cdot\sin\theta\cdot\dot{\varphi} = r\cdot\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathbf{v} = v_r\frac{\vec{r}}{r} + v_\theta\frac{\vec{\theta}}{\theta} + v_\varphi\frac{\vec{\varphi}}{\varphi}\quad \text{и}\quad v^2 = {v_r}^2 + {v_\theta}^2 + {v_\varphi}^2.$$

В общем случае, м.т. преодолевает отдельные участки траектории с различной скоростью. Кроме того, скорость может меняться по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости по модулю и направлению служит физическая величина, которая называется **ускорением**. Она равна первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора м.т. по времени:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}\quad (\text{или}\quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}).$$

В декартовой системе координат компонентами вектора ускорения являются производные по времени от проекций вектора скорости, так что

$$w_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\quad w_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z}\,,$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_x + \mathbf{w}_y + \mathbf{w}_z,\ \mathbf{w} = w_x\mathbf{i} + w_y\mathbf{j} + w_z\mathbf{k}\quad \text{и}\quad w^2 = {w_x}^2 + {w_y}^2 + {w_z}^2.$$

Если ускорение м.т. направлено вдоль скорости, то движение является ускоренным. При замедленном движении ускорение м.т. направлено против скорости. Если ускорение равно нулю, то м.т. движется равномерно по прямой или покоится.

На криволинейной траектории направление скорости м.т. непрерывно меняется. В этом случае ускорение м.т. направлено под углом к скорости.

Произвольное движение.

Проблему удобно решить в подвижной ортогональной системе координат, в которой направления осей определяются единичными векторами: $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}/v$ – орт касательной к траектории, направленный вдоль вектора скорости $\mathbf{v}$, и $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ – орт нормали, направленный к центру кривизны траектории вдоль вектора радиуса кривизны траектории $\mathbf{R}$ (рис. 6).

В общем случае движения скорость м.т. изменяется как по величине, так и по направлению. Найдем расчетную формулу ускорения $\mathbf{a}$ как функцию скорости $\mathbf{v}$ и радиуса кривизны R траектории. Пусть м.т. перемещается на небольшое расстояние из пункта A в пункт B по криволинейной траектории $\cup$AB, которую приближенно будем считать дугой окружности (рис. 7). Время движения обозначим Δt. Длина дуги $\cup$AB – это пройденный путь ΔS. Обозначим вектор, соответствующий радиусу кривизны дуги $\cup$AB, через $\mathbf{R}$. Начало отсчета вектора $\mathbf{R}$ совпадает с положением м.т. и направлено к центру кривизны O. $\mathbf{R} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ в пункте A. Вектор $\mathbf{R}$ поворачивается на угол $\Delta\alpha$ за время Δt и занимает положение $\overrightarrow{\mathrm{BO}}$. Вектор скорости в пунктах A и B обозначим соответственно $\mathbf{v}_\mathrm{A}$ и $\mathbf{v}_\mathrm{B}$, причем, $\mathbf{v}_\mathrm{B} = \overrightarrow{\mathrm{BE}}$. Приращение вектора скорости равно $\Delta\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \mathbf{v}_\mathrm{B} - \mathbf{v}_\mathrm{A}$. Модуль его проекции на направление скорости $\mathbf{v}_\mathrm{B}$ равен: BD = BE – DE = $\Delta v_\tau = v_\mathrm{B} - v_\mathrm{A}\cdot\cos(\Delta\alpha)$. Модуль проекции вектора $\Delta\mathbf{v}$ на направление нормали $\mathbf{n}$ (радиус-вектора $\mathbf{R} = \overrightarrow{\mathrm{BO}}$) равен: Δv_n = BF = CD = $v_\mathrm{A}\cdot\sin(\Delta\alpha)$. Итак, приращение вектора скорости $\Delta\mathbf{v}$ представляет собой векторную сумму двух его компонентов $\Delta\mathbf{v}_\tau$ и $\Delta\mathbf{v}_\mathrm{n}$:

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_\tau + \Delta\mathbf{v}_\mathrm{n} = \Delta v_\tau\cdot\boldsymbol{\tau} + \Delta v_\mathrm{n}\cdot\mathbf{n}.$$

Формулы полного, тангенсального и нормального ускорений $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}$, $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\tau}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_\tau$ и $\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_\mathrm{n}$ получим, преобразуя приращения скоростей $\Delta\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{v}_\tau$ и $\Delta\mathbf{v}_\mathrm{n}$:

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_\tau + \Delta\mathbf{v}_\mathrm{n}, \quad \Delta\mathbf{v} / \Delta t = \Delta\mathbf{v}_\tau / \Delta t + \Delta\mathbf{v}_\mathrm{n} / \Delta t,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}_\mathrm{n}}{\Delta t}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\tau}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\tau}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_\tau, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\mathrm{n}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}_\mathrm{n}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_\mathrm{n}, \quad \mathbf{a} = a_\tau\cdot\boldsymbol{\tau} + a_\mathrm{n}\cdot\mathbf{n},$$

$$a_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta v_\tau/\Delta t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}\cdot\cos\alpha}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$a_{\mathrm{n}} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\Delta v_{\mathrm{n}}/\Delta t\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{v_{\mathrm{A}}\cdot\sin\Delta\alpha}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(v_{\mathrm{A}}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(v_{\mathrm{A}}\frac{\Delta S/R}{\Delta t}\right) =$$

$$= \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right) = \frac{v}{R}v = \frac{v^2}{R},$$

где ввиду малости угла α принято, что $\cos\alpha = 1$ и $\sin\alpha = \alpha$.

Итак, вектор полного ускорения равен: $\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}}$, а модуль полного ускорения рассчитывается по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^{\ 2} + a_{\mathrm{n}}^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}\ .$$

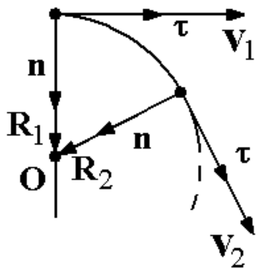


Рис. 6

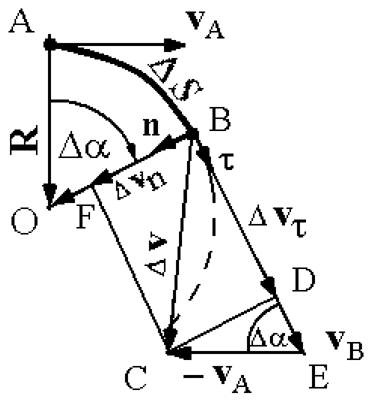


Рис. 7

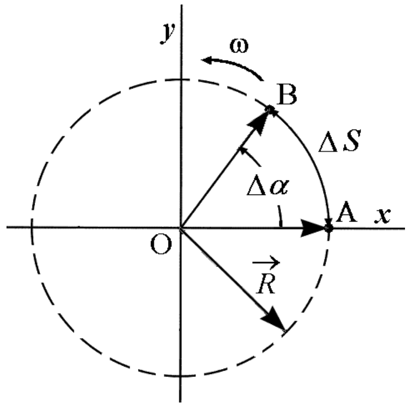


Рис. 8

<u>Важно</u>: 1) *тангенсальным* (*касательным*) *ускорением, направленным вдоль скорости по касательной к траектории, определяется изменение скорости по величине;* 2) *нормальное ускорение направлено по радиусу кривизны траектории к центру ее кривизны перпендикулярно вектору скорости и ответственно за изменение скорости по направлению*.

Из полученных выше формул вытекают критерии видов движения м.т.:

- $a_{\mathrm{n}} = 0$ – прямолинейное движение,
- $a_{\mathrm{n}} \neq 0$ – криволинейное движение,
- $a_\tau = 0$ – равномерное движение,
- $a_\tau > 0$ – ускоренное движение,
- $a_\tau < 0$ – замедленное движение.

Прямолинейное движение.

- Равномерное движение:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau = \mathbf{a}_{\mathrm{n}} = 0,\ \ \mathbf{v} = \mathrm{Const},\ \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\cdot\Delta t,\ \Delta S = v\cdot\Delta t.$$

- Неравномерное движение:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau \neq 0 \ (a_\tau > 0 \text{ или } a_\tau < 0),\ \ \mathbf{a}_n = 0,\ \ |\mathbf{a}| = a = a_\tau,$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)\,\mathrm{d}t,\ |\mathbf{v}| = v,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t,\ \ \Delta S = \int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\mathrm{d}t,\ \ v_{\text{ср}} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t,\ \ |\mathbf{v}_{\text{ср}}| \neq v_{\text{ср}}.$$

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)\,\mathrm{d}t,\ \ a_{\text{ср}} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t,\ \ |\mathbf{a}_{\text{ср}}| \neq a_{\text{ср}}.$$

- Равнопеременное движение: $\mathbf{a} = \text{Const}$.
  - Равноускоренное движение – векторы ускорения и скорости направлены в одну и ту же сторону: $\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $a_\tau > 0$.
  - Равнозамедленное движение – вектор ускорения направлен против вектора скорости: $\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $a_\tau < 0$.

Движение по окружности.

Движение м.т. по окружности – это распространенный частный случай плоского движения м.т. по криволинейной траектории. Предположим, что м.т. в начальный момент отсчета времени ($t = 0$) находится в пункте А и за конечное время Δt перемещается в пункт В, пройдя при этом путь ΔS по дуге окружности $\cup$АВ радиуса R. Радиус-вектор $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ точки А за это время поворачивается на угол $\Delta\alpha$ и приобретает значение $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$. Принято, что угол поворота (угловой путь) радиус-вектора $\Delta\alpha$ отсчитывается от оси Оx декартовой системы координат и измеряется в радианах (2π рад = 360º или 1 рад ≈ 57º). В случае, когда угловой путь многократно превышает значение 2π рад, удобно пользоваться понятием числа оборотов ΔN, которое при известном угле поворота $\Delta\alpha$ вычисляется по формуле: $\Delta N = \Delta\alpha / 2\pi$. Поделив число оборотов ΔN на время движения Δt, получим среднее значение числа оборотов в единицу времени – частоту оборотов (или частоту вращения) радиус-вектора:

$$f = n = \nu = \Delta N / \Delta t = (\Delta\alpha / 2\pi) / \Delta t = (\Delta\alpha / \Delta t) / 2\pi = \omega_{\text{ср}} / 2\pi,$$

где отношение приращение угла поворота радиус-вектора ко времени движения $(\Delta\alpha/\Delta t) = \omega_{\text{ср}}$ называется средней угловой частотой вращения радиус-вектора. Тогда мгновенное значение угловой частоты равно первой производной от углового пути по времени: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{\alpha}$. Единицей измерения частоты вращения является 1 Гц (герц): 1 Гц = 1 оборот/с. Быстрота изменения угловой частоты (скорости) характеризуется средним $\beta_{ср}$ и мгновенным β угловым ускорением как:

$$\beta_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ и } \beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Из геометрии известно, что отношение длины дуги окружности к ее радиусу равняется углу, на который опирается дуга, то есть $\Delta S/R = \Delta\alpha$ рад. Отсюда следуют формулы связи линейного пути ΔS с угловым путем $\Delta\alpha$:

$$\Delta S = R\cdot\Delta\alpha$$

и линейной скорости v с угловой скоростью ω:

$$v = dS / dt = R \cdot d\alpha / dt = R\cdot\omega.$$

Расчетные выражения для модулей тангенсального и нормального ускорений соответственно имеют вид:

$$|a_\tau| = d\,v / dt = R\, d\omega / dt = R\,\beta \quad \text{и} \quad |a_n| = v^2 / R = R^2\,\omega^2 / R = R\,\omega^2.$$

Формулы равномерного движения по окружности:

$$\beta = 0,\ \omega = \text{Const},\ \ \Delta\alpha = \omega\cdot\Delta t \ \text{ и } \ \alpha = \alpha_0 + \omega\cdot\Delta t$$

и равнопеременного:

$$\beta = \text{Const},\ \omega = \omega_0 + \beta\cdot\Delta t,$$

$$\Delta\alpha = \int_0^{\Delta t} \omega\, dt = \int_0^{\Delta t} (\omega_0 + \beta\cdot t)\, dt = \omega_0\cdot\Delta t + \tfrac{1}{2}\beta\cdot(\Delta t)^2.$$

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.

Движение м.т. в инерциальной системе отсчета. Законы Ньютона.

Первый закон Ньютона: материальная точка (далее тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока действие других тел не выведет его из этого состояния. Этот закон называется **законом инерции**, а движение тела, не находящегося под влиянием внешних тел – **движением по инерции.** Любое механическое движение – *относительное* и его характер зависит от выбора системы отсчета. Исследуемое тело может находиться в покое по отношению к одной системе отсчета, равномерном движении по отношению к другой и ускоренном движении по отношению к третьей. Поэтому закон инерции не всегда приемлем для произвольной системы отсчета. Так, неподвижные тела, покоящиеся на гладком полу автобуса, который движется равномерно и прямолинейно по отношению к Земле, начинают двигаться (скользить или катиться) по полу всякий раз, когда автобус ускоряется или замедляется.

Системы отсчета, в которых справедлив закон инерции, называются **инерциальными или галилейскими** (ИСО). В качестве таковой может рассматриваться *гелиоцентрическая* система отсчета, в которой начало координат совпадает с центром инерции солнечной системы, а оси направлены к далеким звездам. Любая система отсчета, находящаяся в покое или равномерном прямолинейном движении по отношению к ИСО, является также ИСО. Напротив, каждая система, движущаяся ускоренно по отношению к ИСО, является неинерциальной (не галилейской) системой отсчета (НСО).

Геоцентрическая система отсчета (система отсчета, жёстко связанная с Землей) является примером НСО. Благодаря суточному вращению все точки Земли описывают окружности, центры которых находятся на оси суточного вращения Земли. Это означает, что точки Земли движутся с ускорением по отношению к ИСО. Следовательно, геоцентрическая система отсчета является неинерциальной, и, вообще говоря, 1 закон Ньютона не выполняется на Земле. Однако во многих практических задачах физической механики можно считать геоцентрическую систему отсчета как галилейскую.

Сила – векторная величина, которая является мерой механического действия, осуществляемого на тело другими телами (действие, в результате которого испытуемое тело приобретает ускорение или/и деформируется). Сила считается полностью определенной, если указаны ее числовое значение, направление и точка приложения. Согласно закону инерции, причиной изменения состояния движения тела является взаимодействие тел. Кроме того, сила приводит к деформации тела.

Масса – мера инерции (инертности) тела в ньютоновской механике. Инерция тела в галилейской системе отсчета проявляется благодаря тому, что под воздействием внешней силы это тело приобретает ускорение, конечное по величине, а в отсутствие внешнего воздействия сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон Ньютона – ускорение тела пропорционально приложенной силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}}, \quad \boxed{\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}}{m}} \text{ или } \boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}}{m}}.$$

Уравнение, которое устанавливает связь между силой **F** и ускорением **a**, представляет собой дифференциальное уравнение движения тела – **основное уравнение динамики** материальной точки (рис. 9*а*). Это уравнение, записанное в декартовых координатах, распадается на 3 дифференциальных уравнения второго порядка:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y \text{ и } m\ddot{z} = F_z,$$

где F_x, F_y и F_z – проекции вектора силы $\vec{F} = \mathbf{F}$ на координатные оси.

Третий закон Ньютона – равенство сил действия и противодействия:

- на всякое действие всегда найдется равное и противоположно направленное противодействие или

- два тела взаимодействуют с силами, равными по величине и противоположно направленными.

На рис. 9(*б*) показана изолированная система 2-х тел, массы которых не равны: $m_1 > m_2$. Сила $\mathbf{F}_1$ действует на 1 тело со стороны 2 тела, а 2 тело действует на 1 тело с силой $\mathbf{F}_2$. В согласии с 3 законом Ньютона следует, что

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad \text{и} \quad F_1 = F_2.$$

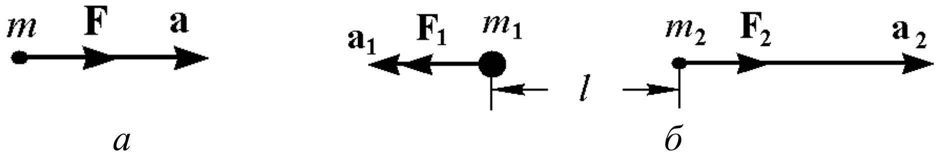


Рис. 9

Поэтому длины векторов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ изображены одинаковыми, а их стрелки ориентированы в противоположные стороны. Представленные на рисунке ускорения тел $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ направлены в ту же сторону, что и соответствующие им силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Масса 1 тела условно принята больше массы 2 тела ($m_1 > m_2$). Следовательно, по 2 закону Ньютона справедливо неравенство $\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2$, как это и показано графическим построением на рис. 9*б*.

Виды сил.

Задачи динамики бывают **прямые** и **обратные**. В прямой задаче неизвестными величинами являются ускорение, скорость и координата тела, а сила считается известной. В обратной задаче, наоборот, отыскивается значение силы (сил) по известному ускорению (скорости и координате). Следует отметить, что все включенные в задачу физические величины являются, в общем случае, функциями времени. Для решения задач динамики требуется знание законов сил, т.е. зависимость каждой силы от определяющих ее физических величин. Иначе говоря, должна быть известна формула силы.

Известные в природе силы подразделяются на **фундаментальные** и **приближенные** виды сил. К фундаментальным силам относятся:

- гравитационная сила притяжения тел, обладающих массой,
- электростатическая сила кулоновского притяжения или отталкивания тел, обладающих электрическим зарядом, и
- магнитная сила взаимодействия электрических токов или магнитных моментов.

Использование фундаментальных сил позволяет, вообще говоря, решать любые задачи динамики. Однако в присутствии большого числа взаимодействующих тел возрастает количество записанных уравнений, и возникают трудности их решения. К счастью, с достаточной степенью точности задачи механики решаются при помощи экспериментально подтверждающихся приближенных законов сил, полученных эмпирически. Примерами приближенных видов сил являются:

- сила тяжести,
- сила упругости,

- сила трения скольжения,
- сила вязкого трения,
- выталкивающая сила Архимеда и т.д.

Сила гравитационного притяжения обусловлена в согласии с **законом всемирного тяготения** притяжением тел, обладающих массой: два точечных тела (две м.т.) притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих тел $m_1 \cdot m_2$ и обратно пропорциональной квадрату расстояния r_{12}^2 между ними (рис. 10):

$$\boxed{F_{12} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}},$$

где $G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Закон всемирного тяготения в векторной форме может быть представлен как:

$$\mathbf{F}_{12} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12},$$

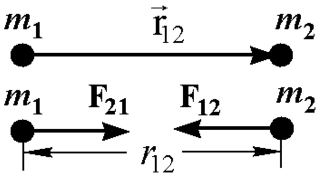


Рис. 10

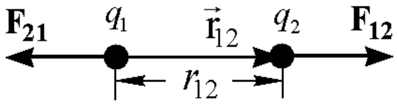


Рис. 11

Сила электростатического взаимодействия (притяжения или отталкивания) двух точечных зарядов в соответствии с **законом Кулона** прямо пропорциональна произведению значений взаимодействующих зарядов $q_1 \cdot q_2$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния r_{12}^2 между ними (рис. 11):

$$\boxed{F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}}$$

или в векторной форме: $\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}$ (или $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$),

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Сила Ампера – магнитная сила взаимодействия (притяжения или отталкивания) $F_{ед}$, приходящаяся на каждую единицу длины двух параллельных, бесконечно протяженных проводников с силой тока I_1 и I_2, прямо пропорциональна произведению сил токов $I_1 \cdot I_2$ и обратно пропорциональна расстоянию r_{12} между ними (рис. 12):

$$F_{\text{ед}} = F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1 \cdot I_2}{r_{12}},$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Детальное рассмотрение силы Ампера осуществляется в разделе "Электромагнетизм".

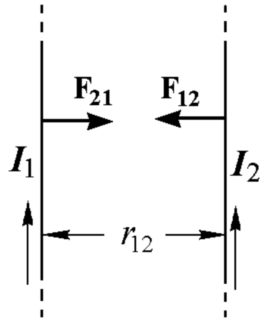


Рис. 12

Примеры приближенных видов сил.

Однородная сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{тяж}}$ – сила, которая действует со стороны Земли на тело, находящееся в свободном состоянии (рис. 13):

$$\mathbf{F}_{\text{тяж}} = m\,\mathbf{g} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{\text{тяж}} = m\,\vec{g},\ F_{\text{тяж}} = m\,g,$$

где $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения или ускорение силы тяжести (векторная величина, модуль которой приближенно равен g = 9,8 м/с^2).

Сила трения скольжения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ – сила сопротивления, возникающая при скольжении тела по поверхности другого тела (рис. 14). Она пропорциональна модулю силы нормального давления F_n и направлена против вектора скорости тела $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -k\ F_n\frac{\mathbf{v}}{v} \quad \left(\text{или} \quad \vec{F}_{\text{тр}} = -k\ F_n\frac{\vec{v}}{v}\right),\ F_{\text{тр}} = k\cdot F_n,$$

где k – коэффициент трения скольжения.

Сила упругости (упругая сила) $\mathbf{F}_{\text{упр}}$ – сила сопротивления (противодействия) тела его деформации (рис. 15). При одноосной деформации сжатия или растяжения она пропорциональна величине вектора деформации $\mathbf{x}$ и направлена в противоположную сторону:

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\,k\,\mathbf{x},$$

где k – коэффициент упругости (жесткости) тела.

Сила сопротивления среды возникает при движении тела в вязкой среде (жидкости или газе). Она пропорциональна скорости тела (в первом приближении) и направлена в противоположную сторону (рис. 16):

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = \mathbf{F}_{\text{вяз}} = -\,æ\,\mathbf{v}.$$

где $æ$ – коэффициент сопротивления среды.

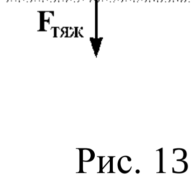


Рис. 13

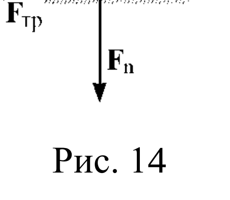


Рис. 14

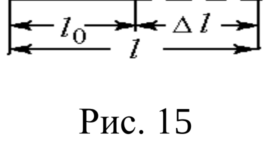


Рис. 15

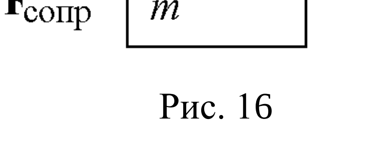
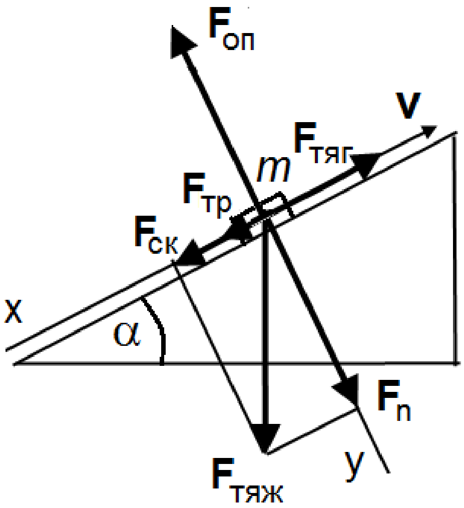


Рис. 16

На рис. 13, 14 и 16 центр масс обозначается Ц.М. На рис. 15 используются следующие обозначения: l_0 – начальная длина, l – конечная длина, $\Delta l = x$ – абсолютное удлинение тела, подвергающегося деформации удлинения.

Силы на наклонной плоскости.



Обозначения:

α – угол наклона плоскости
m – масса тела (материальной точки),
$\mathbf{F}_{тяж} = m\mathbf{g}$ – сила тяжести,
$\mathbf{F}_n$ – сила нормального давления,
$\mathbf{F}_{ск} = \mathbf{F}_\tau$ – скатывающая сила**,**
$\mathbf{F}_{тр}$ – сила трения скольжения,
$\mathbf{F}_{тяг}$ – сила тяги,
$\mathbf{F}_{оп} = \mathbf{N}$ – сила реакции опоры,
$\mathbf{v}$ – скорость тела .

Соотношения связи между некоторыми векторами: $\mathbf{F}_{тяж} = \mathbf{F}_{ск} + \mathbf{F}_n$ **и** $\mathbf{F}_{оп} = -\mathbf{F}_n$.

При выполнении условия: $F_{тяг} = F_{ск} + F_{тр}$, тело движется равномерно (v = const) или покоится ($v = 0$).

Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея.

Преобразованиями Галилея устанавливаются правила преобразования координат и скорости м.т. при переходе из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую ИСО. Пусть даны две ИСО (K' и K), одна из которых K' движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно другой K (рис. 17). В классической механике принято, что время во всех системах отсчета течет одинаково, т.е. $t' = t$. Пространственное положение, скорость и ускорение м.т. P характеризуются радиус-вектором $\mathbf{r}$, скоростью $\mathbf{v}$ и ускорением $\mathbf{a}$ в системе K и $\mathbf{r}'$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{a}'$ – в системе K'. Для удобства рассмотрения предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) системы K' и K совпадают. Следовательно, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}(0)$. Задача: найти связь величин $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}$ для произвольного момента времени.

По истечении времени t начало системы координат K' сместится на величину $\mathbf{v}_0 \cdot t$, и связь между радиус-векторами точки P равна:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{v}_0 \cdot t,$$

или в координатном представлении:

$$x(t) = x'(t) + v_{0x} \cdot t,\ \ y(t) = y'(t) + v_{0y} \cdot t,\ \ z(t) = z'(t) + v_{0z} \cdot t.$$

Связь между скоростями $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 \cdot t)}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0.$$

Продифференцируем выражение $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0$ по времени. Так как скорость подвижной системы отсчета не меняется со временем ($\mathbf{v}_0$ = Const), то ускорение м.т. при переходе наблюдателя в подвижную систему отсчета будет таким же, как и в неподвижной системе отсчета:

$$\boxed{\mathbf{a}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{a}}.$$

Умножив равенство $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ на массу m, получим: $m \cdot \mathbf{a}' = m \cdot \mathbf{a}$. По 2 закону Ньютона можно записать, что $m \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{F}'$ и $m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$. Следовательно, в обоих ИСО действует одна и та же сила, то есть $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

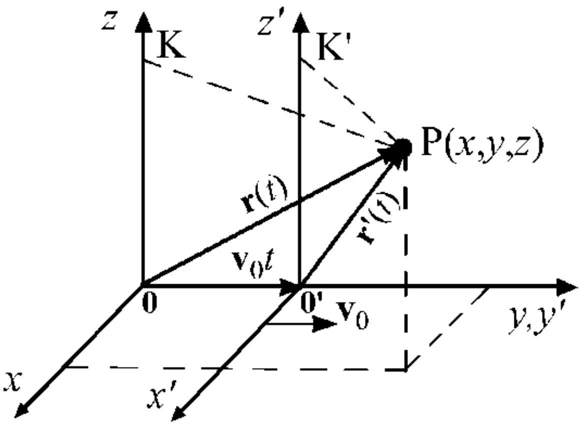


Рис. 17

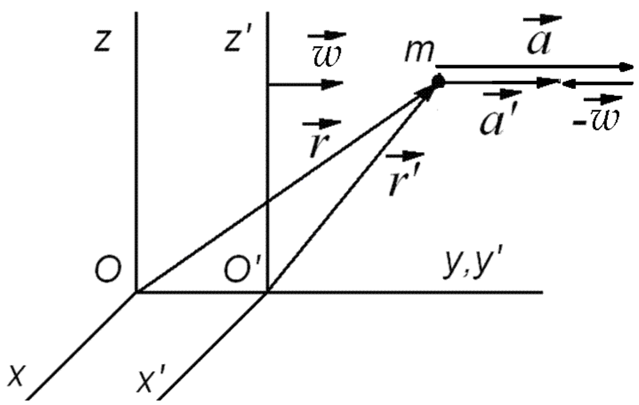


Рис. 18

<u>Вывод</u>. Уравнение динамики м.т. не изменяется при переходе из одной ИСО в другую ИСО, оно – *инвариантное относительно* преобразования Галилея, уравнение динамики – тождественное во всех ИСО. Этот результат можно сформулировать в виде **механического принципа относительности Галилея**: равномерное и прямолинейное движение замкнутой системы по отношению к галилейской системе отсчёта не влияет на протекание механических процессов в этой системе, т.е. все ИСО эквивалентны. Таким образом, в рамках классической механики невозможно выделить некоторую "главную" ИСО, по отношению к которой состояния покоя и движения тел могли бы считаться абсолютными. Другими словами, находясь в ИСО, никакими механическими опытами невозможно установить, движется ли данная система отсчета или покоится.

Уравнение динамики в неинерциальной системе отсчета.

Система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной системы отсчета (ИСО), называется неинерциальной системой отсчета (НСО). *Законы Ньютона не выполняются в такой системе отсчета*. Тем не менее, задачи динамики успешно решаются и здесь.

Пусть даны две системы отсчета: одна – инерциальная $Oxyz$ и другая – неинерциальная $O'x'y'z'$, движущаяся с ускорением $\vec{w}$ (рис. 17). Обозначая $\vec{a}$ и

$\vec{a}\,'$ ускорения м.т. соответственно в ИСО и НСО, можно записать выражение связи между ними как:

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{w}\,.$$

Умножим обе части этой формулы на массу m:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}\,' + m \cdot \vec{w}\,.$$

Произведение $m \cdot \vec{a}$ равно силе $\vec{F}$, действующей на м.т. в ИСО. По формальному признаку, заданному как произведение массы на ускорение, слагаемое $m \cdot \vec{a}\,'$ играет роль силы в НСО. Сделаем замену:

$$m \cdot \vec{a}\,' = \vec{F}\,'.$$

Тогда вместо выражения $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}\,' + m \cdot \vec{w}$ имеем:

$$\vec{F} = \vec{F}\,' + m \cdot \vec{w}\,,$$

или

$$\vec{F}\,' = \vec{F} - m \cdot \vec{w}\,.$$

<u>Важно</u>: *сила $\vec{F}\,'$, определенная в НСО лишь по формальному признаку, равна силе $\vec{F}$, действующей в ИСО, за вычетом произведения массы м.т. на ускорение НСО "$m \cdot \vec{w}$". Поскольку векторная величина "$-m \cdot \vec{w}$" имеет размерность силы, то по данному формальному признаку ее также называют силой. Однако не следует забывать, что она не обусловлена реальным действием, а существует вследствие наблюдения механического движения в НСО! Эту силу принято в литературе называть силой инерции, и она обозначается здесь $\vec{F}_{\text{ин}}$.*

Согласно выражению $m \cdot \vec{a}\,' = \vec{F}\,'$, уравнение динамики м.т. в НСО совпадает по форме со вторым законом Ньютона:

$$\boxed{\vec{a}\,' = \frac{1}{m}\vec{F}\,'},$$

где $\vec{F}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$ и $\vec{F}_{\text{ин}} = -m \cdot \vec{w}\,.$

Таким образом, выражение основного закона динамики в НСО имеет тот же вид, что и в ИСО. Однако роль силы выполняет результирующая сила $\vec{F}\,'$, которая представляет собой векторную сумму действующей (ньютоновской) силы $\vec{F}$ и воображаемой (неньютоновской) силы инерции $\vec{F}_{\text{ин}} = -m \cdot \vec{w}$, равной взятому с обратным знаком произведению массы тела на ускорение НСО.

Центробежная сила инерции.

Центробежная сила инерции – это "неньютоновская" сила, которая вводится искусственно, и "действует" она в неинерциальной вращающейся системе отсчета. Для выяснения свойств этой силы рассмотрим равномерное движение м.т. по окружности в ИСО (рис. 19). Наблюдатель отмечает, что направление скорости м.т. $\vec{v}$ изменяется с течением времени. Следовательно, движение м.т. происходит с ускорением $\vec{a}$, нормальный (перпендикулярный вектору скорости) компонент которого $\vec{a}_\text{n}$ не равен нулю. Этот компонент направлен к центру окружности и поэтому называется центростремительным ускорением: $\vec{a}_\text{n} \equiv \vec{a}_\text{цс}$. Произведение $m \cdot \vec{a}_\text{цс}$ равно центростремительной силе $\vec{F}_\text{цс}$, вынуждающей м.т. отклоняться от прямолинейной траектории. Мгновенные значения модуля величин $\vec{a}_\text{цс}$ и $\vec{F}_\text{цс}$ равны:

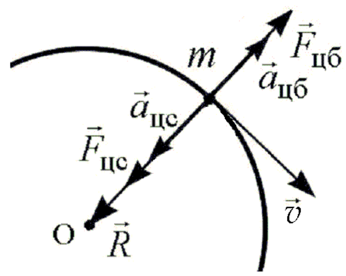


Рис. 19

$$\boxed{a_\text{цс} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R} \quad \text{и} \quad \boxed{F_\text{цс} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R},$$

где ω – модуль угловой скорости движения м.т. по окружности радиуса *R*. В векторной форме эти выражения имеют вид:

$$\vec{a}_\text{цс} = \omega^2 \vec{R} \quad \text{и} \quad \vec{F}_\text{цс} = m\omega^2 \vec{R}.$$

Неинерциальная система отсчета (НСО), вращающаяся с угловой скоростью ω, движется с ускорением $\vec{a}_\text{цс}$. Наблюдатель, находящийся в НСО, отмечает, что м.т. покоится. Условию покоя в НСО соответствует равенство нулю ускорения $\vec{a}\,' = 0$ и результирующей силы $\vec{F}\,' = 0$:

$$\vec{F}\,' = \vec{F} + \vec{F}_\text{ин} = \vec{F}_\text{цс} + \vec{F}_\text{ин} = 0.$$

Следовательно, сила инерции равна центростремительной силе, взятой с обратным знаком:

$$\vec{F}_\text{ин} = -\vec{F}_\text{цс}.$$

Поскольку $\vec{F}_\text{ин}$ направлена по радиусу от центра окружности, то ее называют центробежной силой инерции $\vec{F}_\text{цб}$. Она рассчитывается по формуле:

$$\vec{F}_\text{цб} = -\vec{F}_\text{цс} = -m\omega^2 \vec{R} = -\frac{mv^2}{R^2}\vec{R}.$$

Силы тяготения, тяжести и веса.

Земля совершает орбитальное движение вокруг Солнца и вращательное движение около собственной оси симметрии вращения. При точном решении задачи механики следует учитывать всю совокупность сил, действующих на тело. В связи с тем, что сила притяжения земного тела Солнцем мала по сравнению с силой притяжения его Землей, влиянием Солнца и орбитального движения Земли вокруг Солнца на механические процессы, происходящие на

Земле, можно пренебречь в первом приближении. В качестве инерциальной системы отсчета (ИСО) выберем систему отсчета, покоящуюся вне Земли.

В согласии с определением силы в рамках классической механики, силами, действующими на м.т. в ИСО, являются сила гравитационного притяжения тела Землей $\vec{F}_{\text{гр}}$, выталкивающая сила Архимеда $\vec{F}_{\text{A}}$ и сила реакции точки опоры или подвеса $\vec{F}_{\text{оп}}$ (рис. 20). Векторная сумма этих сил $\vec{F}$ является результирующей силой действия Земли на тело:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{A}} + \vec{F}_{\text{оп}}.$$

Направления и значения сил $\vec{F}_{\text{ос}}$, $\vec{F}_{\text{гр}}$ и $\vec{F}_{\text{A}}$ считаются известными (рис. 20). Они рассчитываются по формулам:

$$\vec{F}_{\text{ос}} = m\omega^2\vec{r}\,, \qquad \vec{F}_{\text{гр}} = G\frac{M \cdot m}{R^3}\vec{R} \qquad \text{и} \qquad \vec{F}_{\text{A}} = -G\frac{M \cdot m'}{R^3}\vec{R}\,,$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса м.т., M – масса Земли, m' – масса воздуха (или жидкости), вытесненного телом, ω – модуль угловой скорости вращения Земли, $\vec{r}$ и $\vec{R}$ – радиус-векторы, проведенные от м.т. соответственно к оси вращения и к центру Земли.

М.т. вместе с Землей движется под действием результирующей силы $\vec{F}$ по окружности, центр которой находится на оси вращения Земли. Результирующая сила $\vec{F}$ в ИСО направлена к оси вращения Земли. Она получила название "осестремительной" силы $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ос}}$. Радиус окружности r зависит от широты географического места. Таким образом, среди всего набора сил $\vec{F}$, $\vec{F}_{\text{гр}}$, $\vec{F}_{\text{A}}$ и $\vec{F}_{\text{оп}}$, участвующих в создании условия равновесия, присутствует единственная сила $\vec{F}_{\text{оп}}$, для определения значения и направления которой требуется предварительное знание трех остальных сил $\vec{F}$, $\vec{F}_{\text{гр}}$ и $\vec{F}_{\text{A}}$. Располагая сведениями о силах $\vec{F} = \vec{F}_{\text{ос}}$, $\vec{F}_{\text{гр}}$ и $\vec{F}_{\text{A}}$, мы можем найти расчетное выражение для силы реакции опоры $\vec{F}_{\text{оп}}$:

$$\vec{F}_{\text{оп}} = \vec{F} - \left(\vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{A}}\right) = \vec{F}_{\text{ос}} - \left(\vec{F}_{\text{гр}} + \vec{F}_{\text{A}}\right).$$

Результат векторного сложения, предусмотренного последней формулой, показан на рис. 20. Система отсчета, связанная с поверхностью Земли, вращается вместе с Землей, то есть она движется с ускорением, и поэтому является неинерциальной системой отсчета (НСО). Для наблюдателя, находящегося на Земле, м.т. кажется покоящейся. Уравнение динамики м.т. в НСО по форме совпадает с основным законом динамики и записывается в данной задаче как:

$$\vec{a}\,' = \frac{1}{m}\vec{F}\,' = \frac{1}{m}\left(\vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}\right) = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_{\text{ос}} + \vec{F}_{\text{ин}}\right),$$

где $\vec{a}\,'$ и $\vec{F}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}$ – соответственно результирующее ускорение и результирующая сила, наблюдаемые в НСО. Для покоящегося на Земле тела они равны нулю. Сила инерции, обусловленная неинерциальностью земной системы отсчета, обозначена $\vec{F}_{\text{ин}}$. Поскольку для покоящегося тела сила $\vec{F}\,' = 0,$ находим, что сила инерции равна по модулю осестремительной силе и противоположно ей направлена:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F} = -\vec{F}_{\text{ос}} = \vec{F}_{\text{цб}}.$$

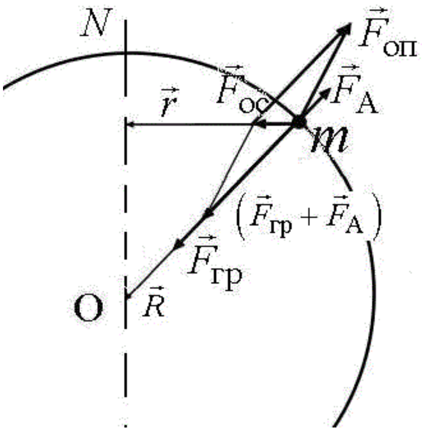


Рис. 20

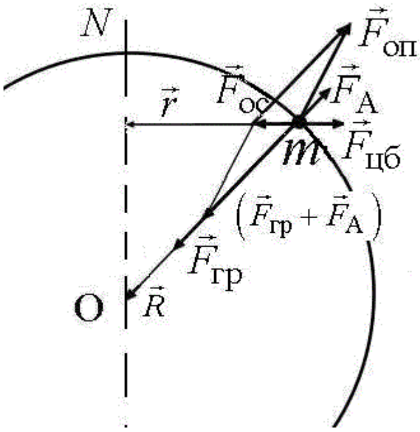


Рис. 21

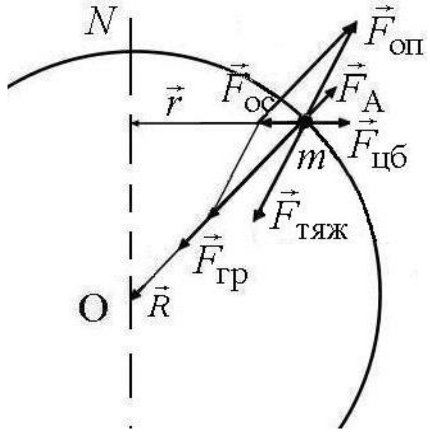


Рис. 22

Рассматриваемая сила инерции называется центробежной силой инерции $\vec{F}_{\text{цб}}$, "действующей" на тело со стороны Земли (рис. 21). Ее присутствие испытывают все тела, находящиеся вдали от полюсов Земли, вне зависимости от того, покоится тело или оно движется по отношению к Земле. Она исчезнет только в том случае, если Земля перестанет вращаться.

Таким образом, расчетная формула результирующей силы в земной неинерциальной системе отсчета равна:

$$\vec{F}\,' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{цб}}.$$

Для тела, покоящегося на Земле, имеем: $\vec{F}\,' = 0$ и $\vec{F}_{\text{цб}} = -\vec{F}$. Физические величины, такие как **сила тяжести** $\vec{F}_{\text{тяж}}$ и **вес** $\vec{P}$, вводятся при помощи определений. Сила тяжести – это сила, под действием которой тело, не имеющее опоры (или подвеса), движется свободно на Земле, т.е. с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Синонимом ускорения свободного падения является ускорение силы тяжести. В согласии с таким определением, значение силы тяжести можно получить посредством вычитания силы реакции опоры $\vec{F}_{\text{оп}}$ из результирующей силы $\vec{F}\,'$, которая для покоящегося тела равна нулю. Из приводимого ниже расчета: $\vec{F}_{\text{тяж}} = \vec{F}\,' - \vec{F}_{\text{оп}} = 0 - \vec{F}_{\text{оп}} = -\vec{F}_{\text{оп}}$ следует, что сила тяжести равна по модулю силе реакции опоры и противоположно ей направлена (рис. 22).

Весом тела называется сила $\vec{P}$, с которой тело действует на горизонтальную опору или подвес, препятствующие ему свободно двигаться на Земле. Если опора (или подвес) находятся в состоянии покоя по отношению к Земле, то тело действует на опору (или подвес) с силой, равной силе тяжести. В таком случае, вес тела равен силе тяжести: $\vec{P} = \vec{F}_{\text{тяж}}$. Однако следует помнить, что точка приложения силы тяжести находится в центре тяжести тела, а сила веса приложена к опоре (или подвесу). Сила тяжести на Земле существует всегда и не зависит от того, тело движется, или же оно покоится. Значение веса тела связано с механическим состоянием опоры (подвеса). При движении опоры (подвеса) вес тела может измениться: уменьшиться, возрасти или исчезнуть совсем. Вес пропадает, если опора (подвес) движется с ускорением свободного падения.

Сила инерции Кориолиса.

При движении тела во вращающейся системе отсчета, кроме центробежной силы инерции, появляется еще одна сила, называемая силой инерции Кориолиса или кориолисовой силой.

Пусть м.т. m движется со скоростью $\vec{v}\,' = \dfrac{d\vec{\rho}\,'}{dt}$ и ускорением $\vec{a}\,' = \left(\dfrac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)'$ в НСО, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, $\vec{\rho}$ – радиус-вектор м.т. в ИСО и $\vec{\rho}\,'$ – ее радиус-вектор в НСО (рис. 23*а*). Скорость и ускорение м.т. в ИСО могут быть вычислены соответственно по формулам:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Найдем вначале связь между ускорениями м.т. в НСО и ИСО: $\vec{a}\,'$ и $\vec{a}$. Выберем на оси вращения НСО 00 нижнюю точку 0 в качестве начала двух совпадающих в начальный момент времени систем координат – неподвижной ИСО и вращающейся НСО (рис. 23*а*).

Радиус-векторы м.т. в начальный момент времени равны между собой:

$$\vec{\rho}(0) = \vec{\rho}\,'(0).$$

Они составляют угол θ с осью вращения – направлением вектора $\vec{\omega}$. Со временем оба радиус-вектора изменяются и становятся различными. Приращение $d\vec{\rho}$ радиус-вектора $\vec{\rho}$ состоит из его приращения $d\vec{\rho}_\tau$ за счет вращения НСО и за счет движения м.т. со скоростью $\vec{v}\,'$ в НСО:

$$d\vec{\rho} = d\vec{\rho}_\tau + \vec{v}\,' dt.$$

Выразим модуль $d\rho_\tau$ через модули величин ω и ρ:

$$d\rho_\tau = r\,d\varphi = r\,\omega\,dt = (\rho\sin\theta)\,\omega\,dt = \omega\cdot\sin\theta\cdot\rho\cdot dt,$$

где r – расстояние м.т. от оси вращения. Тогда, в векторном виде $d\vec{\rho}_\tau$ и $d\vec{\rho}$ соответственно запишутся как:

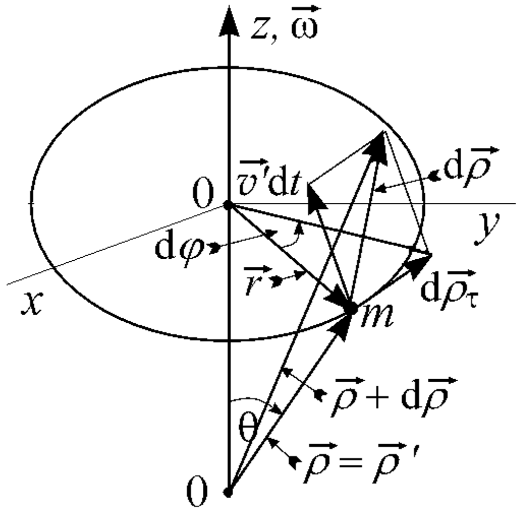
$$d\vec{\rho}_\tau = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}]dt \quad \text{и} \quad d\vec{\rho} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}]dt + \vec{v}\,'dt.$$

Поделив $d\vec{\rho}$ на dt, получим соотношение связи векторов скорости $\vec{v}$ и $\vec{v}\,'$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \vec{v}\,'.$$

Или, принимая во внимание $\vec{v}\,' = \frac{d\vec{\rho}\,'}{dt}$, получаем правило преобразования векторов при переходе из НСО в ИСО:

$$\boxed{\frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \frac{d\vec{\rho}\,'}{dt}}.$$



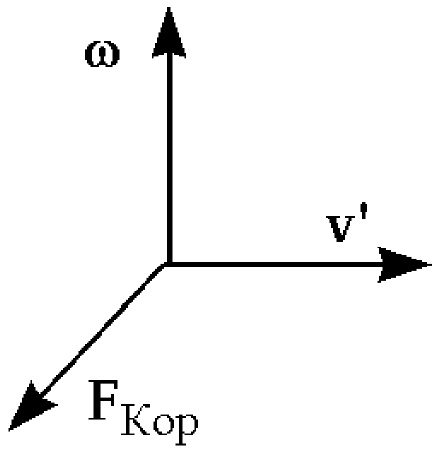


Рис. 23

Продифференцируем выражение $\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \vec{v}\,'$ по t:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right] + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{v}] + \frac{d\vec{v}\,'}{dt},$$

и подставим сюда $\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \vec{v}\,'$:

$$\vec{a} = \left[\vec{\omega}\,\left([\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \vec{v}\,'\right)\right] + \frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \left[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]\right] + [\vec{\omega}\,\vec{v}\,'] + \frac{d\vec{v}\,'}{dt}.$$

Применим правило преобразования векторов $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{\rho}] + \frac{d\vec{\rho}\,'}{dt}$ при переходе из НСО в ИСО к вектору $\vec{v}\,'$:

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{v}\,'] + \left(\frac{d\vec{v}\,'}{dt}\right)' = [\vec{\omega}\,\vec{v}\,'] + \vec{a}\,'.$$

После подстановки $\dfrac{d\vec{v}\,'}{dt}$ в предшествующее выражение для $\vec{a}$ получим:

$$\vec{a} = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]] + [\vec{\omega}\vec{v}\,'] + [\vec{\omega}\,\vec{v}\,'] + \vec{a}\,' = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]] + 2[\vec{\omega}\vec{v}\,'] + \vec{a}\,'.$$

Вектор, являющийся результатом векторного произведения $[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]$, равен вектору$[\vec{\omega}\,\vec{r}]$. Докажем это. Поскольку их модули $\|[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]\| = \omega\rho\sin\theta = \omega r = \|[\vec{\omega}\,\vec{r}]\|$ равны и направления векторов $[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]$ и $[\vec{\omega}\,\vec{r}]$ совпадают, то эти векторы равны.

Принимая во внимание свойство разложения двойного векторного произведения [**a**[**bc**]] = **b**(**ac**) – **c**(**ab**) и равенство $[\vec{\omega}\,\vec{\rho}] = [\vec{\omega}\,\vec{r}]$, имеем:

$$[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{\rho}]] = [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}]] = \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\,\vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{\omega}\vec{\omega}) = \vec{\omega}\cdot(0) - \vec{r}\vec{\omega}^2 = -\omega^2\vec{r}$$.Наконец,

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r} + 2[\vec{\omega}\;\vec{v}\,'] + \vec{a}\,' = \vec{a}\,' - \omega^2\vec{r} - 2[\vec{v}\,'\vec{\omega}],$$

или

$$\boxed{\vec{a}\,' = \vec{a} + \omega^2\vec{r} + 2[\vec{v}\,'\vec{\omega}]}\;.$$

Обозначая $\omega^2\vec{r} = \vec{a}_{\text{цб}}$ и $2[\vec{v}\,'\vec{\omega}] = \vec{a}_{\text{Кор}}$, получим, что ускорение, испытываемое м.т. во вращающейся системе отсчета, состоит из суммы трех ускорений, а именно: из ускорения в ИСО $\vec{a}$, центробежного ускорения $\vec{a}_{\text{цб}} = \omega^2\vec{r}$ и ускорения Кориолиса $\vec{a}_{\text{Кор}} = 2[\vec{v}\,'\vec{\omega}]$:

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}_{\text{цб}} + \vec{a}_{\text{Кор}}.$$

Умножая формулу связи между ускорениями на массу м.т., устанавливаем формулу связи сил в НСО **F**' и ИСО **F**:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{Кор}},$$

где $\mathbf{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{r}$ – центробежная сила инерции и $\mathbf{F}_{\text{Кор}} = 2m[\vec{v}\,'\vec{\omega}]$ – кориолисова сила инерции. Направление силы Кориолиса определяется по правилу правого винта. Она перпендикулярна плоскости, образованной двумя векторами $\vec{v}\,'$ и $\vec{\omega}$ (рис. 23*б*).

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Импульс. Закон сохранения импульса.

Уравнению второго закона Ньютона **a** = **F**/*m* можно придать другой вид. Полагая, что масса м.т. *m* не изменяется, ее можно внести под знак производной в формуле **F** = *m***a**:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(d\mathbf{v}/dt) = d(m\mathbf{v})/dt.$$

Векторную величину, равную произведению массы м.т. на скорость **p** = *m***v**, называют ее импульсом (механическим импульсом, количеством движения).

Применяя определение импульса, уравнение динамики м.т. можно записать в виде:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \ ,$$

а сам закон сформулировать так: производная импульса по времени равна результирующей силе, действующей на м.т.

Импульс тела равен сумме импульсов его элементарных частей (рис. 24):

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \ .$$

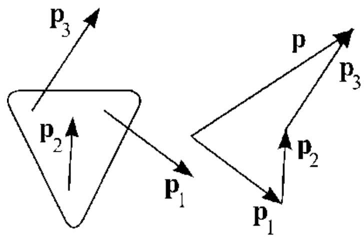


Рис. 24

Умножая выражение $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}$ на $\mathrm{d}t$, мы придем к равенству: $\mathrm{d}\mathbf{p} = \mathbf{F}\mathrm{d}t$, интегрирование которого дает приращение импульса за промежуток времени, протекший от некоторого момента t_1 до момента t_2:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} \mathrm{d}\,\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t \ .$$

В случае действия постоянной силы $\mathbf{F}$ = Const, изменение импульса $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ равно произведению силы на время ее действия, т.е. импульсу силы $\mathbf{F}\,\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}t = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$:

$$\boxed{\Delta\,\mathbf{p} = \mathbf{F}\,\Delta t\,.}$$

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек (для краткости будем называть ее системой тел). Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе, причем масса системы не меняется. Следовательно, силы, действующие на тела системы, можно подразделить на внутренние и внешние. Внутренними назовем силы, которые воздействуют на данное тело со стороны остальных тел системы, внешними – силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе. Если внешние силы отсутствуют, система называется замкнутой.

Производная импульса по времени для незамкнутой механической системы по второму закону Ньютона равна:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i) = \sum_i \mathbf{f}_i + \sum_i \mathbf{F}_i = 0 + \mathbf{R} = \mathbf{R}\,.$$

Здесь индекс i используется для перечисления тел системы, $\mathbf{f}_i$ – внутренние силы и $\mathbf{F}_i$ – внешние силы. По 3 закону Ньютона векторная сумма всех внутренних сил равна нулю $\sum_i \mathbf{f}_i = 0$. Векторная сумма всех внешних сил $\sum_i \mathbf{F}_i$ заменена одной результирующей силой $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$. Итак, для того, чтобы импульс системы не изменялся, т.е. $\mathbf{p}$ = Const или $\Delta\mathbf{p} = 0$, результирующая всех внешних сил $\mathbf{R}$ должна равняться нулю. Такое возможно, если система – замкнутая или действующие извне силы при векторном сложении компенсируются.

Таким образом, значение формулы $\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{R}}$ существенно расширилось: она отражает одновременно основной закон динамики и закон сохранения импульса механической системы. В классической механике допускается частичное (по отдельным координатам) выполнение закона сохранения импульса. Например, закон сохранения импульса по координате x имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}\,p_x}{\mathrm{d}\,t}=R_x\,.$$

Движение тел с переменной массой. Формула Циолковского.

До сих пор мы рассматривали случаи движения тел при неизменной массе. Однако масса движущейся системы может как убывать, так и возрастать. Например, приращение импульса $\mathrm{d}\mathbf{p}$ стартовавшей ракеты происходит за счет выброса сгоревшего топлива в окружающую среду $\mathbf{v}_1\,\mathrm{d}m$. В таком случае, изменение импульса $\mathrm{d}\mathbf{p}=\mathbf{v}\mathrm{d}m+m\mathrm{d}\mathbf{v}$, происходящее в результате действия внешних сил и отбрасывания (присоединения) добавочной массы, запишется как:

$$\mathrm{d}\mathbf{p}=\mathbf{v}\mathrm{d}m+m\mathrm{d}\mathbf{v}=\mathbf{R}\mathrm{d}t+\mathbf{v}_1\mathrm{d}m,$$

где $\mathbf{R}$ – результирующая внешних сил, а $\mathbf{v}_1$ – скорость движения массы $\mathrm{d}m$, которая отторгается от тела ($\mathrm{d}m < 0$) или присоединяется к нему ($\mathrm{d}m > 0$).

Преобразуем базовое выражение:

$$\mathbf{v}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t+m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t=\mathbf{R}+\mathbf{v}_1\mathrm{d}m/\mathrm{d}t,$$

$$m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t=m\mathbf{a}=\mathbf{R}+\mathbf{v}_1\mathrm{d}m/\mathrm{d}t-\mathbf{v}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=\mathbf{R}+\left(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}\right)\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=\mathbf{R}+\mathbf{u}\mathrm{d}m/\mathrm{d}t,$$

$$\mathbf{a}=\frac{1}{m}\left(\mathbf{R}+\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathbf{F}}{m}\,.$$

Здесь векторная разность скоростей ($\mathbf{v}_1-\mathbf{v}$) заменена вектором относительной скорости $\mathbf{u}$ присоединяемой или отторгаемой массы $\mathrm{d}m$, и полная сила $\mathbf{F}$, действующая на тело, включает две силы: внешнюю $\mathbf{R}$ и реактивную силу $\mathbf{F}_{\text{реак}}=\mathbf{u}(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)$:

$$(\mathbf{v}_1-\mathbf{v})=\mathbf{u},\quad \mathbf{F}=\mathbf{R}+\mathbf{F}_{\text{реак}}=\mathbf{R}+\mathbf{u}(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t).$$

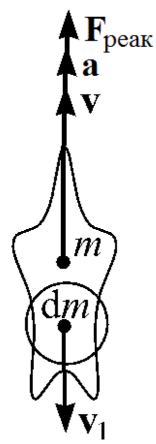


Рис. 25

Особый интерес представляет случай движения тела при отсутствии действия внешних сил $\mathbf{R}=0$. Тогда имеем: $\mathbf{a}=\mathbf{F}_{\text{реак}}/m$. Движение тела может быть ускоренным или замедленным. Все зависит от направления силы реакции $\mathbf{F}_{\text{реак}}=\mathbf{u}(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)$.

Возможные варианты:

1. Тело (ракета) ускоряется за счет выброса вещества в направлении, обратном скорости его движения ($\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{\text{реак}}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathrm{d}m < 0$ (рис. 25).
2. Тело ускоряется за счет присоединения вещества, скорость

которого совпадает по направлению со скоростью тела и больше нее по модулю ($\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{реак}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $u > v$, $\mathrm{d}m > 0$.

3. Тело замедляется за счет выброса вещества в направлении его движения ($\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{реак}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $\mathrm{d}m < 0$. Пример: торможение ракеты.
4. Тело замедляется за счет присоединения вещества, скорость которого направлена противоположно скорости тела
($\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{реак}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathrm{d}m > 0$.
5. Тело замедляется за счет присоединения вещества, скорость которого совпадает по направлению со скоростью тела и меньше нее по модулю ($\mathbf{a}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{реак}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $u < v$, $\mathrm{d}m > 0$.

Рассмотрим более подробно 1 вариант реактивного движения ($\mathbf{a}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_{реак}\uparrow\uparrow\mathbf{v}$): $\mathbf{u}\uparrow\downarrow\mathbf{v}$, $\mathrm{d}m < 0$ (рис. 25):

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}_{реак}/m,\ \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathbf{F}_{реак}/m,$$

$$\mathbf{F}_{реак} = \mathbf{u}(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t) = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\,(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t),$$

$$\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\,(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)/m,\ \mathrm{d}\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})\,\mathrm{d}m/m,$$

$$\mathrm{d}v = -\,(v_1 + v)\,\mathrm{d}m/m.$$

В предположении, что относительная скорость истечения продуктов сгорания топлива постоянная, т.е. $\mathbf{u}$ = Const, то есть $u = v_1 + v$ = Const, после интегрирования $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = -\left(v_1 + v\right)\int_{m_0}^{m}\frac{\mathrm{d}m}{m}$, получим:

$$v - v_0 = -\left(v_1 + v\right)\ln\frac{m}{m_0} = \left(v_1 + v\right)\ln\frac{m_0}{m} = u\ln\frac{m_0}{m},$$

где v_0 и m_0 – начальные значения скорости и массы ракеты. Из последней формулы следует формула Циолковского, определяющая зависимость скорости ракеты v от относительной скорости истечения отработавшего топлива u:

$$\boxed{v = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m}}.$$

Работа. Мощность. Энергия. Закон сохранения энергии.

Работой называется скалярная величина, равная произведению силы, действующей в направлении перемещения F_τ, на путь S, пройденный точкой приложения силы: $A = F_\tau \cdot S$. Это выражение справедливо в том случае, если величина проекции силы F_τ на направление движения (скорости $\mathbf{v}$) остается неизменной. Если сила $\mathbf{F}$ образует с направлением движения постоянный угол α, то $F_\tau = F\cdot\cos\alpha$ (рис. 26), и формула работы принимает следующий вид:

$$A = F_\tau\cdot S = F\cdot S\cdot\cos\alpha.$$

Работа – алгебраическая величина. Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha > 0$), работа – положительная. Если угол α – тупой (cos α < 0), работа – отрицательная. При α = π/2 работа равна нулю. Например, при равномерном движении м.т. по окружности центростремительная сила действует перпендикулярно скорости и работы при этом не совершает.

Элементарная работа δ*A* силы **F** – это работа, совершаемая силой **F** при бесконечно малом перемещении d**r** тела. Она равна скалярному произведению **F** и d**r**:

$$\delta A = \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = F\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{d}r = F_\tau\cdot\mathrm{d}r$$

или в декартовых координатах:

$$\delta A = F_x\cdot dx + F_y\cdot dy + F_z\cdot dz,$$

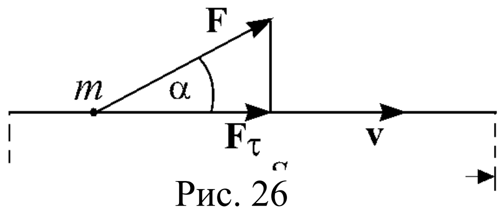


Рис. 26

где **r** – радиус-вектор м.т., *x, y* и *z* – ее координаты, F_x, F_y и F_z – проекции вектора силы на координатные оси, α – угол между векторами **F** и d**r**, $F_\tau = F\cdot\cos\alpha$ – проекция силы **F** на касательную к траектории. Элементарная работа обозначена δ*A*, а не d*A*, так как она не является полным дифференциалом. Это означает, что криволинейный интеграл $A = \oint \delta A$ по произвольной замкнутой траектории не равен нулю $\oint \delta A \neq 0$, тогда как этот интеграл от полного дифференциала должен быть нулем. Например, работа силы трения по замкнутой траектории никогда не равна нулю.

Работа – величина аддитивная. Поэтому **полная работа** *A* на конечном отрезке непрерывной траектории вычисляется посредством интегрирования:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{S_1}^{S_2} F_\tau\cdot\mathrm{d}r = \int_{S_1}^{S_2} F_\tau\cdot\mathrm{d}S\,.$$

Графически работа равна площади, находящейся под кривой линией, которую описывает тангенсальная составляющая силы F_τ как функция пройденного пути *S* (рис. 27).

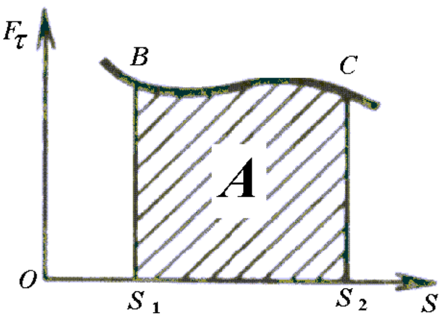


Рис. 27

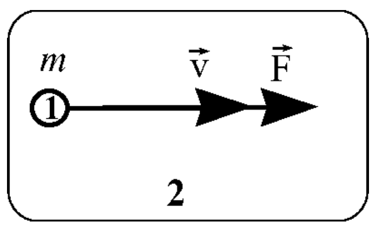


Рис. 28

Мощностью называется работа, совершаемая силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\cdot\cos\alpha\cdot v = F_\tau\cdot v\,.$$

Данной формулой определяется мгновенная мощность, которая может меняться со временем. Работа, выполненная за определенный промежуток времени, вычисляется при помощи интегрирования:

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} N\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\mathbf{v}\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} F\cdot\cos\alpha\cdot v\cdot\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} F_\tau\cdot v\cdot\mathrm{d}t\,.$$

Энергией называется физическая величина, характеризующая способность тела или системы тел совершить работу при определенных условиях.

Механическая энергия W – энергия механического движения и механического взаимодействия тел. Энергия тела может быть обусловлена причинами двоякого рода: во-первых, движением тела с некоторой скоростью и, во-вторых, нахождением тела в потенциальном поле сил. Энергия первого вида называется кинетической энергией. Энергия второго вида называется потенциальной энергией. Короче говоря, кинетическая энергия – это энергия движения, а потенциальная – энергия положения. Механическая энергия W – сумма кинетической $W_К$ и потенциальной $W_П$ энергий: $W = W_К + W_П$.

Кинетическая энергия м.т. Пусть небольшое тело (м.т.) 1 массы m движется с начальной скоростью $\mathbf{v}$ в неупругом (вязком) теле 2 под действием силы $\mathbf{F}$ и застревает в нем (рис. 28). За время dt точка приложения силы получит перемещение $\mathrm{d}S = v\cdot\mathrm{d}t$, и тело 1 совершит над телом 2 работу:

$$\mathrm{d}\,A = F\cdot\mathrm{d}S = F\cdot v\cdot\mathrm{d}t.$$

Очевидно, что в данном случае 1 тело совершает работу над 2 телом за счет запаса энергии, которой оно обладало в силу своего движения, т.е. за счет кинетической энергии $W_К$ (если бы тело 1 не двигалось, то были бы равны нулю и перемещение dS, и работа dA). Поэтому совершенную телом 1 работу можно приравнять убыли его кинетической энергии: $\mathrm{d}\,A = -\,\mathrm{d}\,W_К$. Тогда,

$$\mathrm{d}\,W_К = -\,\delta\,A = -\,F\cdot\mathrm{d}S = -\,F\cdot v\cdot\mathrm{d}t = -\,m\cdot(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\cdot v\cdot\mathrm{d}t = -\,m\cdot v\cdot\mathrm{d}v = \mathrm{d}\,(-\,mv^2/2).$$

Проинтегрируем это выражение в предположении, что скорость 1 тела упала до нуля, т.е. вся кинетическая энергия тела 1 перешла в работу:

$$W_К = \int_v^0 \mathrm{d}\left(-\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Тем самым, мы получили формулу кинетической энергии м.т. Кинетическая энергия – всегда положительная величина. Для системы м.т. она равна сумме кинетических энергий отдельных м.т., т.е. величина – аддитивная.

Кинетическая энергия может не только убывать, но и возрастать. Например, при упругом ударе движущегося шара по покоящемуся шару. Первый шар теряет полностью или частично свою кинетическую энергию, а второй шар приходит в движение. В таком случае говорят, что первый шар совершил работу над вторым шаром и второй шар приобрел кинетическую энергию.

Тело обладает **потенциальной энергией**, если оно находится под влиянием некоторого силового поля. В качестве такового может выступать гравитационное или электростатическое поле, или оба одновременно. Поскольку потенциальная энергия зависит от пространственного положения м.т., эта энергия является некоторой функцией координаты м.т.: $W_{\text{П}} = f\,(\mathbf{r})$. При перемещении тела под действием внешних сил с одного места поля на другое тело совершает отрицательную работу, и его потенциальная энергия возрастает. В дальнейшем, тело, предоставленное самому себе, может совершить работу над внешними телами за счет убыли его потенциальной энергии: $\mathrm{d}A = -\,\mathrm{d}W_{\text{П}}$ или увеличить свою кинетическую энергию, если в ближайшем окружении нет других тел: $-\,\mathrm{d}W_{\text{П}} = \mathrm{d}W_{\text{К}}$.

Последнее равенство записывается в конечных разностях как:

$$\Delta W_{\text{К}} = -\,\Delta W_{\text{П}} \ \text{ или } \ W_{\text{К}}'' - W_{\text{К}}' = W_{\text{П}}' - W_{\text{П}}'',$$

где штрих и двойной штрих означают начальное и конечное значения энергий тела. Тем самым мы доказали закон сохранения полной механической энергии в замкнутой системе:

$$W = W_{\text{К}}' + W_{\text{П}}' = W_{\text{К}}'' + W_{\text{П}}'' = \text{const}.$$

Гравитационное поле.

Взаимодействие между телами, находящимися на удалении друг от друга, происходит посредством особого вида материи, которое называется физическим полем. При гравитационном взаимодействии тяготеющих масс полем-посредником выступает гравитационное поле. Это поле – потенциальное, и его характеристиками являются напряженность и потенциал.

Силу взаимного притяжения 2 точечных масс (т.м.) будем рассматривать как силу действия поля, создаваемого одной т.м., на другую т.м. Примем в качестве источника поля первую т.м., а вторую – за пробное тело, при помощи которого будем устанавливать свойства поля в местах его существования. Напряженностью гравитационного поля называется сила, действующая на единичную т.м. со стороны поля.

Аналитическое выражение закона всемирного тяготения в согласии с обозначениями, принятыми на рис. 29*а*, может быть записано в форме:

$$\mathbf{F} = -G\,\frac{m \cdot m_{\text{пр}}}{r^3}\,\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \mathbf{F} = \left(-G\,\frac{m}{r^3}\,\mathbf{r}\right) m_{\text{пр}}.$$

Поделив эту силу на массу пробного тела $m_{\text{пр}}$, получим выражения напряженности гравитационного поля тела точечной массы m в векторной форме:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{m_{\text{пр}}} = -\,G\,\frac{m}{r^3}\,\mathbf{r} \ \text{ и ее модуля } \ E = G\,\frac{m}{r^2}.$$

Напряженность гравитационного поля (силовая характеристика поля) – векторная величина и всегда направлена к центру тяготения. Результирующая напряженность поля, создаваемого системой т.м., вычисляется при помощи принципа суперпозиции (рис. 29*б*):

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \,.$$

Если отвлечься от понятия "пробная точечная масса" $m_{пр}$ и взять произвольную точечную массу m и поместить ее в некоторое поле, напряженность **E** которого задана, то сила действия **F** на данную массу m определится как произведение массы m на напряженность **E**:

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{E}, \text{ или в проекциях: } F_x = m\cdot E_x,\ F_y = m\cdot E_y \text{ и } F_z = m\cdot E_z.$$

Рис. 29

Отсюда следует, что напряженность произвольного гравитационного поля равна отношению силы гравитационного притяжения к массе точечного тела:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}\,/\,m, \text{ или в проекциях: } E_x = F_x/m,\ E_y = F_y/m \text{ и } E_z = F_z/m.$$

Если значение точечной массы взять равной единице (1 кг), то напряженность оказывается равной силе, действующей со стороны поля на единичную точечную массу, помещенную в данную точку поля. В этом предложении сформулирован физический смысл напряженности гравитационного поля.

Потенциалом гравитационного поля φ называется потенциальная энергия, которой обладает единичная точечная масса в данной точке поля. На основе закона сохранения энергии она равна работе, совершаемой силами поля по перемещению (удалению) единичной точечной массы из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi = \frac{A}{m} = \frac{1}{m}\int_{\mathbf{r}}^{\infty}\delta A = \frac{1}{m}\int_{\mathbf{r}}^{\infty}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{1}{m}\int_{\mathbf{r}}^{\infty} m\cdot\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Потенциал поля материальной точки. Воспользуемся свойством потенциальных полей, для которых работа не зависит от формы траектории, а только от начального и конечного положения м.т. Поэтому в качестве пути интегрирования выберем прямую линию, которая совпадает с радиусом, проведенным от центра поля. В таком случае, вектор **E** направлен против векторов **r** и d**r**, и потенциал гравитационного поля, создаваемого точечной массой m, равен:

$$\varphi = \int_{\mathbf{r}}^{\infty}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{r}^{\infty}E\cdot\mathrm{d}r = -\int_{r}^{\infty}G\frac{m}{r^2}\mathrm{d}r = G\frac{m}{r}\bigg|_r^{\infty} = -G\frac{m}{r}.$$

Потенциал гравитационного поля – это энергетическая характеристика поля, величина – скалярная, аддитивная и всегда отрицательная.

Связь напряженности с потенциалом. Вначале получим формулу приращения потенциала $\Delta\varphi$ между двумя точками поля на отрезке траектории с координатами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$\Delta\varphi = \varphi_{21} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int_{\mathbf{r}_2}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{r}_1}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_2}^{\infty} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\infty}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}.$$

<u>Для справки:</u> Приращение некоторой величины (функции) определяется как разность между конечным и начальным значениями этой величины (функции).

Найдем теперь это приращение между двумя точками поля с бесконечно-близкими координатами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$:

$$d\varphi = \varphi(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{E}\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} d\mathbf{r} = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}.$$

Произведение $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$ – это скалярное произведение векторов $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{r}$. В проекциях на оси системы координат векторы $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{r}$ соответственно равны:

$$\mathbf{E} = E_x\cdot\mathbf{i} + E_y\cdot\mathbf{j} + E_z\cdot\mathbf{k} \quad \text{и} \quad d\mathbf{r} = dx\cdot\mathbf{i} + dy\cdot\mathbf{j} + dz\cdot\mathbf{k}\,.$$

Тогда приращение функции φ равно:

$$d\varphi = -\,\mathbf{E}d\mathbf{r} = -\,(E_x\cdot dx + E_y\cdot dy + E_z\cdot dz).$$

В свою очередь, дифференциал $d\varphi$ записывается как:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz\,.$$

Поскольку в рассматриваемой проблеме приращение потенциала и его дифференциал представляют одно и то же изменение потенциала, то из двух последних выражений следуют формулы расчета декартовых компонент вектора напряженности через значение потенциала:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\; E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\; E_z = -\frac{d\varphi}{dz}.$$

Вектор напряженности поля равняется градиенту потенциала, взятому с обратным знаком:

$$\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi = -\,\left(\frac{d\varphi}{dx}\mathbf{i} + \frac{d\varphi}{dy}\mathbf{j} + \frac{d\varphi}{dz}\mathbf{k}\right).$$

Напряженность направлена в сторону убыли потенциала. Если умножим обе части формулы $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ на массу m, то получим связь между силой действия $\mathbf{F}$ и потенциальной энергией $W_П$ в данной точке поля:

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{E} = -m\cdot\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{grad}(m\cdot\varphi) = -\operatorname{grad} W_П.$$

В потенциальном поле сила равняется градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} W_П.$$

Применения закона гравитации.

Закон всемирного тяготения позволяет решить ряд прикладных задач механики, в том числе, вычислить массу Земли, Солнца, Луны, планет, значения космических скоростей и др.

1. Масса Земли. Ее мы определим, приравняв приближенно силу притяжения некоторого тела Землей $F_{ГР} = G\cdot M_З\cdot m/R_З^2$ силе тяжести $F_{ТЯЖ} = m\cdot g$ (рис. 22):

$$G\cdot M_З\cdot m/R_З^2 = m\cdot g,\ \ M_З = g\cdot R_З^2/G,$$

$$M_З = 9{,}8\cdot(6380\cdot10^3) / 6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{кг} = 5{,}98\cdot10^{24}\ \text{кг}$$

2. Масса Солнца. Земля обращается вокруг Солнца по орбите, близкой к круговой (рис. 30). Центростремительная сила, действующая на Землю, обусловлена силой притяжения, действующей между Солнцем и Землей:

$$F_{ЦС} = F_{ГР},\ \ M_З\cdot\omega_{ОР}^2\cdot R_{ОР} = G\cdot M_З\cdot M_С/R_{ОР}^2,\ \ M_С = \omega_{ОР}^2\cdot R_{ОР}^3/G.$$

$$\omega_{ОР} = 2\pi / T_{ОР},\ \ T_{ОР} = 365\ \text{сут.},\ 1\ \text{сут.} = 24\cdot60\cdot60\ \text{с} = 86400\ \text{с},\ \ R_{ОР} \approx 1{,}5\cdot10^{11}\ \text{м},$$

$$M_С \approx 2\cdot10^{30}\ \text{кг}.$$

3. Третий закон Кеплера. Квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся между собой как кубы больших полуосей их эллиптических траекторий (рис. 31). Воспользуемся формулами массы Солнца $M_С = \omega_{ОР}^2\cdot R_{ОР}^3/G$ и связи между угловой скоростью и периодом $\omega_{ОР} = 2\pi / T_{ОР}$, записанными для двух планет:

$$M_С = \omega_1^2\cdot R_1^3/G = \omega_2^2\cdot R_2^3/G \text{ или } (2\pi)^2\cdot R_1^3/T_1^2\cdot G = (2\pi)^2\cdot R_2^3/T_2^2\cdot G$$

и, окончательно: $$T_1^2 / T_2^2 = R_1^3 / R_2^3.$$

4. Первая космическая скорость. Это наименьшая скорость тела v_1, брошенного горизонтально так, что это тело больше не соприкасается с Землей и становится ее спутником. Иначе говоря, такой скоростью обладает спутник Земли, круговая траектория которого примыкает к поверхности Земли. Расчет основан на примерном равенстве центростремительной силы $m\cdot v_1^2/R_З$ силе тяжести $m\cdot g$ (рис. 32):

$$m\cdot v_1^2 / R_З = m\cdot g \ \text{ или }\ v_1^2 / R_З = g\ \text{ и, окончательно, }\ v_1 = \sqrt{g\cdot R_З}.$$

$$v_1 = (9{,}8\cdot6370\cdot10^3)^{1/2}\ \text{м/с} = 7{,}9\cdot10^3\ \text{км/с}.$$

5. Вторая космическая скорость. Это наименьшая скорость тела v_2, брошенного с поверхности Земли так, что это тело, преодолевая земное притяжение, становится спутником Солнца. Траектория движения – парабола (рис. 33). Расчет основан на равенстве полной механической энергии тела нулю:

$$W = W_П + W_К = 0,\; W_П = m \cdot \varphi,\; \varphi = -G\frac{M_З}{R_З},\; W_п = -G\frac{m \cdot M_З}{R_З},\; W_К = m \cdot v_2^2/2,$$

$$W_П + W_К = -G\frac{m \cdot M_З}{R_З} + \frac{m \cdot v_2^2}{2} = 0,$$

$$v_2 = \sqrt{G\frac{2M_З}{R_З}} = \sqrt{G\frac{2M_З}{R_З} \cdot \frac{R_З}{R_З}} = \sqrt{2G\frac{M_З}{R_З^2} \cdot R_З} = \sqrt{2E \cdot R_З} = \sqrt{2g \cdot R_З} = \sqrt{2} \cdot v_1.$$

$$v_2 = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Формула второй космической скорости получена с учетом формулы потенциала гравитационного поля Земли $\varphi = -G\frac{M_З}{R_З}$,

– приближенного равенства ускорения свободного падения модулю напряженности гравитационного поля Земли $g = E = G\frac{M_З}{R_З^2} = 9{,}8$ м/с^2 и

– формулы первой космической скорости $v_1 = \sqrt{g \cdot R_З}$.

6. Третья космическая скорость. Это наименьшая скорость тела v_3, брошенного на поверхности Земли так, что это тело, преодолевая земное и солнечное притяжения, покидает пределы солнечной системы: $v_3 = 72$ км/с. Для расчета v_3 следует воспользоваться законами сохранения энергии и момента импульса.

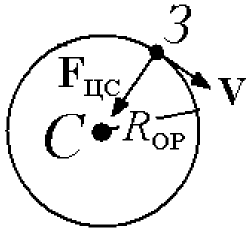


Рис. 30

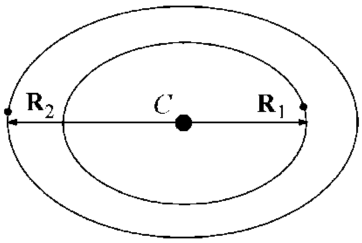


Рис. 31

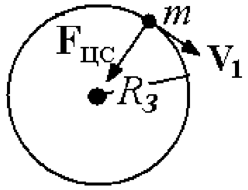


Рис. 32

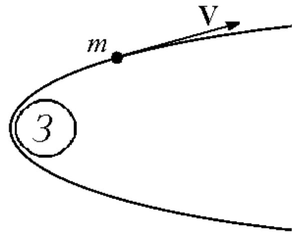


Рис. 33

Центр масс (инерции).

В общем случае, движение твердого тела состоит из двух его видов: поступательного движения особой точки тела, которая называется центром масс или центром инерции, и вращательного движения тела около центра масс. **Центр масс** – это такая точка С, которая при равенстве нулю результирующей всех внешних сил движется прямолинейно и равномерно, т.е. с ней можно связать инерциальную систему отсчета. Этому условию удовлетворяет точка, заданная для дискретного распределения масс радиус-вектором (рис. 34):

$$\mathbf{r}_c = (\sum_i m_i \cdot \mathbf{r}_i) / \sum_i m_i = (\sum_i m_i \cdot \mathbf{r}_i) / m.$$

Для непрерывного распределения масс радиус-вектор центра масс рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{r}_c = (\int_m \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}m) / m.$$

Доказательство приведем для дискретного распределения масс. Найдем вторую производную по времени от радиус-вектора центра масс:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{a}_C = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\frac{1}{m}\sum_i m_i \cdot \mathbf{r}_i) = \frac{1}{m}(\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}_i) = \frac{1}{m}\sum_i m_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{m}\sum_i m_i \cdot \mathbf{a}_i \, .$$

Применяя второй закон Ньютона к i-той точке тела, имеем:

$$m_i \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i,$$

где $\mathbf{F}_i$ и $\mathbf{f}_i$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, которые приложены к i-той точке. По 3 закону Ньютона $\sum_i \mathbf{f}_i = 0$. В таком случае получим выражение:

$$\mathbf{a}_C = \frac{1}{m}\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i) = \frac{1}{m}\sum_i \mathbf{F}_i + \frac{1}{m}\sum_i \mathbf{f}_i = \frac{1}{m}\sum_i \mathbf{F}_i = \frac{1}{m}\mathbf{R},$$

утверждающее, что центр масс удовлетворяет основному закону динамики и, следовательно, закону инерции.

Выражением $\mathbf{a}_c = \mathbf{R}/m$ задается уравнение движения центра масс, где $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$ – результирующая всех внешних сил и m – масса тела. В том случае, если $\mathbf{R}$ равно нулю, то центр масс движется прямолинейно и равномерно (без ускорения). При этом остальные точки тела могут двигаться (равномерно или неравномерно) около осей, проходящих через центр масс, т.е. тело в целом будет совершать вращательное движение около центра масс.

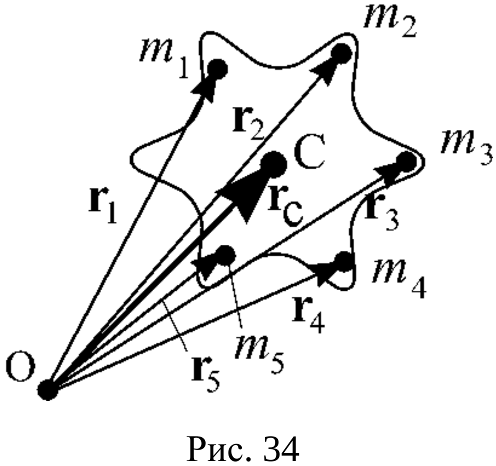


Рис. 34

Момент инерции.

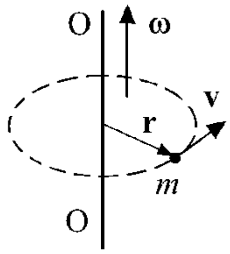


Рис. 35

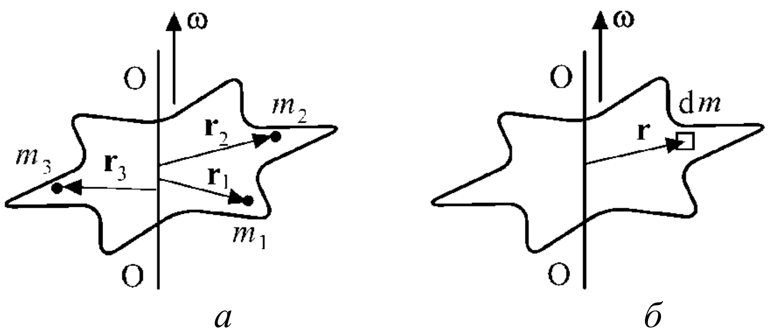


Рис. 36

Инерциальные свойства вращающегося твердого тела, т.е. движущегося около неподвижной оси, которая проходит через центр масс, удобно характеризовать скалярной физической величиной – моментом инерции. Момент инерции материальной точки равен произведению ее массы на квадрат расстояния от оси обращения (рис. 35):

$$I = m\, r^2.$$

Так же, как и масса, момент инерции – аддитивная величина. Поэтому момент инерции твердого тела равен сумме моментов инерции всех его частей. Момент инерции тела для дискретного (рис. 36*а*) или непрерывного (рис. 36*б*) распределения масс соответственно определяется по формуле:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i \cdot r_i^{\,2} \quad \text{или} \quad I = \int \mathrm{d}I = \int_m r^2 \cdot \mathrm{d}m,$$

где r_i и r – соответственно расстояния i-той точки тела и элемента массы dm от оси вращения.

Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Формулировка: *Момент инерции тела I относительно произвольной оси* O'O' *равен моменту инерции* I_0 *этого тела относительно оси* OO*, проходящей через центр масс тела* С *параллельно данной оси, плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния a между осями*:

$$I = I_0 + m \cdot a^2.$$

Доказательство. Через некоторый элемент массы dm данного тела проведем плоскость, перпендикулярную осям O'O' и OO (рис. 37). В этой плоскости обозначим радиус-векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{r}_b$ и $\mathbf{r}$ так, чтобы эти векторы образовали замкнутый треугольник. Тогда, модуль вектора $|\mathbf{a}| = a$ есть расстояние между осями, модули r_b и r векторов $\mathbf{r}_b$ и $\mathbf{r}$ – расстояния от осей OO и O'O' до элементарной массы dm, и $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}_b$. Запишем выражение момента инерции тела относительно произвольной оси и преобразуем его:

$$I = \int \mathrm{d}I = \int_m r^2 \cdot \mathrm{d}m = \int_m \mathbf{r}^2 \cdot \mathrm{d}m = \int_m (\mathbf{a} + \mathbf{r}_b)^2 \cdot \mathrm{d}m = \int_m (\mathbf{a}^2 + \mathbf{r}_b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_b) \cdot \mathrm{d}m =$$

$$= \int_m a^2 \cdot \mathrm{d}m + \int_m r_b^2 \cdot \mathrm{d}m + \int_m 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_b \cdot \mathrm{d}m = m \cdot a^2 + I_0 + 2\mathbf{a} \int_m \mathbf{r}_b \cdot \mathrm{d}m = I_0 + m \cdot a^2.$$

Слагаемое $2\mathbf{a} \int_m \mathbf{r}_b \cdot \mathrm{d}m$ равно нулю, т.к. $(\int_m \mathbf{r}_b\, \mathrm{d}m)/m$ – это есть радиус-вектор центра масс $\mathbf{r}_c$, начало которого находится в центре масс: $(\int_m \mathbf{r}_b\, \mathrm{d}m)/m = \mathbf{r}_c = 0$. Теорема доказана.

Примеры вычисления момента инерции твердых тел относительно оси, проходящей через центр масс.

1. Однородный тонкий диск радиуса R и массой m (рис. 38). Ось вращения совпадает с осью диска, σ – поверхностная плотность вещества ($\sigma = \mathrm{d}m / \mathrm{d}S$).

$$I = \int_m r^2 \mathrm{d}m = \int_S r^2 \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}S = \sigma \int_r \int_\varphi r^2 \cdot r \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \sigma \int_0^R r^3 \cdot \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \sigma \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi = \frac{1}{2} R^2 \cdot \pi R^2 \sigma = \frac{1}{2} m \cdot R^2$$

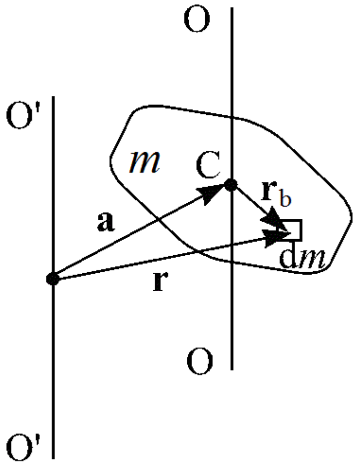


Рис. 37

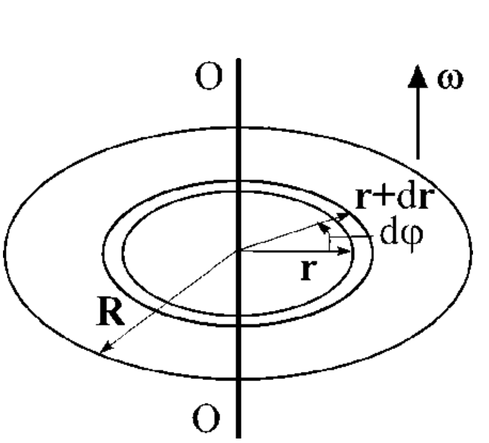


Рис. 38

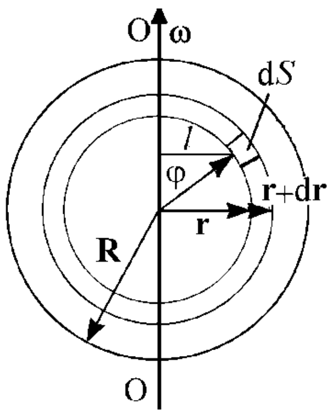


Рис. 39

2. Однородный тонкий диск радиуса R и массой m (рис. 39). Ось вращения совпадает с диаметром диска, σ – поверхностная плотность вещества.

$$I = \int_m l^2\cdot \mathrm{d}m = 2\cdot\int_S (r\cdot\sin\varphi)^2\cdot\sigma\cdot \mathrm{d}S = 2\,\sigma \int_r \int_\varphi r^2\cdot\sin^2\varphi\cdot r\cdot \mathrm{d}r\cdot \mathrm{d}\varphi = 2\sigma\int_0^R r^3\cdot \mathrm{d}r\cdot\int_0^\pi \sin^2\varphi\cdot \mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\sigma\cdot\frac{1}{4}R^4\cdot\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = \sigma\cdot\frac{1}{4}R^4\cdot\pi = \frac{1}{4}R^2\cdot\sigma\cdot\pi\cdot R^2 = \frac{1}{4}m\cdot R^2.$$

3. Однородный цилиндр. Ось вращения совпадает с осью цилиндра (рис. 40). Радиус основания R, высота H, масса m и плотность вещества $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$.

$$I = \int_m r^2\,\mathrm{d}m = \int_V (r^2\,\rho)\,\mathrm{d}V = \int_r\int_\varphi\int_H r^2\rho r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}H =$$

$$= \rho\int_0^R r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^H \mathrm{d}H = \rho\cdot\frac{1}{4}R^4\cdot 2\pi\cdot H = \frac{1}{2}R^2\cdot\pi R^2 H\rho = \frac{1}{2}mR^2$$

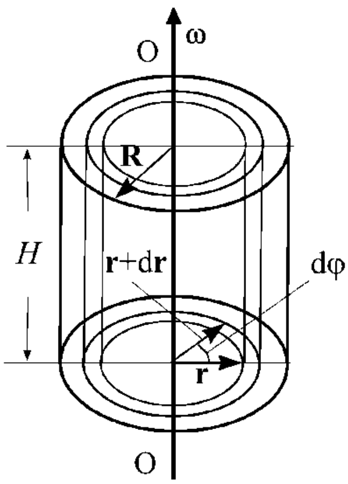


Рис. 40

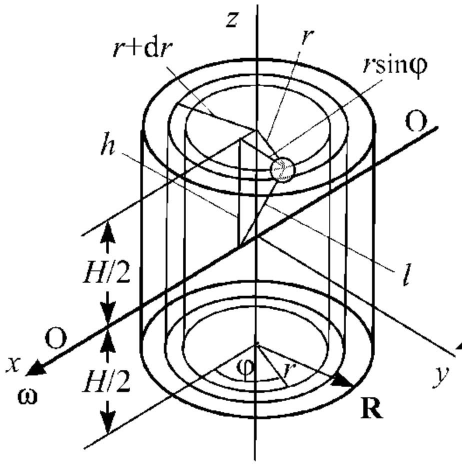


Рис. 41

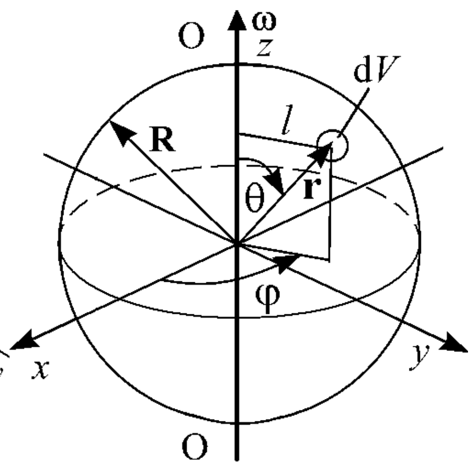


Рис. 42

4. Однородный цилиндр. Ось вращения перпендикулярна оси цилиндра (рис.41). Радиус основания – R, высота – H, масса – $m = \rho\cdot V$, объем цилиндра – $V = \pi r^2\cdot H$ и плотность – $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$.

$$I = \int_m l^2\cdot \mathrm{d}m = \int_V (r^2\cdot\sin^2\varphi + H^2)\,\rho\cdot \mathrm{d}V = \int_r\int_\varphi\int_H (r^2\cdot\sin^2\varphi + H^2)\,\rho\cdot r\cdot \mathrm{d}r\cdot \mathrm{d}\varphi\cdot \mathrm{d}H =$$

$$=\rho\int_0^R r^3\cdot \mathrm{d}r\cdot(2\int_0^\pi \sin^2\varphi\cdot \mathrm{d}\varphi)\cdot 2\int_0^{H/2}\mathrm{d}H+\ \rho\int_0^R r\cdot \mathrm{d}r\cdot 2\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\cdot 2\int_0^{H/2}H^2\cdot \mathrm{d}H=$$

$$=\rho\frac{1}{4}R^4\cdot\pi\cdot H+\rho\frac{1}{2}R^2\cdot 2\pi\cdot(2\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}H^3)$$

$$=(\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{12}H^2)\rho\cdot\pi\cdot R^2\cdot H=\frac{1}{4}m\cdot R^2+\frac{1}{12}m\cdot H^2.$$

5. Однородный стержень. Ось вращения перпендикулярна оси стержня, масса – m, радиус поперечного сечения R значительно меньше длины l. Данная задача представляет собой частный случай предшествующей задачи. Полагая $R << H$ и $H = l$, получим искомый результат: $I=\frac{1}{12}m\cdot l^2$.
6. Однородный шар радиуса R и массы m (рис. 42). Вычисления осуществляются в сферической системе координат, ρ – плотность вещества.

$$I = \int_m l^2\cdot \mathrm{d}m = \int_m (r\cdot\sin\theta)^2\cdot \mathrm{d}m = \int_m (r\cdot\sin\theta)^2\cdot\rho\cdot \mathrm{d}V =$$

$$= \int_r \int_\theta \int_\varphi (r\cdot\sin\theta)^2\rho\cdot r^2\cdot \mathrm{d}r\cdot\sin\theta\cdot \mathrm{d}\theta\cdot \mathrm{d}\varphi = \rho \int_r r^4\cdot \mathrm{d}r \int_\theta \sin^3\theta\cdot \mathrm{d}\theta \int_\varphi \mathrm{d}\varphi =$$

$$=\rho\int_0^R r^4\cdot dr\int_0^\pi \sin^3\theta\cdot \mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{5}\rho\cdot R^5\cdot\left(-\int_0^\pi\left(1-\cos^2\theta\right)\cdot \mathrm{d}\left(\cos\theta\right)\right)\cdot 4\cdot\pi=$$

$$=\frac{1}{5}\rho\cdot R^5\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\pi=\frac{2}{5}R^2\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot R^3\cdot\rho=\ \frac{2}{5}m\cdot R^2\ .$$

7. Пример применения теоремы Гюйгенса-Штейнера. Момент инерции длинного стержня относительно оси, проходящей через один из торцов перпендикулярно его длине l. По условию задачи – $a = l / 2$. Расчет выполняем по формуле: $I = I_0 + m\cdot a^2$. Учитывая, что $I_0 = m\cdot l^2/12$ и $a = l / 2$, получим:

$$I = m\cdot l^2/12 + m\cdot(l/2)^2 = (1/12+1/4)\cdot m\cdot l^2 = m\cdot l^2/3.$$

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Работа при вращательном движении.

Рассмотрим движение твердого тела под действием внешних сил, причем результирующая сила равна нулю. Следовательно, центр масс тела покоится или движется прямолинейно и равномерно, а тело совершает вращательное движение. Выберем произвольную элементарную массу dm этого тела (рис. 43). В системе отсчета, жестко связанной с центром масс, центр масс покоится, однако элемент dm, в общем случае, движется с переменной скоростью **v** по окружности. Элементарная работа $\delta A = \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ может быть представлена в виде:

$$\delta A = \vec{\mathrm{F}}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}\ = F_\tau\cdot \mathrm{d}r = F_\tau\cdot r\cdot \mathrm{d}\varphi = M\cdot \mathrm{d}\varphi = \ \vec{M}\ \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi},$$

где запись $\vec{M}\cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$ означает скалярное произведение вектора момента силы $\vec{M}$

на элементарное угловое смещение $d\vec{\varphi}$ радиус-вектора $\vec{r}$.

Момент силы, равный векторному произведению радиус-вектора на вектор силы $\vec{M} = [\vec{r}\ \vec{F}]$, и угол поворота $d\vec{\varphi}$ – аксиальные векторы, направление которых определяется по правилу правого винта, а модули соответственно равны: $M = r\,F \sin\alpha$ и $d\varphi = dr/r$. Полная работа вычисляется посредством интегрирования:

$$A = \int \delta A = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi},$$

или $$A = \int M \cdot d\varphi \cdot \cos\alpha = \int M_\varphi \cdot d\varphi,$$

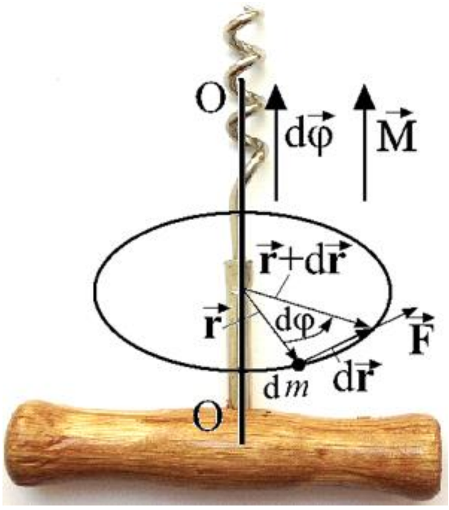


Рис. 43

Пределы интегрирования зависят от условий задачи. Здесь $M_\varphi = M\cdot\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{M}$ на ось вращения, а α – это угол, составленный вектором $\vec{M}$ с этой осью, $0 \le \alpha \le \pi$. Отметим, что значение массы в формуле не присутствует. Следовательно, при отсутствии других моментов сил, действующих на тело, приведенная выше формула полной работы $A = \int M_\varphi \cdot d\varphi$, является таковой и для всего тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела.

Принимая во внимание, что положительная работа внешних сил приводит к возрастанию кинетической энергии тела (при отсутствии деформации), получим формулу кинетической энергии вращающегося тела. Для начала преобразуем формулу кинетической энергии элементарной массы:

$$dW_K = dm \cdot v^2 / 2 = dm \cdot (\omega \cdot r)^2 / 2 = (r^2 \cdot dm) \cdot \omega^2 / 2 = dI \cdot \omega^2 / 2.$$

Поскольку момент инерции – аддитивная величина, формула кинетической энергии вращения твердого тела принимает вид:

$$W_K = \int dW_K = (\int dI) \cdot \omega^2/2 = I \cdot \omega^2/2,$$

где I – момент инерции тела и ω – его угловая скорость.

Основной закон динамики вращательного движения.

Покажем, что этот закон может быть получен как следствие 2 закона Ньютона. Запишем основной закон механики для произвольной м.т. твердого тела (по модулю): $a_i = F_i / m_i$ и осуществим ряд преобразований:

$$a_i = \beta_i \cdot r_i = F_i / m_i = F_i \cdot r_i^2 / m_i \cdot r_i^2,\ \ \beta_i = F_i \cdot r_i / m_i \cdot r_i^2 = M_i / I_i,\ \ I_i\,\beta_i = M_i.$$

Последнюю формулу запишем в векторном виде $I_i \cdot \vec{\beta}_i = \vec{M}_i$ и распространим ее для всего тела: $\sum_i I_i \cdot \vec{\beta}_i = \sum_i \vec{M}_i$. После выполнения дополнительных преобразований: $\sum_i I_i\vec{\beta}_i = (\sum_i I_i\vec{\beta}) = (\sum_i I_i)\vec{\beta} = I\vec{\beta}$, $\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}$ и $I \cdot \vec{\beta} = \vec{M}$, получим выражение основного закона динамики вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси: *Угловое ускорение* *твердого тела прямо пропорционально результирующему моменту внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела:*

$$\boxed{\vec{\beta} = \frac{1}{I}\vec{M}} \ .$$

Аналоги 1 и 3 законов Ньютона

- аналог 1 закона: при отсутствии действия внешних моментов сил тело вращается равномерно или покоится,
- аналог 3 закона: момент сил действия равен моменту сил противодействия и противоположно ему направлен, $\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$.

Момент импульса.

По определению, момент импульса точечной массы m_i – это векторное произведение радиус-вектора м.т. на ее импульс $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$. На примере точечной массы, совершающей движение по круговой траектории на плоскости, получим другую расчетную формулу момента импульса. Вначале преобразуем $\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i]$:

$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i] = [\mathbf{r}_i, m_i \cdot \mathbf{v}_i] = m_i \cdot [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i].$$

Тогда, при движении м.т. по окружности радиуса $r_i = |\mathbf{r}_i|$, модуль момента импульса L_i равен:

$$L_i = m_i \cdot r_i \cdot v_i = m_i \cdot r_i \cdot (r_i \cdot \omega_i) = (m_i \cdot r_i^2) \cdot \omega_i = I_i \cdot \omega_i.$$

Так как $\mathbf{L} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_i$, то в векторной форме для момента импульса м.т. в качестве определения справедливо выражение:

$$\mathbf{L}_i = I_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \ .$$

Наконец, момент импульса тела относительно закрепленной оси равен:

$$\mathbf{L} = \textstyle\sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i I_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i = (\sum_i I_i) \cdot \boldsymbol{\omega} = I \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Продифференцируем его по времени, принимая во внимание, что для твердого тела момент инерции не зависит от времени:

$$\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{dt} = \mathrm{d}(I \cdot \boldsymbol{\omega})/\mathrm{dt} = I \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}/\mathrm{dt} = I \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Так как по основному закону динамики вращательного движения $I \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}$, где $\mathbf{M}$ – это момент силы, то после замены в формуле $\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = I \cdot \boldsymbol{\beta}$ произведение $I \cdot \boldsymbol{\beta}$ на $\mathbf{M}$ мы получаем **уравнение моментов**: *первая производная момента импульса по времени равняется моменту внешних сил, действующих на тело*:

$$\mathrm{d}\mathbf{L}/\mathrm{d}t = \mathbf{M} \ \left(\text{или } \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}\right).$$

Уравнение моментов играет важную роль в механике твердого тела. Этой формулой задается и **обобщенный закон динамики вращательного движения твердого тела,** и **закон сохранения момента импульса**.

Закон сохранения момента импульса.

Согласно уравнению моментов, если на твердое тело внешние силы не действуют (изолированное тело) или моменты внешних сил скомпенсированы, то момент импульса тела со временем не меняется. Доказательство: закон динамики d$\vec{L}$/dt = $\vec{M}$ для $\vec{M}$ = 0 принимает вид: d$\vec{L}$/dt = 0, или $\vec{L}$ = Const, ч.т.д.

Вращательное движение нежесткого изолированного тела.

Такой случай возникает, когда под действием внутренних сил меняется распределение масс внутри тела, что приводит к изменению момента инерции тела. Рассмотрим два состояния тела с различными значениями момента инерции и угловой скорости. Пусть $I_1 < I_2$. Тогда по закону сохранения момента импульса ($L_1 = L_2$) имеем: $I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$, $\omega_2 = (I_1/I_2) \cdot \omega_1$. Так как $I_1 < I_2$ или $I_1/I_2 < 1$, то $\omega_2 < \omega_1$. Возникает вопрос: а как ведет себя кинетическая энергия? Получим формулу для отношения кинетических энергий:

$$W_2 / W_1 = \frac{I_2 \cdot \omega_2^2}{2} \Big/ \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{2} = (I_2 \cdot \omega_2 \big/ I_1 \cdot \omega_1) \cdot (\omega_2 \big/ \omega_1) = \omega_2 \big/ \omega_1 < 1 .$$

Таким образом, увеличение (уменьшение) момента инерции приводит к убыли (росту) как угловой скорости вращения, так и кинетической энергии тела.

На основе закона сохранения момента импульса получим выражение для углового ускорения:

$$\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{dt} = \mathrm{d}(I \cdot \vec{\omega})/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) \cdot \vec{\omega} + I \cdot (\mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t) = 0,$$

$$\vec{\beta} = \mathrm{d}\vec{\omega}/\mathrm{d}t = -(\vec{\omega}/I) \cdot (\mathrm{d}I/\mathrm{d}t).$$

Если момент инерции тела возрастает (dI/dt > 0), то его ускорение направлено против скорости, ($\vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$), и вращение замедляется. При уменьшении момента инерции ускорение направлено вдоль скорости, ($\vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$), и тело вращается быстрее.

УПРУГИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ.

Изменение размеров и формы тел называется **деформацией**. Деформация происходит под действием сил. Если после прекращения действия сил, вызвавших деформацию, тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется **упругой**. Упругие деформации происходят в том случае, если сила, обусловившая деформацию, не превосходит некоторый, определенный для каждого конкретного тела предел. При превышении этого предела тело получает **остаточные** (**пластические**) деформации, т.е. такие деформации, которые сохраняются и после прекращения действия силы. Все возможные виды упругих деформаций твердого тела могут быть сведены к двум основным: **растяжению-сжатию** и **сдвигу**.

Диаграмма деформации. Качественное поведение функциональной связи между относительной деформацией ε и напряжением σ представлено графически на рис. 44. При малых деформациях (прямая линия 0-П) наблюдается область пропорциональной упругой деформации. Здесь выполняется закон Гука. В области П-У деформация – также упругая, но закон Гука не справедлив. Начиная с точки У, вплоть до точки Т наблюдается область остаточных неупругих деформаций.

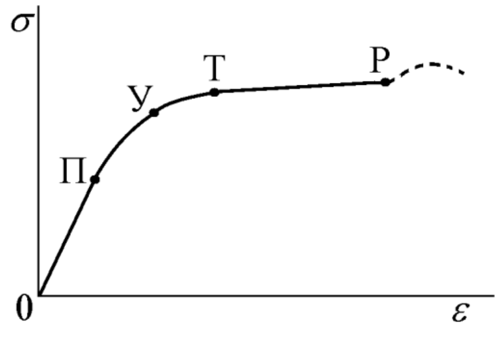


Рис. 44

Интервалу Т-Р соответствует область текучести, когда приложение незначительного усилия приводит к повышенной необратимой деформации. Вблизи точки Р текучесть прекращается, и для дальнейшего деформирования тела требуется приложение повышенного усилия. Однако это дополнительное усилие приводит к разрушению тела. Ниже перечислены названия особых точек и областей деформации:

П – предельная точка пропорциональной деформации,
У – предел упругости,
0-У – область упругих деформаций,
Т – предел текучести,
У-Т – область остаточных деформаций,
Т-Р – область текучести,
Р – предел прочности, точка разрыва.

Продольное растяжение-сжатие (рис. 45 и 46). Если к концам однородного стержня постоянного сечения приложить направленные вдоль его оси силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действие которых равномерно распределено по всему сечению, причем $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$, то первоначальная длина стержня l_0 получит положительное (при растяжении), либо отрицательное (при сжатии) приращение $\Delta l = l - l_0$ и станет равной l. При этом каждый произвольно выбранный элемент длины стержня δl получает приращение $\Delta(\delta l)$, пропорциональное его длине, так что для всех элементов стержня отношение $\Delta(\delta l)/\delta l$ оказывается одним и тем же. Естественно поэтому в качестве величины, характеризующей деформацию стержня, взять относительное изменение его длины: $\varepsilon = \Delta l/l_0$. Относительное удлинение ε является безразмерной величиной. В случае растяжения оно положительно, а в случае сжатия отрицательно.

Закон Гука для стержней из однородного материала – *относительное удлинение при упругой деформации пропорционально силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня*:

$$\boxed{\varepsilon = \alpha \cdot F / S = \alpha \cdot \sigma}\ .$$

Коэффициент пропорциональности α называется *коэффициентом упругости* (*упругой податливости*). Он зависит только от свойств материала стержня. Величина σ, равная отношению силы F к площади поверхности S, на которую сила действует, называется *напряжением* $F/S = \sigma$. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется нормальным. Если сила направлена по касательной к поверхности, на которую она действует, напряжение называется тангенциальным (или касательным). (Нормальное напряжение принято обозначать символом σ, тангенциальное – τ). Итак, относительное удлинение оказывается пропорциональным нормальному напряжению, и коэффициент упругости α численно равен относительному удлинению при напряжении, равном единице.

Наряду с коэффициентом упругости α для характеристики упругих свойств материала пользуются обратной ему величиной $E = 1/\alpha$, которая называется **модулем Юнга**. Заменяя α через E в формуле $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$, получим другую форму закона Гука:

$$\boxed{\varepsilon = (1/E)\cdot\sigma = \sigma/E}.$$

Следовательно, модуль Юнга равен нормальному напряжению, при котором относительное удлинение равно единице (т. е. приращение длины Δl равно первоначальной длине l_0, если бы столь большие упругие деформации были доступны). На самом деле, при значительно меньших напряжениях происходит разрыв стержня, а предел упругости достигается еще раньше.

С учетом формул $\sigma = F/S$ и $\varepsilon = \Delta l/l_0$ из закона Гука $\varepsilon = \sigma/E$ следует формула упругой силы:

$$\boxed{F = (E\cdot S\ /\ l_0)\cdot\Delta l = k\cdot\Delta l},$$

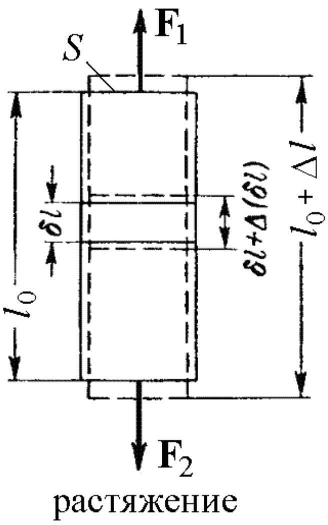


Рис. 45

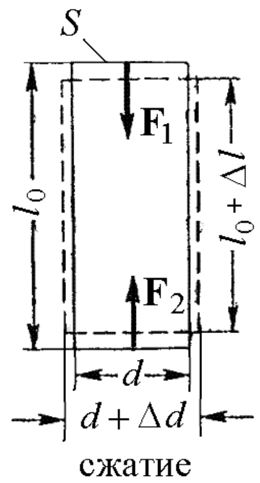


Рис. 46

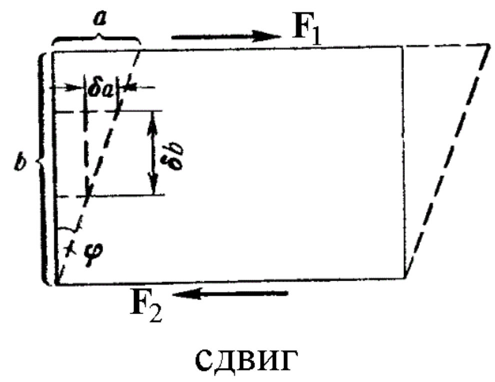


Рис. 47

где k – постоянный для данного стержня коэффициент, который для пружин называется *жесткостью* пружины.

Изменение длины стержня при деформации сопровождается изменением поперечных размеров стержня d. Это изменение принято характеризовать относительным поперечным расширением или сжатием, ε':

$$\varepsilon' = \Delta d / d.$$

Обычно ε и ε′ имеют противоположные знаки: при растяжении ε положительно, а ε′ отрицательно, при сжатии ε отрицательно, а ε′ положительно. Опыт дает, что в области упругих деформаций ε′ пропорционален ε:

$$\boxed{\varepsilon' = -\mu\cdot\varepsilon},$$

где μ – *коэффициент поперечного сжатия или коэффициент Пуассона* (положительный коэффициент, зависящий только от свойств материала).

Деформация сдвига (рис. 47). Возьмем однородное тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, и приложим к его противолежащим граням силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ($\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$), направленные параллельно этим граням. Если действие сил будет равномерно распределено по всей поверхности соответствующей грани S, то в любом сечении, параллельном этим граням, возникнет тангенциальное напряжение $\tau = F/S$. Тело деформируется так, что одна грань смещается относительно другой грани на некоторое расстояние a. Если тело мысленно разбить на элементарные горизонтальные слои, то каждый слой окажется сдвинутым относительно соседних с ним слоев.

При деформации сдвига любая прямая, первоначально перпендикулярная к горизонтальным слоям, повернется на некоторый угол φ. Следовательно, отношение сдвига δa двух произвольно взятых слоев к расстоянию между этими слоями δb будет одинаково для любой пары слоев. Это отношение естественно взять в качестве характеристики деформации сдвига:

$$\gamma = \delta a / \delta b = a / b = \mathrm{tg}\,\varphi.$$

Величина γ называется *относительным сдвигом*. В силу малости угла φ можно положить tg φ ≈ φ. Следовательно, относительный сдвиг γ оказывается равным углу сдвига φ (выраженному в радианах). Опыт показывает, что для малых деформаций относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению:

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{G}\tau}$$

Коэффициент G зависит только от свойств материала и называется *модулем сдвига*. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором угол сдвига оказался бы равным 45° (tg φ = 1), если бы при столь больших деформациях не был превзойден предел упругости.

Кручение круглого стержня (рис. 48). Если круглый стержень закрепить одним концом неподвижно, а к другому концу приложить вращательный момент (момент пары сил) **M**, имеющий направление вдоль оси стержня, то стержень получит такую деформацию, при которой одно основание повернется по отношению к другому на некоторый угол φ.

Деформация кручения – это пример неоднородного сдвига. Действительно, если мысленно разбить стержень на элементарные слои, перпендикулярные к его оси, то закручивание приведет к сдвигу каждого из таких слоев по отношению к соседним слоям. Правда, этот сдвиг будет неоднороден: участок слоя ΔS получает по отношению к аналогичному участку смежного слоя тем большее смещение, чем дальше он отстоит от оси стержня. Угол закручивания стержня определяется следующим выражением:

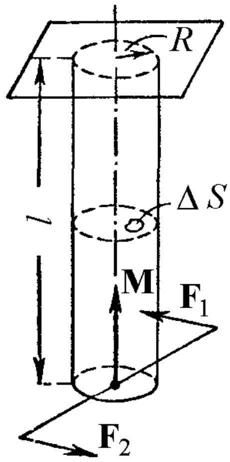


Рис. 48

$$\boxed{\varphi = \frac{2l}{\pi R^4 G} M} \;,$$

где l – длина стержня, R – радиус его сечения, G – модуль сдвига, M – вращательный момент (момент сил).

Энергия упругой деформации. Упруго деформированное тело, например, растянутый или сжатый стержень, возвращаясь в начальное состояние, может, подобно сжатой или растянутой пружине, совершить работу над внешними телами, т.е. обладает некоторым запасом энергии. Поскольку эта энергия обусловлена взаимным расположением элементов тела, она представляет собой потенциальную энергию $W_П$. Запас энергии деформированного тела равен работе, которая совершается внешними силами при деформации $W_П = A$. Вычислим энергию упруго растянутого стержня. При растяжении на стержень необходимо действовать силой, модуль которой определяется выражением $F = k\cdot\Delta l$. Работа этой *силы* равна: $A = \int_0^{\Delta l} F \cdot \mathrm{d}x$, где буквой x обозначено абсолютное удлинение стержня, которое в процессе деформации изменяется от 0 до Δl. Сила F, соответствующая удлинению x, согласно формуле $F = (E\cdot S / l_0)\cdot\Delta l = k\cdot\Delta l$, равна

$$F = k\cdot x = (E\cdot S / l_0)\cdot x.$$

Следовательно, $$W_П = A = \int_0^{\Delta l} \frac{E\cdot S}{l_0}\cdot x\cdot \mathrm{d}x = \frac{E\cdot S}{l_0}\cdot\frac{\Delta l^2}{2}.$$

Умножая числитель и знаменатель полученного выражения на l_0, заменяя затем отношение $\Delta l / l_0$ относительным удлинением $\varepsilon = \Delta l / l_0$ и учитывая, наконец, что произведение $S\cdot l$ равно объему стержня V, получим:

$$\boxed{W_П = \frac{E\cdot\varepsilon^2}{2} V} \;.$$

Введем в рассмотрение плотность энергии w в виде отношения энергии ΔW к тому объему ΔV, в котором она заключена. Поскольку в нашем случае стержень однороден и деформация является равномерной, т. е. одинаковой в разных точках стержня, энергия распределена в стержне также равномерно с постоянной плотностью. Поэтому можно считать, что выражение

$$w_{\text{п}} = \frac{\Delta W_{\text{п}}}{\Delta V} = \frac{W_{\text{п}}}{V} = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2$$

определяет плотность энергии упругой деформации при растяжении (сжатии). Аналогичным образом можно получить, что плотность энергии упругой деформации при сдвиге равна:

$$w_{\text{п}} = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2 .$$

В области пропорциональной деформации справедливы также эквивалентные формулы:

$$w_{\text{п}} = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} \quad \text{и} \quad w_{\text{п}} = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G} .$$

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ.

Гидростатическое давление. Барометрическая формула.

Согласно молекулярно-кинетической теории строения вещества молекулы находятся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении внутри жидкости и газа: трансляционном и вращательном. Межмолекулярные расстояния в жидкости меньше или сравнимы с размерами самих молекул, тогда как в газах эти расстояния значительно превышают размеры молекул. Это обусловлено тем фактом, что потенциальная энергия межмолекулярного притяжения в жидкости больше, а в газе меньше, чем кинетическая энергия теплового движения молекул. Поэтому каждая масса жидкости при отсутствии внешних сил (под действием одних только сил притяжения между молекулами) имеет определенный объем и приобретает форму шара. Внешними силами можно изменить величину объема (т.е. осуществить сжатие или расширение жидкости), а также изменить форму, которую имеет этот объем. Под действием распределенной по всему объему силы тяготения к Земле жидкость принимает форму сосуда, причем ее открытая поверхность располагается горизонтально. Капля жидкости, падающая в воздухе, под действием распределенной вдоль ее поверхности силы сопротивления воздуха принимает удобообтекаемую форму, при которой сопротивление движению минимальное: чем меньше скорость падения, тем ближе форма капли к сферической. В состоянии невесомости (при падении в безвоздушном пространстве, а также в космических кораблях) свободная жидкость принимает форму шара.

Газы занимают определенный объем только при наличии внешнего сжимающего давления со стороны стенок сосуда, в котором находится данная масса газа. Газы и жидкости могут подвергаться только всестороннему (объемному) сжатию или расширению. Сжимаемость жидкостей и газов оценивается изотермическим (при постоянной температуре) коэффициентом всестороннего сжатия (сжимаемости)

$$k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}\right)_{T=\mathrm{const}},$$

где dV — изменение объема V при изменении давления на dp при постоянной температуре T. Коэффициент сжимаемости зависит от температуры и давления.

При 0 °С ≈ 273 K и p = 1 атм ≈ 10^5 Па вода имеет $k \approx 0{,}5\cdot10^{-10}$ м^2/Н, ртуть – $3{,}8\cdot10^{-11}$ м^2/Н. Для газов k сильно зависит от того, как изменяется температура при изменении объема. Обратная величина $1/k = D$ называется *модулем объемной упругости* и измеряется в паскалях (Па = Н/м^2) или атмосферах (атм = кгс/см^2).

Если внутрь покоящейся жидкости или газа поместить очень тонкую твердую пластинку, то части жидкости или газа, расположенные по обе стороны ее, будут действовать на площадку ΔS с силами ΔF, которые независимо от ориентации пластинки равны по величине и направлены перпендикулярно площадке (рис. 49*а*). Эти силы существуют и при отсутствии пластинки, для любой мысленно проведенной площадки ΔS. Предел

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S}$$

является скалярной величиной и называется *давлением* в данном месте жидкости или газа.

Согласно закону Паскаля, внешнее давление p_0, приложенное к поверхности жидкости, передается всему объему, чем вызывается всестороннее (объемное) сжатие. Например, в гидравлическом прессе при помощи малой силы F_1, приложенной к поршню с малой площадью S_1, создается большое внешнее давление на жидкость $p = F_1/S_1$. Оно передается всему объему жидкости и на стенки сосуда.

В условиях земного тяготения открытая небольшая поверхность покоящейся жидкости – горизонтальная. На любой горизонтальной поверхности, взятой внутри жидкости, давление везде одинаковое. В смеси неоднородных жидкостей внизу располагается жидкость с большей плотностью; границей раздела между ними также является горизонтальная поверхность.

Согласно закону Архимеда, равнодействующая всех сил давления, приложенных к поверхности тел, погруженных в жидкость (или газ), направлена вертикально вверх и равна весу жидкости (или газа) в объеме данного тела. Тело может находиться внутри жидкости (газа) в равновесии, если сила Архимеда равна весу тела. У тел, плавающих на поверхности жидкости, равенство этих сил достигается при определенном погружении.

Напишем условия равновесия горизонтального слоя жидкости толщиной Δh и площадью S (рис. 49,б). Сила давления снизу $(p+\mathrm{d}p)\cdot S$ должна уравновесить силу давления сверху $p\cdot S$ и вес слоя $\rho\cdot g\cdot S\cdot dh$. Через ρ обозначена плотность жидкости. Тогда

$$(p+dp)\cdot S = p\cdot S + \rho\cdot g\cdot S\cdot dh\ ,$$

откуда

$$dp = \rho\cdot g\cdot dh\ .$$

Если величины ρ и g не изменяются до глубины h, то, интегрируя, получим:

$$p - p_0 = \rho\cdot g\cdot h;\ p = p_0 + \rho\cdot g\cdot h.$$

По этой формуле рассчитывается давление внутри покоящейся жидкости на глубине h от открытой горизонтальной поверхности; величина $\rho\cdot g\cdot h$ называется *гидростатическим давлением.*

При расчете давления в атмосфере вместо глубины погружения h отсчитывают высоту поднятия H над поверхностью Земли. Так как $dh = -\,dH$, то $dp = -\,\rho\cdot g\cdot dH$. Если плотность воздуха прямо пропорциональна его давлению $\rho = \mathrm{Const}\cdot p$ (что наблюдается при одинаковой температуре воздуха вблизи поверхности Земли), то интегрируя выражение $dp = -\,\rho\cdot g\cdot dH$ получим так называемую *барометрическую формулу*:

$$p = p_0\cdot e^{-\mathrm{Const}\cdot g\cdot H} \quad \text{и} \quad \rho = \rho_0\cdot e^{-\mathrm{Const}\cdot g\cdot H},$$

где p_0 – давление воздуха на поверхности Земли. Значение Const можно найти, полагая воздух идеальным газом. Согласно уравнению состояния идеального газа $p = n\cdot k\cdot T$, где n — число частиц в единице объема газа; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура газа. Так как $\rho = n\cdot m$, где m – масса одной частицы газа, то $\rho = -\ m\cdot p/k\cdot T$, т.е. константа Const равна $m/k\cdot T$. Следовательно, $p = p_0\cdot e^{-mgH/kT}$ и $\rho = \rho_0\cdot e^{-mgH/kT}$,

Заметим также, что mgH есть работа, совершаемая при подъеме одной частицы газа на высоту H, или ее потенциальная энергия на высоте H. На небольшой высоте $p \approx p_0 - \rho_0 gH$.

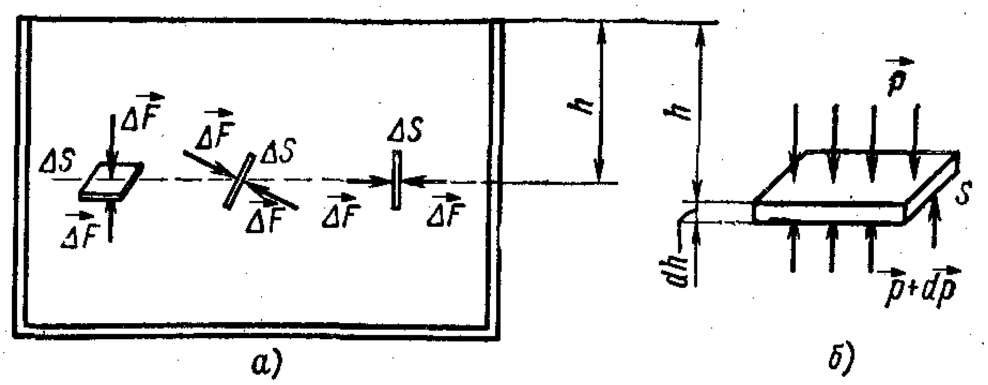


Рис. 49

Ламинарное и турбулентное течение.

Уравнение Бернулли. Условие (уравнение) непрерывности.

Жидкость (газ) может быть приведена в движение различными силами: силой тяжести, разностью давлений в различных местах объема, силами вязкости (внутреннего трения между слоями, движущимися с различными скоростями), и т. п. Проведем в потоке жидкости воображаемую линию тока так, чтобы вектор скорости в каждой точке лежал на касательной к этой линии. Течение называется установившимся (стационарным), когда форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не меняются. Течение называется ламинарным (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой (или струя) скользит относительно соседних слоев, не перемешиваясь с ними, и турбулентным (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Если можно пренебречь сжимаемостью жидкости (газа) и силами вязкости, то для установившегося течения в каждой точке линии тока соблюдается соотношение (уравнение Д. Бернулли):

$$\boxed{\rho \cdot v^2/2 + \rho \cdot g \cdot h + p = \mathrm{Const}}$$

Для вывода этого уравнения рассмотрим струю жидкости между сечениями S_1 и S_2, боковая поверхность которой образована линиями тока (рис. 50). За малое время Δt сквозь сечение S_1 пройдет элементарный объем жидкости в форме цилиндра с основанием S_1 и высотой $v_1 \cdot \Delta t$. Каждая единица объема прошедшей через S_1 жидкости вносит кинетическую энергию $\rho_1 \cdot v_1^2/2$ и потенциальную энергию $\rho_1 \cdot g \cdot h_1$. Внешняя сила $p_1 \cdot S_1$, действующая в сечении S_1, смещает указанный объем жидкости на $v_1 \cdot \Delta t$ и поэтому совершает положительную работу, равную $p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$. За то же время Δt через второе сечение S_2 вытечет жидкость в объеме цилиндра $S_2 \cdot \mathrm{v}2 \cdot \Delta \mathrm{t}$, а внешняя сила $p_2 \cdot S_2$ совершит отрицательную работу, равную $p_2 \cdot\ S_2 \cdot\ v_2 \cdot \Delta t$. При установившемся состоянии течения полная энергия жидкости в объеме струи между сечениями S_1 и S_2 должна оставаться постоянной, поэтому сумма изменений всех видов энергии и работ внешних сил должна равняться нулю:

$$S_1 v_1 \Delta t(\rho_1 v_1^2 / 2 + \rho_1 g h_1) + p_1 S_1 v_1 \Delta t - S_2 v_2 \Delta t(\rho_2 v_2^2 / 2 + \rho_2 g h_2) - p_2 S_2 v_2 \Delta t = 0$$

Предположим, что жидкость несжимаема ($\rho_1 = \rho_2$) и струя не имеет разрывов; тогда объемы жидкости, ежесекундно поступающей через S_1 и вытекающей через S_2, будут равны (условие - уравнение непрерывности):

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}.$$

Произведя сокращения, мы получаем уравнение Бернулли

$$\boxed{\rho v^2/2 + \rho g h + p = \mathrm{Const}},$$

которое представляет собой закон сохранения полного давления в стационарном потоке несжимаемой жидкости (газа): $\rho v^2/2$ – динамическое давление, ρgh – гидростатическое давление и p – внешнее давление.

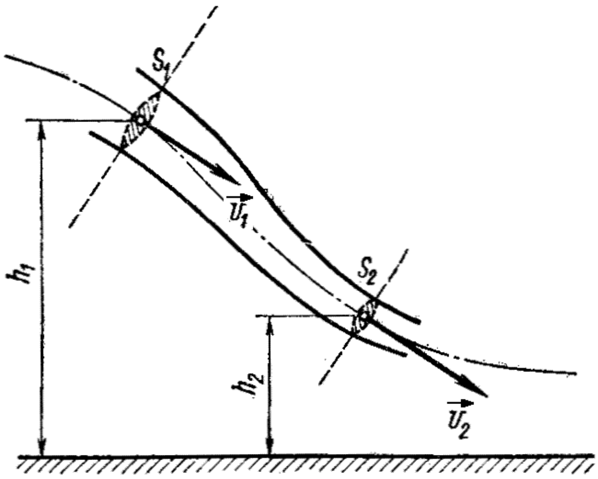


Рис. 50

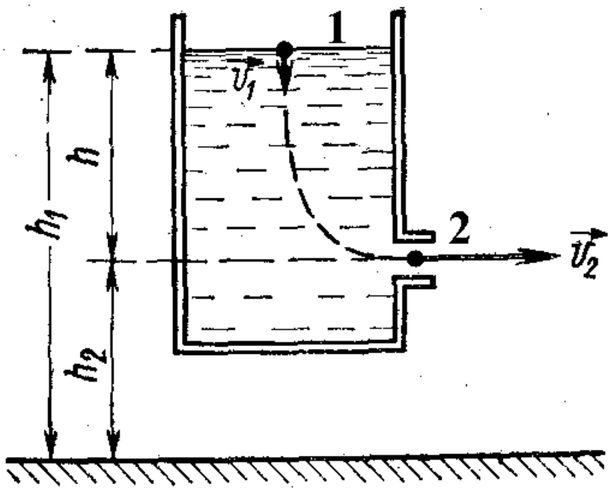


Рис. 51

Уравнение Бернулли применяется для решения некоторых задач гидро- и аэромеханики. Приведем два примера:

1. Расчет скорости истечения жидкости из резервуара. Для двух точек линии тока 1 и 2 имеем (рис. 51):

$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2 .$$

Так как p_1 и p_2 равны наружному давлению воздуха p_0, а v_1 очень мала, то

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)} \approx \sqrt{2gh} .$$

Для струи газа, выходящего из сосуда с высоким давлением p_1 в сосуд с низким давлением p_2, пренебрегая ρgh, получим:

$$v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} ;$$

2. Расчет давления в узком сечении потока (рис. 52). Полагая $h_1 = h_2$, *имеем*:

$$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) .$$

Так как $v_2 > v_1$, то $p_2 < p_1$ и может быть меньше атмосферного. Этим можно воспользоваться для всасывания газа или жидкости в трубу через боковые отверстия C.

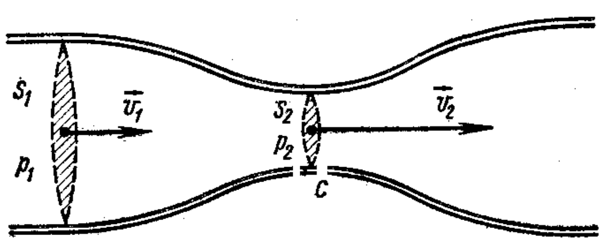


Рис. 52

Кроме сил тяжести и разности давлений, движение жидкости (газа) можно вызвать или затормозить силами трения между ее слоями. В ламинарном потоке жидкости (газа) сила трения между двумя соседними слоями, движущимися со скоростями v и $v + \mathrm{d}v$, равна (рис. 53):

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} S \ ,$$

где η – *коэффициент (динамической) вязкости*; $\mathrm{d}v/\mathrm{d}n$ – *градиент скорости потока* в данном месте, т.е. быстрота изменения скорости в направлении, перпендикулярном самой скорости, следовательно, и площадке S (S обозначает также площадь соприкосновения). Характер изменения скорости по мере удаления от стенок трубы или канала показан кривой *a; у* самих стенок вследствие прилипания жидкости и торможения ее шероховатой поверхностью стенки скорость течения равна нулю. Коэффициент вязкости η измеряется в паскаль-секундах или ньютон-секундах на квадратный метр (Па·с = Н·с/м^2), а в системе СГС – в пуазах [г/(см·с)]. Коэффициент вязкости жидкостей зависит заметно от температуры: у воды при 0 °С η_0 = 0,0018 Н·с/м^2, а при 15 °С уже становится равной 0,0011 Н·с/м^2. У воздуха соответственно: $\eta_0 = 1{,}71 \cdot 10^{-4}$ Н·с/м^2, $\eta_{15} = 1{,}81 \cdot 10^{-4}$ Н·с/м^2. В некоторые формулы входит отношение $\eta/\rho = \nu$, которое называется *кинематической вязкостью* жидкости (газа) и измеряется в квадратных метрах на секунду (м^2/с).

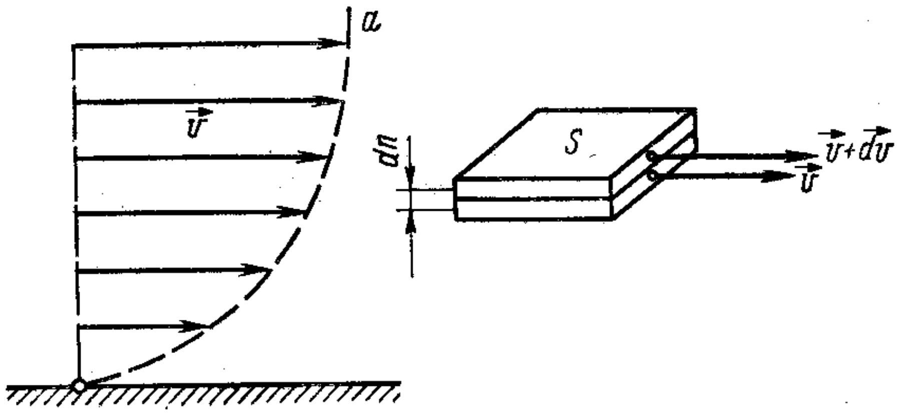


Рис. 53

На тело, движущееся внутри жидкости или газа, а также на тело, обтекаемое движущимся потоком жидкости или газа, действуют:

1) касательные силы трения между телом и обтекаемой жидкостью (газом). Для каждого элемента поверхности ΔS (рис. 54) эта сила $\Delta \mathbf{F}_t$ определяется градиентом скорости потока в пограничном слое и коэффициентом вязкости; она направлена по касательной к обтекаемому элементу поверхности;

2) нормальные силы давления $\Delta \mathbf{F}_n$, зависящие от значения давления в потоке возле каждого элемента ΔS и направленные перпендикулярно ему ($\Delta F_n = p \cdot \Delta S$).

Векторное сложение этих сил для всей обтекаемой поверхности определяет величину, направление и точку приложения полной силы, действующей на тело в потоке жидкости (газа):

$$\mathbf{R} = \sum (\Delta\mathbf{F}_t + \Delta\mathbf{F}_n).$$

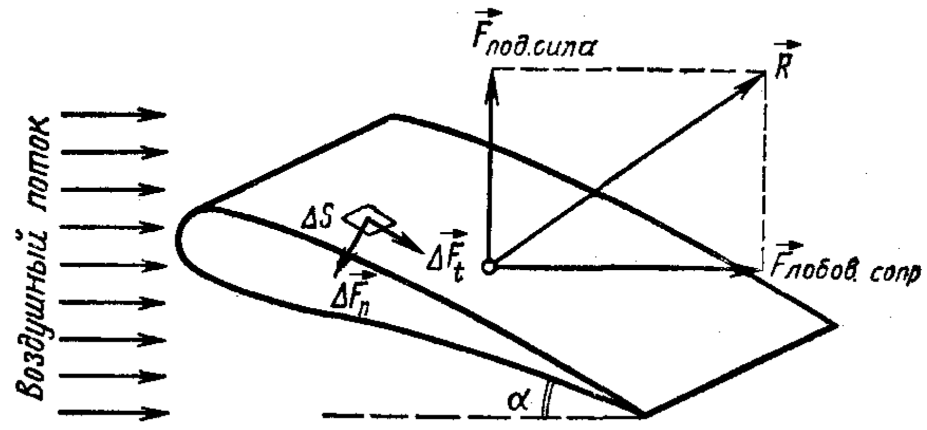


Рис. 54

Проекция **R** на направление потока называется *лобовым сопротивлением*; другая составляющая, если она направлена вертикально вверх, называется *подъемной силой.* Величина этих сил зависит от формы (обтекаемость) и размеров тел, их расположения относительно потока (угол атаки α), состояния обтекаемой поверхности (шероховатость) и, кроме того, определяется скоростью движения тела или обтекающего потока и свойствами жидкости (плотностью, коэффициентом вязкости и т. д.). Измерение и вычисление этих сил составляют важную задачу аэрогидродинамики. Выдающиеся исследования в этой области принадлежат Н.Е. Жуковскому, С.А. Чаплыгину и др.

Сжимаемость и вязкость в потоке.

Для упрощения некоторых аэрогидродинамических расчетов и, в частности, при выводе уравнения Бернулли пренебрегают сжимаемостью жидкостей и газов, а также работой сил вязкости. Выясним, при каких условиях это возможно. Допустим, что в горизонтальном потоке максимальная скорость на линии тока равна v, а минимальная – нулю. Для этих двух точек из уравнения Бернулли следует:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_1 = p_2, \quad v = \sqrt{\frac{2p_2 - p_1}{\rho}}.$$

Если $p_2 >> p_1$, то $v \approx (2p_2/\rho)^{1/2}$; для газов это близко к скорости распространения звука. Следовательно, чтобы разность давлений была небольшой и сжимаемостью можно было пренебречь, максимальная скорость потока газа должна быть значительно меньше скорости звука в этом газе. Рассчитаем, например, какое изменение давления могло бы получиться в потоке воздуха, движущегося со звуковой скоростью v = 340 м/с, если затормозить поток до скорости v = 0 (плотность воздуха ρ = 1,29 кг/м^3 возьмем при 0 °С):

$$p_2 - p_1 = \rho v^2/2; \quad p_2 - p_1 = 1{,}29\cdot 340^2/2 = 0{,}645\cdot 10^5 \text{ Па},$$

или около 0,65 атм. При таком изменении давления, очевидно, нельзя пренебрегать ни сжимаемостью воздуха, ни изменением его температуры. Поэтому для дозвуковых и сверхзвуковых течений газов потребовалась разработка специальной области механики – *газодинамики.*

Работой сил вязкости можно пренебрегать при следующих условиях; рассмотрим течение жидкости (газа) по трубе радиуса r и допустим, что труба расположена горизонтально, а на участке l скорость течения не изменяется. Тогда, согласно уравнению Бернулли, при отсутствии трения между жидкостью (газом) и стенками сосуда давление на концах участка l должно быть одинаковым. При наличии трения появится разность давлений $p_2 - p_1$, которую можно приравнять отношению силы трения F между жидкостью (газом) и стенками трубы к сечению трубы πr^2:

$$p_2 - p_1 = F / \pi r^2$$

Сила внутреннего трения в цилиндрическом потоке равна:

$$F = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} S = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} \cdot 2\pi r l\,.$$

Градиент скорости $\mathrm{d}v/\mathrm{d}n$ заменим средней величиной v/r, полагая, что у стенки трубы v = 0, а скорость по оси трубы равна v. Следовательно,

$$p_2 - p_1 = 2\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\frac{l}{r} = \frac{2\eta v l}{r^2}\,.$$

Силами трения можно пренебречь, если эта разность давлений достаточно мала по сравнению с $\rho v^2/2$:

$$\frac{\rho v^2}{2} \gg \frac{2\eta v l}{r^2} \quad \text{или} \quad \frac{\rho v r^2}{4\eta l} \gg 1\,.$$

Это условие, безусловно, соблюдается при очень малых l, т.е. когда участок трубы – очень короткий.

При изучении ламинарных и турбулентных течений большое значение придается безразмерной величине

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v r}{\eta} = \frac{v r}{\nu}\,,$$

которая называется *числом Рейнольдса* для цилиндрической трубы. Аналогичные формулы имеются для труб или каналов разных сечений. Число Рейнольдса является важной характеристикой потока при данных условиях.

Например, если это число превышает определенное критическое значение, то поток является турбулентным; при меньших значениях течение – ламинарное. Начиная с некоторого определенного значения Re, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Для трубы критическое значение числа Рейнольдса равно 1000.

Формула Стокса.

Стокс установил, что при движении тел малых размеров в вязкой среде сила внутреннего трения пропорциональна скорости v, коэффициенту вязкости η и характеристическому размеру тела. Коэффициент пропорциональности зависит от формы тела. Для шарика радиуса r формула Стокса записывается в виде:

$$\boxed{F = 6\pi\,\eta\,r\,v},$$

Распределение скоростей в ламинарном потоке. Формула Пуазейля.

При движении вязкой жидкости по трубам малого диаметра (когда течение ламинарное, например, в капиллярах) скорость течения различна в различных местах сечения трубки. Возле стенок вследствие прилипания жидкости эта скорость равна нулю; вдоль оси трубки она имеет максимальное значение v_0. На рис. 55 показано распределение скоростей по диаметру трубки. Для нахождения этого распределения выделим элементарный полый цилиндр малой толщины Δr в текущей жидкости. Силы вязкости F_1 и F_2, действующие по внутренней и наружной поверхностям этого цилиндра, согласно формуле силы вязкости $F = \eta \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} S$, соответственно равны:

$$F_1 = \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_1 \cdot S_1 = \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot 2\pi r l \quad \text{и} \quad F_2 = \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_2 \cdot S_2 = \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_2 \cdot 2\pi(r+\Delta r)l\,.$$

Сила F_1 направлена по течению, так как скорость жидкости, движущейся внутри цилиндра, больше. Сила F_2 направлена против течения, так как рассматриваемый цилиндр движется быстрее, чем соприкасающиеся с ним слои жидкости, расположенные ближе к стенкам трубки. Разность этих сил $\Delta F = F_2 - F_1$ направлена против течения и должна преодолеваться теми внешними силами, которые вызывают движение жидкости. Для расчета ΔF предварительно найдем связь между градиентами скорости на наружной и внутренней поверхности цилиндра:

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_2 - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\Delta r = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\Delta r \quad \text{или} \quad \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2}\Delta r\,.$$

Поэтому:

$$\Delta F = \eta\cdot 2\pi l\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} r + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\cdot\Delta r\,.$$

Если давления жидкости в сечениях А и В равны p_A и p_B, то разность «внешних» сил, действующих на рассматриваемый цилиндр, равна

$$\Delta F_{\text{внеш}} = (p_{\text{A}} - p_{\text{B}})\cdot 2\pi r\Delta r = \Delta p\cdot 2\pi r\Delta r\,.$$

При установившемся течении жидкости по трубке силы ΔF и $\Delta F_{\text{внеш}}$ скомпенсированы. Приравняв эти силы

$$\eta \cdot 2\pi l\left(\frac{d^2 v}{dr^2} r + \frac{dv}{dr}\right)\Delta r = -\Delta p \cdot 2\pi r \Delta r ,$$

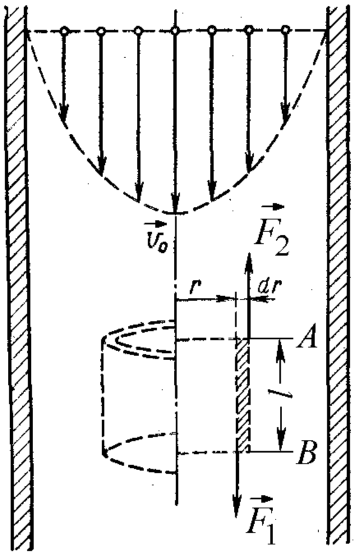


Рис. 55

получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{\Delta p}{\eta\, l} = 0 .$$

Это уравнение (с учетом того, что у стенок трубки $r = R$, $v = 0$, а на оси $r = 0$, $v = v_0$) имеет решение в виде (приводится без доказательства):

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

т.е. распределение скоростей течения вязкой жидкости в трубке малого радиуса является *параболическим.* У стенок трубы скорость равна нулю. При удалении от стенок трубы она постепенно увеличивается и на оси трубы достигает наибольшего значения (рис. 56).

При турбулентном течении из-за перемешивания жидкости происходит выравнивание средней скорости направленного движения. Скорость изменяется вблизи стенок трубы, а в остальной части остается постоянной (рис. 57).

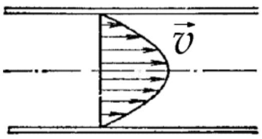


Рис. 56

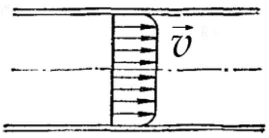


Рис. 57

Чтобы найти значение максимальной скорости v_0, вычислим dv/dr и d^2v/dr^2 и подставим их в дифференциальное уравнение. Имеем: $dv/dr = -2v_0 r/R^2$, $d^2v/dr^2 = -2v_0/R^2$, $-2v_0/R^2 - 2v_0/R^2 + \Delta p/\eta\, l = 0$ и, наконец, находим:

$$v_0 = \frac{\Delta p}{l}\frac{R^2}{4\eta},$$

где $\Delta p / l$ – перепад давления, приходящийся на единицу длины трубки. Если течение жидкости вызвано силой тяжести, то $\Delta p = \rho g l$ и тогда $v_0 = \rho g R^2 / 4\eta$.

Жидкость, содержащаяся в объеме рассматриваемого цилиндра, пройдет через некоторое сечение В за время $t = l/v$, следовательно, ежесекундный расход, приходящийся на долю этого цилиндрического кольца, будет равен $v \cdot 2\pi r dr$. Общий расход Q при ламинарном течении жидкости через сечение трубки в единицу времени (дебет, м^3/с) равен:

$$Q = \int_0^R v \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi\, v_0 \frac{R^2}{4} = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}.$$

Это есть формула *Пуазейля*, которая используется для экспериментального определения коэффициента вязкости жидкости. Для вертикальной трубы, если перепад давления обусловлен только силой тяжести, то

$$Q = \rho g(\pi R^4/8\eta) \text{ и } \eta = \rho g(\pi R^4/8Q).$$

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.

Общие положения.

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т.п. В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания: механические, электромагнитные, электромеханические и т.д. В зависимости от характера воздействия, оказываемого на колеблющуюся систему, различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или **собственными** называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник). Для того чтобы вызвать колебания, можно либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его. Свободные колебания – всегда затухающие. Затухающими называются колебания, для которых амплитуда колебаний и, следовательно, энергия уменьшаются со временем. Затухание свободных колебаний механической системы происходит по причине рассеяния энергии под воздействием сил трения (не потенциальных сил сопротивления).

Вынужденными колебаниями называются такие колебания, которые происходят под действием внешней периодической силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины.

При **параметрических** колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Колебания являются периодическими, если колеблющаяся величина повторяется через равные промежутки времени. Наименьший временной интервал повторения физических величин, характеризующих колебательное движение, называется **периодом** колебаний *T*. Период равен длительности одного полного колебания. Частотой периодических колебаний ν называется число полных колебаний, происходящих в единицу времени (1 с): $\nu = 1/T$.

Простейшими являются гармонические колебания, т.е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника) изменяется со временем по закону синуса или косинуса. Этот вид колебаний особенно важен по следующим причинам. Во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим. Во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Рассмотрим систему, состоящую из шарика массы m, подвешенного на пружине (рис. 58). В состоянии равновесия сила mg уравновешивается упругой силой $F_e^{(равн)} = k \cdot \Delta l_0$. Будем характеризовать смещение шарика из положения равновесия координатой x, причем ось x направим по вертикали вниз, а нуль оси совместим с положением равновесия шарика. Если сместить шарик от положения равновесия на расстояние, равное x (x – алгебраическая величина), то удлинение пружины станет равным $\Delta l_0 + x$ и проекция результирующей силы $F_р$ на ось x примет значение $F_р = mg - k \cdot (\Delta l_0 + x)$.

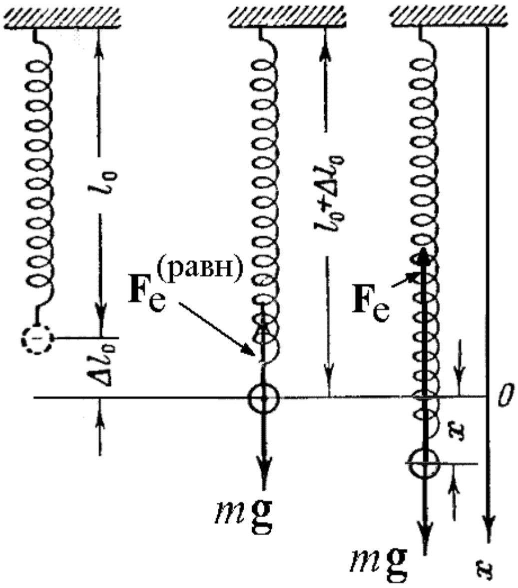


Рис. 58

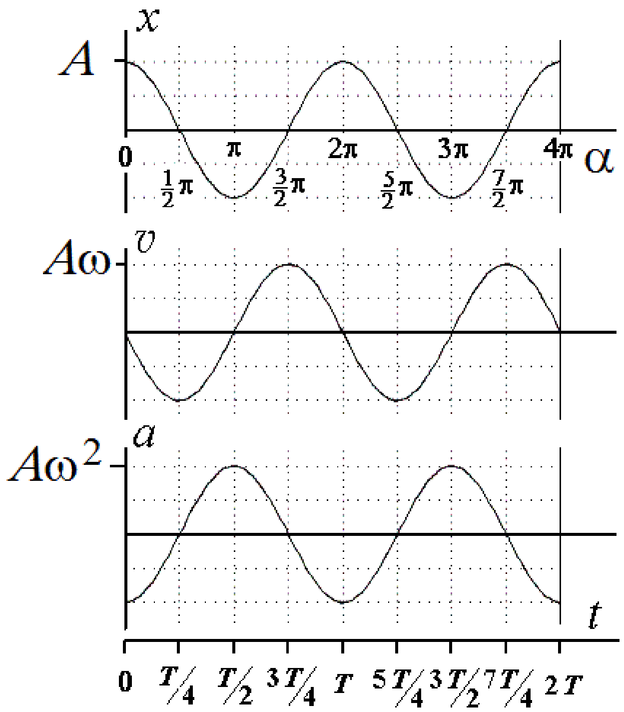


Рис. 59

Принимая во внимание условие равновесия $mg = k \cdot \Delta l_0$, получим, что $F_р = -kx$. Знак «–» отражает то обстоятельство, что смещение и сила имеют противоположные направления: если шарик смещен из положения равновесия вниз ($x > 0$), сила направлена вверх ($F_р < 0$), при смещении шарика вверх ($x < 0$) сила направлена вниз ($F_р > 0$). Таким образом, сила $F_р$ обладает следующими свойствами: 1) она пропорциональна смещению шарика из положения равновесия, 2) она всегда направлена к положению равновесия. В рассмотренном нами примере сила $F_р$, в сущности, по своей природе упругая. Может случиться, что сила иного происхождения обнаруживает такую же закономерность, т. е. оказывается равной $-kx$, где k – положительная постоянная величина. Силы такого вида, независимо от их природы, принято называть **квазиупругими**.

Кинематика гармонических колебаний.

Гармонические (синусоидальные) колебания описываются формулами:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \alpha_0).$$

При механических колебаниях величина x обычно используется для обозначения смещения м.т. из положения равновесия (координаты). Коэффициент A, величина наибольшего абсолютного значения смещения x, называется **амплитудой** колебаний ($A > 0$). Выражением $\alpha = (\omega t + \alpha_0)$ определяется состояние колеблющейся системы, т.е. **фаза** колебаний. В начальный момент времени ($t = 0$) фаза равна **начальной фазе** α_0. По истечении времени, равного периоду T, фаза колебаний увеличивается на 2π. Величина ω называется **угловой частотой** или **пульсацией** ($\omega > 0$). Она связана с T и ν соотношениями: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ и $\omega = 2\pi\nu$. Скорость v и ускорение a находятся дифференцированием смещения x по времени:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0),$$

$$v = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha_0) = A\omega\cos(\omega t + \alpha_0 + \pi/2) = v_0\cos(\omega t + \alpha_0 + \pi/2),$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \alpha_0 + \pi) = a_0\cos(\omega t + \alpha_0 + \pi),$$

где приняты подстановки $A\omega = v_0$ и $A\omega^2 = a_0$.

Скорость v и ускорение a изменяются во времени (как и смещение x) по гармоническому закону, однако начальные фазы отличаются на $\pi/2$ и π, соответственно (рис. 59). Говорят, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, а ускорение колеблется в противофазе по отношению к координате. Значения амплитуды и начальной фазы могут быть определены, если известны смещение и скорость в некоторый момент времени t_0, например, $t_0 = 0$: $x(t = 0) = A\cos\alpha_0$, $v(t = 0) = -A\omega\sin\alpha_0$. Решая эти два уравнения совместно, получим:

$$A = \sqrt{[x(t=0)]^2 + \frac{[v(t=0)]^2}{\omega^2}} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,\alpha_0 = -\frac{v(t=0)}{\omega\, x(t=0)}.$$

Сложение двух параллельных гармонических колебаний. Биения.

А. *Частоты колебаний одинаковые*. Для наглядности гармонические колебания удобно представить с помощью вращающегося на плоскости вектора амплитуды колеблющейся величины (рис. 60). Пусть вектор **А**, численно равный амплитуде колебаний, вращается равномерно против часовой стрелки с угловой скоростью ω около покоящейся оси 0. Если бы в момент $t = 0$ вектор **A** составлял угол α_0 с направлением 0*x*, то проекция B конца этого вектора на 0*x*-направление совершала бы гармонические колебания по закону: $x = A\cos(\omega t + \alpha_0)$. Полученная таким способом схема называется **векторной диаграммой**. Следовательно, проекция конца вектора на ось 0*x* будет совершать гармоническое колебание с амплитудой *A*, равной длине вектора **A**, угловой частотой, равной угловой скорости ω вращения вектора, и начальной фазой, равной углу α_0, который образует вектор **A** с осью 0*x* в начальный момент времени $t = 0$.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний м.т. одинакового направления и одинаковой частоты (рис. 61). Смещение *x* является суммой смещений x_1 и x_2:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

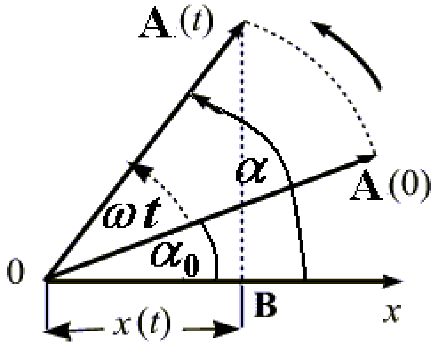


Рис. 60

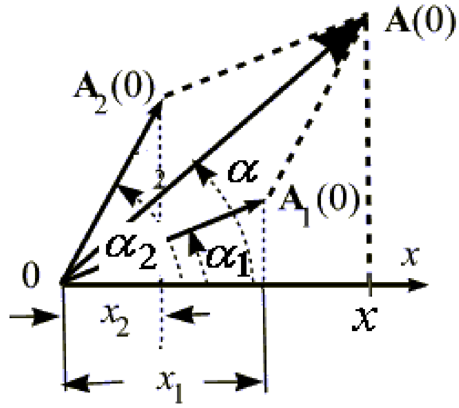


Рис. 61

Представим оба колебания с помощью векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ для начального момента $t = 0$. Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$. С течением времени все три вектора **A**, $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ вращаются с одной и той же угловой скоростью ω, так что их взаимное положение не зависит от времени. Проекция этого вектора на ось 0*x* равна сумме проекций слагаемых векторов:

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор **A** представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω, как и векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с угловой частотой ω, амплитудой *A* и начальной фазой α. Из построения видно, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Итак, векторное представление гармонических колебаний позволяет нам алгебраическое сложение уравнений колебаний свести к геометрической операции сложения векторов.

Частные случаи.

1. Начальные фазы совпадают – синфазные колебания: $\alpha_1 = \alpha_2$. Результирующая амплитуда имеет максимальное значение: $A = A_1 + A_2$.
2. Начальные фазы колебаний находятся в противофазе: $\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi$. Результирующая амплитуда имеет минимальное значение: $A = |A_1 - A_2|$.
3. Остальные варианты: $0 < |\alpha_1 - \alpha_2| < \pi$. Результирующая амплитуда имеет значения: $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$.

Б. *Частоты колебаний – различные*. При сложении двух (и более) гармонических колебаний с различными частотами

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

результирующее колебание $x = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$ не является гармоническим колебанием.

В. *Частоты колебаний – близкие*. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми, $A_1 = A_2 = A$. Поскольку частоты колебаний несколько отличны: $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$, всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда уравнения обоих колебаний удобно представить в следующем виде:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \alpha_1) = A\cos(\omega \cdot t) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) = A\cos(\omega + \Delta\omega)\cdot t,$$

причем $\Delta\omega << \omega$. Складывая эти два выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получим:

$$x = A\cdot[\cos\omega\cdot t + \cos(\omega + \Delta\omega)\cdot t] = 2A\cdot\cos[(½\Delta\omega)\cdot t]\cdot\cos[(\omega + ½\Delta\omega)\cdot t] \approx$$
$$\approx 2A\cdot\cos(\Delta\omega\cdot t/2)\cdot\cos(\omega\cdot t).$$

Результирующее движение при этих условиях – негармоническое. Его можно рассматривать как гармоническое колебание с пульсирующей амплитудой. Такие колебания называются **биениями**. Если допустить, что множитель $\cos(\omega t)$ совершает несколько полных колебаний за некоторое время, то множитель $\cos(\Delta\omega\cdot t/2)$, ввиду условия $\Delta\omega << \omega$, изменится незначительно. На этом основании можно считать, что результирующее колебание – это гармоническое колебание частоты ω с амплитудой, изменяющейся по периодическому закону.

Аналитическое выражение амплитуды $A(t) = |A(t)| = 2A\cdot\cos|[(½\Delta\omega)\cdot t]|$ является периодической, негармонической функцией (рис. 63) с угловой частотой колебаний ω_A, превышающей частоту $(½\Delta\omega)$ в 2 раза. Таким образом, частота пульсаций амплитуды $\omega_A = 2\cdot|½\Delta\omega| = |\Delta\omega|$ равна модулю разности частот складываемых колебаний $|\Delta\omega| = |\omega_1 - \omega_2|$. Период $T_Б$ и частота $\nu_Б$ биений соответственно равны:

$$T_Б = 2\pi / |\Delta\omega| \quad \text{и} \quad \nu_Б = |\Delta\omega| / 2\pi.$$

На практике часто применяются так называемые **нулевые биения**, которые наблюдаются при равенстве частот складываемых колебаний. Для получения нулевых биений источники колебаний должны быть независимыми. В этом случае огибающая амплитуд будет представлена горизонтальной линией, медленно смещающейся по вертикали вверх и вниз.

При сложении двух колебаний с близкими частотами и различными амплитудами результирующее движение также представляет собой биения (рис. 64), но амплитуда биений не спадает до нуля, а колеблется между значениями:

$$|A_1 - A_2| \le A \le (A_1 + A_2).$$

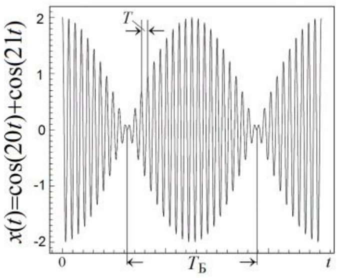


Рис. 62

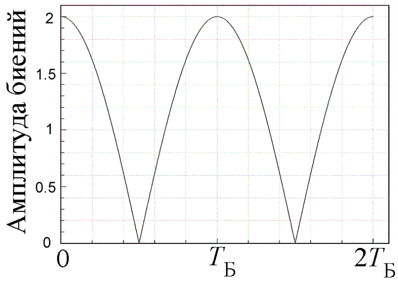


Рис. 63

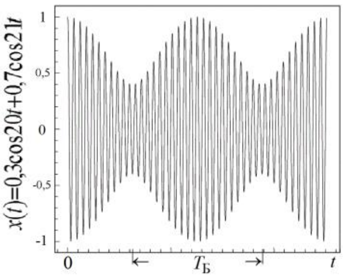


Рис. 64

Понятие о гармоническом анализе.

Сложное периодическое, негармоническое колебание физической величины S может быть представлено в виде ряда Фурье, составленного из простых гармонических колебаний, частоты которых являются кратными целым числам основной гармоники $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \alpha_n),$$

где
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \alpha_n = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{b_n}.$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются при помощи формул Эйлера-Фурье:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\cdot\cos n\omega t\cdot \mathrm{d}t \;\text{ и }\; b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\cdot\sin n\omega t\cdot \mathrm{d}t, \; (n = 1, 2, \ldots)$$

Отыскание ряда Фурье, соответствующего сложному колебанию, называется **гармоническим анализом**. Члены этого ряда, частоты которых равны ω, 2ω, 3ω и т.д., соответственно называются первая, вторая, третья и т.д. фундаментальными гармониками сложного колебания.

Колебания, происходящие по закону: $\boxed{x = A(t)\cdot\cos[\omega(t)\cdot t + \alpha(t)]}$, называются модулированными колебаниями, если выполнены условия: $\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right| << \omega A_{\max}$ и $\left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right| << \omega$.

Для амплитудно-модулированных колебаний $A \neq \text{Const}$, для фазовой модуляции $\alpha \neq \text{Const}$ и частотной модуляции $\omega \neq \text{Const}$. Примером амплитудно-модулированных колебаний являются биения, для которых амплитуда $A(t)$ является периодической функцией времени.

Сложение взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний.

Перейдем к сложению двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одной и той же частоты ω, совершающихся вдоль координатных осей x и y. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \cos (\omega t + \alpha),$$

где α – разность фаз колебаний. Эти выражения представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений параметр t. Из первого уравнения следует, что $\cos \omega t = x/a$ и $\sin \omega t = (1 - x^2/a^2)^{1/2}$. Преобразуем второе уравнение:

$$y/b = \cos (\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos\alpha - \sin \omega t \sin\alpha = (x/a) \cos\alpha - (1 - x^2/a^2)^{1/2} \sin\alpha ,$$

$$y/b - (x/a) \cos \alpha = - (1 - x^2/a^2)^{1/2} \sin \alpha ,$$

$$(y/b)^2 + (x/a)^2 \cos^2 \alpha - 2 (xy /ab) \cos \alpha = (1 - x^2/a^2) \sin^2 \alpha.$$

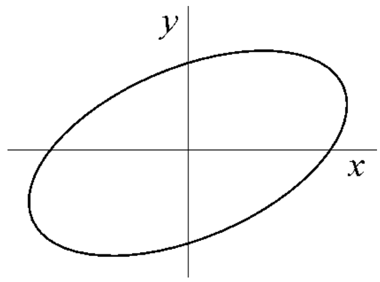


Рис. 65

И, наконец, получаем выражение

$$\boxed{(x/a)^2 + (y/b)^2 - 2 (xy /ab) \cos \alpha = \sin^2 \alpha},$$

которое представляет собой уравнение эллипса (рис. 65). Ориентация эллипса и величина его полуосей зависят от амплитуд a и b и разности фаз α.

<u>Частные случаи.</u>

1. Разность фаз α равна нулю. В этом случае уравнение траектории принимает вид:

$$(y/b - x/a)^2 = 0, \text{ или } y = (b/a)\,x.$$

Получили уравнение прямой. Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой, причем расстояние ее от начала координат равно $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Подставляя сюда выражения $x = a \cos \omega t$ и $y = b \cos (\omega t + \alpha)$ и учитывая, что $\alpha = 0$, получим формулу зависимости координаты r от времени t:

$$r = (a^2 + b^2)^{1/2} \cos(\omega t).$$

Результирующее движение (рис. 66) называется линейно поляризованным гармоническим колебанием вдоль прямой линии с угловой частотой ω и амплитудой $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$.

2. Разность фаз α равна $\pm\pi$. Результирующее движение (рис. 67) представляет собой также линейно поляризованное гармоническое колебание с угловой частотой ω и амплитудой $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$ с отличающимся наклоном прямой линии $y = -(b/a)\,x$.

3. При $\alpha = \pm\pi/2$ колебания – эллиптически поляризованные, и траекторией результирующего движения является эллипс $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний a и b (рис. 68). При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Случаи $\alpha = +\pi/2$ и $\alpha = -\pi/2$ отличаются направлением движения. Если $\alpha = +\pi/2$, движение совершается по часовой стрелке – правая поляризация. При $\alpha = -\pi/2$ движение происходит против часовой стрелки – левая поляризация. Из сказанного следует, что движение по эллипсу (окружности) может быть представлено в виде суммы двух взаимно перпендикулярных колебаний, происходящих на одной частоте ω.

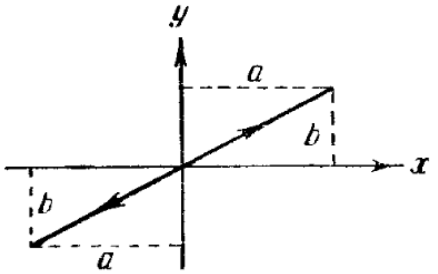


Рис. 66

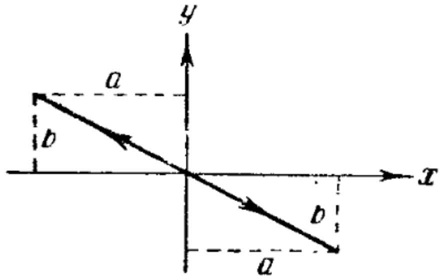


Рис. 67

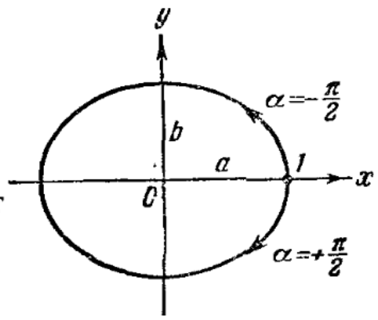


Рис. 68

Когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину $\Delta\omega$, уравнения колебаний можно представить следующим образом:

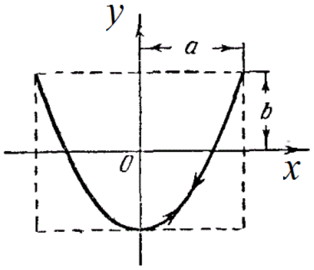
$$x = a\cos\omega t \quad \text{и} \quad y = b\cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)],$$

причем выражение $(\Delta\omega t+\alpha)$ рассматривается как разность фаз, медленно изменяющаяся со временем по линейному закону. Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая будет последовательно принимать форму эллипса или прямой линии, отвечающую всем значениям разности фаз.

Фигуры Лиссажу.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются, то траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, форма которых непрерывно меняется. Устойчивые во времени картины, которые называются фигурами Лиссажу, наблюдаются при условии постоянства амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. Па рисунках 69 и

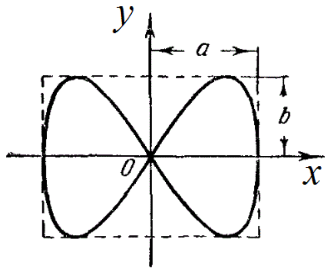
70 показаны простейшие траектории, наблюдаемые при отношении частот 1:2 и разности фаз 0 и π/2, соответственно.



$x = a\cos\omega t$

$y = b\cos 2\omega t$

Рис. 69



$x = a\cos\omega t$

$y = b\cos(2\omega t + \pi//2)$

Рис. 70

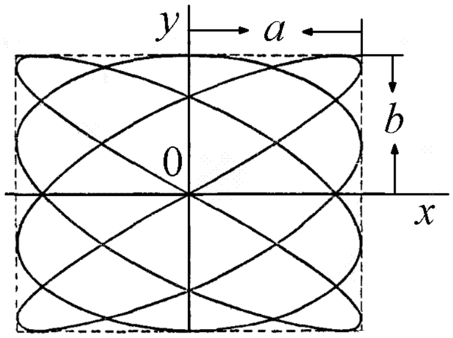


Рис. 71

Чем ближе к единице рациональная дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу. На рис. 71 показана кривая для отношения частот 4:3 и разности фаз π/2.

Динамика колебаний.

Любое колебание есть движение, происходящее с ускорением, поэтому на колеблющееся тело должна действовать сила, сообщающая ему это ускорение. Направление силы совпадает с направлением ускорения, а вектор ускорения при гармонических колебаниях согласно формуле:

$$a = \ddot{x} = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t + \alpha_0) = -\omega^2\cdot x$$

всегда направлен к положению равновесия. Таким образом, *для того, чтобы тело совершало гармоническое колебательное движение, на него должна действовать сила, всегда направленная к положению равновесия и по величине – прямо пропорциональная смещению от этого положения.* Силы, направленные всегда к положению равновесия, называются *возвращающими.*

Свободные колебания под действием квазиупругой силы.

Рассмотрение динамики свободного колебательного движения механической системы проведем на примере малых колебаний м.т., на которую действуют две силы: сила упругости $F_e = -k\cdot x$ и сила сопротивления вязкой среды $F_r = -r\cdot v = -r\cdot\dot{x}$, где $k > 0$ и $r > 0$. Реально такие колебания можно наблюдать на примере пружинного маятника – механической системы, состоящей из массивного тела, подвешенного посредством упругой и невесомой пружины к горизонтальной перекладине. Возвращающей силой является упругая сила F_e, действующая на тело со стороны деформированной пружины. Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx\,,$$

а **дифференциальное уравнение** малых затухающих колебаний для удобства записывается в форме:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

где $\beta = r/2m$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – **собственная** угловая **частота** колебаний системы и m – масса колеблющейся системы. Уравнение движения упрощается при отсутствии затухания (β=0) к виду:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0,$$

которое называется **уравнением собственных незатухающих колебаний**.

Одним из решений этого дифференциального уравнения является уравнение гармонических колебаний:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0).$$

Чтобы убедиться в этом, найдем вторую производную по времени от x: $\ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x$. Подставив этот результат в уравнение движения, получим тождество 0 = 0, ч.т.д.

Период упругих колебаний равен:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi / \sqrt{k/m} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

С увеличением массы возрастает инерционность колеблющейся системы, поэтому ее движение замедляется, и период колебаний увеличивается.

Энергия колебаний. В колеблющейся системе протекает непрерывно процесс взаимного превращения кинетической и потенциальной энергии. Полная энергия W незатухающих колебаний механической системы пропорциональна квадрату амплитуды колебаний A^2 и не изменяется со временем, хотя отдельные ее виды – кинетическая $W_К = mv^2/2$ и потенциальная $W_П = kx^2/2$ – претерпевают изменения, дважды достигая за период колебаний максимальных значений. Мгновенные значения энергий – положительные. Они соответственно равны:

$$W_К = m\,v^2/2 = m\,[A\omega_0 \sin(\omega_0 t+\alpha_0)]^2/2 = m\omega_0^2\, A^2\sin^2(\omega_0 t+\alpha_0)\,/2$$

и

$$W_П = k\,x^2/2 = k\,[A\cos(\omega_0 t+\alpha_0)]^2/2 = k\,A^2\cos^2(\omega_0 t+\alpha_0)\,/2.$$

Кинетическая энергия достигает своего максимума

$$W_К^{(\max)} = m\omega_0^2 A^2$$

в моменты времени, когда фаза колебаний принимает значения $\alpha = \pi/2 \pm n\,\pi$, где n – целое число. Потенциальная энергия достигает своего максимума

$$W_П^{(\max)} = k\,A^2$$

в моменты времени, когда фаза колебаний принимает значения $\alpha = \pm\, n\,\pi$, где n – целое число. Полная энергия имеет постоянное значение, равное:

$$W = W_К + W_П = ½\, m\,\omega_0^2\, A^2\sin^2(\omega_0 t+\alpha_0) + ½\, k\,A^2\cos^2(\omega_0 t+\alpha_0) =$$

$$= \boxed{W_К^{(\max)} = W_П^{(\max)} = m\,\omega_0^2 A^2 = k\,A^2}.$$

Математический маятник.

Математический маятник представляет собой точечное тело массы *m,* подвешенное к невесомой и нерастяжимой нити длиной l (рис. 72). Возвращающей силой является $\mathbf{F}_\tau$, проекция силы тяжести $\mathbf{F}_{тяж} = m\cdot\mathbf{g}$ на направление движения тела. В качестве колебательного процесса здесь выступают вращательные качания (колебания) радиус-вектора $\vec{l}$, проведенного от точки подвеса нити к м.т. Применим основной закон динамики вращательного движения к рассматриваемому радиус-вектору $\vec{l}$:

$$\vec{\beta} = \ddot{\vec{\varphi}} = \vec{M} / I = [\vec{l}, \vec{F}_{тяж}] / I ,$$

или в проекции на ось вращательных колебаний, совпадающую по направлению с вектором углового смещения (угла поворота) $\vec{\varphi}$:

$$\beta = -\, l\, F_{тяж} \sin\varphi \,/\, I = -\, l\, mg \sin\varphi \,/\, ml^2 = -\,(g/l)\sin\varphi ,$$

где появляется знак "–", так как момент силы $\vec{M} = [\vec{l}, \vec{F}_{тяж}]$ и угловое ускорение $\vec{\beta} = \ddot{\vec{\varphi}}$ всегда направлены против углового смещения $\vec{\varphi}$. В режиме малых колебаний ($\varphi \le 5°$) справедливо приближение $\sin\varphi \approx \varphi$. Если теперь заменим g/l на ω_0^2, то получим дифференциальное уравнение собственных незатухающих колебаний ориентации радиус-вектора $\vec{l}$ в вертикальной плоскости:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 ,$$

решением которого является, например, функция:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

которая называется формулой гармонических колебаний. φ_0 – амплитуда углового смещения. Угловая частота и период собственных колебаний могут быть вычислены соответственно по формулам:

$$\omega_0 = \sqrt{g/l} \quad \text{и} \quad T_0 = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g} ,$$

т.е. частота и период колебаний не зависят от массы колеблющегося тела. Они зависят только от длины нити и ускорения силы тяжести.

Математический маятник используется для демонстрации суточного вращения Земли (маятник Фуко) и в лабораторном практикуме для определения ускорения силы тяжести.

Физический маятник.

Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции (рис. 73*а*). В положении равновесия центр инерции С находится под точкой подвеса 0 маятника на одной с ней вертикали. При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент сил, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент равен

$$M = -\, mgl \sin\varphi,$$

где m – масса маятника, а l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника. Знак "минус" означает, что момент сил направлен против углового смещения. Уравнение вращательной динамики принимает вид:

$$\beta = M / I = -\,(mgl / I)\sin\varphi,$$

где I – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса. В случае малых колебаний ($\varphi \leq 5°$) это уравнение переходит в дифференциальное уравнение собственных незатухающих колебаний

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

решением которого является функция:

$$\varphi = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где ω_0 – угловая частота колебаний: $\omega_0 = (mgl / I)^{1/2}$.

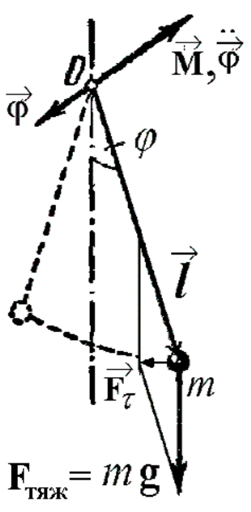


Рис. 72

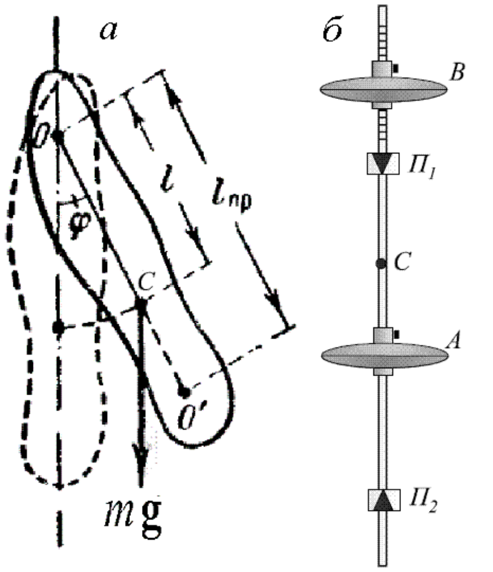


Рис. 73

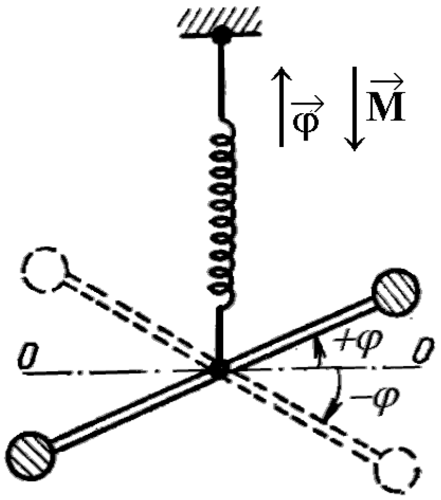


Рис. 74

Таким образом, при малых отклонениях от положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания, угловая частота ω_0 которых зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния между осью вращения и центром инерции маятника. Период колебаний физического маятника определяется выражением:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{I/mgl}\,.$$

Из сопоставления формул $T_0 = 2\pi\sqrt{I/mgb}$ и $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ следует, что математический маятник с длиной $l_{пр} = (I/ml)$ имеет такой же период колебаний, как и данный физический маятник. Величину $l_{пр} = (I/ml)$ называют **приведенной длиной** физического маятника. Итак, *приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого* *совпадает с периодом данного физического маятника*. Точка 0' на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качания физического маятника. По теореме Штейнера момент инерции маятника I может быть представлен в виде

$$I = I_0 + ml^2,$$

где I_0 – момент инерции относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр инерции маятника.

Подставив $I = I_0 + ml^2$ в $l_{пр} = (I/ml)$, получаем: $l_{пр} = (I_0/ml) + l$, откуда следует, что приведенная длина $l_{пр}$ всегда больше длины l, так что точка подвеса 0 и центр качания 0' лежат по разные стороны от центра инерции С (центра масс). Подвесим маятник в центре качания 0'. Приведенная длина в этом случае будет равна: $l_{пр}' = (I_0/ml') + l'$, где l' – расстояние между первоначальным центром качания и центром инерции маятника. Учитывая, что $l' = l_{пр} - l$, имеем:

$$l_{пр}' = I_0/m(l_{пр} - l) + l_{пр} - l = l_{пр} + [(I_0 + ml^2) - ml_{пр}l]\,/m(l_{пр} - l).$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю, поскольку $I_0 + ml^2 = I$ – это момент инерции относительно первоначальной оси вращения. Этой же величине равно выражение $ml_{пр}l$. Итак, получается, что при подвешивании маятника в центре качания приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и вначале. Следовательно, точка подвеса 0 и центр качания 0' обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

На свойстве взаимности основано определение ускорения силы тяжести с помощью так называемого оборотного маятника (рис. 73*б*). Оборотным называется такой маятник, у которого имеются две параллельные друг другу, закрепленные вблизи его концов опорные призмы $П_1$ и $П_2$, за которые он может поочередно подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжёлые грузы – чечевицы A и B. Перемещением чечевиц добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно $l_{пр}$. Измерив период колебаний маятника T_0 и определив $l_{пр}$, при помощи формулы $T_0 = 2\pi\sqrt{l_{пр}/g}$, можно найти ускорение силы тяжести g:

$$\boxed{g = \left(2\pi/T_0\right)^2 l_{пр}}.$$

Крутильный маятник.

При крутильных колебаниях на тело действует *возвращающий момент силы,* приостанавливающий отклонение тела от состояния равновесия и затем сообщающий ему обратное движение (рис. 74). Возвращающий момент возникает при деформации кручения пружины или упругой нити, к которой прикреплено колеблющееся тело. При малых углах отклонения этот момент M

прямо пропорционален углу отклонения φ: $M = -D\varphi$, где D – модуль кручения.

Если крутильные колебания гармонические, т.е. $\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \omega_0 t$, то угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ при повороте также изменяется по гармоническому закону:

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi_0 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 \varphi .$$

Значение возвращающего момента найдем также при помощи уравнения вращательной динамики как произведение углового ускорения на момент инерции колеблющегося тела: $M = I\,\ddot{\varphi} = -I\omega_0^2 \varphi_0 \cos \omega_0 t = -I\omega_0^2 \varphi$. Приравнивая два полученных выражения возвращающего момента $M = -D\varphi$ и $M = -I\omega_0^2 \varphi$, получим формулу связи модуля кручения с моментом инерции и собственной частотой колебаний крутильного маятника: $D = I\omega_0^2$. Тогда частота и период колебаний, будучи функциями модуля кручения и момента инерции, определяются по формулам:

$$\omega_0 = \sqrt{D/I} \quad \text{и} \quad T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/D} .$$

Крутильный маятник применяется в лабораторном практикуме для экспериментального определения собственного момента инерции тел произвольной формы и скорости полета пули.

Затухающие колебания.

Если на колеблющееся тело действует сила трения, то энергия системы, амплитуда смещения и амплитуда скорости не остаются постоянными, а убывают, энергия расходуется на преодоление сил трения и превращается в тепло. Происходит затухание колебаний. Такие колебания не являются гармоническими, и дифференциальное уравнение движения, как это было показано в начале раздела, имеет вид:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} ,$$

где $\beta = r/2m$ – **коэффициент затухания**, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – **собственная частота** (угловая) колебаний системы при отсутствии затухания и m – масса колеблющейся системы. При условии, что затухание мало, $\beta << \omega_0$, этому уравнению в качестве решения удовлетворяет функция (рис. 75):

$$\boxed{x = A_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0)} ,$$

где e = 2,71 – основание натуральных логарифмов; A_0 и α_0 – постоянные величины, зависящие от начальных условий; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – угловая частота затухающих колебаний, которая всегда меньше собственной частоты ω_0.

Периодом затухающих колебаний принято называть время T, за которое система дважды проходит через среднее положение в одном и том же направлении, или время, за которое отклонение в одну и ту же сторону дважды достигает максимального значения. Силы трения замедляют движение системы. Поэтому период затухающих колебаний всегда несколько больше, чем период тех собственных колебаний, которые совершала бы система, если бы трение отсутствовало. При малом трении $\beta << \omega_0$ можно считать, что период затухающих колебаний $T = 2\pi/\omega$ практически равен периоду колебаний в отсутствии трения $T_0 = 2\pi/\omega_0$, и угловая частота затухающих колебаний $\omega = 2\pi/T$ совпадает с угловой частотой в отсутствии трения $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

Роль амплитуды колебаний в условно периодическом движении играет величина, которая убывает с течением времени по экспоненциальному закону:

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t} = A_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau_c}.$$

Коэффициентом затухания β определяется быстрота (скорость), с которой убывает амплитуда. Величина τ_c, обратная β, называется временем затухания или **временем релаксации**, $\tau_c = 1/\beta$. Время релаксации – это то время, в течение которого амплитуда уменьшается в e = 2,71 раз. В самом деле, при $t = \tau_c$ имеем

$$A(0)/A(\tau_c) = A_0/(A_0\mathrm{e}^{-1}) = \mathrm{e}.$$

Отношение амплитуд, соответствующих различным моментам времени, отличающимся на период, называется **декрементом затухания**:

$$D = A(t)/A(t+T) = A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}/A_0\,\mathrm{e}^{-\beta(t+T)} = \mathrm{e}^{\beta T}$$

Натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания**:

$$\vartheta = \ln D = \ln \mathrm{e}^{\beta T} = \beta T = T/\tau_c.$$

Показатель затухания β характеризует затухание колебаний за единицу времени, а логарифмический декремент – за период. Величина, обратная логарифмическому декременту затухания, равна числу колебаний N_e, совершающихся за время релаксации: $\vartheta^{-1} = \tau_c / T = N_e$, причем за это время τ_c амплитуда уменьшается в e раз. Для характеристики колебательной системы часто употребляется также величина

$$Q = \pi/\vartheta = \pi N_e,$$

называемая **добротностью** колебательной системы. Добротность пропорциональна **числу колебаний** N_e, совершаемых системой за время релаксации.

Параметры затухания β, τ_c, ϑ и Q связаны между собой взаимнооднозначными соотношениями, а именно:

$$\vartheta = \pi/Q = \beta T = T/\tau_c, \quad \beta = 1/\tau_c = \vartheta/T = \pi/QT,$$

$$\tau_c = 1/\beta = T/\vartheta = QT/\pi \quad \text{и} \quad Q = \pi/\vartheta = \pi/\beta T = \pi\tau_c/T.$$

Чем медленнее затухают колебания $T << \tau_c$, тем выше добротность контура. Добротность – это характеристика качества колеблющейся системы. Для справки, добротность электрического колебательного контура обычно не превышает значения 10^3, камертона составляет примерно 10^4, кристалла кварца может достигать значения 10^8, и наивысшей добротностью обладает резонатор лазера (10^{12} и выше).

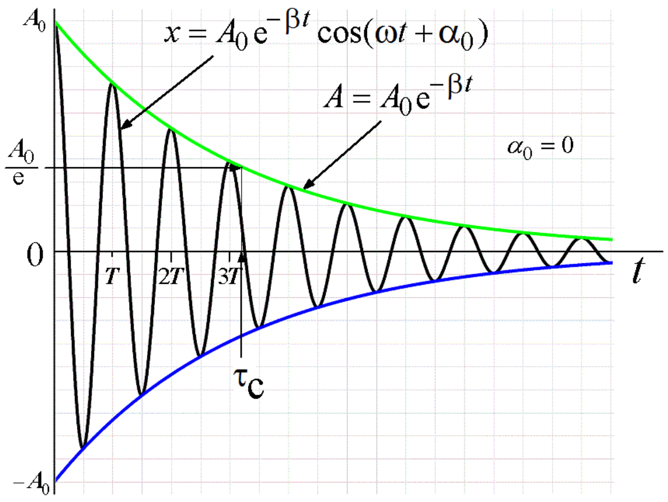


Рис. 75

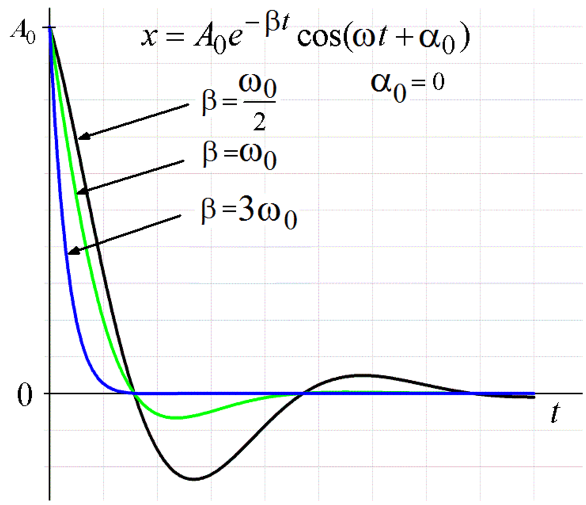


Рис. 76

Апериодическое движение.

Если затухание велико, $\beta \approx \omega_0$, физическая система, будучи выведена из равновесия, возвращается к нему, не совершая колебаний (рис. 76).

Вынужденные колебания. Резонанс.

Вынужденными колебаниями называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (мы будем называть ее вынуждающей силой). Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos(\omega t),$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы. С учетом вынуждающей силы, квазиупругой силы и силы сопротивления среды уравнение движения (неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка) запишется следующим образом:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t},$$

где $f_0 = F_0/m$. Остальные обозначения даны в предшествующих разделах.

Общее решение этого неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x = A_0' e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha_0') + A\cos(\omega t - \alpha_0)\,,$$

где $$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{и} \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

Оно описывает поведение системы при вынужденных колебаниях (рис 77). Первое слагаемое играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом переходном процессе установления колебаний. Со временем из-за экспоненциального затухания $e^{-\beta t}$ его роль уменьшается, и по истечении достаточно большого промежутка времени ($t > 5\tau_c$) им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь второе слагаемое. Поэтому установление значений величин A_0', ω' и α' не входит в рамки данного рассмотрения. Таким образом, установившиеся вынужденные колебания описываются функцией:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Вынужденные колебания – гармонические с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда пропорциональна амплитуде вынуждающей силы и для данной колебательной системы (ω_0 и β заданы) зависит от частоты. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания α_0 также зависит от частоты вынуждающей силы.

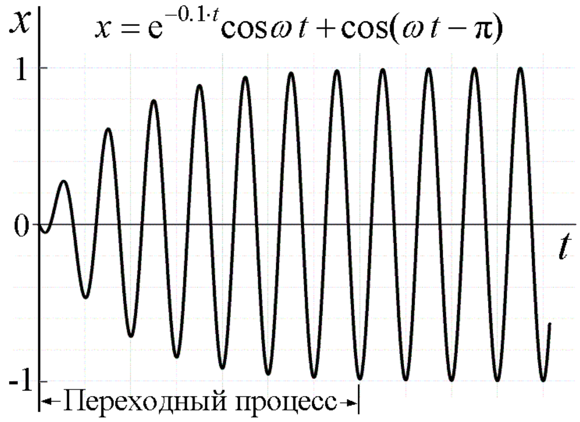


Рис. 77

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно чувствительной на действие вынуждающей силы в окрестности этой частоты. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота – резонансной частотой.

Чтобы определить резонансную частоту $\omega_{рез}$, приравняем нулю производную по ω от знаменателя в выражении для амплитуды, и мы получим:

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot(-2\omega) + 4\cdot 2\beta^2\omega = 0,$$

или $$(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot\omega - 2\beta^2\omega = 0.$$

Исключив непригодные в качестве решения варианты с $\omega \le 0$, получим значение резонансной частоты:

$$\omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\,.$$

Подставив этот результат в формулу $A = f_0 \Big/ \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$, получим резонансное значение амплитуды:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}}.$$

Отсюда следует, что при отсутствии сопротивления среды ($\beta = 0$) амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность, и резонансная частота при тех же условиях совпала бы с собственной частотой колебаний системы ω_0. Однако реально такое условие не осуществимо – трение существует всегда в рамках применимости законов классической физики. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (частоты колебаний), представленная графически, называется резонансной кривой (рис. 78). Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания β. Чем меньше β, тем выше и правее лежит максимум данной кривой. При очень большом затухании ($2\beta > \omega_0$) выражение для резонансной частоты становится мнимым. Это означает, что при этих условиях резонанс не наблюдается, и с увеличением частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает (см. нижнюю кривую на рис. 78).

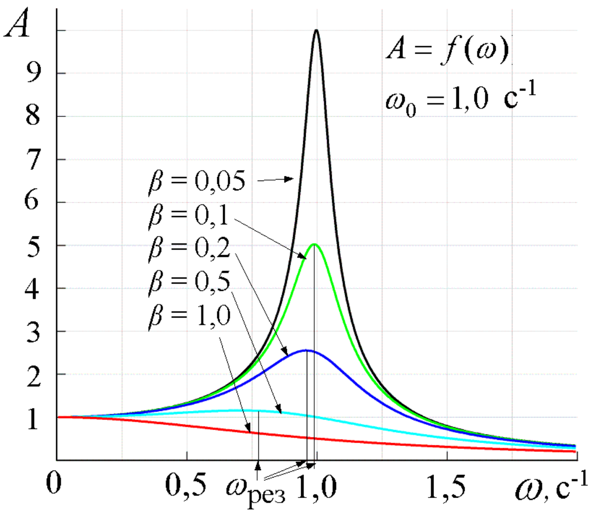


Рис. 78

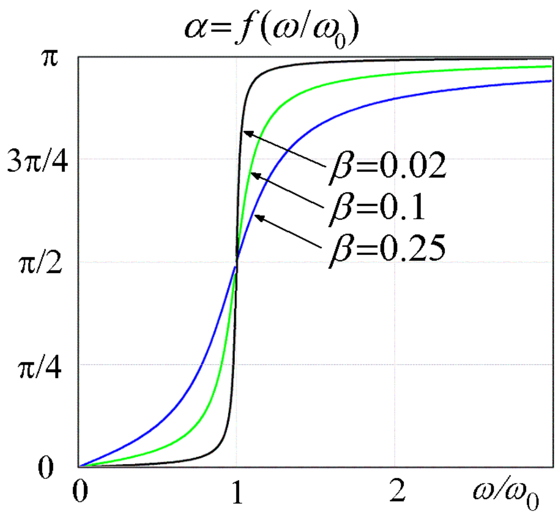


Рис. 79

<u>Дополнительные замечания</u>. При стремлении ω к нулю все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению, равному $x_0 = f_0/\omega_0^2 = F_0/k$. Это значение представляет собой смещение из положения равновесия, которое получает система под действием постоянной силы F_0. При стремлении ω к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что вследствие инерционности система не успевает заметно сместиться из положения равновесия. Наконец, отметим, что чем меньше β, тем сильнее изменяется с частотой амплитуда вблизи резонанса и «острее» становится максимум.

Из формулы $A_{рез} = f_0 \Big/ \left[2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)} \right]$ следует, что при малом затухании ($\beta << \omega_0$) амплитуда при резонансе приближенно равна $A_{рез} \approx f_0/(2\beta\omega_0)$. Разделим это выражение на смещение из положения равновесия $x_0 = f_0/\omega_0^2$ под действием постоянной силы F_0. В результате получим:

$$\frac{A_{рез}}{x_0} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0} : \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \pi\frac{1}{\beta T} = \pi\frac{\tau_c}{T} = \pi N_e = Q\,.$$

Таким образом, добротность Q при малом затухании показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса ($A_{рез}$) превышает смещение системы из положения равновесия ($x_0 = f_0/\omega_0^2 = F_0/k$) под действием постоянной силы, равной амплитуде вынуждающей силы (F_0).

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания лежит в пределах $0 \le \alpha \le \pi$. Зависимость α от ω при разных значениях β показана графически на рис. 79. Резонансная частота меньше собственной. Частоте $\omega = \omega_0$ соответствует $\alpha = \pi/2$. Следовательно, в момент резонанса $\alpha < \pi/2$. Так как при слабом затухании $\omega_{рез} \approx \omega_0$, то значение α при резонансе можно считать равным $\pi/2$.

С явлением резонанса приходится считаться при конструировании машин и различного рода сооружений. *Собственная частота* колебаний этих устройств ни в коем случае *не должна быть близка к частоте возможных внешних воздействий*. Так, например, собственная частота вибраций корпуса корабля или крыльев самолета должна сильно отличаться от частоты колебаний, которые могут быть возбуждены вращением гребного винта или пропеллера. В противном случае возникают вибрации, которые могут вызвать катастрофу. Известны случаи, когда обрушивались мосты при прохождении по ним марширующих колонн солдат. Это происходило потому, что собственная частота колебаний моста оказывалась близкой к частоте шага колонны. Вместе с тем, явление резонанса часто оказывается весьма полезным, особенно в акустике, радиотехнике, медицине и т.д.

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОСНОВЫ АКУСТИКИ.

Образование и распространение волн в упругой среде.

Если колеблющееся тело (камертон, струна, мембрана и т. д.) находится в упругой среде, то оно приводит в колебательное движение соприкасающиеся с ним частицы среды. Вследствие этого в прилегающих к телу элементах среды возникают периодические деформации (например, сжатия и растяжения). При этих деформациях в среде появляются упругие силы, стремящиеся вернуть элементы среды к первоначальным состояниям равновесия. Благодаря взаимодействию соседних элементов среды упругие деформации будут передаваться от одних участков среды к другим, более удаленным от колеблющегося тела с некоторой скоростью, зависящей от ее физических свойств. Вместе с тем, положения равновесия частиц среды не перемещаются, и от одних участков среды к другим передается только состояние деформации.

Процесс распространения возмущения и, в частности, колебательного движения в среде называется *волновым процессом* или просто *волной*. В зависимости от характера возникающих при этом упругих деформаций различают волны *продольные* и *поперечные.* В продольных волнах частицы среды колеблются вдоль линии, совпадающей с направлением распространения колебаний. В поперечных волнах частицы среды колеблются перпендикулярно направлению распространения волны. На рис. 80 показано расположение частиц среды в продольных (*а*) и поперечных (б) волнах (изображены в виде черточек).

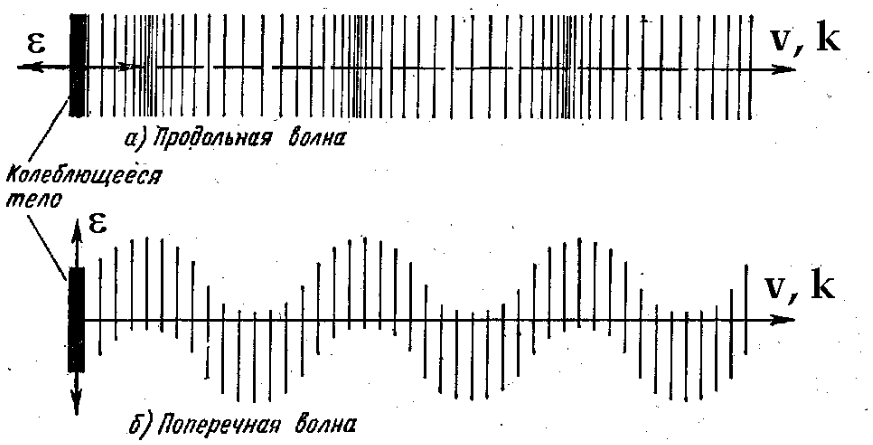


Рис. 80

Жидкие и газообразные среды не обладают свойством упругого сдвига, и поэтому в них возбуждаются только продольные волны, распространяющиеся в виде чередующихся явлений сжатия и разрежения среды (распространяются колебания плотности среды). Волны, возбуждаемые на поверхности воды, являются поперечными: они обязаны своим существованием земному тяготению. В твердых телах могут быть вызваны и продольные, и поперечные волны.

Пусть точечный источник волны начал возбуждать колебания в среде в момент времени $t = 0$. По истечении времени t это колебание распространится по различным направлениям на расстояния $r_i = v_i t$, где v_i – скорость волны в данном направлении. Поверхность, до которой доходят колебания в некоторый момент времени, называется **фронтом волны**. Форма фронта волны определяется конфигурацией источника колебаний и свойствами среды.

Среда называется *изотропной,* если ее физические свойства, в частности, скорость распространения данной волны, одинаковы по всем направлениям. Среда называется *однородной,* если физические свойства одинаковы в любом месте этой среды. Среда может быть однородной, неоднородной, изотропной и анизотропной (не изотропной). Фронт волны от точечного источника колебаний в однородной и изотропной среде имеет вид сферы; такие волны называются **сферическими**.

В неоднородной или анизотропной среде, а также от неточечных источников колебаний фронт волны имеет сложную форму. Если фронт волны представляет собой плоскость и эта форма сохраняется по мере распространения колебаний в среде, то волну называют **плоской**. Малые участки фронта волны сложной формы можно считать плоскими, а волну на данном участке – плоской волной (если только рассматривать небольшие расстояния, проходимые этой волной).

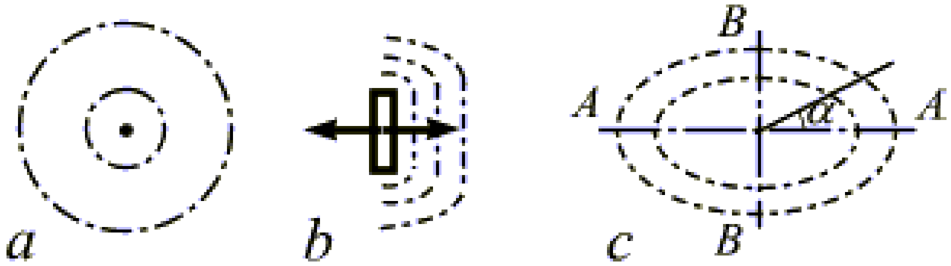


Рис. 81

При описании волновых процессов выделяют поверхности, в которых все частицы колеблются в одинаковой фазе; эти «поверхности одинаковой фазы» называются **волновыми** или **фазовыми поверхностями**. Они могут быть сферическими, плоскими и другой формы в зависимости от конфигурации источника колебаний и свойств среды. На рис. 81 условно показаны волновые поверхности: a – сферической волны от точечного источника, b – волны от колеблющейся пластинки и c – эллиптической волны от точечного источника в анизотропной среде, в которой скорость распространения волны v плавно меняется по мере изменения угла α, достигая максимума вдоль направления A–A и минимума – вдоль B–B.

Формула гармонической волны.

При описании волнового процесса требуется найти амплитуды и фазы колебательного движения в различных точках среды и изменение этих величин с течением времени. Эта задача может быть решена, если известно, по какому закону колеблется и как взаимодействует со средой тело, вызвавшее волновой процесс. Однако во многих случаях не существенно, каким телом возбуждена данная волна. Решается более простая задача: дано состояние колебательного движения в одних точках среды в определенный момент времени, например, известно расположение фронта волны или волновой поверхности, и требуется определить состояние колебательного движения в других точках среды. Здесь же мы найдем связь между состояниями колебательного движения в различных точках среды в простейшем случае распространения плоской или сферической гармонической (синусоидальной) волны.

Допустим, что процесс распространения плоской волны происходит в положительном направлении оси $0x$, т.е. в сторону возрастания координаты x (рис. 82). Обозначим через ε колеблющуюся величину. Этой величиной могут быть: смещение частиц среды относительно их положения равновесия;

отклонение давления или плотности в данном месте среды от равновесного значения и т.д. Для простоты предположим, что в каждой точке среды величина ε изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \alpha_0),$$

где ε_0 – амплитуда колебаний; $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота; T – период; $(\omega t + \alpha_0)$ – фаза колебаний в точке $x = 0$. Требуется найти фазу колебаний в любой другой точке A, отстоящей от $x = 0$ на расстоянии x.

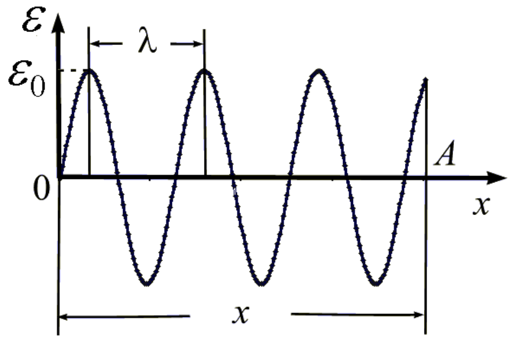


Рис. 82

Так как точка A расположена в направлении распространения волны от точки 0, то в момент времени t в точке A будет такое же состояние колебательного движения, какое было в точке 0 на x/v секунд раньше; здесь v – скорость распространения фазы колебаний (фазовая скорость) в направлении 0x. Таким образом, фаза колебаний в точке A в момент t равна фазе колебаний в точке 0 в более ранний момент $t - x/v$, т. е. равна $[\omega(t - x/v) + \alpha_0]$. Следовательно, значение колеблющейся величины в точке A в момент времени t равно:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\left[\omega\left(t - x/v\right) + \alpha_0\right].$$

Допустим теперь, что волна распространяется в обратном направлении в сторону убывания координаты x из бесконечности в точку $x = 0$. Тогда определенное состояние колебания, т.е. определенная фаза волны, достигает точки A на $\tau = x/v$ секунд раньше, чем точки 0. Следовательно, фаза в точке A в данный момент времени больше фазы в точке 0 на $\omega\tau = \omega(x/v)$. Если по-прежнему принять фазу в точке 0 в момент t равной $\omega t + \alpha_0$, то в точке A в этот же момент времени фаза будет равна $\omega t + \omega\tau + \alpha_0 = [\omega\ (t + x/v) + \alpha_0]$. Таким образом, формулу плоской волны можно написать в общем виде как:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\left[\omega\left(t \mp x/v\right) + \alpha_0\right],$$

где знак минус берется для **прямой волны** (волны, распространяющейся в направлении возрастания x), а плюс – для **обратной волны** (волны, распространяющейся в направлении убывания x).

Расстояние λ, пройденное волной (т.е. определенной фазой колебаний) за один период колебаний, называется **длиной волны**. Величины λ, ν, ω, T и v связаны между собой соотношениями:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu, \quad \lambda = vT = v\frac{2\pi}{\omega} = \frac{v}{\nu} \quad \text{и} \quad \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{\omega}{v}.$$

В формуле волны колеблющаяся величина ε зависит от двух переменных:

t и x. При углубленном изучении волновых явлений отношение $2\pi/\lambda \equiv \omega/\upsilon$ заменяют величиной k, которая называется волновым числом $k = 2\pi/\lambda \equiv \omega/\upsilon$. В таком случае, уравнение волны принимает форму, симметричную относительно переменных t и x:

$$\boxed{\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t \mp k x + \alpha_0)}\ .$$

Если заменить волновое число k вектором $\mathbf{k}$, равным $\mathbf{k} = k\ \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, восставленный к волновой поверхности (рис. 83), и координату x – радиус-вектором $\mathbf{r}$ точки A, то получим уравнение плоской волны в самом общем виде:

$$\boxed{\varepsilon(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t \mp \mathbf{k}\,\mathbf{r} + \alpha_0)}.$$

Здесь и далее слагаемое $\mathbf{kr}$ – это скалярное произведение векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{k}\,\mathbf{r} = k\,r\cos\theta \quad \text{или} \quad \mathbf{k}\,\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z\,,$$

где $\mathbf{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{k}$, $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, θ – угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$, k_x, k_y, k_z – проекции вектора $\mathbf{k}$ в декартовой системе координат, центр которой находится в произвольной точке на плоскости излучателя, и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат. Тогда уравнение $k_x x + k_y y + k_z z = \text{const}$ (или $\mathbf{kr}$ = const) есть уравнение плоскости, соответствующее некоторой волновой поверхности.

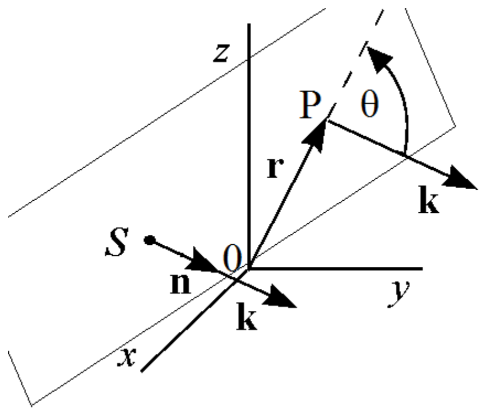


Рис. 83

Согласно закону сохранения энергии, амплитуда колебаний сферической волны уменьшается обратно пропорционально расстоянию r от точечного источника колебаний, и формула сферической гармонической волны имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{1}{r}\,\varepsilon_0 \cos\left[\omega t \mp \mathbf{k}\,\mathbf{r} + \alpha_0\right]$$

Волновое уравнение.

Волновое уравнение – это дифференциальное уравнение, определяющее пространственно-временную связь колеблющейся величины. Его мы получим для плоской волны, распространяющейся вдоль выделенной оси x:

$$\varepsilon(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\,\mathbf{r} + \alpha_0),\ \text{где}\ \mathbf{k} = \mathbf{k}(k,0,0).$$

Найдем вторую производную от ε по t, полагая x постоянной,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -\varepsilon_0 \omega^2 \cos\left[\left(\omega t - kx\right) + \alpha_0\right] = -\omega^2 \varepsilon,$$

и затем вторую производную от ε по x, полагая t постоянной,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = -\varepsilon_0 k^2 \cos\left[\left(\omega t - kx\right) + \alpha_0\right] = -\frac{\omega^2}{v^2}\varepsilon.$$

Поделив друг на друга соответственно левые и правые части этих производных, получим искомое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

Обобщением данного уравнения на случай произвольного направления распространения плоской волны $\mathbf{k} = \mathbf{k}\left(k_x, k_y, k_z\right)$ являются формулы:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}} \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta\varepsilon = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}},$$

где $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ – дифференциальный оператор Лапласа.

Принцип Гюйгенса. Суперпозиция волн.

При изучении волновых процессов в самом общем случае ставится следующая задача:

- дано тело определенной формы и размеров, совершающее колебания в некоторой среде, свойства которой известны;
- даны амплитуды, фазы и направления колебаний всех точек тела;
- требуется определить форму и расположение фронта волны или волновой поверхности в среде в каждый интересующий нас момент времени, а также амплитуды колебаний в различных точках этих поверхностей.

Для этой цели сначала рассматривается взаимодействие колеблющегося тела со средой и определяется фронт волны в непосредственной близости от этого тела. Дальнейшее распространение волны в среде определяется при помощи принципа (или правила) Гюйгенса и принципа суперпозиции.

В основе **принципа Гюйгенса** лежит утверждение: все точки волнового фронта, заданного в некоторый момент времени t_0, можно рассматривать как самостоятельные источники волны, начавшие излучать в момент t_0 (эти волны называются элементарными или вторичными). Для нахождения фронта волны в последующий момент времени $t = t_0 + \Delta t$ необходимо найти фронты всех элементарных волн и затем построить их огибающую.

Элементарные волны могут быть сферическими (если среда изотропная), эллипсоидальными или иными в зависимости от свойств среды. Таким образом, при помощи принципа Гюйгенса можно чисто геометрическим построением найти расположение фронта волны в последующие моменты времени, если это расположение задано в момент t_0. Однако принцип Гюйгенса не позволяет определить амплитуды колебаний в различных точках, куда доходит волна. Для этого дополнительно используется *принцип суперпозиции,* содержание которого заключается в следующем.

Допустим, что S – фронт волны (или волновая поверхность) в момент t_0 и S' – в момент $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 84*а*). Элементарные волны, исходящие из точек M_1, M_2, ... поверхности S, имеют в этих точках одинаковые фазы (их амплитуды могут отличаться). В момент t эти волны дойдут до точки A с фазами и амплитудами, зависящими от расстояний r_1, r_2, ... **Принцип суперпозиции** утверждает, что *амплитуду колебаний в точке А можно найти, если известны амплитуды всех колебаний, возбужденных в этой точке.* При этом обычно предполагается, что колебания в среде *линейные* и поэтому в точке A суммарное отклонение от состояния равновесия в выбранном направлении ε равно алгебраической сумме отклонений $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ...$, вызванных каждой волной в отдельности.

Допустим, что в некоторой среде имеются несколько точечных источников волн (одинаковой частоты). Рассмотрим две точки среды A и B: A, в которой смещения, вызванные этими волнами, имеют одинаковое направление и поэтому складываются, и B, в которой смещения имеют противоположные направления и вычитаются. Так как энергия колебаний в единице объема среды пропорциональна квадрату амплитуды, то вблизи точки A плотность энергии колебаний значительно больше, чем около точки B, т.е. распределение энергии в среде будет неравномерным. Это распределение, если оно со временем не изменяется, может быть обнаружено и изучено. В результате наблюдается устойчивая во времени пространственная картина усиления и ослабления колебаний, которая называется *интерференционной картиной* (**интерференцией**).

Образование интерференционной картины возможно, если волны имеют одинаковые частоты и приходят в данную точку среды с постоянной разностью фаз (не изменяющейся со временем); такие волны называются **когерентными**. Колеблющиеся тела, вызывающие в среде когерентные волны, называются *когерентными источниками.* Например, точки M_1, M_2, ... поверхности S (рис. 84*а*) колеблются с одинаковыми частотами и фазами, а исходящие от них элементарные волны приходят в точку A с разностями фаз, которые зависят только от расстояний r_1, r_2, ... и не изменяются со временем; поэтому все точки волновой поверхности являются когерентными источниками, а испускаемые ими элементарные волны – когерентными волнами.

При помощи принципа Гюйгенса и принципа суперпозиции можно решить ряд важных задач по распространению волн. В частности, рассмотрим распространение волны в среде, в которой имеются тела, не пропускающие этой волны, поглощающие или отражающие ее. Допустим, плоская волна S, имеющая во всех своих точках одинаковую амплитуду колебаний, встречает «непрозрачное» для этой волны тело P, не пропускающее участок волны AB (рис.

84*б*). Применим принцип Гюйгенса для момента времени, когда волновой фронт находится в сечении *S*-*S*. Построив фронты элементарных волн, исходящих из точек $M_1, M_2, ..., N_1, N_2, ...$, и проведя огибающие *I*, *II* и т. д., заметим, что волновой фронт заходит в область *C*, которую называют *областью геометрической тени.* Из геометрических соображений следует, что волновые лучи, перекрываемые телом, не заходят в эту область. То есть, там волна должна была бы отсутствовать.

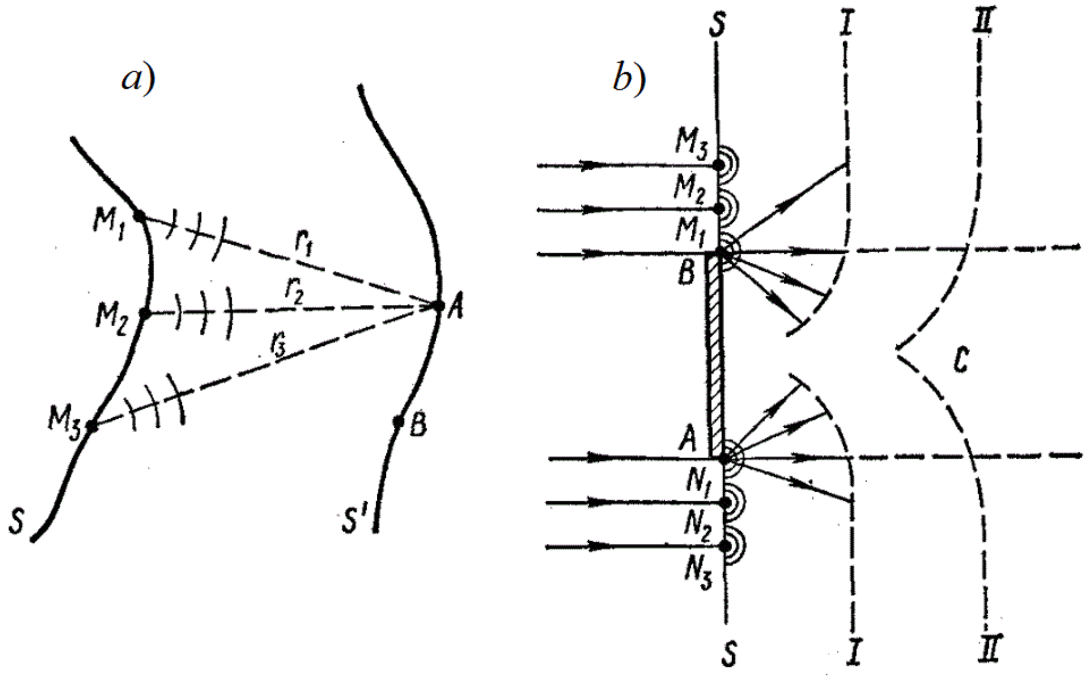


Рис. 84

Это проникновение волн в область геометрической тени было названо **дифракцией** волн. Применяя принцип суперпозиции, можно установить, что вдоль нового фронта волны *I* или *II* амплитуда колебаний (или плотность потока энергии) уже не везде одинакова, как это было задано для волнового фронта *S*. Подобная задача рассматривается также в разделе оптики для световых волн; здесь же заметим, что при дифракции волны происходит некоторое перераспределение энергии в пределах фронта волны, причем это перераспределение существеннее около границ непрозрачных тел.

Принципом Гюйгенса объясняются также законы отражения и преломления волн на границе раздела двух сред. Соответствующие построения для световых волн приводятся в разделе оптики; они применимы и для упругих волн в механических средах. Допустим, что, на плоскую границу *O*-*O* раздела двух однородных и изотропных сред *I* и *II*, скорости распространения колебаний в которых равны v_1 и v_2, падает плоская волна *S*, причем нормаль *AB* к фронту этой волны составляет угол α с нормалью **n** к поверхности раздела (рис. 85). Тогда из построения Гюйгенса и в согласии с опытными данными следуют результаты:

1) нормаль BC к фронту S' отраженной волны составляет с **n** угол β, равный α;

2) нормаль BD к фронту S'' преломленной волны составляет с **n** угол γ, удовлетворяющий соотношению:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2}}$$

Заметим, что при переходе волны из одной среды в другую частота механических колебаний ν сохраняется, а длина волны изменяется в зависимости от скорости распространения волны:

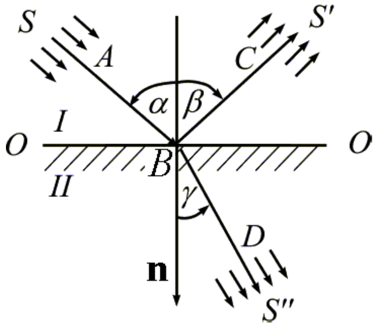


Рис. 85

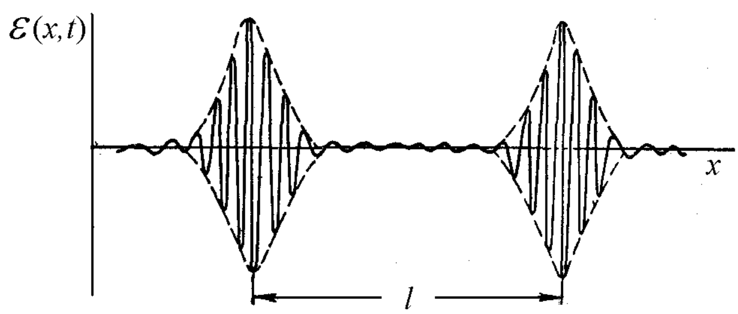


Рис. 86

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu}; \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{\nu}; \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}}.$$

Дисперсия.

Величина скорости v определяется физическими свойствами среды, и она различна для различных частот колебаний (ω или ν). Зависимость скорости распространения волны от частоты колебаний называется *дисперсией.* Дисперсия проявляется при распространении сложного периодического процесса, содержащего гармонические волны различных частот колебаний.

Допустим, что по камертону, имеющему основную частоту колебаний ν_0, наносятся одинаковые удары молотком через строго определенные промежутки времени T. Тогда по воздуху вдоль направления оси "x" будет распространяться периодический процесс, описывающийся некоторой функцией $\varepsilon(x,t)$. Эта функция должна зависеть от спектра камертона, т. е. от набора частот, которые он излучает, и от распределения энергии между этими частотами (т.е. между гармоническими составляющими спектра). Кроме того, эта функция должна содержать частоту $\nu = 1/T$, с которой наносятся удары, а также должна зависеть от характера самого удара (продолжительности удара, изменения силы удара со временем) и от быстроты затухания колебаний камертона вследствие потерь на трение и на излучение. На рис. 77 схематично показаны значения $\varepsilon(x,t)$, соответствующие двум последовательным ударам молотка. Условимся каждую фигуру, охваченную на этом рисунке пунктирной линией (содержащую только большие отклонения от положения равновесия), называть *волновым импульсом* или *формой волны* ε (ее называют также *волновым пакетом*). За время T

волновой импульс пройдет расстояние l и, следовательно, скорость распространения этого импульса будет равна

$$u = l / T.$$

Для описания процесса распространения звука, возбужденного таким образом, с учетом физических свойств среды (и, в частности, дисперсии) целесообразно представить функцию $\varepsilon(x,t)$ в виде суммы гармонических слагаемых $\varepsilon_i(x,t)$, имеющих различные частоты колебаний ω_i:

$$\varepsilon\,(x,\ t) = \Sigma_i\, \varepsilon_i\ (x,\ t).$$

Если среда не обладает дисперсией, то все гармонические волны $\varepsilon_i(x,t)$ будут иметь одинаковые фазовые скорости: $v_i = v$. Вследствие этого весь волновой импульс (как «сумма» этих волн) будет перемещаться в среде с той же скоростью ($u = v$), поэтому «форма волны» по мере ее распространения изменяться не будет. Если же среда обладает дисперсией, т.е. фазовые скорости гармонических волн $\varepsilon_i(x,t)$ не одинаковы и зависят от частоты ω (или длины волны λ), то «форма» волнового импульса будет по мере распространения в среде изменяться.

В том случае, когда форма волны (т.е. форма кривой на рис. 86), изображающей волну ε, изменяется при распространении не очень сильно (хотя бы на малых расстояниях от источника), скорость волнового импульса (пакета) можно определить по перемещению l точки с наибольшим отклонением, показанному на рис. 86. Определенная таким образом скорость u называется групповой скоростью волнового импульса (пакета). Существует связь между фазовой скоростью $v(\lambda)$ какой-нибудь из гармонических составляющих импульса и групповой скоростью самого импульса:

$$v - u = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda},$$

где $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda$ – производная от фазовой скорости по длине волны – характеризует дисперсионные свойства данной среды. Фазовые скорости v гармонических составляющих любого волнового импульса (пакета) в диспергирующей среде (в зависимости от знака производной $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda$) могут быть и больше, и меньше u, групповой скорости самого импульса (пакета).

Стоячие волны.

Рассмотрим результат интерференции двух плоских гармонических волн одинаковой амплитуды и частоты, распространяющихся в противоположных направлениях. Допустим, что уравнения этих волн имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \cos\omega\left(t - x/v\right) \ \text{ и } \ \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cos\omega\left(t + x/v\right),$$

что означает, что в начале координат 0 ($x = 0$) обе волны вызывают колебания в одинаковой фазе. В точке A с координатой x суммарное значение колеблющейся величины, согласно принципу суперпозиции, равно

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_0[\cos\omega\left(t - x/v\right) + \cos\omega\left(t + x/v\right)] = 2\varepsilon_0 \cdot \cos(\omega\frac{x}{v}) \cdot \cos\omega t\,. \qquad (*)$$

Данное уравнение показывает, что в результате интерференции прямой и обратной волн в каждой точке среды (с фиксированной координатой x) происходят колебания с той же частотой ω, но с амплитудой

$$A_0 = 2\varepsilon_0\cos(\omega\frac{x}{v}) = 2\varepsilon_0\cos\,(2\pi\frac{x}{\lambda})\,, \qquad (**)$$

зависящей от значения координаты x. В точках среды, в которых $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$, колебания отсутствуют вовсе: $A_0 = 0$, эти точки называются **узлами колебаний**. В точках, где $\cos\,(2\pi\frac{x}{\lambda}) = \pm 1$, амплитуда колебаний имеет наибольшее значение, равное $2\varepsilon_0$. Эти точки называются **пучностями колебаний**.

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями называется длиной стоячей волны $\lambda_{ст}$. Оно равно половине длины бегущей волны $\lambda/2$. Расстояние между пучностью и ближайшим узлом равно $\lambda/4$. При изменении x на $\lambda/2$ косинус в формуле (**) меняет знак на обратный (его аргумент изменяется на π; поэтому если в пределах одной полуволны (от одного узла до другого) частицы среды отклонились в одну сторону, то в пределах соседней полуволны частицы среды будут отклонены в противоположную сторону.

Волновой процесс в среде, описывающийся формулой (*), называется **стоячей волной**. Графически стоячая волна может быть изображена так, как это показано на рис. 87. Допустим, что ε есть смещение точек среды от состояния равновесия; тогда формула (*) описывает «стоячую волну смещения». В некоторый момент времени, когда $\cos(\omega t) = 1$, все точки среды имеют максимальные смещения, направление которых в зависимости от величины координаты x определяется знаком $\cos\,(2\pi\frac{x}{\lambda})$. Эти смещения показаны сплошными стрелками. Спустя четверть периода, когда $\cos(\omega t) = 0$, смещения всех точек среды равны нулю; частицы среды проходят через линию $0x$ с различными скоростями. Спустя еще четверть периода, когда $\cos(\omega t) = -1$, частицы среды опять будут иметь максимальные смещения, но противоположного направления; эти смещения показаны пунктирными стрелками. Точки A_1, A_2, ... – пучности стоячей волны смещения; точки B_1, B_2, ... – узлы этой волны.

Характерные особенности стоячей волны в отличие от обычной бегущей волны следующие (имеются в виду плоские волны при отсутствии затухания):

1) в стоячей волне амплитуды колебаний различны в различных местах системы; в системе имеются узлы и пучности колебаний. В «бегущей» волне эти амплитуды везде одинаковы;

2) в пределах участка системы от одного узла до соседнего все точки среды колеблются в одинаковой фазе; при переходе к соседнему участку фазы колебаний меняются на противоположные. В бегущей волне фазы колебаний зависят от координат точек;

3) в стоячей волне нет одностороннего переноса энергии, как это имеет место в бегущей волне.

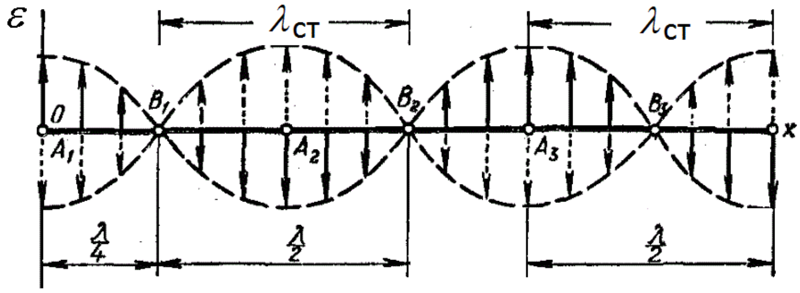


Рис. 87

При описании колебательных процессов в упругих системах за колеблющуюся величину ε можно принять не только смещение или скорости частиц системы, но и величину относительной деформации или величину напряжения на сжатие, растяжение или сдвиг и т.д. При этом в стоячей волне, в местах, где образуются пучности скоростей частиц, располагаются узлы деформаций и, наоборот, узлы скоростей совпадают с пучностями деформаций. Преобразование энергии из кинетической в потенциальную и обратно происходит в пределах участка системы от пучности до соседнего узла. Можно считать, что каждый такой участок не обменивается энергией с соседними участками. Заметим, что превращение кинетической энергии движущихся частиц в потенциальную энергию деформированных участков среды за один период происходит дважды.

ЗВУКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.

Звуковые колебания, воспринимаемые человеческим ухом, имеют частоты, лежащие в пределах от 20 до 20000 Гц; частоты, ме́ньшие 20 Гц, называются *инфразвуковыми,* а бо́льшие 20000 Гц — *ультразвуковыми.*

При распространении гармонической звуковой волны избыточное давление $\Delta p = p - p_0$ и избыточная плотность $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ изменяются по закону

$$\Delta p = \Delta p_0 \cos[\omega(t - x/v)] \text{ и } \Delta\rho = \Delta\rho_0 \cos[\omega(t - x/v)],$$

если Δp и $\Delta\rho$ малы по сравнению с p и ρ. Избыточное давление Δp часто называют «звуковым давлением» (не смешивать с давлением звука на препятствия), а Δp_0 – амплитудой звуковой волны.

Интенсивностью или *силой звука I* называют количество энергии, переносимое звуковой волной в единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения. Расчетная формула интенсивности звука равна (без доказательства):

$$I = \frac{1}{2}\rho v u_0^2 = \frac{\Delta p_0^2}{2\rho v},$$

где ρ – плотность воздуха, v – скорость распространения звука и u_0 – амплитудное значение скорости колебаний молекул.

Амплитуды смещения ε_0, скорости u_0 и ускорения a_0 частиц среды при их колебательном движении в звуковой волне, а также $\Delta\rho_0$ можно выразить через интенсивность звука. Так как $u_0 = \varepsilon_0\omega$, $a_0 = u_0\omega$, то

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}};\ u_0 = \sqrt{\frac{2I}{\rho v}};\ a_0 = \omega\sqrt{\frac{2I}{\rho v}};\ \Delta\rho_0 = \frac{\Delta p_0}{v^2}.$$

Интенсивность звука I выражается также через так называемое *эффективное звуковое давление*, определяемое по формуле $\Delta p_{эф} = \Delta p_0/\sqrt{2}$:

$$I = \frac{(\Delta p_{эф})^2}{\rho v}.$$

Произведение скорости звука на плотность данной среды ρv является важнейшей акустической характеристикой среды и называется *удельным акустическим сопротивлением.* Эта величина входит во все важнейшие расчетные формулы акустики. Например, при перпендикулярном падении звука на границу раздела двух сред коэффициент отражения k, показывающий, какая часть звуковой энергии отражается от этой границы, равен

$$k = \left(\frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}\right)^2.$$

При нормальных условиях для воздуха $\rho v \approx 430$ кг/(м^{2}с), для воды $\rho v = 145\cdot10^4$ кг/(м^{2}с), и коэффициент отражения звука на границе вода–воздух равен ≈ 99,9%. В неоднородной среде, состоящей из множества слоев с различными удельными акустическими сопротивлениями, например, в атмосфере, звук частично отражается от границ каждого слоя и быстро рассеивается в этой среде. В однородной атмосфере звук рассеивается меньше и поэтому слышен далеко. Для твердых тел удельные акустические сопротивления имеют более высокие значения [железо – $40\cdot10^6$ кг/(м^{2}с), кварц – $15\cdot10^8$ кг/(м^{2}с)].

При переходе звука из одной среды в другую частота звука неизменна, а длина волны изменяется пропорционально скорости распространения:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Например, если на частоте $\nu = 1000$ Гц длина звуковой волны в воздухе составляет $\lambda_{возд} = 332$ м·с$^{-1}$ / 1000 с$^{-1}$ = 0,332 м, то в воде ее длина волны равна: $\lambda_{вод} = 1400$ м·с$^{-1}$ / 1000 с$^{-1}$ = 1,4 м. Для справки: $\lambda = vT = v/\nu$.

Эффект Доплера.

Если источник или приемник звука движется относительно среды, в которой происходит распространение звука, то частота звука ν, испускаемая источником, и частота ν' этого же звука, воспринимаемая приемником, будут отличаться друг от друга (эффект Доплера). Рассмотрим частный случай, когда вдоль оси O–O_1 (рис. 88) распространяется плоская гармоническая волна.

1) Источник звука частоты $\nu = v/\lambda = 1/T$ движется относительно среды со скоростью $\pm u$; приемник звука покоится. В этом случае за период колебаний T звуковая волна отойдет от источника (камертона) на расстояние vT, а сам источник сместится на uT. На рис. 88 кривые *а* и *б* условно изображают звуковые волны от неподвижного (*а*) и движущегося (*б*) источника. Если источник звука удаляется от приемника, как это показано на рисунке, т.е. движется в направлении, обратном направлению распространения, то длина волны равна $\lambda' = vT + uT = (v+u)T$; если же источник звука движется к приемнику, т.е. в направлении распространения звука, то, очевидно, $\lambda' = vT - uT = (v-u)T$. Тогда частота звука, воспринимаемая приемником, в указанных случаях может быть представлена в виде:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{\nu}{1 \pm u/v}.$$

2) Источник звука покоится, приемник движется относительно среды со скоростью $\pm w$. В этом случае длина волны в среде не изменяется и равна $\lambda = vT$, однако две последовательные амплитуды волны дойдут до приемника не через T секунд, а через большее или меньшее время T' в зависимости от того, удаляется или приближается приемник к источнику звука. За время T' звук распространится на расстояние vT', а приемник сместится на $\pm wT'$. Сумма этих величин должна равняться длине волны, следовательно, $\lambda = vT' \pm wT' = (v \pm w)T'$. Так как частота звука, воспринимаемая приемником, $\nu' = 1/T'$, а $v/\lambda = \nu = 1/T$, то

$$\nu' = \nu\,(1 \pm w/v).$$

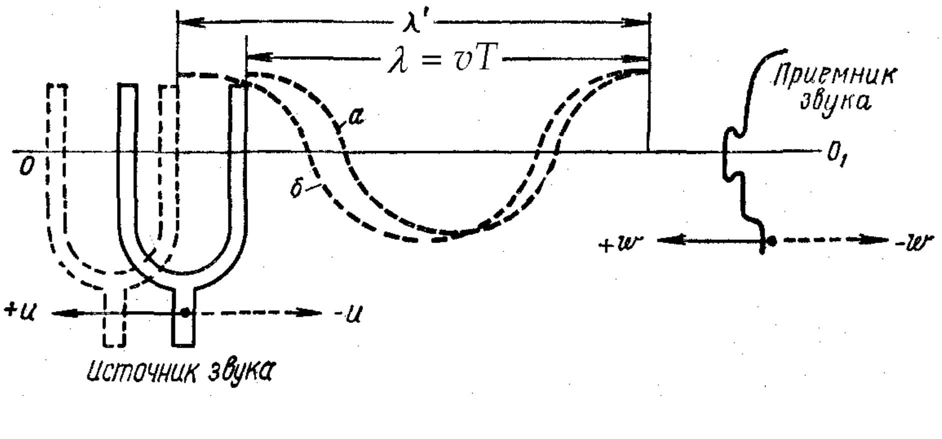


Рис. 88

3) Источник и приемник звука движутся относительно среды. Соединяя результаты, полученные для двух предыдущих случаев, получим:

$$\boxed{\nu' = \nu \ \frac{1 \pm w / v}{1 \pm u / v}} \ .$$

Характеристики звукового ощущения.

Звуковое ощущение характеризуется высотой звука, тембром и громкостью. *Высота звука* определяется частотой колебаний. Однако источники звука испускают не одну, а целый спектр частот, причем энергия волны определенным образом распределяется между различными частотами. Высота звука определяется по одной – основной частоте, если на долю этой частоты приходится значительно большее количество энергии, чем на долю других частот. Если спектр состоит из отдельных частот, то он называется *линейчатым,* если же из непрерывного набора частот, то *сплошным.* На рис. 89 показан акустический спектр рояля, соответствующий основной частоте (тону) 256 Гц. Этот спектр является примером смешанного спектра; он состоит из набора отдельных частот и участка сплошного спектра (в области *а* – *б*). В этом спектре выделяется основной тон звука частоты 256 Гц; на этой частоте излучается наибольшая интенсивность звука; на другие частоты приходится меньше энергии, и они слабее слышны.

Акустический спектр звука в зависимости от его характера (линейчатый, сплошной или смешанный) и от распределения энергии между частотами определяет своеобразие звукового ощущения, называемое *тембром звука.* Различные музыкальные инструменты, испускающие звук одного и того же тона, имеют различный акустический спектр, т. е. отличаются тембром звука.

При оценке звукового восприятия следует учесть, что чувствительность человеческого уха различна для различных частот. Интенсивность (сила) звука данной частоты должна быть достаточно большой, чтобы вызвать звуковое ощущение, однако если эта интенсивность превышает некоторый предел, то звук не слышен и вызывает только болевое ощущение. Таким образом, для каждой частоты колебаний существует наименьшая (*порог слышимости*) и наибольшая (*порог болевого ощущения*) интенсивность звука, которая способна вызвать звуковое восприятие. На рис. 90 показана область звукового восприятия человеческого уха. Ухо имеет наибольшую чувствительность к частотам от 800 до 6000 Гц. В этом интервале порог слышимости равен 10^{-12} Вт/м^2; порог болевого ощущения приблизительно равен 1 Вт/м^2.

Установлено, что ощущение звука человеческим ухом, называемое *громкостью,* зависит от интенсивности этого звука I, но не пропорционально ей. Звуки, интенсивности которых лежат в некоторых пределах от I_1 до I_2, могут восприниматься как имеющие одинаковую громкость; поэтому, чтобы ухо могло установить различие в громкости двух звуков, их интенсивности I_1 и I_2 должны отличаться больше чем некоторое предельное наименьшее значение ΔI. Таким образом, ΔI есть минимальное изменение интенсивности звука, которое может быть отмечено ухом как изменение громкости этого звука.

Согласно обще-физиологическому закону Вебера–Фехнера, можно полагать, что *величина ΔI пропорциональна I, т.е. способность уха различать громкости звуков ослабевает с увеличением интенсивности.* Отношение ΔI / I оказывается почти постоянной величиной (это утверждение соблюдается хорошо для частот от 100 до 1000 Гц). Поэтому с увеличением интенсивности звука увеличивается ΔI, следовательно, чувствительность уха к восприятию изменения громкости уменьшается.

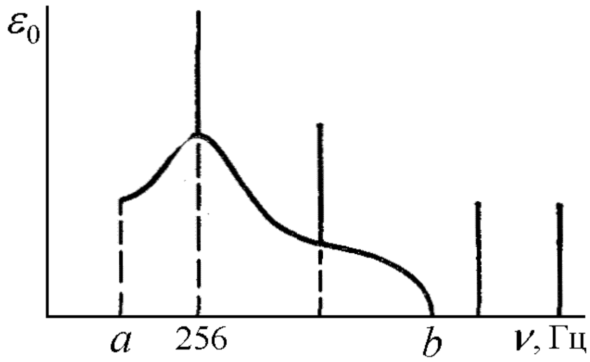


Рис. 89

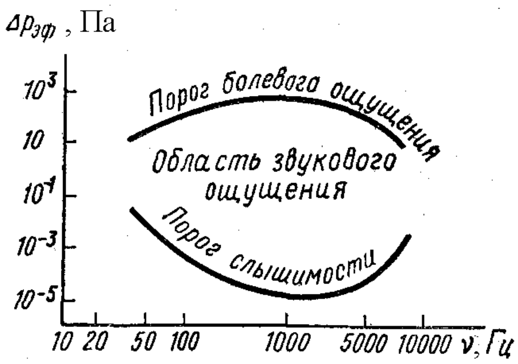


Рис. 90

Допустим, что громкость звука оценивается некоторой величиной L. Изменение громкости dL было бы прямо пропорционально изменению интенсивности звука dI только в том случае, если бы чувствительность уха к интенсивности звука оставалась неизменной. Однако эта чувствительность ослабевает с возрастанием I, причем dL оказывается пропорциональной отношению dI/I. Интегрируя равенство $dL = k\, \mathrm{d}I/I$ (где k — постоянный коэффициент) в пределах от I до наименьшего значения – интенсивности I_0, соответствующего порогу слышимости, получим $L = k \ln (I/I_0)$. Таким образом, субъективное ощущение громкости звука оказывается пропорциональным логарифму отношения интенсивности звука к соответствующему порогу слышимости. На этом основании условились ввести *объективную оценку громкости звука* по измеренному значению его интенсивности I:

$$L = \lg (I/I_0) \text{ беллов (Б), или } L = 10 \lg (I/I_0) \text{ децибеллов (дБ)},$$

где для всех звуков условились полагать, что интенсивность порога слышимости равна $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Величину L называют *уровнем интенсивности звука* (обычно в децибелах, 1 Б = 10 дБ). Если измеряется не интенсивность звука, а эффективное звуковое давление (см. формулу (*)), то

$$L = 20 \lg (\Delta p_{эф}/\Delta p_{сл}),$$

где $\Delta p_{сл} = 2\cdot 10^{-5}$ Па есть звуковое давление нижнего порога восприятия звука. В этой формуле L называют *уровнем звукового давления* (в децибелах).

Физиологической характеристикой звука является *уровень громкости звука,* который измеряется в *фонах* и определяется следующим образом: изменяя интенсивность стандартного звука частоты 1000 Гц, добиваются, чтобы измеряемый и стандартный звук имели одинаковую громкость (по звуковому восприятию). Громкость в фонах измеряемого звука приравнивается числу децибел уровня звукового давления стандартного звука.

Ниже приводятся уровни L звукового давления (дБ), интенсивности звука I (Вт/м^2) и эффективные звуковые давления $\Delta p_{эф}$ (Па) для некоторых звуков в пределах от порога слышимости до болевого порога.

	L, дБ	I, Вт/м^2	$\Delta p_{эф}$, Па
Порог слышимости	0	10^{-12}	$2 \cdot 10^{-5}$
Тихий шепот	20	10^{-10}	$2 \cdot 10^{-4}$
Громкая речь	70	10^{-5}	$6{,}3 \cdot 10^{-2}$
Оркестр (громко)	100	10^{-2}	2
Болевой порог	130	10	63

Мощность, развиваемая источником звука, может быть представлена в зависимости от интенсивности звука, звукового давления, а также от громкости. При разговоре средней громкости мощность, развиваемая голосовыми связками человека, составляет около 10^{-5} Вт; при переходе к громкой речи эта мощность увеличивается в десятки и сотни раз.

Для звукового восприятия в помещениях большое значение имеет *реверберация звука,* т. е. постепенное ослабление его интенсивности вследствие поглощения при многократных отражениях от стен, потолка, предметов и т. д. Каждый звук существует в помещении некоторое время, пока его интенсивность не уменьшится до порога слышимости. Слишком медленное затухание звука (в пустых помещениях) создает «гулкость» помещения. При очень быстром затухании звуки получаются приглушенными (в комнатах, обвешанных коврами). *Временем реверберации* называют время, в течение которого интенсивность звука в помещении ослабляется в миллион раз. Это время различно для различных частот. Оно зависит от объема помещения, а также формы, размеров и акустических свойств находящихся в них тел. Для стандартной частоты 512 Гц в небольших помещениях это время должно быть 1 с (оптимум реверберации). Для больших концертных залов и театров (при условии заполнения их людьми) оно приближается к 2 с.

Время реверберации концертного зала зависит от того, зал – пустой или он заполнен слушателями. В одном оперном театре восприятие музыки, акустическое качество зала, заметно ухудшилось вследствие изменения моды: женщины сменили пышную одежду на плотно облегающую и этим вызвали некоторое изменение времени реверберации в зале.

Ультразвук и его применение.

Ультразвук имеет частоту колебаний свыше 20000 Гц = 20 кГц, поэтому длина ультразвуковых волн в различных средах мала, а скорости и ускорения колеблющихся частиц среды и возникающие избыточные давления велики. Интенсивность ультразвукового излучения некоторых источников достигает миллионов ватт на квадратный метр. Однако прежде чем рассчитывать важнейшие характеристики ультразвуковой волны, необходимо проверить, соблюдается ли условие малости $\Delta p << p_0$, на основании которого были получены эти формулы. При частоте $\nu = 160$ кГц ($\omega = 2\pi\nu = 10^6$ с$^{-1}$) и интенсивности $I = 5\cdot 10^4$ Вт/м^2 получаем для воздуха ($\rho v \approx 430$ кг/(м$^2\cdot$с))

$$\Delta p_0 = \sqrt{2I\rho v}, \quad \Delta p_0 \approx 6500\,\text{Па} = 0{,}065\ \text{атм}.$$

Рассчитаем остальные величины:

1) длина волны $\lambda = v/\nu$, $\lambda = 332 : 160000 = 0{,}0021$ м = 2,1 мм;

2) амплитуда смещения частиц среды

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{10^6}\sqrt{\frac{2\cdot 5\cdot 10^4}{430}} \approx 1{,}54\cdot 10^{-5}\,\text{м} = 0{,}0154\ \text{мм};$$

3) амплитуда скорости колебательного движения частиц среды

$$u_0 = \omega\varepsilon_0, \quad u_0 = 15{,}4\ \text{м/с};$$

4) амплитуда ускорения колебательного движения частиц среды $a_0 = \omega u_0$, $a_0 = 15{,}4\cdot 10^6$ м/с^2. При больших частотах и интенсивностях можно получить ускорения, в миллионы раз превышающие ускорение силы тяжести.

Ультразвук может быть получен при помощи известных источников слышимых частот, имеющих соответствующие размеры или параметры (миниатюрные камертоны, короткие струны, свистки, сирены с большим числом оборотов ротора и т. д.). Применение получили источники ультразвука, основанные на использовании магнитострикции и электрострикции – изменения размеров тел, помещенных в магнитное и электрическое поля. Если в быстропеременное магнитное поле поместить, например, никелевый стержень, то длина его будет изменяться (на несколько тысячных долей процента) в соответствии с частотой поля. При резонансе между внешним воздействием и собственными колебаниями стержня можно получить большие амплитуды колебаний и, следовательно, большие интенсивности излучаемой волны. Таким же образом получают ультразвуковые волны от пластинки кварца (или другого диэлектрика), помещенного в высокочастотное электрическое поле.

Различные источники ультразвука характеризуются *потоком звуковой энергии – звуковой мощностью* (от долей ватта до десятков киловатт) и *коэффициентом полезного действия*. В хороших генераторах ультразвука этот коэффициент достигает 60 – 70%. Мощность излучения источника зависит от акустического сопротивления среды, в которой возбуждаются звуки. Например, кварцевая пластинка при одинаковой частоте и амплитуде колебаний будет потреблять и излучать в воде в 3500 раз большую мощность, чем в воздухе.

Благодаря малой длине волны ультразвука его можно фокусировать при помощи вогнутых отражателей или соответствующих «ультразвуковых линз» (например, алюминиевых). При этом можно получить большую концентрацию мощности в единице объема среды. Например, если вся энергия, излучаемая кварцевой пластинкой диаметром d = 1,15 см при интенсивности излучения I = 10 Вт/см^2, фокусируется в 1 см^3 среды, то ежесекундно в этот объем будет поступать $I\cdot(\pi d^2/4)$ = 10 Дж энергии. При полном поглощении эта энергия может вызвать нагревание одного грамма воды со скоростью до 2,5 °С в секунду.

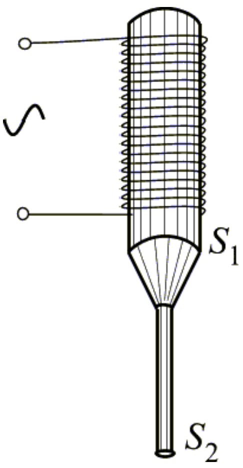
Кроме зеркал и линз увеличение амплитуды колебаний и интенсивности ультразвука достигается также применением стержней с уменьшающимися сечениями, которые присоединяются к излучающей поверхности источника ультразвука (рис. 91). Можно выбрать вещество стержня, слабо поглощающее энергию колебаний, а при подходящем законе убывания сечения довести до минимума излучение энергии через боковую поверхность стержня. Тогда ежесекундные количества энергии I_1S_1 и I_2S_2, проходящие через два сечения S_1 и S_2, будут равны и, следовательно,

$$I_2 = I_1S_1/S_2.$$

Так как интенсивность звука пропорциональна квадрату амплитуд смещения, скорости и т.д., то для круглых сечений интенсивность I будет обратно пропорциональна квадрату диаметра, а ε_0, u_0 и Δp_0 – первой степени диаметра стержня.

Высокие значения акустических скоростей, ускорений, избыточных давлений и плотностей, а также хорошо разработанные методы излучения, приема, измерения интенсивности и скорости распространения ультразвука позволили использовать его для решения многих технических задач. Перечислим важнейшие применения ультразвука:

1) использование ультразвука как средства связи и обнаружения;
2) определение местонахождения предметов и неоднородностей в акустически прозрачных средах; в морях — *акустическая локация* косяков рыб, подводных лодок, определение глубины; в массивных металлических поковках и отливках – обнаружение внутренних трещин и раковин (дефектоскоп С.Я. Соколова);
3) изучение физических свойств различных твердых, жидких и газообразных веществ (скорость распространения, коэффициент поглощения и т. д.);
4) воздействие на различные физико-химические процессы: кристаллизацию, намагничивание, диффузию, различные электрохимические процессы и т.д.; образование эмульсий;
5) механическая обработка очень твердых или очень хрупких тел; очистка мелких предметов (деталей часовых



механизмов и т. д .), помещенных в жидкость; стирка белья; дегазация;

6) воздействие на биологические объекты, различные применения в медицине (диагностика УЗИ, хирургия, лечение некоторых заболеваний и т. п.).

Рис. 91

Некоторые животные и насекомые испускают и воспринимают ультразвуковые колебания различных частот: дельфины – до 50 кГц, пчелы – до 22 кГц, собаки и мыши слышат ультразвуки до 100 кГц и т. д. Летучие мыши испускают ультразвуки короткими импульсами; продолжительность каждого импульса составляет тысячные доли секунды, число таких импульсов в секунду от 5 до 60, частота колебаний от 30 до 120 кГц. Интересно, что ночные бабочки, являющиеся пищей для летучих мышей, воспринимают ультразвуки с частотами от 10 до 200 кГц и благодаря этому могут обнаружить грозящую им опасность.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. М.: КНОРУС, 2012.
2. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М., 2002.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М., 2005.
4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.- СПб., 2002.
5. Кудин Л.С., Бурдуковская Г.Г. Курс общей физики (в вопросах и задачах). СПб., Лань, 2013
6. Трофимова Т. И. Курс физики. М.: Издательский центр «Академия», 2006.