6. Исследование сходимости несобственных интегралов. 1

№ 2358. Так как $\dfrac{x^2}{x^4-x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx$ сходится, то $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$ также сходится.

№ 2370 б). Так как $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \to +0$ и $\int\limits_0^{1} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ сходится, то $\int\limits_0^{1} \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$ тоже сходится.

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ при $x \to +\infty$ и $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ сходится, то $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$ тоже сходится.

Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}\,dx$ сходится.

№ 2361. Так как $x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$ при $x \to +0$ и, как известно, $\int\limits_0^{1} x^{p-1}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $p-1 > -1$, то и $\int\limits_0^{1} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 0$.

Приведем 2 способа доказательства сходимости $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ при любом $p \in \mathbb{R}$.

1. Сравним его со сходящимся $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx$. Имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-1}e^{-x} \,\Big/\, \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+1}}{e^x} = 0.$$

Из признака сравнения 4 б) теперь следует, что $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ сходится при любом $p \in \mathbb{R}$.

2. Можно воспользоваться № 2348, неравенством $x^{p-1}e^{-x} \le x^{[p]}e^{-x}$ $(x \ge 1)$ и признаком сравнения 1.

Замечание. Интеграл, рассматриваемый в № 2361, используется в различных разделах математики, имеет специальное название “гамма-функция” и обозначается $\Gamma(p)$. Более подробно эта функция будет изучаться в следующем семестре.

Для выполнения **№ 2364** $(a > 0)$ достаточно заметить, что $\operatorname{arctg} ax \sim ax$ при $x \to +0$, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} ax = \dfrac{\pi}{2}$ и применить признак сравнения 4.