

**Министерство образования Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Л.А. ТКАЧЕНКО, А.В. РЕПИНА

ТЕОРИЯ ТЕПЛООБМЕНА

Учебное пособие

под общей редакцией

зав. кафедрой Технической физики и энергетики,
д.т.н., проф., чл.-корр. АН РТ Н.Ф. Кашапова



Казань
2017

УДК 536.24: 234.21

Рекомендовано к изданию
Учебно-методической комиссией инженерного института
(протокол № 6 от 28 июня 2017 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор **Зарипов Р.Г.**
(ИММ КазНЦ РАН)

доктор технических наук, профессор **Ларионов В.М.**

Ткаченко Л.А., Репина А.В.

Теория теплообмена: Учебное пособие / Л.А. Ткаченко, А.В. Репина. Под общей ред. проф. Н.Ф. Кашапова. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – 151 с.

Учебное пособие рассчитано на бакалавров старших курсов, магистров и аспирантов, специализирующихся по механике жидкости и газа, теплофизике и энергетике, а также научных работников и специалистов, занимающихся вопросами теплообмена. В книге рассмотрены физические основы процессов теплообмена. Приведены методы исследования и расчета теплообмена с помощью теории пограничного в ламинарном и турбулентном режимах течения.

УДК 536.24: 234.21

© Ткаченко Л.А., Репина А.В., 2017

© Издательство Казанского университета, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА	7
1.1 Предмет теории теплообмена	7
1.2 Поле температур и поле тепловых потоков	8
1.3 Коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи	10
ГЛАВА 2 УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ СРЕДЕ	12
2.1 Гипотеза о прямой пропорциональности вектора теплого потока градиенту температуры	12
2.2 Уравнение распространения тепла	14
2.3 Частные случаи уравнения теплопроводности	17
ГЛАВА 3 УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ	20
3.1 Связь между полем температур и полем скоростей в движущейся среде	20
3.2 Уравнение неразрывности потока жидкости	21
3.3 Уравнение движения вязкой жидкости	22
ГЛАВА 4 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ	24
4.1 Временные и пространственные краевые условия	24
4.2 Краевые условия к уравнениям гидродинамики	24
4.3 Краевые условия к уравнению теплопроводности	26
ГЛАВА 5 УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА	28
5.1 Понятия о подобии физических явлений	28
5.2 Критерии подобия как обобщенные безразмерные переменные	31
5.3 Физический смысл некоторых критериев подобия	33

ГЛАВА 6 УСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОМЫ ПОТОК В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ	37
6.1 Дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности	37
6.2 Теплопроводность через плоскую стенку	38
6.3 Теплопроводность через цилиндрическую стенку	40
6.4 Теплопроводность через шаровую стенку	43
6.5 Теплопроводность вдоль стержня постоянного поперечного сечения	45
ГЛАВА 7 НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОМЫ ПОТОК В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ	50
7.1 Уравнение нестационарного температурного поля	50
7.2 Решение в виде произведения двух функций	51
7.3 Нагревание (охлаждение) плоской пластины	52
7.4 Нагревание (охлаждение) цилиндра	58
7.5 Нагревание (охлаждение) шара	62
7.6 Регулярный режим охлаждения	67
7.7 Температурные волны	71
ГЛАВА 8 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА	75
8.1 Связь между теплоотдачей и трением (аналогия Рейнольдса)	75
8.2 Пограничный слой	79
8.3 Динамический пограничный слой на плоской пластине ..	83
8.4 Температурный пограничный слой на плоской пластине	91
8.5 Течение и теплоотдача в передней критической точке	95
8.6 Теплоотдача при естественной конвекции	102
ГЛАВА 9 ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ	109
9.1 Особенности движения и теплообмена в трубах	109

9.2 Распределение скоростей и гидродинамического сопротивления при стабилизированном изотермическом течении	111
9.3 Теплоотдача при ламинарном течении	113
ГЛАВА 10 УРАВНЕНИЯ ОСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА	118
10.1 Турбулентность	118
10.2 Уравнения осредненного турбулентного течения жидкости	119
10.3 Уравнение распространения тепла	124
10.4 Турбулентное трение и турбулентная теплопроводность в плоском потоке жидкости	125
10.5 Полуэмпирические выражения турбулентного обмена в плоском несжимаемом потоке вблизи стенки	126
10.6 Связь между коэффициентами турбулентной теплопроводности и вязкости	126
10.7 Распределение скоростей в плоском несжимаемом потоке вблизи стенки	129
10.8 Распределение скоростей и гидродинамическое сопротивление при турбулентном течении в трубах	134
10.9 Уравнение теплопереноса в турбулентном потоке	138
10.10 Связь между коэффициентами теплоотдачи и трения ..	139
10.11 Решение при линейном изменении температуры стенки	140
10.12 Теплоотдачи к турбулентному потоку при $Pr > 1$	144
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	151

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой конспект лекций по теории теплообмена и рассчитано на бакалавров старших курсов, магистров и аспирантов, специализирующихся по механике жидкости и газа, теплофизике и энергетике, а также научных работников и специалистов, занимающихся вопросами теплообмена.

По своему содержанию книга состоит из трех частей. В первой части рассматриваются общие закономерности течения и теплообмена вязкой жидкости. Вторая часть посвящена изучению установившегося и неуставившегося температурных полей и тепловых потоков в твердых телах, обменивающихся теплом с окружающей средой. В третьей части в рамках теории пограничного слоя рассматриваются вопросы, связанные с течением и теплообменом вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном и турбулентном режимах движения.

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ В ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

1.1 Предмет теории теплообмена

При соприкосновении двух тел, имеющих различную температуру, происходит обмен энергией движения структурных частиц (молекул, атомов, свободных электронов), вследствие чего интенсивность движения частиц тела, имевшего меньшую температуру, увеличивается, а интенсивность движения частиц тела с более высокой температурой, уменьшается. В результате одно из соприкасающихся тел нагревается, а другое остывает. Поток энергии, передаваемой частицами более горячего тела частицам более холодного тела, называется тепловым потоком.

Таким образом, для возникновения теплового потока, т.е. процесса теплообмена между различными областями пространства необходимо и достаточно, чтобы в этих областях имели место неодинаковые температуры. При этом тепловой поток направлен в сторону меньших температур.

Наряду с рассмотренным случаем теплообмена непосредственно в вещественной среде, являющегося следствием движения структурных частиц, имеет место также перенос тепла посредством лучеиспускания (например, в космических процессах). Поэтому следует различать теплообмен путем непосредственного соприкосновения тел и лучистый теплообмен, когда энергия передается от одного тела к другому посредством электромагнитного поля.

Распространение тепла, в конечном счете, всегда связано с тепловым движением структурных частиц. Однако непосредственный перенос определенных порций теплоты из одной области в другую может происходить не только в результате последовательного обмена энергией частиц, заполняющих пространство между рассматриваемыми областями, но и в результате перемещения большого количества молекул, из которых состоит среда.

Процесс распространения тепла только вследствие движения структурных частиц среды называется теплопроводностью, а процесс

передачи, обусловленный перемещением молярных объемов среды, – конвекцией.

Таким образом, существует три способа переноса тепла: теплопроводность, конвекция и излучение. В действительных процессах все эти три способа теплообмена обычно сопутствуют друг другу и часто связаны с переносом массы (диффузией), т.е. имеет место сложный тепло- и массообмен.

В теории теплоотдачи расчет сложного теплообмена осуществляется с помощью методов, обобщающих результаты отдельного изучения каждого из трех первичных способов переноса тепла. Следовательно, основным методом теории теплопередачи является расчленение сложного теплообмена на его составляющие по способу (механизму) переноса тепла и изучение этих составляющих методами математической физики и научного опыта.

Практически, большинство процессов, рассматриваемых теорией теплообмена, протекает при взаимодействии твердых и жидких сред в областях, размеры которых чрезвычайно велики по сравнению с длиной свободного пробега атомов и молекул. Так, в объеме газа равном 10^{-3} мм³ при давлении $9,8 \times 10^4$ Па и температуре 273°К содержится примерно 10^6 молекул. Поэтому такие статистические понятия, как температура, давление, теплоемкость, вязкость и т.п. могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться в данном случае как дифференциалы ее объема.

Это означает, что в большинстве проблем теплообмена твердые и жидкие среды, составляющие систему, рассматриваются как непрерывные. Исключение приходится делать только для взаимодействия тел с весьма разреженным газом, когда размеры тела становятся соизмеримыми с длиной свободного пробега молекул.

1.2 Поле температур и поле тепловых потоков

Выше было указано, что возникновение теплового потока связано не с абсолютным значением температуры тела, а с наличием разности

температуры в различных его точках. Но разности температур можно приписать вполне определенное направление, а именно: если соединить прямой две точки тела, то разность между их температурами можно считать положительной в направлении более высоких температур и отрицательной в направлении более низких температур.

Соединим сплошными линиями все точки некоторого плоского сечения тела, имеющие в данный момент времени одинаковую температуру (рисунок 1.1). В трехмерном пространстве эти линии равных температур (изотермы) перейдут в соответствующие изотермические поверхности. Такое пространственное геометрическое место точек, в которых рассматриваемая физическая величина имеет одинаковое значение, называется поверхностью уровня. Очевидно, что поверхности уровня, и в частности, интересующие нас изотермические поверхности, никогда не пересекаются друг с другом, ибо в данной точке пространства в данный момент времени возможно только одно значение данной физической величины.

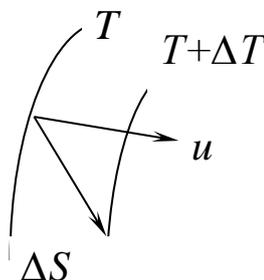


Рисунок 1.1 Поле температур

Интенсивность изменения температуры в каком-либо направлении может быть охарактеризована густотой (плотностью) изотерм на некотором линейном отрезке ΔS , т.е. производной ($\partial T/\partial S$).

Если отрезок ΔS направлен по касательной к изотерме, то температура на бесконечно малом удалении от данной точки в данном направлении не меняется, и в таком случае $\partial T/\partial S=0$. Наоборот, в направлении нормали к изотерме значение $\partial T/\partial S$ будет наибольшим,

так как в этом направлении расстояние между двумя изотермами наименьшее. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{\text{макс}} = \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (1.2.1)$$

Вектор $\partial T/\partial n$ называется температурным градиентом (grad) и определяет наибольшую скорость изменения температуры по нормали к изотерме в данной точке пространства. Очевидно, что температурный градиент как производная существует тогда, когда поле температур является непрерывным, а функция

$$T = T(x, y, z, t), \quad (1.2.2)$$

выражающая математически это поле, дифференцируема.

Таким образом, скалярному полю температур соответствует векторное поле температурных градиентов, а условие возникновения теплового потока можно формулировать как условие неравенства нулю величины grad. Соответственно этому тепловой поток направлен по линии температурного градиента, в обратную сторону по отношению к последнему.

1.3 Коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи

В некоторых случаях количество тепла, приобретаемое и отдаваемое телом, при прочих равных условиях приблизительно пропорционально поверхности тела и разности между его температурой и температурой окружающей среды. Поэтому для практических расчетов установившегося (постоянного во времени) теплового потока подводимого (или отводимого) к твердой поверхности от обтекающих ее жидкости или газа, исторически установилась формула

$$Q = \alpha S \Delta T t, \quad (1.3.1)$$

где $\Delta T = T_w - T_\infty$ – разность между средними температурами поверхности S и потока жидкости (газа). Множитель пропорциональности между величиной Q и произведением $S \Delta T t$, обозначаемый буквой α , называется коэффициентом теплоотдачи и имеет размерность Вт/(м²·К).

Формула (1.3.1) отнюдь не отражает действительной зависимости теплового потока от температуры, физических свойств и размеров тел, находящихся в тепловом взаимодействии. По существу, эта формула является только некоторым формальным приемом, переносящим все трудности расчета теплопередачи на определение коэффициента α , который обычно в меньшей степени зависит от размеров поверхности теплообмена и от температурного напора ΔT , чем тепловой поток Q .

При расчетах теплопередачи от одной жидкой среды к другой, отделенной от первой твердой стенкой, в расчетной практике пользуется выражением, аналогичным формуле (1.3.1), но множитель пропорциональности обозначают буквой k и называют коэффициентом теплопередачи

$$Q = kS\Delta Tt,$$

здесь $\Delta T = T_1 - T_2$ – разность между средними температурами потока жидкости, отдающего тепло, и потока жидкости, воспринимающего это тепло, К.

ГЛАВА 2 УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ВЕЩЕСТВЕННОЙ СРЕДЕ

2.1 Гипотеза о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температур

При стационарном процессе теплообмена и постоянной плотности теплового потока количества тепла, проходящего через некоторый элемент тела, прямо пропорционально площади рассматриваемого элемента и промежутку времени. Для нестационарного процесса такого рода пропорциональность может быть сохранена только в этом случае, если мы рассматриваем весьма малые промежутки времени и площади. В соответствии с этим

$$d^2Q = \mathbf{q}dS dt, \quad (2.1.1)$$

где dS – элементарная площадь, через которую проходит тепловой поток, dt – элементарный период времени, d^2Q – элементарный поток тепла, который рассматривается в данном случае как дифференциал второго порядка (поскольку величины dS и dt рассматриваются как дифференциалы первого порядка). Величина \mathbf{q} , имеющая размерность Вт/м², представляет собой вектор теплового потока, направленный по нормали к площадке в сторону обратную направлению градиента температур. Величина \mathbf{q} , была введена в виде гипотезы Био-Фурье о прямой пропорциональности вектора теплового потока градиенту температуры

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}T. \quad (2.1.2)$$

Знак минус показывает взаимообратную направленность вектора теплового потока и градиента температур, а множитель пропорциональности λ рассматривается как некоторая физическая характеристика, именуемая коэффициентом теплопроводности.

Размерность коэффициента теплопроводности

$$\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad}T|}, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}).$$

В действительности коэффициент теплопроводности данного вещества отнюдь не является строго постоянной величиной, а также как и другие физические характеристики (удельная теплоемкость, коэффициент вязкости и т.п.), меняется с изменением состояния тела и, в первую очередь, с изменением его температуры. Так, коэффициент теплопроводности газа возрастает с повышением температуры. То же наблюдается и у многих теплоизоляционных материалов. У чистых металлов коэффициент теплопроводности уменьшается с ростом температуры, а у жидкостей эта зависимость подчас имеет весьма сложный характер. Так, коэффициент теплопроводности воды в некотором интервале температур возрастает, а затем уменьшается. В газах импульс и энергия теплового движения передается при непосредственном взаимодействии (столкновении молекул), вследствие чего коэффициент теплопроводности, вязкости и диффузии пропорциональны друг другу

$$\lambda \approx c\mu \approx c\rho D, \quad (2.1.3)$$

где D – коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$.

В неметаллических конденсированных средах энергия теплового движения передается в основном за счет колебаний молекул, т.е. имеет место фононная теплопроводность. В чистых конденсированных металлах теплота переносится движением свободных электронов, что обуславливает высокую теплопроводность и пропорциональность ее электропроводности. В сплавах фононная и электронная теплопроводности могут быть соизмеримы. Для кристаллов имеет место анизотропия теплопроводности, т.е. значение λ не одинаково в направлении различных осей кристалла.

Таким образом, в уравнении (2.1.2) множитель пропорциональности λ в общем случае следует рассматривать как некоторую функцию температуры и координат, а, следовательно, и во времени. Однако во многих практически интересных случаях с достаточной степенью точности оказывается возможным считать величину λ постоянной, вводя в расчет ее некоторое среднее значение в данном интервале температур.

2.2 Уравнение распространения тепла

Вывод дифференциального уравнения распространения тепла основан на применении закона сохранения и превращения энергии. Для тепловых процессов этот закон выражается в идее первого начала термодинамики, которое для единицы объема движущейся среды (рисунок 2.1) можно записать в виде уравнения



Рисунок 2.1

$$Q_V dt + L_V dt = \rho \left(du + \frac{dw^2}{2} \right), \quad (2.2.1)$$

здесь Q_V – количество тепла, втекающего в единицу объема среды за единицу времени, Вт/м³, u – внутренняя энергия одного килограмма среды, Дж/кг, w – скорость движения, м/с.

Уравнение (2.1.1) выражает то обстоятельство, что изменение полной энергии тела, складывающегося в данном случае из его внутренней энергии ρu и кинетической энергии $\rho w^2/2$, обусловлено количеством теплоты, подводимой к телу и внешней работой, совершаемой над телом. Поскольку рассматривается движение элемента потока жидкости, то работа в данном случае связана с изменением давления и внутренним трением текущей среды. Внутренняя энергия среды связана с ее энтальпией (теплосодержанием) уравнением

$$du = di - d(p/\rho). \quad (2.2.2)$$

Для совершенного газа $di = c_p dT$. Воспользовавшись этими соотношениями, получаем

$$du + \frac{dw^2}{2} = di + \frac{dw^2}{2} - \frac{dp}{\rho} + \frac{pd\rho}{\rho^2}. \quad (2.2.3)$$

Выделим в рассматриваемом теле объем V , ограниченный поверхностью S . Уравнение теплового баланса этого объема, отнесенное к единице времени, можно записать в виде

$$\int_V Q_V dV + \int_S \mathbf{q} dS = \int_V q_V dV, \quad (2.2.4)$$

где q_V – плотность тепловых источников, а тепловой поток \mathbf{q} направлен по внешней нормали к поверхности S .

Внутренние источники тепла могут возникать вследствие излучения, объемных химических реакций, радиоактивного распада вещества, прохождения электрического тока, работы трения и т.п. Первый член этого уравнения представляет собой изменение теплосодержания рассматриваемого объема; второй член – количество тепла, ушедшее через поверхность S путем теплопроводности; третий – количество тепла, выделенное внутренними источниками (если q_V имеет знак минус, то в теле находятся стоки тепла).

Между потоком вектора через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V и дивергенцией вектора существует связь, выражаемая формулой Остроградского-Гаусса

$$\int_S \mathbf{q} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV. \quad (2.2.5)$$

Преобразование (2.2.5) справедливо, если в объеме V нет сильных разрывов функции. Следовательно, в тепловой задаче это означает, что область V не должна включать границы раздела фаз. Вводя преобразование (2.2.5) в левую часть уравнения (2.2.4), находим

$$Q_V + \operatorname{div} \mathbf{q} = q_V.$$

Так как величина \mathbf{q} – тепло, ушедшее путем теплопроводности (2.1.2), то можно написать

$$Q_V = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_V. \quad (2.2.6)$$

В прямоугольных координатах

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}. \quad (2.2.7)$$

Если принять гипотезу Фурье, то

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (2.2.8)$$

Тогда выражение (2.2.6) в прямоугольных координатах имеет вид

$$Q_V = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + q_V. \quad (2.2.9)$$

Подставляя (2.2.9) в уравнение (2.2.1) и принимая во внимание соотношение (2.2.3) получаем уравнение Фурье-Кирхгофа

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} +$$

$$+ q_v + L_v + \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \left[\frac{di}{dt} + \frac{d(w^2/2)}{dt} \right]. \quad (2.2.10)$$

Это уравнение параболического типа, т.е. имеет нестационарные решения при бесконечно большой скорости распространения теплового возмущения. Реальная же скорость распространения теплового возмущения в вещественной среде имеет порядок не более средней скорости теплового потока движения структурных частиц, а для излучения равна скорости распространения электромагнитных волн. Однако во многих практических приложениях можно ограничиться уравнением распространения тепла в формуле (2.2.10).

Оно содержит давление p , скорость w и плотность ρ . Следовательно, для общего решения задачи о теплообмене в движущейся среде уравнению (2.2.10) необходимо присоединить еще уравнения, определяющие поле скоростей и связь между термодинамическими параметрами состояния среды. Такое замыкание системы дифференциальных уравнение теплообмена в движущейся среде достигается присоединением к уравнению распространения тепла уравнений движения и сплошности потока жидкости и уравнения состояния.

Полные производные по времени от давления, теплосодержания, квадрата скорости и плотности являются функциями координат и времени, в связи с чем, полный дифференциал любой из них

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz, \quad (2.2.11)$$

отсюда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.2.12)$$

Величины $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, $dz/dt = w$ представляют собой проекции вектора скорости течения среды на соответствующие координаты. Таким образом, рассматриваемая полная производная распадается на две с физической точки зрения разные части. Первый член в правой части

выражения (2.2.12) характеризует изменение данной величины, связанное с изменением поля этой величины во времени. Сумма остальных трех членов правой части выражения (2.2.12) характеризует изменение данной величины, происходящее в связи с перемещением рассматриваемого элемента среды из одной точки пространства в другую. Иначе говоря, частная производная $\partial\varphi/\partial t$ представляет собой скорость изменения φ во времени в той или иной точке пространства, в которой элементарный объем среды находится в данный момент времени, а сумма

$$u \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v \frac{\partial\varphi}{\partial y} + w \frac{\partial\varphi}{\partial z} = (\mathbf{w}, \text{grad } \varphi) \quad (2.2.13)$$

представляет собой скорость изменения φ , обусловленного перемещением элементарного объема dV из точки со значением $\varphi = \varphi_1$ в точку со значением $\varphi = \varphi_2$.

В связи с изложенным величина $\partial\varphi/\partial t$ называется местным или локальным изменением, а величина $(\mathbf{w}, \text{grad } \varphi)$ – изменением перемещения или конвективным изменением.

2.3 Частные случаи уравнения теплопроводности

В векторной форме уравнение имеет вид

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) + q_v + L_v - \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{di}{dt} + \rho \frac{d(w^2/2)}{dt}. \quad (2.3.1)$$

При умеренных скоростях течения жидкости, когда работа внешних сил и кинетическая энергия потока малы по сравнению с их энтальпией (т.е. практически можно пренебречь влиянием изменения давления и кинетической энергией), уравнение распространения тепла существенно упрощается и принимает вид

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) + q_v = \rho \frac{di}{dt}. \quad (2.3.2)$$

Если коэффициент теплопроводности и удельную теплоемкость среды можно с достаточной точностью можно считать постоянным, тогда

$$\lambda \nabla^2 T + q_v = \rho c \frac{dT}{dt}. \quad (2.3.3)$$

В неподвижной среде, в частности в твердом теле, $w = 0$ и при постоянных физических свойствах

$$\lambda \nabla^2 T + q_v = \rho c \frac{dT}{dt}. \quad (2.3.4)$$

При отсутствии внутренних источников тепла, умеренных скоростях течения уравнение распространения тепла принимает наиболее простую форму (уравнение Фурье-Остроградского)

$$\frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad } T). \quad (2.3.5)$$

В этом уравнении λ , c (для газа c_p) и ρ входят не порознь, а вместе – в виде комплекса

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}, \quad (2.3.6)$$

играющего здесь ту же роль, что и коэффициент диффузии в уравнении массопереноса. Очевидно, что всякий комплекс, составленный из нескольких физических характеристик, может, в свою очередь, рассматриваться как новая физическая величина, характеризующая некоторые особые свойства среды. Комплекс a , имеющий размерность $\text{м}^2/\text{с}$, представляет собой отношение коэффициента теплопроводности среды и ее объемной теплоемкости. Это отношение можно рассматривать как меру скорости изменения температуры единицы объема среды при прохождении через него теплового потока, пропорционального λ . В соответствии с этой трактовкой комплексная физическая характеристика (2.3.6) называется коэффициентом температуропроводности среды или коэффициентом диффузии тепла. Таким образом, скорость изменения температурного поля во времени в твердом теле и жидкости, текущей с умеренной скоростью, при отсутствии внутренних источников тепла зависит только от одной физической характеристики – коэффициента температуропроводности.

При стационарном процессе $\partial T / \partial t = 0$ и, поскольку $a \neq 0$,

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.3.7)$$

Следовательно, конфигурация стационарного температурного поля в неподвижной среде с постоянными свойствами и без внутренних источников тепла не зависит от физических свойств среды, а определяется только формой рассматриваемого тела и распределением температуры на его гранях.

При наличии внутренних источников тепла стационарное температурное поле в неподвижной среде с постоянными физическими свойствами примет вид

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.3.8)$$

В этом случае конфигурация температурного поля зависит от геометрии тела, плотности внутренних источников тепла и коэффициента теплопроводности среды.

В среде, движущейся с умеренной скоростью, стационарное температурное поле определяется уравнением

$$a\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = (\mathbf{w}, \text{grad} T). \quad (2.3.9)$$

Следовательно, в этом случае конфигурация температурного поля зависит от коэффициента температуропроводности и объемной теплоемкости ρc .

При отсутствии внутренних источников тепла стационарное температурное поле в среде с постоянными физическими свойствами, движущейся с умеренной скоростью, зависит только от коэффициента температуропроводности.

ГЛАВА 3 УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

3.1 Связь между полем температур и полем скоростей в движущейся среде

Наличие конвективного члена в уравнении (2.3.1) показывает, что в движущейся среде теплообмен осуществляется не только за счет теплопроводности, но и вследствие переноса тепла перемещающимися частицами среды. При этом интенсивность конвективного переноса тепла пропорциональна мгновенному значению скорости течения среды в данной точке пространства. Следовательно, конфигурация поля температур в движущейся среде существенным образом зависит от конфигурации поля скоростей.

С другой стороны, температурное поле вызывает нарушение однородности физических свойств среды. В областях с более высокой температурой плотность среды вследствие теплового расширения уменьшается, и получается неустойчивое распределение плотности. Элементы жидкости приходят в движение, обусловленное температурным полем. Если жидкость (газ) не подвергается какому-либо внешнему механическому воздействию, побуждающему ее к перемещению (например, воздействию насоса), то единственным источником движения среды в этом случае оказывается процесс теплообмена. Такое движение жидкости или газа называется свободной тепловой конвекцией, в отличие от вынужденной конвекции, когда движение среды обуславливается внешним воздействием. Кроме того, наличие неоднородного температурного поля обуславливает и переменность вязкости жидкости, что также сказывается на характере поля скоростей.

Таким образом, поля температур и скоростей в движущейся среде являются следствием тепловых и механических взаимодействий и, строго говоря, не могут рассматриваться в отрыве друг от друга. При этом поле температур всегда самым существенным образом зависит от поля скоростей. В отношении же поля скоростей можно выделить та-

кие течения, в которых тепловое воздействие весьма мало по сравнению с воздействием внешнего побудителя движения. Поэтому в условиях вынужденной конвекции часто пренебрегают влиянием поля температур на поле скоростей и учитывают только обратное воздействие.

Этот прием имеет важное методологическое значение, так как самым существенным образом упрощает исследование теплообмена в ряде практически важных задач с дозвуковыми скоростями течения.

3.2 Уравнение неразрывности потока жидкости

Система дифференциальных уравнений гидродинамики строится на основе законов сохранения массы и количества движения.

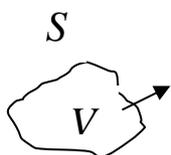


Рисунок 3.1

Рассмотрим поток жидкости через поверхность S , замыкающую объем V (рисунок 3.1). В этом случае сжимаемой жидкости часть ее может задержаться или вытечь из рассматриваемого объема. При этом плотность жидкости в данной точке пространства будет

возрастать или уменьшаться в единицу времени со скоростью $\partial\rho/\partial t$. Следовательно, изменение количества вещества в объеме V будет

$$-\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV = \int_S \rho \mathbf{w} dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) dV. \quad (3.2.1)$$

Знак минус при $\partial\rho/\partial t$ взят потому, что плотность жидкости в рассматриваемом объеме возрастает тогда, когда приращение расхода жидкости по координатам меньше нуля и убывает, когда приращение расхода положительно.

Из уравнения (3.2.1) следует что

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (3.2.2)$$

или, в декартовых координатах

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.2.3)$$

Для установившегося течения сжимаемой жидкости, когда $\partial\rho/\partial t = 0$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0. \quad (3.2.4)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (3.2.5)$$

3.3 Уравнение движения вязкой жидкости

В вязкой жидкости возможны как нормальные напряжения, так и напряжения сдвига. Нормальные напряжения обуславливаются наличием сил давления, а напряжения сдвига вызываются трением между слоями жидкости, движущимися с различной скоростью. Напряжения сдвига (или касательные напряжения) зависят от градиента скорости. По закону Ньютона для одномерного течения

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.3.1)$$

Жидкости, подчиняющиеся этому закону, называются ньютоновскими, а множитель пропорциональности μ – коэффициентом внутреннего трения или динамическим коэффициентом вязкости жидкости. Этот коэффициент имеет размерность Па·с, т.е. размерность импульса силы, отнесенного к единице поверхности трения.

Уравнения движения невязкой жидкости были составлены Эйлером. Навье и Стокс обобщили эти уравнения для случая течения жидкости, подчиняющейся закону трения Ньютона. В векторной форме уравнение движения ньютоновской жидкости имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{g}\rho + 2 \operatorname{div}(\mu \dot{S}) - \operatorname{grad} \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{w} \right). \quad (3.3.2)$$

Здесь вектор $d\mathbf{w}/dt$ – вектор с проекциями du/dt , dv/dt , dw/dt , \dot{S} – тензор скоростей деформации.

Для изотермического течения несжимаемой жидкости, когда вязкость и плотность постоянны, из уравнения (3.2.2) следует

$$\rho \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{g}\rho - \operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (3.3.3)$$

где $\nabla^2 \mathbf{w}$ – вектор с проекциями $\nabla^2 u$, $\nabla^2 v$, $\nabla^2 w$.

В проекциях на прямоугольные координаты векторному уравнению (3.3.3) соответствует система уравнений (при $\mathbf{w} = 0$)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Таким образом, для характеристики теплообмена в средах с умеренными скоростями течения несжимаемой жидкости к уравнению переноса тепла (при $q_v = 0$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.3.5)$$

следует присоединить уравнения (3.3.4) и уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.3.6)$$

ГЛАВА 4 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

4.1 Временные и пространственные краевые условия

Совокупность уравнений распространения тепла, неразрывности и движения жидкости в общей форме описывает все проекции теплообмена путем теплопроводности и конвекции. В этом смысле говорят, что данная система уравнений описывает (является математической моделью) некоторый класс физических явлений. Число единичных явлений, входящих в данный класс, неограниченно велико. Это обстоятельство находит математическое отображение в этом факте, что всякое дифференциальное уравнение имеет сколь угодно большое число частных решений. Решение, соответствующее данной конкретной задаче, выбирается с помощью краевых условий.

Временные краевые условия определяют поле переменных, входящих в уравнения данного класса физических явлений, в начальный и конечный момент времени рассматриваемого конкретного процесса. Пространственные краевые условия определяют значения переменных на границах области, в которой происходит рассматриваемый процесс. В связи с этим такого рода условия дают те конкретные значения величин, которые выделяют определенное единичное явление из всего класса явлений той же физической природы.

Для стационарного (установившегося процесса), т.е. такого процесса, в котором поля характеризующих его переменных не меняются во времени, временные краевые условия отпадают. Поэтому единичный стационарный процесс однозначно определяется путем задания только граничных условий.

4.2 Краевые условия к уравнениям гидродинамики

При рассмотрении задач, связанных с движением жидкой среды, важнейшим краевым условием является скорость течения в непосредственной близости к твердой ограждающей поверхности (стенки ка-

нала, поверхность обтекаемого тела). В этом случае, когда неподвижная твердая стенка непроницаема, нормальная к ее поверхности составляющая вектора относительной скорости потока среды равна нулю. Если на ограждающей поверхности в результате какого-либо физического или химического процесса происходит поглощение или выделение жидкости, то нормальная к стенке составляющая вектора скорости потока определяет скорость протекания соответствующего процесса на стенке.

В отношении составляющей вектора относительной скорости потока, касательной к твердой стенке, опытом установлено, что на стенке она равна нулю. Это обстоятельство является следствием «прилипания» всякой реальной жидкости к твердой поверхности. Исключение составляет только движение сильно разреженного газа, когда длина свободного пробега молекул становится больше по сравнению с поперечными размерами канала, по которому этот газ движется.

Таким образом, если плоскость XZ касательна в данной точке к поверхности ограждения и Y нормальна к ней, то составляющая вектора скорости течения на стенке

$$u_w = 0, \quad w_w = 0, \quad v_w = \pm j_w / \rho. \quad (4.2.1)$$

Здесь v_w – объемная скорость поглощения (выделения) жидкости на твердой стенке, $\text{м}^3/(\text{м}^2\text{с})$; j_w – массовая скорость того же процесса, $\text{кг}/(\text{м}^2\text{с})$.

Величина v_w считается положительной, если она направлена от стенки вглубь потока. В этом случае и величину j_w считают положительной, а количество текущей среды возрастает в направлении осредненного движения потока. При поглощении части среды на стенке величине j_w приписывают знак минус. В этом случае скорость v_w направлена из потока к стенке, а количество текущей среды в направлении осредненного движения уменьшается.

В соответствии со сказанным составляющие градиента скорости на твердой стенке

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_w = 0, \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_w = \frac{\tau_w}{\mu}. \quad (4.2.2)$$

4.3 Краевые условия к уравнению теплопроводности

Временные краевые условия к уравнению распространения тепла сводятся к заданию скалярной функции

$$T = T_0(x, y, z), \quad (4.3.1)$$

дающей распределение температуры в рассматриваемой области в некоторый момент времени. Пространственные краевые условия сводятся к заданию условий теплообмена на ограждающих поверхностях. Способов задания таких условий три.

Пространственные краевые условия (граничные условия) первого рода задаются распределением температуры на ограждающих поверхностях как функции положения точки поверхности и времени. Эта функция должна быть задана для всех точек ограждающей поверхности. В ряде практически важных задач оказывается возможным положить, что температура на твердой стенке одинакова во всех ее точках.

Граничное условие второго рода задается тепловым потоком, пронизывающим ограждающую поверхность, как функцией точки этой поверхности

$$q_w = q(x_0, y_0, z_0), \quad (4.3.2)$$

где индекс «0» указывает, что точка принадлежит стенке. В связи с тем, что вблизи стенки тепло передается путем теплопроводности, т.е. тепловой поток определяется законом Фурье

$$q = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\right)_w, \quad (4.3.3)$$

условие (4.3.2) равносильно заданию на ограждающей поверхности градиента температуры

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = f(x_0, y_0, z_0). \quad (4.3.4)$$

Граничное условие третьего рода связывает температуру твердой стенки с температурой окружающей среды через заданное значение

коэффициента теплоотдачи к этой среде. В этом случае температура в данной точке ограждающей поверхности

$$T_w = T_\infty + \frac{q}{\alpha}. \quad (4.3.5)$$

При конвективном теплообмене, в отсутствие излучения и химических реакций тепловой поток от стенки можно записать в виде закона теплоотдачи Ньютона

$$q = \alpha(T_w - T_\infty), \quad (4.3.6)$$

где T_∞ – характерная температура среды. С другой стороны, этот же тепловой поток определяется по закону Фурье

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w. \quad (4.3.7)$$

Тогда граничное условие третьего рода можно записать в виде

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = \alpha(T_w - T_\infty). \quad (4.3.8)$$

При взаимодействии твердой массивной стенки тепловой поток к границе раздела передается теплопроводностью, т.е.

$$q = -\lambda_T \left(\frac{\partial T_T}{\partial n} \right)_w, \quad (4.3.9)$$

где λ_T – коэффициент теплопроводности твердого тела. Тогда имеем равенство

$$-\lambda_T \left(\frac{\partial T_T}{\partial n} \right)_w = \alpha(T_w - T_\infty). \quad (4.3.10)$$

Сравнивая (4.3.8) и (4.3.10) получим

$$\lambda_T \left(\frac{\partial T_T}{\partial n} \right)_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w, \quad (4.3.11)$$

где T_T – температура в твердом теле.

ГЛАВА 5 УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

5.1 Понятия о подобии физических явлений

Законы природы и их математические модели, являясь отражением объективной реальности, в наиболее общих формулировках не зависят от системы мер. В общей форме это есть проявление того фундаментального экспериментального факта, что локально физический мир описывается законами геометрии подобия. Иными словами, множитель размерных величин, характеризующих некоторый конкретный процесс, в действительности эквивалентно множеству некоторых безразмерных комплексов этих величин. Наиболее возможное число этих комплексов определяется следующей формулой анализа размерностей

$$m = I - z, \quad (5.1.1)$$

здесь m – общее число безразмерных комплексов, I – общее число размерных переменных, характеризующих данный процесс, z – число первичных размерностей, из которых составлены эти переменные.

Если процесс описывается множеством уравнений

$$\eta = \left\{ \sum D_i = 0 \right\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где D_i – некоторые размерные операторы, то каждое из этих уравнений может быть приведено к безразмерной форме путем деления на один из членов ряда. Рассмотрим, например, первое из уравнений (3.3.4)

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (5.1.2)$$

в котором произведем замену переменных, полагая

$$u = \bar{u} U_\infty, \quad v = \bar{v} U_\infty, \quad t = \bar{t} t_0, \quad p = \bar{p} \Delta p_0, \quad x = \bar{x} d, \quad y = \bar{y} d,$$

где U_∞ – масштаб скорости, t_0, d – масштабы изменения первичных (независимых) переменных. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{U_\infty}{t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{U_\infty^2}{d} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) = \\ & = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\Delta p_0}{\rho d} + \frac{\mu U_\infty}{\rho d^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Разделим полученное уравнение на коэффициент, стоящий при каком-либо члене. При делении на коэффициент, например, при втором члене слева имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{U_{\infty} t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \\ & = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \frac{\Delta p_0}{\rho U_{\infty}^2} + \frac{\nu}{U_{\infty} d} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right). \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

При первом члене слева и членах справа образовались безразмерные комплексы

$$\frac{U_{\infty} t_0}{d}, \frac{\Delta p_0}{\rho U_{\infty}^2}, \frac{U_{\infty} d}{\nu}. \quad (5.1.5)$$

Процессы, в которых безразмерные функции тождественны, называются подобными. Иначе говоря, подобными являются процессы одной и той же физической природы, у которых поля безразмерных параметров геометрически тождественны.

Поскольку в подобных процессах поля одноименных величин тождественны, то абсолютные значения этих величин отличаются друг от друга только масштабом, т.е. в двух подобных процессах значения одноименных величин в сходственных пространственно – временных точках отличаются друг от друга на некоторый постоянный множитель преобразования.

Нетрудно заметить, что, хотя множители преобразования отдельных величин, характеризующих данный процесс, могут быть неодинаковыми, однако для соблюдения подобия между ними должна существовать определенная взаимосвязь. В самом деле, тождественность безразмерных полей означает, что в подобных процессах безразмерные дифференциальные операторы имеют одно и то же значение.

С другой стороны, рассматриваемые процессы имеют одну физическую природу и соответственно описываются одними и теми основными уравнениями. Следовательно, для подобных процессов должны быть одинаковыми и безразмерные комплексы, т.е. должно быть

$$K_i = \text{idem}. \quad (5.1.6)$$

Таким образом, в подобных процессах безразмерные комплексы вида (5.1.5) имеют одинаковые значения и называются критериями подобия. При этом следует отчетливо помнить, что подобие требует не равенства критериев друг друга, а одинаковости одноименных критериев.

Из уравнения (5.1.4) видно, что число критериев равно числу членов уравнения без единицы, т.е.

$$m = n - 1. \quad (5.1.7)$$

Физический процесс полностью описывается некоторой системой основных уравнений и присоединенных к ним краевых условий в том случае, когда эта система является замкнутой. Тогда в принципе существует некоторая функция

$$y_i = \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (5.1.8)$$

где y_i – искомая неизвестная (зависимая) переменная, x_i – независимые переменные, входящие в основную систему уравнений.

Для того чтобы выяснить, какие из входящих в уравнения переменных являются независимыми, необходимо определить следующие условия протекания изучаемого процесса:

- 1) геометрические свойства системы, в которой происходит процесс (включая и координатную систему);
- 2) существенные для этого процесса физические характеристики тел, образующих систему;
- 3) начальное или конечное состояние системы;
- 4) условия на границах системы в течение процесса.

Как видно, этот перечень представляет собой расширенное определение краевых условий и называется условиями однозначности. Таким образом, условия однозначности являются комплексом физических и математических условий, обеспечивающим локальное существование и единственность решения заданной системы уравнений.

Величины, входящие в условия однозначности, задаются внешним образом по отношению к основным уравнениям и поэтому являются независимыми переменными, множество некоторых однозначно

определяет протекание данного физического явления. В соответствии с этим все остальные переменные, входящие в основное уравнения, являются зависимыми переменными.

5.2 Критерии подобия как обобщенные безразмерные переменные

В предыдущем разделе безразмерные параметры мы образовывали путем деления значения некоторой величины в данной точке на значение той же величины в масштабной точке. Теперь поступим несколько иначе. Выпишем уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости, полагая, что величины λ , c , ρ , μ остаются постоянными в данном процессе

$$a\nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad} T),$$

$$\mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad}) \mathbf{w}, \quad (5.2.1)$$

$$\text{div} \mathbf{w} = 0.$$

Так как температура и давление входят в эти уравнения только под знаками дифференциальных операторов, то уравнения (5.2.1) определяют не абсолютные значения T и p , а их отклонения от температуры и давления в некоторой масштабной точке. Рассмотрим, например, одномерный поток жидкости вблизи твердой стенки (рисунок 5.1).

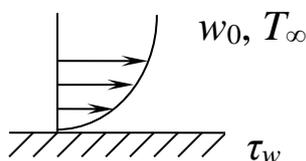


Рисунок 5.1 Поток жидкости вблизи твердой стенки

Давление на самой стенке равно p_w , а давление вдали от стенки равно полному давлению

$$p_1 = p_w - \frac{\rho w_0^2}{2},$$

так что давление в потоке изменяется на

$$p_{dyn} = p_1 - p_w = \frac{\rho w_0^2}{2},$$

т.е. величина p_{dyn} и есть масштаб изменения давления в потоке. Аналогично, масштаб изменения температуры в таком потоке будет служить величина

$$\Delta T_0 = T_w - T_\infty.$$

В качестве переменной температуры будет служить величина $\Delta T = T_w - T$ либо $\Delta T^* = T_w - T_\infty$, а не абсолютные значения температуры. Тогда уравнения (5.2.1) можно переписать так

$$\begin{aligned} a\nabla^2(\Delta T) + \frac{q_v}{\rho c} &= \frac{\partial \Delta T}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad } \Delta T), \\ \mathbf{g} - \frac{1}{p} \text{grad } \Delta p + \nu \nabla^2 \mathbf{w} &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad}) \mathbf{w}, \\ \text{div } \mathbf{w} &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

где ΔT и Δp – соответствующие перепады температур и давления относительно некоторых заданных значений T_∞ (или T_w) и $p_{ст}$. Разделим первое из этих уравнений на величину $a\Delta T_0 / l_0^2$, а второе и третье – на величину w_0^2 / l_0 , где ΔT_0 – масштабный перепад температур; w_0 – масштаб скорости и l_0 – масштаб длины.

Введя масштабные величины и физические характеристики (рассматриваемые в данном случае как постоянные) под знаки дифференциальных операторов, получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{G} + \frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T_0} &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (at/l_0^2)} + \left(\frac{\mathbf{w} l_0}{a}, \text{grad } \mathcal{G} \right), \\ \mathbf{g} l_0 - \text{grad } \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} + \frac{\nu}{w_0 l_0} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial (w_0 t/l_0)} + (\boldsymbol{\omega}, \text{grad } \boldsymbol{\omega}), \\ \text{div } \boldsymbol{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Здесь $\vartheta = \Delta T / \Delta T_0$ – безразмерный температурный напор, $\omega = \mathbf{w} / w_0$ – безразмерная скорость, $\bar{x} = x / l_0$, $\bar{y} = y / l_0$, $\bar{z} = z / l_0$ – безразмерные координаты в дифференциальных операторах этих уравнений.

Полученные безразмерные уравнения (5.2.3) содержат ряд комплексов в виде самостоятельных членов уравнения, сомножителей при дифференциальных операторах и непосредственно под знаками дифференциальных операторов.

Таким образом, уравнения (5.2.3) представляют собой связь между критериями подобия, выступающими в них в качестве не только безразмерных параметров при дифференциальных операторах, как в уравнении (5.1.4), но и в качестве обобщенных переменных. Это обстоятельство позволяет строить безразмерные поля точечных значений соответствующих критериев рассматриваемого процесса.

5.3 Физический смысл некоторых критериев подобия

Рассмотренные выше уравнения теплопроводности и движения несжимаемой жидкости дают семь критериев подобия

$$\frac{wl}{a}, \frac{w^2}{gl}, \frac{\Delta p}{\rho w^2}, \frac{wl}{\nu}, \frac{at}{l^2} \frac{q_v l^2}{\lambda \Delta T}. \quad (5.3.1)$$

Здесь нижний индекс «0» опущен. Как будет видно, список критериев гораздо шире. Они появляются, например, при обезразмеривании граничных условий.

1. *Число Пекле* (Pe) – критерий теплового подобия

$$\text{Pe} = \frac{wl}{a} = \frac{\rho c w \Delta T}{(\lambda \Delta T / l)}. \quad (5.3.2)$$

Легко видеть, что в числителе стоит тепловой поток благодаря конвекции, а в знаменателе имеем тепло, переносимое за счет теплопроводности. Поэтому критерий (wl/a) может рассматриваться как отношение конвективного теплового потока и теплового потока за счет теплопроводности.

2. *Число Фруда* (Fr) – критерий гравитационного подобия

$$\text{Fr} = \frac{w^2}{gl} = \frac{\rho w^2}{\rho gl}, \quad (5.3.3)$$

есть отношение сил инерции (динамическим давления) и сил гидростатического давления.

3. *Число Эйлера* (Eu) – критерий подобия полей давления

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$$

определяет отношение сил давления в потоке к силам инерции.

4. *Число Рейнольдса* (Re) – критерий режима движения

$$\text{Re} = \frac{wl}{\nu} = \frac{\rho w^2}{\mu(w/l)}. \quad (5.3.4)$$

В числителе стоят силы инерции, в знаменателе – сила касательного напряжения (трения), так что критерий Рейнольдса есть отношение сил инерции и сил трения.

5. *Число Фурье* (Fo) – критерий тепловой гомохронности

$$\text{Fo} = \frac{at}{l^2} = \frac{\lambda(\Delta T/l)l^2 t}{\rho c \Delta T l^3}. \quad (5.3.5)$$

В числителе имеем количество тепла, поступающее в объем через поверхность l^2 , путем теплопроводности, в знаменателе – изменение теплосодержания тела объемом l^3 . Критерий характеризует связь между изменением температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

6. *Комплекс*

$$\frac{q_v l^2}{\lambda \Delta T} \quad (5.3.6)$$

можно рассматривать как меру отношения количества тепла $q_v l^3$, выделившегося в теле, к количеству тепла $(\lambda / l) \Delta T l^2$, прошедшему через тело за счет теплопроводности.

7. *Критерий гидродинамической гомохронности* (Ho)

$$\text{Ho} = \frac{wt}{l} = \frac{t}{l/w} \quad (5.3.7)$$

можно записать как отношение

$$\text{Но} = \frac{t}{t_0},$$

где $t_0 = l / w$ (рисунок 5.2) – время, необходимое потоку для прохождения вокруг тела размером l . Тогда Но характеризует фазу, в которой находится частица жидкости.

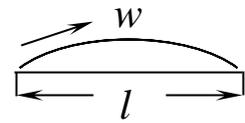


Рисунок 5.2

8. Число Прандтля (Pr) – критерий подобия температурных и скоростных полей

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{wl / a}{wl / \nu} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} \quad (5.3.8)$$

При $\text{Pr} = 1$, $\text{grad } p=0$ поля температур и скоростей подобны.

9. Число Нуссельта (Nu) – безразмерный коэффициент теплоотдачи

$$\text{Nu} = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (5.3.9)$$

характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое. Выразим граничное условие, определяемое формулой (4.3.8),

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = \alpha (T_w - T_\infty) \quad (5.3.10)$$

в безразмерном виде, полагая

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \xi = \frac{n}{l}.$$

Получим

$$-\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_w = \frac{\alpha l}{\lambda} = \text{Nu}, \quad (5.3.11)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

10. Число Био (Bi) – критерий краевого подобия

$$\text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_T} \quad (5.3.12)$$

характеризует связь между полем температур в твердом теле и условиями теплоотдачи на его поверхности. В случае массивных твердых стенок, граничное условие 3 рода подчиняется соотношению (4.3.10)

$$-\lambda_T \left(\frac{\partial T_T}{\partial n} \right)_w = \alpha (T_w - T_\infty). \quad (5.3.13)$$

Вводя в (5.3.13) безразмерные величины

$$\mathcal{G}_T = \frac{T_T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \xi = \frac{n}{l},$$

снова получаем

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \xi} \right)_w = \frac{\alpha l}{\lambda_T} = \text{Bi}. \quad (5.3.14)$$

Между критериями Nu и Bi существует связь, установить которую можно воспользовавшись соотношением (4.3.11)

$$\lambda_T \left(\frac{\partial T_T}{\partial n} \right)_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w. \quad (5.3.15)$$

Полагая

$$\mathcal{G}_T = \frac{T_T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \mathcal{G} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \xi = \frac{n}{l}, \quad (5.3.16)$$

легко получить

$$\frac{\lambda_T}{l} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_T}{\partial \xi} \right)_w = \frac{\lambda}{l} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \right)_w, \quad (5.3.17)$$

а с учетом (5.3.11) и (5.3.14) получим

$$\text{Nu} = \frac{\lambda_T}{\lambda} \text{Bi}. \quad (5.3.18)$$

ГЛАВА 6 УСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОВЫЙ ПОТОК В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

6.1 Дифференциальное уравнение стационарной теплопроводности

При $w = 0$ и $d\tau / dt = 0$ из уравнения (2.3.2) следует уравнение стационарной теплопроводности

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + q_v = 0. \quad (6.1.1)$$

При постоянном коэффициенте теплопроводности ($\lambda = \text{const}$) и отсутствии внутреннего источника тепла ($q_v = 0$) уравнение температурного поля максимально упрощается и сводится к условию равенства нулю лапласиана температуры

$$\nabla^2 T = 0, \quad (6.1.2)$$

т.е. в прямоугольных координатах

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0; \quad (6.1.4)$$

в сферических координатах

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \psi}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (6.1.5)$$

В случае изотропного тела с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией только температуры целесообразно ввести функцию

$$U = \int_0^T \lambda dT, \quad \lambda = \lambda(T). \quad (6.1.6)$$

Дифференцируя U по координатам, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (6.1.7)$$

$$\nabla^2 U = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (6.1.8)$$

Теперь уравнение теплопроводности (6.1.1) можно переписать в виде

$$\nabla^2 U + q_v = 0 \quad (6.1.9)$$

и при $q_v = 0$

$$\nabla^2 U = 0. \quad (6.1.10)$$

Тепловой поток через заданную поверхность S определяется формулой

$$Q = - \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS \quad (6.1.11)$$

или в соответствии с формулой (6.1.7)

$$Q = - \int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS. \quad (6.1.12)$$

Можно показать, что тепловой поток в изотропных телах с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией температуры, может вычисляться по формулам, выведенным для случая $\lambda = \text{const}$, при подстановке в эти формулы среднего коэффициента теплопроводности, определенного по формуле

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_1 - T_2} \int_{T_2}^{T_1} \lambda(T) dT. \quad (6.1.13)$$

6.2 Теплопроводность через плоскую стенку

Рассмотрим плоскую стенку толщиной δ (рисунок 6.1). Пусть температуры поверхностей стенки равны соответственно T_1' и T_2' . Температуры сред вдали от стенки равны T_1 и T_2 .

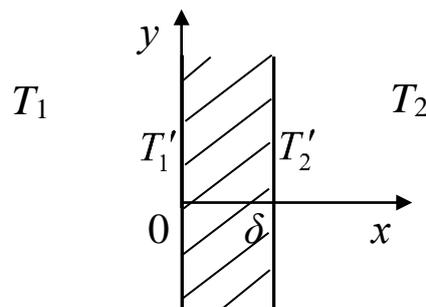


Рисунок 6.1 Схема плоской стенки

Высоту и длину стенки будем считать настолько большими по сравнению с ее толщиной δ , что температура в этих направлениях практически не меняется. Имеем

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0, \quad (6.2.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} T &= T_1', \quad x = 0, \\ T &= T_2', \quad x = \delta. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Интегрируя (6.2.1), получим

$$T = C_2 + C_1x. \quad (6.2.3)$$

Подставляя (6.2.3) в граничные условия (6.2.2), легко получить C_1 и C_2 . Окончательно имеем

$$T = T_1' - \frac{T_1' - T_2'}{\delta}x. \quad (6.2.4)$$

Определим тепловой поток

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \lambda \frac{(T_1' - T_2')}{\delta}. \quad (6.2.5)$$

Практически важным является выражение теплового потока не через температуры поверхностей стенки, а через температуры сред. Тепловой поток, проходящий через поверхность $x = 0$ равен согласно закону Ньютона

$$q = \alpha_1 (T_1 - T_1'), \quad (6.2.6)$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от первой среды к стенке. Аналогично, между второй средой и стенкой интенсивность теплоотдачи равна

$$q = \alpha_2 (T_2' - T_2). \quad (6.2.7)$$

Так как процесс установившийся, то эти тепловые потоки равны между собой. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
T'_1 - T'_2 &= \frac{q}{\lambda / \delta}, \\
T_1 - T'_1 &= \frac{q}{\alpha_1}, \\
T'_2 - T_2 &= \frac{q}{\alpha_2}.
\end{aligned}
\tag{6.2.8}$$

Сложив эти равенства, получим

$$T_1 - T_2 = q \left(\frac{1}{\lambda / \delta} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right)
\tag{6.2.9}$$

или, окончательно

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.
\tag{6.2.10}$$

Выражение (6.2.10) можно написать также в виде

$$q = k(T_1 - T_2),
\tag{6.2.11}$$

где

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}
\tag{6.2.12}$$

есть коэффициент теплопередачи.

Если стенка многослойная, то введя обозначение

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}},
\tag{6.2.13}$$

можем написать

$$q = k(T_1 - T_2).
\tag{6.2.14}$$

Здесь k – коэффициент теплопередачи через многослойную стенку, Вт/(м²К).

Частные температурные напоры могут быть выражены через полную разность температур с помощью формул

$$\begin{aligned}
T_1 - T_1' &= \frac{(T_1 - T_2)k}{\alpha_1}, \\
T_i' - T_{1+i}' &= \frac{(T_1 - T_2)k\delta_i}{\lambda_i}, \\
T_2' - T_2 &= \frac{(T_1 - T_2)k}{\alpha_2}.
\end{aligned}
\tag{6.2.15}$$

6.3 Теплопроводность через цилиндрическую стенку

На внутренней поверхности цилиндра (рисунок 6.2) задана температура T_1' , а на наружной T_2' . Температура среды внутри цилиндра равна T_1 , а температура внешней среды T_2 . внутренний радиус равен R_1 , наружный R_2 . Длина цилиндра достаточно велика для того, чтобы пренебречь потоком тепла к его торцам вдоль оси z . При этих условиях в уравнении теплопроводности температура является функцией только радиальной координаты r . Имеем

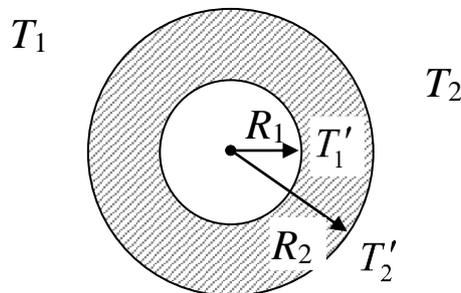


Рисунок 6.2 Схема цилиндра

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0.
\tag{6.3.1}$$

Уравнение (6.3.1) должно решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned}
T &= T_1', \quad r = R_1, \\
T &= T_2', \quad r = R_2.
\end{aligned}
\tag{6.3.2}$$

Умножим (6.3.1) на r . Получим

$$r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0
\tag{6.3.3}$$

или

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (6.3.4)$$

Интегрируя (6.3.4), находим

$$r \frac{dT}{dr} = C_1, \quad (6.3.5)$$

откуда после еще одного интегрирования запишем

$$T = C_1 \ln r + C_2. \quad (6.3.6)$$

Подставим (6.3.6) в граничные условия (6.3.2). Получим

$$\begin{aligned} T_1' &= C_1 \ln R_1 + C_2, \\ T_2' &= C_1 \ln R_2 + C_2. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

Решая систему относительно констант интегрирования C_1 и C_2 , имеем

$$C_1 = -\frac{(T_1' - T_2')}{\ln(R_2/R_1)}, \quad C_2 = T_1' + \frac{(T_1' - T_2')}{\ln(R_2/R_1)} \ln R_1. \quad (6.3.8)$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в решение (6.3.6) находим

$$\begin{aligned} T &= T_1' + \frac{(T_1' - T_2')}{\ln(R_2/R_1)} \ln R_1 - \frac{(T_1' - T_2')}{\ln(R_2/R_1)} \ln r = \\ &= T_1' - (T_1' - T_2') \frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}. \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Отсюда тепловой поток через цилиндрическую стенку

$$Q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{R_1} 2\pi R_1 L = \frac{2\pi\lambda(T_1' - T_2')}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (6.3.10)$$

Выразим Q через температуры сред T_1 и T_2 . Имеем

$$Q = \alpha_1 (T_1 - T_1') 2\pi R_1 L \quad (6.3.11)$$

для внутренней среды и

$$Q = \alpha_2 (T_2' - T_2) 2\pi R_2 L \quad (6.3.12)$$

для внешней. Уравнения (6.3.10), (6.3.11), (6.3.12) можно переписать и так

$$T_1' - T_2' = \frac{Q}{2\pi\lambda/\ln(R_2/R_1)}, \quad (6.3.13)$$

$$T_1 - T_1' = \frac{Q}{2\pi R_1 \alpha_1 L}, \quad (6.3.14)$$

$$T_2' - T_2 = \frac{Q}{2\pi R_2 \alpha_2 L}, \quad (6.3.15)$$

тогда имеем

$$T_1 - T_2 = \frac{Q}{2\pi L} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 R_2} \right). \quad (6.3.16)$$

В результате тепловой поток можно представить в виде

$$Q = k(T_1 - T_2)L, \quad (6.3.17)$$

где коэффициент теплопередачи k определяется соотношением

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{\ln(R_2/R_1)}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}}. \quad (6.3.18)$$

В случае многослойной стенки получается

$$Q = k^* (T_1 - T_2)L, \quad (6.3.19)$$

где

$$k^* = \frac{2\pi}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^N \frac{\ln(R_{i+1}/R_i)}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2 R_{N+1}}}.$$

6.4 Теплопроводность через шаровую стенку

Имеем полый симметричный шар, на внутренней поверхности которого дана температура T_1' и на наружной T_2' . Температура среды внутри шара T_1 , температура внешней среды T_2 . Температура является в этом случае функцией только одной координаты – радиуса шаровой поверхности, поэтому процесс описывается уравнением

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (6.4.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} T &= T'_1, \quad r = R_1, \\ T &= T'_2, \quad r = R_2. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Умножим (6.4.1) на r^2 . Получим

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + 2r \frac{dT}{dr} = 0. \quad (6.4.3)$$

Выражение в левой части (6.4.3) является полной производной, тогда

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (6.4.4)$$

или после интегрирования

$$r^2 \frac{dT}{dr} = C_1, \quad (6.4.5)$$

откуда

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2}. \quad (6.4.6)$$

Интегрируя (6.4.6), находим

$$T = \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (6.4.7)$$

Подставим решение (6.4.7) в граничные условия (6.4.2). Получим

$$T'_1 = \frac{C_1}{r_1} + C_2, \quad T'_2 = \frac{C_1}{r_2} + C_2. \quad (6.4.8)$$

Решая (6.4.8) относительно C_1 и C_2 , имеем

$$C_1 = \frac{T'_1 - T'_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}, \quad C_2 = T'_1 - \left(\frac{T'_1 - T'_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \right) \frac{1}{R_1}. \quad (6.4.9)$$

Тогда выражение для температуры примет вид

$$T = T'_1 - (T'_1 - T'_2) \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (6.4.10)$$

Тепловой поток будет равен

$$Q = -\lambda \left(\frac{dT}{dr} \right)_{R_1} 4\pi R_1^2 = 4\pi\lambda(T_1' - T_2') \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}. \quad (6.4.11)$$

Выразим тепловой поток через температуры T_1 и T_2 . Имеем

$$Q = 4\pi R_1^2 \alpha_1 (T_1 - T_1') \quad (6.4.12)$$

для внутренней среды и

$$Q = 4\pi R_2^2 \alpha_2 (T_2' - T_2) \quad (6.4.13)$$

для теплообмена между наружной поверхностью и внешней средой.

Уравнения (6.4.11-6.4.13) можно переписать так

$$T_1' - T_2' = \frac{Q}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (6.4.14)$$

$$T_1 - T_1' = \frac{Q}{4\pi R_1^2 \alpha_1}, \quad (6.4.15)$$

$$T_2' - T_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2 \alpha_2}. \quad (6.4.16)$$

Складывая эти уравнения, получим

$$T_1 - T_2 = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2} \right] \quad (6.4.17)$$

или

$$Q = \frac{4\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}}. \quad (6.4.18)$$

Последнее соотношение можно записать и в виде

$$Q = k(T_1 - T_2), \quad (6.4.19)$$

где

$$k = \frac{4\pi}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_2^2}}. \quad (6.4.20)$$

Для многослойной стенки имеем

$$k = \frac{4\pi}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right) + \frac{1}{\alpha_2 R_{N+1}^2}}. \quad (6.4.21)$$

Следует обратить внимание, что сферический источник радиуса R_1 , погруженный в неограниченную однородную сферу ($R_2 = \infty$, $T = T_2$) имеет конечный минимальный тепловой поток

$$Q_{\min} = 4\pi\lambda R_1 (T_1 - T_2). \quad (6.4.22)$$

6.5 Теплопроводность вдоль стержня постоянного поперечного сечения

На рисунке 6.3 изображена схема к задаче о теплопроводности вдоль стержня (прямого ребра). Одним торцом стержень плотно соединен с твердой поверхностью (трубы, корпуса двигателя и т.п.), имеющей температуру T_1 . Температура среды, окружающей стержень, равна T_0 . Коэффициент теплоотдачи от боковой поверхности стержня к среде обозначим через α , коэффициент теплоотдачи от свободного торца стержня к среде – через α_l . Вследствие возможного различия в температурах и условиях обтекания боковой и торцевой поверхностей

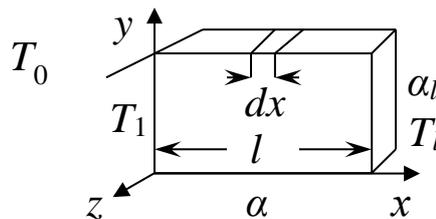


Рисунок 6.3 Схема прямого ребра

стержня в общем случае $\alpha_l \neq \alpha$. Далее предположим, что теплопроводность материала стержня достаточно велика, чтобы можно было считать температуру по его поперечному сечению практически неизменной. Собственно говоря, эта предпосылка равносильна утверждению,

что вследствие большого отношения длины стержня к его поперечному размеру частные производной $\partial T / \partial y$ и $\partial T / \partial z$ существенно меньше частной производной $\partial T / \partial x$.

Изменение большого количества тепла, протекающего через поперечное сечение стержня, составит

$$dQ = d\left(-\lambda F \frac{dT}{dx}\right),$$

где F – площадь поперечного сечения стержня, m^2 . При установившемся процессе это тепло отдается за счет теплоотдачи через элемент боковой поверхности $dS = Pdx$, где P – периметр стержня, м.

$$dQ = \alpha P dx (T - T_0).$$

Тогда уравнение теплопередачи в стержне принимает вид

$$-d\left(-\lambda F \frac{dT}{dx}\right) = \alpha P (T - T_0) dx. \quad (6.5.1)$$

Знак минус в левой части этого уравнения взят потому, что при $T > T_0$ тепловой поток вдоль стержня уменьшается вследствие теплоотдачи с его боковой поверхности.

Рассматривая плоское ребро (площадь сечения и периметр стержня не меняются вдоль координаты x) можно записать

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - m^2 (T - T_0) = 0, \quad (6.5.2)$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda F}}.$$

Решение (6.5.2) имеет вид

$$T - T_0 = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (6.5.3)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий на торцах стержня. При $x = 0$ имеем $T = T_1$. При определении температуры на свободном торце стержня ($x = l$) необходимо учесть, что количество тепла, передаваемого к этому торцу за счет теплопроводности вдоль стержня, отдается через поверхность торца в окружающую среду, т.е.

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_l = \alpha_l (T_l - T_0). \quad (6.5.4)$$

Использование первого граничного условия дает

$$T_1 - T_0 = C_1 + C_2. \quad (6.5.5)$$

В силу

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_l = m(C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}), \quad (6.5.6)$$

$$T_l - T_0 = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml},$$

получим для (6.5.4)

$$-\lambda m(C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}) = \alpha_l (C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}). \quad (6.5.7)$$

Введем обозначение

$$n = \frac{\alpha_l}{\lambda m}$$

и перепишем (6.5.7) в виде

$$C_1(1+n)e^{ml} + C_2(n-1)e^{-ml} = 0. \quad (6.5.8)$$

Тогда для определения констант C_1 и C_2 имеем систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= T_1 - T_0, \\ (1+n)C_1 e^{ml} - (1-n)C_2 e^{-ml} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Решая (6.5.9), легко получить

$$C_1 = (T_1 - T_0) \frac{(1-n)e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + n(e^{ml} - e^{-ml})}, \quad (6.5.10)$$

$$C_2 = (T_1 - T_0) \frac{(1+n)e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + n(e^{ml} - e^{-ml})}. \quad (6.5.11)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{(1+n)e^{m(l-x)} + (1-n)e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml} + n(e^{ml} - e^{-ml})}, \quad (6.5.12)$$

$$T_l = T_0 + \frac{(T_1 - T_0)}{e^{ml} + e^{-ml} + n(e^{ml} - e^{-ml})}. \quad (6.5.13)$$

Когда теплоотдача от свободного торца стержня мала или торец хорошо теплоизолирован, можно положить $\alpha_l = 0$. В этом случае $n = 0$ и соответственно

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{e^{m(l-x)} + e^{-m(l-x)}}{e^{ml} + e^{-ml}}, \quad (6.5.14)$$

$$T_l = T_0 + \frac{2(T_1 - T_0)}{e^{ml} + e^{-ml}}. \quad (6.5.15)$$

В случае стержня неограниченной длины выражение (6.5.14) можно переписать в виде

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{\left(\frac{e^{-ml}}{e^{-mx}} + \frac{e^{ml}}{e^{mx}} \right)}{e^{ml} + e^{-ml}}, \quad (6.5.16)$$

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-mx}. \quad (6.5.17)$$

Последняя формула дает распределение температуры вдоль стержня весьма большой длины по сравнению с его поперечным сечением.

Количество тепла, отдаваемое стержнем окружающей среде, равно количеству тепла, втекающему в стержень через его закрепленный торец

$$Q = -\lambda F \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}. \quad (6.5.18)$$

Дифференцируя (6.5.12) и подставляя полученное значение dT/dx при $x = 0$ в уравнение (6.5.18) получим

$$Q = m\lambda F (T_1 - T_0) \frac{(1+n)e^{ml} - (1-n)e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + n(e^{ml} - e^{-ml})} \quad (6.5.19)$$

или, с учетом $e^{ml} + e^{-ml} = \text{ch}(ml)$, $e^{ml} - e^{-ml} = \text{sh}(ml)$, запишем

$$Q = \lambda F m \frac{\text{sh}(ml) + n \text{ch}(ml)}{\text{ch}(ml) + n \text{sh}(ml)}. \quad (6.5.20)$$

ГЛАВА 7 НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ТЕПЛОТОВОЙ ПОТОК В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ БЕЗ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ

7.1 Уравнение нестационарного температурного поля

При отсутствии внутренних источников тепла уравнение теплопроводности принимает вид

$$a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (7.1.1)$$

Вводя безразмерные переменные

$$\mathcal{G} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{l_0}, \quad \bar{z} = \frac{z}{l_0},$$

где $\Delta T_0 = T_0 - T_\infty$ – начальный температурный напор, l_0 – характерный линейный размер тела, приводим уравнение (7.1.1) к виду

$$\nabla^2 \mathcal{G} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial (at / l_0^2)}. \quad (7.1.2)$$

Из этого уравнения видно, что безразмерная температура является функцией критерия Фурье

$$\text{Fo} = \frac{at}{l_0^2}, \quad (7.1.3)$$

т.е. сходственные времена пропорциональны квадрату линейного масштаба тела и обратно пропорциональны коэффициенту теплопроводности.

Среди практических задач о нестационарной теплопроводности важнейшее значение имеют две группы процессов: а) тело стремится к тепловому равновесию; б) температура тела претерпевает периодические изменения. К первой группе относятся прогрев и охлаждение тел, помещенных в среду с некоторым заданным тепловым состоянием, например, прогрев болванки в печи, охлаждение закаленной детали и т.п. Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например, тепловой процесс регенераторов, кладка которых периодически, то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом, который сам при этом подогревается. В этом

случае процесс периодические колебания температуры и теплового потока называют тепловыми волнами.

Проблема решения уравнения (7.1.1) является чисто математической. Специальные физические соображения приходится привлекать только при задании соответствующих начальных и граничных условий. Однако в огромном числе практически важных задач и эта проблема, по существу, снимается возможностью принять температуру тела в начальный момент времени одинаковой во всех его точках. Температуру на поверхности тела обычно можно считать или постоянной за время протекания процесса, или зависящей от постоянного коэффициента теплоотдачи и меняющейся по заданному закону температуры окружающей среды (последнюю также во многих случаях можно считать постоянной).

Аналитический метод решения уравнения теплопроводности (7.1.1) первоначально был развит в работах Фурье и в дальнейшем нашел широкое применение в самых разнообразных областях математической физики.

7.2 Решение в виде произведения двух функций

Существует ряд решений (интегралов) уравнения (7.1.2). Одним из них, имеющим большое практическое значение, является произведение двух функций, из которых одна связана только с координатами, другая только со временем

$$T = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\varphi(F_0). \quad (7.2.1)$$

Дифференцируя это уравнение и подставляя соответствующие производные в уравнение (7.2.2), получаем

$$\varphi(F_0)\nabla^2\psi = \psi\varphi'. \quad (7.2.2)$$

Таким образом, для того, чтобы выражение (7.2.1) удовлетворяло уравнению (7.1.2) необходимо, чтобы функции ψ и φ , не зависящие друг от друга, удовлетворяли условию

$$\frac{\nabla^2\psi}{\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} = \text{const}. \quad (7.2.3)$$

Если тело с некоторой температурой T погружено в среду с температурой T_0 , отличной от температуры этого тела, то в результате возникающего процесса теплообмена тело стремится к тепловому равновесию с окружающей средой. Когда $T_0 > T$, тело нагревается, когда $T_0 < T$, тело охлаждается. При отсутствии в теле внутренних источников тепла температура во всех его точках будет меняться монотонно, стремясь к температуре окружающей среды.

Пусть константа в уравнение (7.2.3) равна $(-\beta^2)$, где β – действительное число. Имеем

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\beta^2. \quad (7.2.4)$$

Проинтегрируем (7.2.4)

$$\frac{d\varphi'}{\varphi} = -\beta^2 d(\text{Fo}), \quad \varphi = C e^{-\beta^2 \text{Fo}}. \quad (7.2.5)$$

Подставим решение (7.2.5) в уравнение (7.2.4) получим

$$\frac{\nabla^2 \psi}{\psi} = -\beta^2 \quad (7.2.6)$$

или

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = 0. \quad (7.2.7)$$

7.3 Нагревание (охлаждение) плоской пластины

Рассмотрим неограниченную плоскую пластину толщиной 2δ (рисунок 7.1). В начальный момент времени пластина имела температуру T_0 . Температура окружающей среды равна T_∞ . Безразмерная температура равна

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}. \quad (7.3.1)$$

Начальное условие имеет вид

$$\vartheta = 1, \quad \text{Fo} = 0. \quad (7.3.2)$$

Рассмотрим граничные условия. Первое условие – условие симметрии

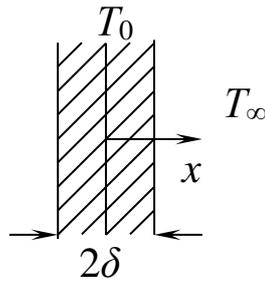


Рисунок 7.1 Нагревание (охлаждение) плоской пластины

$$\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = 0, \quad \xi = \frac{x}{\delta} = 0. \quad (7.3.3)$$

На границах пластины имеет место граничное условие третьего рода. Оно записывается как

$$-\lambda_T \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right)_{x=\delta} = \alpha (T - T_\infty)_{x=\delta}. \quad (7.3.4)$$

В безразмерной записи имеем

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi}\right)_{\xi=1} = (\mathcal{G})_{\xi=1} \text{Bi}, \quad (7.3.5)$$

где

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda_T},$$

λ_T – коэффициент теплопроводности твердого тела. Если в условия (7.3.3) и (7.3.5) подставить $\mathcal{G} = \psi \varphi$ получим

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0, \quad \xi = 0, \quad (7.3.6)$$

$$-\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_{\xi=1} = (\psi)_{\xi=1} \text{Bi}. \quad (7.3.7)$$

В рассматриваемом случае функция ψ зависит только от одной переменной ξ , тогда уравнение (7.2.7) примет вид

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \beta^2 \psi = 0. \quad (7.3.8)$$

Таким образом, нам предстоит решить уравнение (7.3.8) с граничными условиями (7.3.6) и (7.3.7).

Решение (7.3.8) легко определить. Имеем

$$\psi = C_1 \sin \beta \psi + C_2 \cos \beta \psi . \quad (7.3.9)$$

Условию (7.3.6) удовлетворяет только четная функция, а функция $\sin(\beta \xi)$ – функция нечетная, поэтому следует положить

$$C_1 = 0. \quad (7.3.10)$$

Тогда вместо (2.3.9) следует написать

$$\psi = C_2 \cos(\beta \xi). \quad (7.3.11)$$

Подставим (7.3.11) в условие (7.3.7). Получим

$$\beta \sin \beta = \text{Bi} \cos \beta. \quad (7.3.12)$$

Это трансцендентное уравнение, оно не имеет аналитического решения, поэтому воспользуемся графическим методом его решения. Обозначим

$$y_1 = \text{tg } \beta, \quad y_2 = \frac{\text{Bi}}{\beta} \quad (7.3.13)$$

и построим графики функций y_1 и y_2 (рисунок 7.2). Очевидно, что абсциссы точек пересечения y_1 и y_2 дают значение корней уравнения (7.3.12). Видно, что уравнение (7.3.12) имеет бесконечное множество корней $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Значения этих корней представлены в таблице 1.

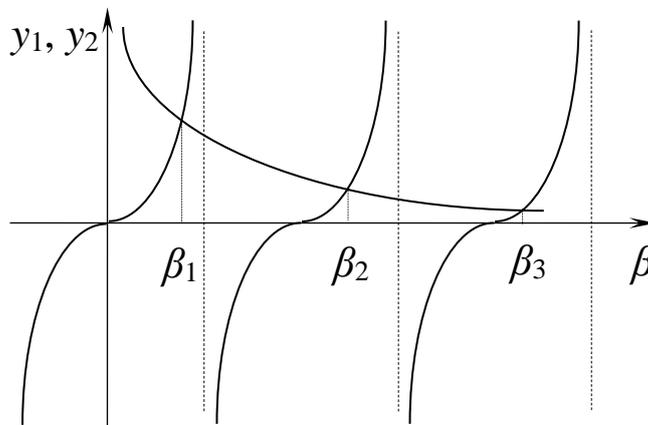


Рисунок 7.2 Определение корней уравнения $\beta \sin \beta = \text{Bi} \cos \beta$

Таблица 1

Значение корней уравнения $\beta \sin \beta = Bi \cos \beta$

Bi	β_1	β_2	β_3
0	0	π	2π
0,1	0,31	3,17	6,30
1	0,86	3,42	6,43
10	1,43	4,30	7,22
100	1,56	4,66	7,77

Следует отметить, что в некоторых предельных случаях решение (7.3.12) удастся получить аналитически. Так, при $Bi = 0$ имеем

$$\operatorname{tg} \beta = 0, \quad (7.3.14)$$

решением которого является последовательность

$$\beta = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (7.3.15)$$

При $Bi = \infty$ (7.3.12) представим в виде

$$\operatorname{ctg} \beta = 0, \quad (7.3.16)$$

откуда

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (7.3.17)$$

Наконец, при $Bi \ll 1$ уравнение (7.3.12) превращается в

$$\beta^2 = Bi, \quad (7.3.18)$$

первым корнем которого является

$$\beta_1 = \sqrt{Bi}. \quad (7.3.19)$$

Согласно теории дифференциальных уравнений, общее решение строится как сумма частных решений (т.н. принцип суперпозиции решений), т.е. в рассматриваемом случае

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(\beta_i \xi) e^{-\beta_i^2 Fo}. \quad (7.3.20)$$

Для определения C_i воспользуемся начальным условием (7.3.2). Имеем

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(\beta_i \xi). \quad (7.3.21)$$

Умножим обе части этого уравнения на $\cos(\beta_k \xi)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 1:

$$\int_0^1 \cos(\beta_k \xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^1 \cos(\beta_i \xi) \cos(\beta_k \xi) d\xi. \quad (7.3.22)$$

Легко убедиться, что

$$\int_0^1 \cos(\beta_i \xi) \cos(\beta_k \xi) d\xi = 0 \text{ при } i \neq k \quad (7.3.23)$$

и

$$\int_0^1 \cos^2(\beta_i \xi) d\xi = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2\beta_i} \sin 2\beta_i \right) \text{ при } i = k. \quad (7.3.24)$$

Интеграл в левой части (7.3.22) равен

$$\int_0^1 \cos(\beta_k \xi) d\xi = \int_0^1 \cos(\beta_i \xi) d\xi = \frac{1}{\beta_i} \sin \beta_i, \quad (7.3.25)$$

тогда

$$\frac{\sin \beta_i}{\beta_i} = C_i \frac{1}{2} (\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i). \quad (7.3.26)$$

Следовательно,

$$C_i = \frac{2 \sin \beta_i}{\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i}. \quad (7.3.27)$$

Подставим константу (7.3.27) в (7.3.20) и окончательно получаем

$$\vartheta = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_i \cos(\beta_i \xi)}{\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i} e^{-\beta_i^2 \text{Fo}}. \quad (7.3.28)$$

Из (7.3.28) следует, что нагревание (охлаждение) происходит по экспоненциальному закону. На рисунке 7.3 представлены зависимости ϑ от критерия Фурье Fo при различных значениях Bi . Видно, что с ростом Bi охлаждение протекает быстрее.

Распределение температуры в пластине при разных значениях Bi в разные моменты времени даны на рисунке 7.4. Видно, что в случае $\text{Bi} = 0$ охлаждаются все точки тела одинаково. Такое охлаждение мы

наблюдаем в металлических твердых телах с высоким значением коэффициента теплопроводности. В случае $Bi \rightarrow \infty$ температура поверхности стенки всегда равна температуре окружающей среды и наблюдаются колоколообразные профили температуры.

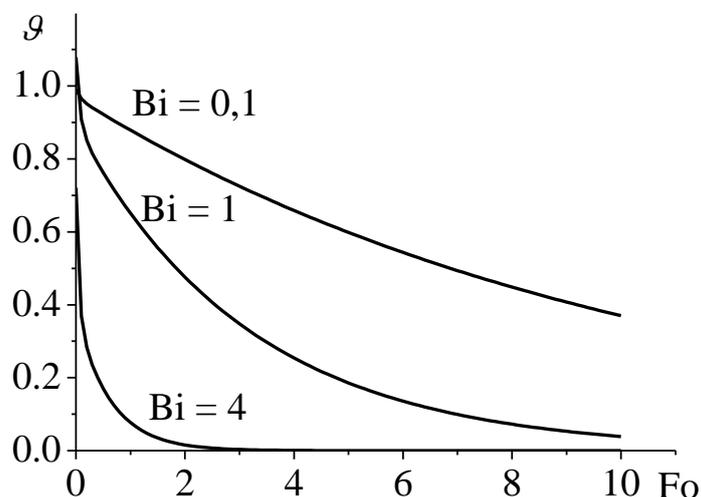


Рисунок 7.3 Зависимость температуры θ от Fo при различных Bi

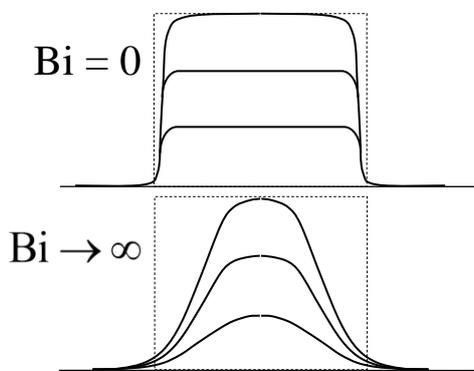


Рисунок 7.4 Распределение температуры в пластине

Определим изменение теплосодержания пластины. Его проще всего определить по формуле

$$Q = c\rho S \int_{-\delta}^{\delta} (T_0 - T) dx. \quad (7.3.29)$$

Начальное теплосодержание, отсчитанное от температуры T_∞ , равно

$$Q_0 = 2c\rho S(T_0 - T_\infty)\delta, \quad (7.3.30)$$

тогда отношение

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} \frac{dx}{\delta}. \quad (7.3.31)$$

В силу

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = 1 - \vartheta, \quad (7.3.32)$$

получаем

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \vartheta) d\xi. \quad (7.3.33)$$

Подставляя в (7.3.33) значение ϑ из уравнения (7.3.28), с учетом

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_i \cos(\beta_i \xi)}{\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i}, \quad (7.3.34)$$

запишем

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_i}{\beta_i + \sin \beta_i \cos \beta_i} \left(1 - e^{-\beta_i^2 Fo}\right) \int_{-1}^1 \cos(\beta_i \xi) d\xi. \quad (7.3.35)$$

Интегрирование дает выражение

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_i}{\beta_i^2 + \beta_i \sin \beta_i \cos \beta_i} \left(1 - e^{-\beta_i^2 Fo}\right). \quad (7.3.36)$$

7.4 Нагревание (охлаждение) цилиндра

Рассмотрим цилиндр (рисунок 7.5) длиной L и радиусом R_0 . В начальный момент его температура равна T_0 . Температура окружающей среды T_∞ . Зависимость температуры от времени определяется функцией

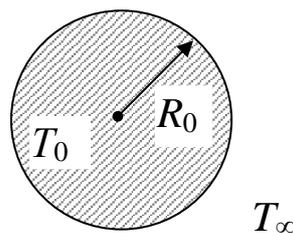


Рисунок 7.5 Нагревание (охлаждение) цилиндра

$$\varphi(\text{Fo}) = e^{-\beta^2 \text{Fo}}. \quad (7.4.1)$$

Функция $\psi(\xi)$, где $\xi = r / R_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \beta^2\psi = 0 \quad (7.4.2)$$

и граничным условиям (7.3.6), (7.3.7)

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0, \quad \xi = 0, \quad (7.4.3)$$

$$-\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=1} = (\psi)_{\xi=1} \text{Bi}, \quad \xi = 1, \quad (7.4.4)$$

где $\text{Bi} = \alpha R_0 / \lambda_T$. Уравнение (7.4.2) это так называемое уравнение Бесселя. Его частными решениями являются функции первого и второго рода.

$$J_0(\beta\xi), Y_0(\beta\xi), \quad (7.4.5)$$

где индекс «0» соответствует нулевому порядку. Здесь $J_0(\beta\xi)$, напоминающий отдаленно $\cos(\beta\xi)$ – четная функция, $Y_0(\beta\xi)$ – нечетная функция, она не удовлетворяет условию симметрии (7.4.3). Тогда в решении (7.4.2)

$$\psi = C_1 J_0(\beta\xi) + C_2 Y_0(\beta\xi) \quad (7.4.6)$$

следует положить $C_2 = 0$. Следовательно, имеем

$$\psi = C_1 J_0(\beta\xi). \quad (7.4.7)$$

Воспользуемся граничным условием (7.4.4) учитывая, что $J'_0(\beta\xi) = -\beta J_1(\beta\xi)$, и запишем

$$\beta J_1(\beta) = \text{Bi} J_0(\beta). \quad (7.4.8)$$

Решение уравнения (7.4.8) снова ищем графическим способом. Положим

$$y_1 = \frac{J_0(\beta)}{J_1(\beta)}, \quad y_2 = \frac{\beta}{\text{Bi}} \quad (7.4.9)$$

и построим графики функций (рисунок 7.6). Абсциссы точек пересечения дают корни уравнения (7.4.8). В таблице 2 даны значения первых

корней этого уравнения при различных Vi . Видно, что с ростом Vi значения корней возрастают. В двух предельных случаях уравнение (7.4.8) упрощается. Так при $Vi = 0$ имеем

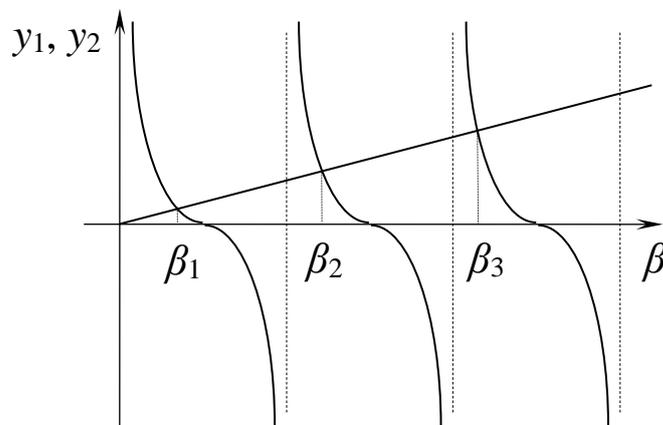


Рисунок 7.6 Определение корней уравнения $\beta J_1(\beta) = Vi J_0(\beta)$

$$J_1(\beta) = 0, \quad (7.4.10)$$

а при $Vi \rightarrow \infty$

$$J_0(\beta) = 0. \quad (7.4.11)$$

Таблица 2

Значение корней уравнения $\beta J_1(\beta) = Vi J_0(\beta)$

Vi	β_1	β_2	β_3
0	0	3,83	7,02
0,1	0,443	3,86	7,03
1,0	1,253	4,08	7,16
10	2,17	5,03	7,96
30	2,35	5,41	8,48

Для построения решения снова воспользуемся принципом суперпозиции. Имеем

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\beta_i \xi) e^{-\beta_i^2 Fo}. \quad (7.4.12)$$

Константа C_i определяется из начального условия (7.3.2)

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(\beta_i \xi). \quad (7.4.13)$$

Функции Бесселя ортогональны с весом, а именно, интеграл

$$\int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) J_0(\beta_k \xi) d\xi \quad (7.4.14)$$

может иметь разные значения в зависимости от того, совпадают числа i и k или нет

$$\int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) J_0(\beta_k \xi) d\xi = 0 \text{ при } i \neq k \quad (7.4.15)$$

и

$$\int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) J_0(\beta_k \xi) d\xi = \int_0^1 \xi J_0^2(\beta_i \xi) d\xi \text{ при } i = k. \quad (7.4.16)$$

В теории функций Бесселя показано, что

$$\int_0^1 \xi J_0^2(\beta_i \xi) d\xi = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]. \quad (7.4.17)$$

Для решения (7.4.13) умножим его на $\xi J_0(\beta_k \xi)$ и проинтегрируем полученное выражение по ξ . Получим

$$\int_0^1 J_0(\beta_k \xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) J_0(\beta_k \xi) d\xi. \quad (7.4.18)$$

Применяя свойства (7.4.16), (7.4.17) имеем

$$\int_0^1 \xi J_0^2(\beta_i \xi) d\xi = \frac{1}{2} [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]. \quad (7.4.19)$$

Для нахождения интеграла в левой части (7.4.19) воспользуемся известным свойством функций Бесселя

$$\int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x), \quad (7.4.20)$$

тогда

$$\int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) d\xi = \frac{1}{\beta_i^2} \int_0^{\beta_i} x J_0(x) dx = \frac{1}{\beta_i} J_1(\beta_i). \quad (7.4.21)$$

Вместо множества значений C_i получаем равенство

$$\frac{1}{\beta_i} J_1(\beta_i) = \frac{C_i}{2} [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)], \quad (7.4.22)$$

откуда имеем

$$C_i = \frac{2J_1(\beta_i)}{\beta_i [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]}. \quad (7.4.23)$$

Окончательно, для температуры в цилиндре запишем

$$\mathcal{G} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_i) J_0(\beta_i \xi)}{\beta_i [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]} e^{-\beta_i^2 Fo} \dots \quad (7.4.24)$$

Зависимость \mathcal{G} от времени и профили температуры в этом случае такие же, что и для плоской пластины, а именно, \mathcal{G} уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Охлаждение происходит тем быстрее, чем больше критерий Био. Наблюдается ступенчатое изменение профилей температуры при малых Bi , а при $Bi \rightarrow \infty$ имеют место колоколообразные профили.

Рассчитаем относительные тепловые потери цилиндра.

Начальное теплосодержание равно

$$Q_0 = c \rho \pi R_0^2 L (T_0 - T_\infty). \quad (7.4.25)$$

Изменение теплосодержания проще всего определить по формуле

$$Q = c \rho 2\pi L \int_0^{R_0} (T_0 - T) r dr. \quad (7.4.26)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_\infty} = 1 - \mathcal{G}, \quad (7.4.27)$$

получаем выражение относительных тепловых потерь цилиндра

$$\frac{Q}{Q_0} = 2 \int_0^1 (1 - \mathcal{G}) \xi d\xi. \quad (7.4.28)$$

С учетом равенства

$$1 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_i(\beta_i) J_0(\beta_i \xi)}{\beta_i [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]}, \quad (7.4.29)$$

запишем выражением

$$\frac{Q}{Q_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_i(\beta_i)}{\beta_i [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]} (1 - e^{-\beta_i^2 Fo}) \int_0^1 \xi J_0(\beta_i \xi) d\xi, \quad (7.4.30)$$

интегрирование которого с учетом (7.4.21), дает окончательно

$$\frac{Q}{Q_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\beta_i)}{\beta_i^2 [J_0^2(\beta_i) + J_1^2(\beta_i)]} (1 - e^{-\beta_i^2 Fo}). \quad (7.4.31)$$

или с учетом (7.4.8)

$$\frac{Q}{Q_0} = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\beta_i^2 Fo})}{(\beta_i^2 + \text{Bi}^2)}. \quad (7.4.32)$$

7.5 Нагревание (охлаждение) шара

Рассмотрим шар радиуса R_0 . Его начальная температура равна T_0 . Температура окружающей среды – T_{∞} . Зависимость температуры от времени выражается формулой

$$\varphi(\text{Fo}) = e^{-\beta^2 \text{Fo}}. \quad (7.5.1)$$

Функция $\psi(\xi)$, где $\xi = r / R_0$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \beta^2 \psi = 0 \quad (7.5.2)$$

и подчиняется граничным условиям

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=0} = 0, \quad \xi = 0, \quad (7.5.3)$$

$$-\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=1} = (\psi)_{\xi=1} \text{Bi}, \quad \xi = 1, \quad (7.5.4)$$

где $\text{Bi} = \alpha R_0 / \lambda_T$.

Решениями уравнения (7.5.2) являются функции

$$\begin{aligned} \psi_1 &= C_1 \frac{\cos(\beta \xi)}{\beta \xi}, \\ \psi_2 &= C_2 \frac{\sin(\beta \xi)}{\beta \xi}, \end{aligned} \quad (7.5.5)$$

так что общее решение имеет вид

$$\psi = C_1 \frac{\cos(\beta\xi)}{\beta\xi} + C_2 \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta\xi}. \quad (7.5.6)$$

Здесь функция $\cos(\beta\xi)/\beta\xi$ – нечетная, она не удовлетворяет условию симметрии (7.5.3), поэтому следует положить

$$C_1 = 0 \quad (7.5.7)$$

и решением будет

$$\psi = C_2 \frac{\sin(\beta\xi)}{\beta\xi}. \quad (7.5.8)$$

В силу

$$\frac{d\psi}{d\xi} = C_2 \frac{\beta\xi \cos(\beta\xi) - \sin(\beta\xi)}{\beta\xi^2}, \quad (7.5.9)$$

имеем

$$\left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi=1} = C_2 \frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta}. \quad (7.5.10)$$

Тогда условие (7.5.4) принимает вид

$$-\frac{\beta \cos \beta - \sin \beta}{\beta} = \text{Bi} \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad (7.5.11)$$

откуда

$$\beta \cos \beta = (1 - \text{Bi}) \sin \beta. \quad (7.5.12)$$

Корни трансцендентного уравнения (7.5.12) снова можно определить графически, если принять

$$y_1 = \text{tg } \beta, \quad y_2 = \frac{\beta}{1 - \text{Bi}} \quad (7.5.13)$$

и построить графики этих функций (рисунок 7.7). Корнями β будут служить абсциссы точек пересечения y_1 и y_2 .

В таблице 3 даны значения первых трех корней уравнения (7.5.12) при различных значениях Bi .

В некоторых предельных случаях β можно определить аналитически. При $\text{Bi} \rightarrow \infty$ имеем

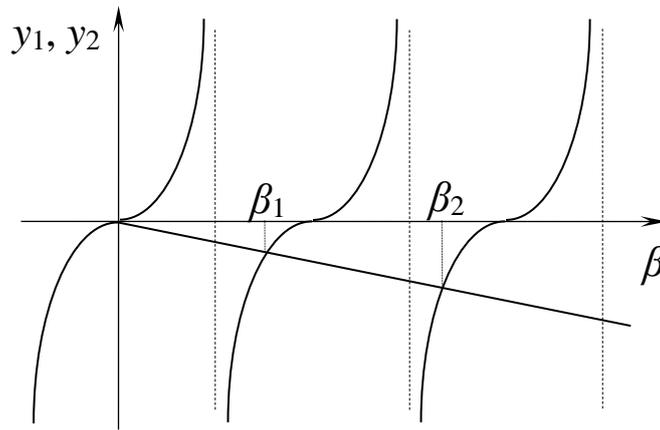


Рисунок 7.7 Определение корней уравнения $\beta \cos \beta = (1 - Bi) \sin \beta$

Таблица 3

Значение корней уравнения $\beta \cos \beta = (1 - Bi) \sin \beta$

Bi	β_1	β_2	β_3
0	0	4,49	9,42
0,1	0,54	4,52	7,74
1,0	1,57	4,71	7,85
50	3,08	6,12	9,42
∞	3,14	6,28	9,42

$$\operatorname{tg} \beta = 0, \quad (7.5.14)$$

решение которого – последовательность

$$\beta = \pi, 2\pi, \dots \quad (7.5.15)$$

В случае $Bi = 1$ получаем уравнение

$$\cos \beta = 0 \quad (7.5.16)$$

и последовательность

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \quad (7.5.17)$$

Наконец, при малых Bi , разлагая $\cos \beta$ и $\sin \beta$ в ряд по степеням β , получаем

$$\beta \left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \dots \right) = (1 - Bi) \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \dots \right), \quad (7.5.18)$$

откуда для первого корня имеем

$$\beta_1^2 = 3\text{Bi} \quad (7.5.19)$$

или

$$\beta_1 = \sqrt{3\text{Bi}}. \quad (7.5.20)$$

Температура шара равна

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\sin(\beta_i \xi)}{\beta_i \xi} e^{-\beta_i^2 \text{Fo}}. \quad (7.5.21)$$

Подстановка (7.5.21) в начальное условие приводит к выражению

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{\sin(\beta_i \xi)}{\beta_i \xi}. \quad (7.5.22)$$

Умножим обе части этого уравнения на

$$\beta_k \xi \sin(\beta_k \xi) \quad (7.5.23)$$

и проинтегрируем по ξ . Имеем

$$\beta_k \int_0^1 \xi \cos(\beta_k \xi) d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \int_0^1 \frac{\beta_k}{\beta_i} \sin(\beta_i \xi) \sin(\beta_k \xi) d\xi. \quad (7.5.24)$$

В силу ортогональности функции получим

$$\int_0^1 \frac{\beta_k}{\beta_i} \sin(\beta_i \xi) \sin(\beta_k \xi) d\xi = 0 \text{ при } k \neq i \quad (7.5.25)$$

и

$$\int_0^1 \frac{\beta_k}{\beta_i} \sin(\beta_i \xi) \sin(\beta_k \xi) d\xi = \int_0^1 \sin^2(\beta_i \xi) d\xi \text{ при } k = i. \quad (7.5.26)$$

Интегрируя левую и первую часть (7.5.24)

$$\beta_i \int_0^1 \xi \sin(\beta_i \xi) d\xi = -\cos \beta_i + \frac{\sin \beta_i}{\beta_i}, \quad (7.5.27)$$

$$\int_0^1 \sin^2 \beta_i \xi d\xi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\beta_i}{2\beta_i} \right), \quad (7.5.28)$$

для C_i получаем

$$C_i = \frac{2(\sin \beta_i - \beta_i \cos \beta_i)}{\beta_i - \sin \beta_i \cos \beta_i}. \quad (7.5.29)$$

Окончательное выражение для температуры \mathcal{G} имеет вид

$$\mathcal{G} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin \beta_i - \beta_i \cos \beta_i) \sin(\beta_i \xi)}{\beta_i - \sin \beta_i \cos \beta_i} \frac{1}{\beta_i \xi} e^{-\beta_i^2 Fo}. \quad (7.5.30)$$

Зависимость \mathcal{G} от времени и профили температуры в шаре такие же, что и в случаях пластины и цилиндра, а именно при больших значениях Vi охлаждение происходит быстрее. Профили температуры при малых Vi испытывают ступенчатое изменение во времени, тогда как при больших Vi профили температуры имеют колоколообразную зависимость от ξ .

Подсчитаем относительные тепловые потери шара. Начальное теплосодержание равно

$$Q_0 = \frac{4}{3} c \rho \pi R_0^3 (T_0 - T_{\infty}). \quad (7.5.31)$$

Изменение теплосодержания можно определить по формуле

$$Q = c \rho 4 \pi \int_0^{R_0} r^2 (T_0 - T) dr. \quad (7.5.32)$$

С учетом

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_{\infty}} = 1 - \mathcal{G}, \quad (7.5.33)$$

относительные тепловые потери равны

$$\frac{Q}{Q_0} = 3 \int_0^1 (1 - \mathcal{G}) \xi^2 d\xi \quad (7.5.34)$$

или после интегрирования

$$\frac{Q}{Q_0} = 6 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\sin \beta_i - \beta_i \cos \beta_i)^2}{\beta_i^3 (\beta_i - \sin \beta_i \cos \beta_i)} (1 - e^{-\beta_i^2 Fo}). \quad (7.5.35)$$

7.6 Регулярный режим охлаждения

Как было выяснено выше, закон охлаждения тел различной формы может быть выражен рядом

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \psi(\beta_i \xi) e^{-\beta_i^2 Fo}, \quad (7.6.1)$$

где коэффициенты β_i быстро возрастают с увеличением номера члена ряда. Поэтому чем больше время охлаждения, т.е. чем больше критерий Fo , тем меньше значение старшего члена ряда по отношению к предшествующим. В конце концов, после некоторого значения Fo все члены ряда становятся пренебрежимо малыми по сравнению с первым членом, т.е. через определенный промежуток времени с большей степенью точности может быть выражен одночленной формулой

$$\mathcal{G} = C_1 \psi(\beta_1 \xi) e^{-\beta_1^2 Fo}. \quad (7.6.2)$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$\ln \mathcal{G} = \ln [C_1 \psi(\beta_1 \xi)] - \beta_1^2 Fo \quad (7.6.3)$$

или

$$\ln(T - T_\infty) = \ln [C_1 (T_0 - T_\infty) \psi(\beta_1 \xi)] - \frac{\beta_1 a t}{l_0^2}. \quad (7.6.4)$$

Обозначим

$$D_1 = C_1 \theta_0 \psi(\beta_1 \xi), \quad m_1 = \frac{\beta_1 a}{l_0^2}, \quad (7.6.5)$$

$$\theta = T - T_\infty, \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty,$$

тогда (7.6.4) можно переписать в виде

$$\ln \theta = \ln D_1 - m_1 t. \quad (7.6.6)$$

Величина m_1 называется темпом охлаждения. Таким образом, в координатах $\ln \theta, t$ (полулогарифмическая анаморфоза) закон охлаждения при больших значениях Fo выражается прямой линией.

Для определения темпа охлаждения строим график зависимости $\ln \theta$ от времени t (рисунок 7.8). Тогда, зная значения $\ln \theta_1 = \ln(T_1 - T_\infty)$ и $\ln \theta_2 = \ln(T_2 - T_\infty)$ в два момента времени t_1 и t_2 , по формуле

$$m = \frac{\beta a}{l_0^2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{t_2 - t_1} \quad (7.6.7)$$

можно определить темп изменения температуры m (нижний индекс «1» опущен). Отметим, что для нахождения m можно воспользоваться любыми двумя парами значений $\ln \theta$ и t . Режим охлаждения, определяемый формулой (7.6.6), называется регулярным режимом охлаждения.

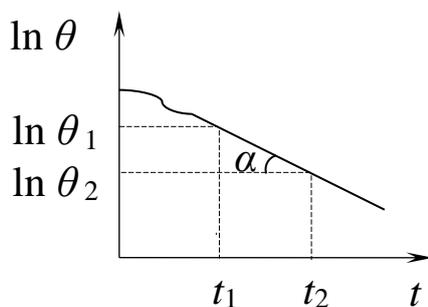


Рисунок 7.8 Определение темпа охлаждения

Степенью регуляризации температурного режима тела можно назвать отклонение температуры, определенной по формуле (7.6.2), от истинной температуры, определенной по формуле (7.6.1)

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\infty} C_i \psi(\beta_i \xi) e^{-\beta_i^2 Fo}}{C_1 \psi(\beta_1 \xi) e^{-\beta_1^2 Fo}}. \quad (7.6.8)$$

Для практических целей необходимо оценить число Fo, при котором наступает регулярный режим. Сравним отношение второго члена ряда (7.6.1) к первому

$$\frac{C_2 \psi(\beta_2 \xi)}{C_1 \psi(\beta_1 \xi)} = e^{-(\beta_2^2 - \beta_1^2) Fo}. \quad (7.6.9)$$

Положим, что вклад второго и последующих членов не превышают 1%, тогда

$$0,01 = e^{-(\beta_2^2 - \beta_1^2) Fo}, \quad (7.6.10)$$

откуда находим

$$Fo = \frac{\ln 100}{\beta_2^2 - \beta_1^2}. \quad (7.6.11)$$

В случае шара при $Bi = 50$ имеем $\beta_1 = 3,08$, $\beta_2 = 6,12$, тогда

$$Fo = 0,035 \ln 100 = 0,1612. \quad (7.6.12)$$

С учетом $\theta = T - T_{\infty}$, $\theta_0 = T_0 - T_{\infty}$ перепишем (7.6.2) в виде

$$\theta = C_1 \theta_0 \psi(\beta_1 \xi) e^{-\beta_1^2 Fo}. \quad (7.6.13)$$

Вычислим $-(1/\theta) d\theta/dt$. Оно равно темпу охлаждения

$$-\frac{1}{\theta} \frac{d\theta}{dt} = m. \quad (7.6.14)$$

Введем осреднение по поверхности

$$\theta_s = \frac{1}{S} \int_S \theta dS, \quad (7.6.15)$$

по объему

$$\theta_v = \frac{1}{V} \int_V \theta dV \quad (7.6.16)$$

и выделим уравнение теплового баланса. Тепло, идущее на изменение теплосодержания тела, равно

$$dQ_1 = \rho c V d\theta_v. \quad (7.6.17)$$

Данное изменение теплосодержания обусловлено теплоотдачей с поверхности

$$dQ_2 = \alpha S \theta_s dt. \quad (7.6.18)$$

В силу $-dQ_1 = dQ_2$ имеем

$$-\rho c V d\theta_v = \alpha S \theta_s dt. \quad (7.6.19)$$

Запишем (7.6.19) в виде

$$-\frac{1}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt} = \frac{\alpha S \theta_s}{\rho c V \theta_v} = \frac{\alpha S}{\rho c V} \psi, \quad (7.6.20)$$

где $\psi = \theta_s / \theta_v$ – коэффициент неравномерности распределения температуры в теле, зависящий от числа Bi . С учетом (7.6.14), вместо (7.6.20) получим

$$m = \alpha \psi \rho c \frac{S}{V}. \quad (7.6.21)$$

На рисунок 7.9 дана зависимость $\psi = \psi(Bi)$. Видно, что при $Bi = 0$, имеем $\psi = 1$, т.е. средняя по поверхности θ_s и средняя по объему θ_v температуры совпадают. В этом случае

$$m = \frac{\alpha S}{\rho c V}. \quad (7.6.22)$$

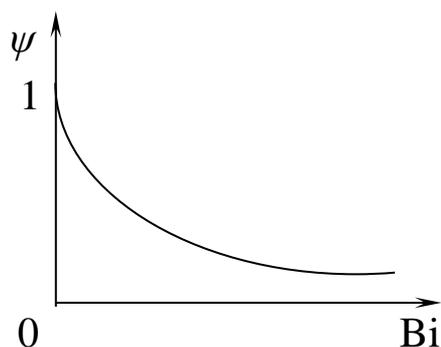


Рисунок 7.9 Зависимость ψ от Bi

Равенство (7.6.22) служит для экспериментального определения α или ρc . В опытах измеряют темп охлаждения m и далее при известном ρc находят, либо при известном α находят ρc .

Другая возможность экспериментального определения указанных величин связана со значением m при $Bi = \infty$. Действительно, в этом случае

$$m = \frac{\beta^2}{l_0^2} \alpha_\infty. \quad (7.6.23)$$

В связи с тем, что β в этом случае зависит только от формы тела, можно написать

$$m = k \alpha_\infty, \quad k = \frac{\beta^2}{l_0^2}. \quad (7.6.24)$$

Таким образом, равенство (7.6.24) может быть использовано для экспериментального определения α_∞ .

7.7 Температурные волны

В ряде процессов, происходящих в аппаратах, в частности в двигателях, совершается периодическое повторение рабочего цикла, в продолжение которого температура рабочей среды и корпуса двигателя меняется по определенному закону. При этом имеет место периодическое изменение температурного поля. Закон этого изменения уже не зависит от начального состояния системы, а определяется периодической функцией времени (рисунок 7.10).

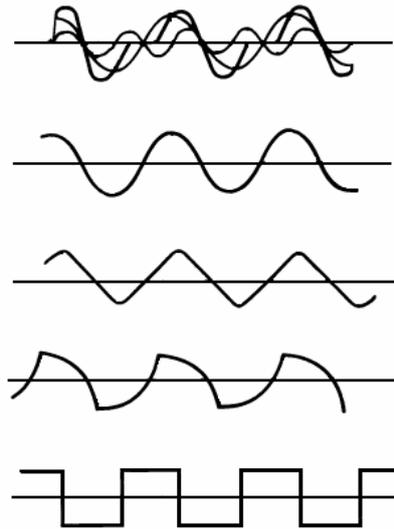


Рисунок 7.10 Температурные графики периодических тепловых процессов

При периодически меняющейся температуре на поверхности тела общей интеграл уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla^2 \theta, \quad (7.7.1)$$

где $\theta = T - T_\infty$.

Решение ищем в виде произведения двух функций

$$\theta = \psi(\xi) \varphi(Fo). \quad (7.7.2)$$

Однако в этом случае уже нельзя представить $\varphi(Fo)$ в виде экспоненциальной функции с вещественным коэффициентом β . Необходимо выбрать такую функцию, которая изображала бы периодическое изменение температуры во всех точках рассматриваемого тела. Такому требованию удовлетворяет функция

$$\varphi(Fo) = e^{i\beta^2 Fo}. \quad (7.7.3)$$

Подставляя в (7.7.1) произведение

$$\theta = \psi(\xi) e^{i\beta^2 Fo}, \quad (7.7.4)$$

получим

$$\nabla^2 \psi(\xi) - i\beta^2 \psi(\xi) = 0. \quad (7.7.5)$$

Рассмотрим полуограниченное пространство, температура на поверхности которого под внешним воздействием претерпевает периодически гармонические колебания

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t, \quad x = 0. \quad (7.7.6)$$

Здесь $\theta_0 = T_0 - T_\infty$, ω – циклическая частота колебаний. Воспользовавшись известным преобразованием

$$\sqrt{i} = \pm \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}, \quad (7.7.7)$$

можно записать частные решения уравнения (7.7.5) в виде

$$\psi_1(\xi) = e^{-\frac{(1+i)\beta\xi}{\sqrt{2}}}, \quad \psi_2(\xi) = e^{\frac{(1+i)\beta\xi}{\sqrt{2}}}, \quad (7.7.8)$$

где $\xi = x/L$. Тогда для температуры будем иметь

$$\theta = C_1 e^{-\frac{(1+i)\beta\xi}{\sqrt{2}} + i\beta^2 \text{Fo}} + C_2 e^{\frac{(1+i)\beta\xi}{\sqrt{2}} + i\beta^2 \text{Fo}}. \quad (7.7.9)$$

Видно, что второй член неограниченно растет с ростом ξ . Учитывая, что решение на бесконечности должно быть ограниченным, положим $C_2 = 0$ и получим

$$\theta = C_1 e^{-\frac{(1+i)\beta\xi}{\sqrt{2}} + i\beta^2 \text{Fo}}. \quad (7.7.10)$$

Полагая, что $\cos \omega t = \text{Re}\{e^{i\omega t}\}$ и, подставляя (7.7.10) в граничное условие (7.7.6), записанное в виде

$$\theta = \theta_0 e^{i\omega t}, \quad \xi = 0, \quad (7.7.11)$$

имеем

$$\theta_0 e^{i\omega t} = C_1 e^{\frac{i\beta^2 at}{l_0^2}}. \quad (7.7.12)$$

Откуда при $i\omega t = i\beta^2 at/l_0^2$ следует

$$C_1 = \theta_0, \quad \beta = l_0 \sqrt{\frac{\omega}{a}}. \quad (7.7.13)$$

Тогда решение задачи принимает вид

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2a}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} + i\omega t}. \quad (7.7.14)$$

Выделяя действительную часть выражения (7.7.14), находим

$$\theta = \theta_0 e^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} \cos\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right). \quad (7.7.15)$$

Полученное выражение описывает температурную волну, распространяющуюся в массиве. Амплитуда этой волны убывает экспоненциально (рисунок 7.11).

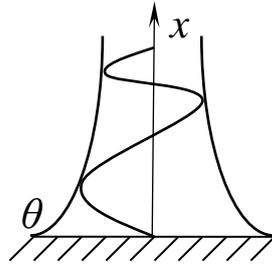


Рисунок 7.11 Затухание температурной волны

На расстоянии

$$\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \quad (7.7.16)$$

амплитуда волны уменьшается в e раз. За период колебания волна проходит расстояние λ – длину волны. Из равенства

$$\omega T - \lambda\sqrt{\frac{\omega}{2a}} = 0, \quad (7.7.17)$$

с учетом

$$\omega T = 2\pi, \quad (7.7.18)$$

можно получить

$$\lambda = 2\sqrt{\pi a T}. \quad (7.7.19)$$

Тепловой поток через поверхность тела равен

$$Q = -\lambda S \int \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} dt. \quad (7.7.20)$$

При интегрировании этого уравнения за полный период результирующий тепловой поток равен нулю, при этом тепло за один полупериод аккумулируется телом, а во втором полупериоде отдается им окружающей среде.

ГЛАВА 8 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

8.1 Связь между теплоотдачей и трением (аналогия Рейнольдса)

Рассмотрим уравнения теплопроводности и движения жидкости с постоянными физическими свойствами, скорость течения которой достаточно мала, чтобы пренебречь квадратичными членами этих уравнений. В безразмерной форме эти уравнения имеют вид (5.23):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vartheta + \frac{q_v l_0^2}{\lambda \Delta T_0} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial (at / l_0^2)} + \left(\frac{\mathbf{w} l_0}{a}, \text{grad } \vartheta \right), \\ \mathbf{g} l_0 - \text{grad } \frac{\Delta p}{\rho w_0^2} + \frac{\nu}{w_0 l_0} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial (w_0 t / l_0)} + (\boldsymbol{\omega}, \text{grad}) \boldsymbol{\omega}, \\ \text{div } \boldsymbol{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

При отсутствии внутренних источников тепла и безнапорном течении в газах с $\mathbf{g} = 0$, когда

$$\Delta p = 0, \quad (8.1.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vartheta &= \frac{\partial \vartheta}{\partial \text{Fo}} + \text{Re Pr} (\boldsymbol{\omega}, \text{grad } \vartheta), \\ \nabla^2 \boldsymbol{\omega} &= \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \left(\frac{\nu}{w_0 l_0} \frac{w_0 t}{l_0} \right)} + \text{Re} (\boldsymbol{\omega}, \text{grad}) \boldsymbol{\omega}, \\ \text{div } \boldsymbol{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

В силу

$$\frac{\nu t}{l_0^2} = \frac{at}{l_0^2} \frac{\nu}{a} = \text{Pr Fo},$$

второе уравнение (8.1.3) принимает вид

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \text{Fo}} + \text{Re} (\boldsymbol{\omega}, \text{grad}) \boldsymbol{\omega}. \quad (8.1.4)$$

Здесь $\vartheta = (T - T_\infty) / (T_w - T_\infty)$ безразмерная температура, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{w} / w_0$ безразмерная скорость течения.

Легко заметить, что при условии $Pr = 1$ уравнения теплопроводности и движения становятся тождественными относительно ϑ и ω , что означает тождество полей размерных величин T и w при подобном образом заданных граничных условиях.

На поверхности стенки $\omega = 0$, а $\vartheta = 1$, если в качестве безразмерной температуры использовать

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \quad (8.1.5)$$

В этом случае граничные условия ω и ϑ не совпадают. Этого противоречия можно избежать, если ϑ взять в виде

$$\vartheta = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty}. \quad (8.1.6)$$

Условию $Pr = 1$ с большой точностью соответствуют многоатомные газы, приближенно другие газы, а также некоторые капельные жидкости в определенных интервалах температур в газообразном состоянии (таблица 4 и таблица 5).

Течение в заполненных трубах является напорным и, следовательно, если в этом случае и существует известное подобие профилей скоростей и температур, то оно является приближенным. Опыт показывает, что такое приближенное подобие имеет место только при развитом турбулентном течении среды с $Pr = 1$ и при подобном образом заданных граничных условиях.

При наличии подобия полей температур и скоростей можно найти связь между коэффициентами теплоотдачи и трения, не прибегая к непосредственному интегрированию уравнения теплопроводности. Действительно, в некотором плоском потоке

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{-(\lambda + \lambda_T) \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w}{(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_w}, \quad (8.1.7)$$

где μ_T и λ_T коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности. Знак осреднения во времени над величинами T и w опущен. Если поля температур и скоростей подобны, то

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_w = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_w, \quad \lambda_T = c_p \mu_T. \quad (8.1.8)$$

Таблица 4

Число Pr для газов

Кол-во атомов в молекуле	Pr
1	0,66
2	0,75
3	0,84
4 и более	1

Таблица 5

Число Pr для воды

$T, ^\circ\text{C}$	Pr
100	1,75
170	1,05
180	1,0
200	0,93
250	0,86
310	1,02
350	1,06

Здесь

$$\omega = \frac{w}{w_0}, \quad \vartheta = \frac{(T_w - T)}{(T_w - T_\infty)}, \quad \xi = \frac{y}{l_0}.$$

Второе из выражений следует из равенства

$$\text{Pr}_T = \frac{c_p \mu_T}{\lambda_T} = 1, \quad (8.1.9)$$

но обязательным условием такого подобия является равенство единице числа Pr , когда $\lambda = c_p \mu$. Следовательно, в безразмерном виде выражение (8.1.7), с учетом (8.1.8) и (8.1.9), имеет вид

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{c_p (T_w - T_\infty)}{w_0}. \quad (8.1.10)$$

С другой стороны, тепловой поток и касательное напряжение на стенке можно записать в виде

$$q_w = \alpha (T_w - T_\infty), \quad (8.1.11)$$

$$\tau_w = c_f \frac{\rho w_0^2}{2}, \quad (8.1.12)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, c_f – коэффициент трения. Тогда

$$\frac{q_w}{\tau_w} = \frac{\alpha (T_w - T_\infty)}{c_f \frac{\rho w_0^2}{2}}. \quad (8.1.13)$$

Приравнявая (8.1.10) и (8.1.13) получим

$$\frac{c_p (T_w - T_\infty)}{w_0} = \frac{\alpha (T_w - T_\infty)}{c_f \frac{\rho w_0^2}{2}} \quad (8.1.14)$$

или

$$\alpha = \frac{c_f}{2} \rho c_p w_0. \quad (8.1.15)$$

Умножая обе части (8.1.15) на l_0/λ запишем

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = \frac{c_f}{2} \frac{w_0 l_0}{a}. \quad (8.1.16)$$

Тогда в критериальном виде имеем равенство

$$\text{Nu} = \frac{c_f}{2} \text{Pe}. \quad (8.1.17)$$

При $\text{Pr} = 1$ имеем $\text{Pe} = \text{Re}$, тогда

$$\text{Nu} = \frac{c_f}{2} \text{Re}. \quad (8.1.18)$$

Выражение (8.1.18) носит название аналогии Рейнольдса.

8.2 Пограничный слой

При плавном обтекании тела потоком жидкости продольная составляющая скорости течения на стенке равна нулю, а на ближайшем удалении вглубь потока имеет конечное значение. Отсюда следует, и опыт это подтверждает, что в пристенной области должно иметь место наиболее существенное изменение скорости течения. Соответственно именно в этой области и должно наиболее отчетливо проявляться действие вязкости. При плоском течении касательные напряжения на стенке со стороны жидкости

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w. \quad (8.2.1)$$

Величина $(\partial u / \partial y)_w$ может быть сопоставлена с величиной u_∞ / δ где u_∞ – скорость потока на большом удалении от тела (т.е. скорость невозмущенного потока) и δ – некоторый линейный размер, имеющий порядок толщины пристенного слоя жидкости, в котором скорость меняется от 0 до значения, близкого к u_∞ (рисунок 8.1).

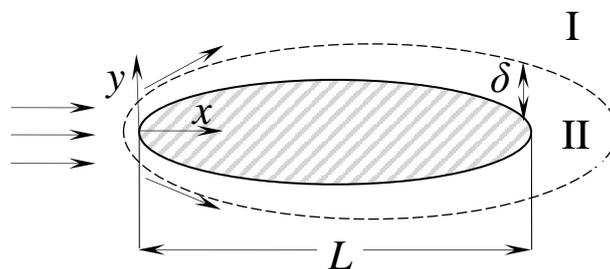


Рисунок 8.1 Обтекание тела потоком жидкости

Рассмотрим уравнения движения и неразрывности в плоском потоке несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (8.2.2)$$

Выполним оценку отдельных членов этих уравнений при условии

$$\delta \ll L. \quad (8.2.3)$$

Для этого перепишем (8.2.2) в безразмерном виде. Пусть

$$\bar{u} = u / u_\infty, \quad \bar{v} = v / V, \quad \bar{x} = x / L, \quad \bar{y} = y / L, \quad \bar{t} = t / (L / u_\infty),$$

тогда

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \sim \frac{u_\infty^2}{L}, \quad u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \sim \frac{u_\infty^2}{L}, \quad \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \sim \frac{\nu u_\infty}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \sim \frac{\nu u_\infty}{\delta^2}. \quad (8.2.3)$$

Из уравнения неразрывности

$$V = \frac{u_\infty \delta}{L}, \quad (8.2.4)$$

следовательно,

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{V u_\infty}{\delta} = \frac{u_\infty^2}{L}. \quad (8.2.5)$$

С учетом (8.2.3) и (8.2.4) первое уравнение из (8.2.2) принимает вид

$$\frac{u_\infty^2}{L} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu u_\infty}{\delta^2} \left[\left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right]. \quad (8.2.6)$$

Видно, что при $(\delta / L) \ll 1$ первое слагаемое в квадратных скобках в правой части (8.2.6) существенно меньше второго, поэтому его можно отбросить. Здесь слой δ , в котором проявляется действие вязкости и происходит наиболее существенное изменение скорости по нормали к обтекаемой поверхности называется гидродинамическим пограничным слоем. В этом слое должно быть

$$\frac{u_\infty^2}{L} = \frac{\nu u_\infty}{\delta^2} \quad (8.2.7)$$

или

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 = \frac{1}{\text{Re}}. \quad (8.2.8)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (8.2.9)$$

где

$$\text{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu}. \quad (8.2.10)$$

Во втором уравнении из (8.2.2) слагаемые имеют порядок

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{u_\infty^2 \delta}{L^2}, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{u_\infty^2 \delta}{L^2}, \quad v \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{u_\infty^2 \delta^2}{L^3}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{u_\infty \delta}{L^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{u_\infty \delta}{L^2}, \quad (8.2.11)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{u_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L}\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L}\right) \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} + \frac{u_\infty^2}{L} \left(\frac{\delta}{L}\right) \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right), \end{aligned} \quad (8.2.12)$$

При $\delta/L \ll 1$ все слагаемые слева и второе слагаемое справа существенно меньше члена $-(1/\rho)(\partial p/\partial y)$ и уравнение для v – компоненты скорости можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (8.2.13)$$

Таким образом, течение в пограничном слое описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (8.2.14)$$

На внешней границе гидродинамического пограничного слоя

$$u = U(x) \quad (8.2.15)$$

и, следовательно, в области $y > \delta$ течение можно считать невязким.

Тогда

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (8.2.16)$$

т.е. течение описывается уравнением Эйлера. В связи (8.2.13), давление поперек пограничного слоя остается неизменным. Из этого следует, что первое из уравнений (8.2.14) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.2.17)$$

Тепловым пограничным слоем называется пристенная область, в которой существенно проявляются тепловые возмущения, т.е. то расстояние δ_T , на котором температура меняется от T_w до значения, весьма близкого к температуре невозмущенного потока T_∞ . Уравнение теплового пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (8.2.18)$$

в силу

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8.2.19)$$

при

$$\frac{\delta_T}{L} \ll 1. \quad (8.2.20)$$

Толщина теплового потока пограничного слоя определяется из условия

$$\alpha(T_w - T_\infty) = \lambda \frac{T_w - T_\infty}{\delta_T}, \quad (8.2.21)$$

откуда

$$\delta_T = \frac{\lambda}{\alpha} \quad (8.2.22)$$

или

$$\frac{\delta_T}{L} = \frac{1}{\text{Nu}}, \quad \text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda}. \quad (8.2.23)$$

8.3 Динамический пограничный слой на плоской пластине

Простейшим примером применения уравнений пограничного слоя является течение вдоль очень тонкой плоской пластины (рисунок 8.2).

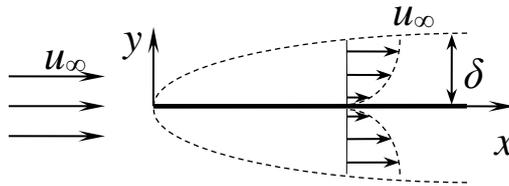


Рисунок 8.2 Пограничный слой на плоской пластине

Рассмотрим начало координат в передней точке пластины параллельно направлению набегающего потока, имеющего скорость $U = u_\infty$. Длину пластины примем бесконечной, а течение будем считать стационарным. Так как в рассматриваемом случае скорость внешнего потенциального течения постоянна, то

$$U \frac{dU}{dx} = 0 \quad (8.3.1)$$

и уравнение пограничного слоя (8.2.12) принимает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.3.2)$$

К нему следует присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0. \quad (8.3.3)$$

Граничными условиями будут

$$\begin{aligned} u = \nu = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = u_\infty \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Так как рассматриваемая система не имеет какой-либо характерной длины, то напрашивается предположение, что профили скорости $u(y)$ на различных расстояниях x от переднего края пластины аффинно-подобны между собой, т.е. могут быть приведены в совпадение один с другим, если для u и y подобрать соответствующие масштабы. В качестве масштаба для u выберем скорость u_∞ набегающего потока, в качестве масштаба для y – толщину пограничного слоя $\delta(x)$, возрастающую с увеличением координаты x . Тогда предположение о том, что все профили скоростей в пограничном слое аффинно-подобны между собой, может быть записано в виде

$$\frac{u}{u_\infty} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (8.3.5)$$

причем функция φ должна быть одной и той же для всех расстояний x от передней кромки пластины.

На основании точного решения задачи о пластине, внезапно приведенной в движение, имеем

$$\delta = \sqrt{\nu t}. \quad (8.3.6)$$

В применении к настоящей задаче можно взять время, которое требуется частице жидкости для того, чтобы продвинуться от передней кромки пластины до точки с координатой x . Если частица течет вне пограничного слоя, то это время равно

$$t = \frac{x}{u_\infty}. \quad (8.3.7)$$

Следовательно, в нашем случае для толщины пограничного слоя будем иметь оценку

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (8.3.8)$$

Введем теперь вместо координаты y другую, безразмерную координату, разделив для этого y на δ , т.е. положим

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}. \quad (8.3.9)$$

Далее, с целью интегрирования уравнения неразрывности введем функцию тока $\psi(x, y)$. По определению,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8.3.10)$$

Примем, что

$$u = u_\infty f', \quad (8.3.11)$$

тогда имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_\infty f'. \quad (8.3.12)$$

Интегрируя (8.3.12), находим

$$\psi = \sqrt{\nu x u_\infty} f, \quad (8.3.13)$$

где $f = f(\eta)$ есть безразмерная функция тока. Для поперечной составляющей v получаем выражение

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (8.3.14)$$

Вычисляя величины, входящие в уравнение (8.3.2), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_\infty f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{u_\infty \eta f''}{2x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f'', \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_\infty^2}{\nu x} f'''. \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

Подставляя (8.3.15) в (8.3.2), запишем

$$u_\infty f' \left(-\frac{u_\infty \eta f''}{2x} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} (\eta f' - f) u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f'' = \frac{\nu u_\infty^2}{\nu x} f''', \quad (8.3.16)$$

откуда, после упрощения, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2f''' + ff'' = 0. \quad (8.3.17)$$

Граничные условия (8.3.4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} f = 0, \quad f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \\ f' = 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.3.18)$$

Таким образом, мы заменим два уравнения в частных производных (8.3.2) и (8.3.3) одним обыкновенным дифференциальным уравнением для функции тока. Полученное уравнение – нелинейное и третьего порядка, следовательно, трех граничных условий (8.3.18) достаточно для полной определенности решения.

Аналитические вычисления, необходимые для решения (8.3.17), довольно затруднительны. Блазиус получил решение, применив разложение функции f в степенной ряд в окрестности точки $\eta = 0$ и асимптотическое разложение для больших η и затем сомкнув оба разложения в некоторой подходящим образом выбранной точке.

В таблице 6 даны значения f, f', f'' .

Таблица 6

Значения f, f', f'' при различных η

$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}$	$f(\eta)$	$f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty}$	$f''(\eta)$
0	0	0	0,332
0,4	0,026	0,132	0,331
1,0	0,166	0,330	0,323
1,4	0,323	0,456	0,308
2,0	0,650	0,630	0,267
3,0	1,40	0,846	0,161
4,0	2,31	0,956	0,064
5,0	3,28	0,992	0,016

На рисунке 8.3 изображено распределение относительной продольной скорости в пограничном слое пластины

$$\frac{u}{u_\infty} = f' \quad (8.3.19)$$

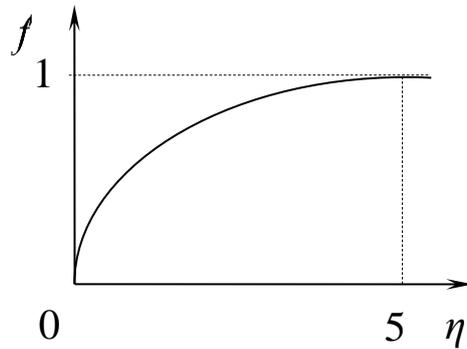


Рисунок 8.3 Распределение продольной скорости в пограничном слое от безразмерной поперечной координаты. Видно, что профиль скорости вблизи стенки имеет небольшую кривизну, но зато дальше от стенки он очень быстро приближается к асимптоте. На самой стенке профиль скоростей течения вдоль пластины имеет точку перегиба, т.к. при $y = 0$ вторая производная $\partial^2 u / \partial y^2 = 0$.

Запишем относительную поперечную скорость. С учетом (8.3.14) имеем

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} (\eta f' - f), \quad (8.3.20)$$

откуда получим

$$\frac{1}{2} (\eta f' - f) = \frac{v}{u_\infty} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}. \quad (8.3.21)$$

На рисунке 8.4 изображена зависимость относительной поперечной скорости в пограничном слое пластины от η . Примечательно, что на внешней границе слоя (последняя строка в таблице 6) скорость не равна нулю. Имеем

$$v_\infty = 0,8604 u_\infty \sqrt{\frac{\nu}{x u_\infty}}. \quad (8.3.22)$$

Следовательно, на внешнем крае пограничного слоя имеется составляющая скорости, направленная перпендикулярно к плоскости пластины. Это происходит потому, что жидкость на своем пути вдоль пластины несколько оттесняется от стенки вследствие нарастания толщины пограничного слоя вниз по течению. Отрыва пограничного слоя

при продольном обтекании плоской пластины не возникает, т.к. при таком течении перепад давления равен нулю.

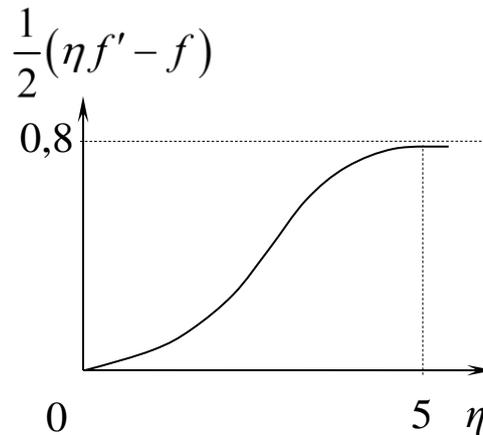


Рисунок 8.4 Распределение поперечной скорости в пограничном слое

Полученное решение для распределения скорости позволяет легко вычислить коэффициент сопротивления (трения). Местное касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (8.3.23)$$

С учетом (8.3.15), имеем

$$\tau_w(x) = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f''(0), \quad (8.3.24)$$

где, согласно таблице 6, $f''(0) = 0,332$. По определению

$$\tau_w(x) = \frac{c_f}{2} \rho u_\infty^2, \quad (8.3.25)$$

откуда

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w(x)}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mu u_\infty 0,332 \sqrt{u_\infty / \nu x}}{\rho u_\infty^2} = 0,332 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \quad (8.3.26)$$

или

$$c_f = 0,664 \text{Re}_x^{-0,5}, \quad (8.3.27)$$

где $\text{Re}_x = u_\infty x / \nu$. В случае пластины конечной длины L можно ввести средний коэффициент сопротивления

$$\bar{c}_f = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx. \quad (8.3.28)$$

Выполняя интегрирование легко получить

$$\bar{c}_f = \frac{1,328}{\text{Re}_L^{1/2}}. \quad (8.3.29)$$

Этот закон сопротивления применим только в области ламинарного течения, т.е. для чисел Рейнольдса

$$\text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu} < 5 \times 10^5 - 10^6. \quad (8.3.30)$$

Толщина пограничного слоя не может быть определена точно, так как влияние трения в пограничном слое уменьшается по мере удаления от стенки асимптотически. Составляющая скорости u , параллельна стенке, асимптотически переходит в скорость внешнего потенциального течения (функция f асимптотически приближается к единице). Если за толщину пограничного слоя принять то расстояние от стенки, на котором скорость $u = 0,99u_\infty$, то из таблицы 6 мы найдем, что такое расстояние равно приближенно $\eta \approx 5,0$ и, следовательно, толщина пограничного слоя будет

$$\delta = 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (8.3.31)$$

С физической точки зрения в качестве меры для толщины пограничного слоя более оправдана толщина вытеснения δ_1 , определяемая следующим образом. Под толщиной вытеснения понимается то расстояние, на котором потенциальное течение оттесняется наружу вследствие уменьшения скорости в пограничном слое. Влияние трения, уменьшая скорость течения, уменьшает тем самым и количество жидкости, протекающей в единицу времени, на величину

$$\int_0^\infty (u_\infty - u) dy. \quad (8.3.32)$$

С другой стороны, уменьшение количества жидкости, протекающей в потенциальном потоке равно $u_\infty \delta_1$, где δ_1 – толщина вытеснения. Приравняв обе величины, мы получим для определения δ_1 уравнение

$$u_\infty \delta_1 = \int_0^\infty (u_\infty - u) dy, \quad (8.3.33)$$

откуда

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy. \quad (8.3.34)$$

Заменяв в этой формуле отношение u / u_∞ его выражением, согласно равенству (8.3.19), мы будем иметь

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\infty (1 - f') d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} [\eta_1 - f(\eta_1)], \quad (8.3.35)$$

где значение η_1 соответствует некоторой точке, лежащей вне пограничного слоя. Взяв для f ее асимптотическое приближение

$$\eta_1 - f(\eta_1) = 1,7208 \quad (8.3.36)$$

и поэтому

$$\delta_1 = 1,7208 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (8.3.37)$$

Именно на это расстояние линии тока потенциального течения оттесняются наружу от стенки вследствие действия трения. Таким образом, толщина вытеснения в три раза меньше толщины пограничного слоя.

Заметим, наконец, что непосредственно на переднем крае пластины теория пограничного слоя неприменима, так как здесь допущение о том, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8.3.38)$$

не оправдывается. Использование теории пограничного слоя только после того, как число Рейнольдса $u_\infty x / \nu$, составленное для текущей среды достигнет некоторого определенного значения, равного приблизительно 10^4 .

8.4 Температурный пограничный слой на плоской пластине

Рассмотрим течения несжимаемой среды с постоянными, т.е. не зависящими от температуры физическими характеристиками. Поместим начало координат на передней кромке пластины, ось x расположим в плоскости пластины, а ось y направим перпендикулярно к пластине. Если примем, что градиент давления $dp/dx = 0$, то уравнения пограничного слоя (8.2.18), (8.2.19) примут вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

Граничными условиями будут

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = u_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Поле скоростей не зависит от поля температур. Поэтому сначала можно решить гидродинамические уравнения и полученный результат использовать для определения температурного поля. В разделе (8.3) показано, что если ввести переменные

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}, \quad \psi = \sqrt{\nu x u_\infty} f, \quad (8.4.3)$$

где ψ – функция тока, то составляющими u, v скорости будут

$$u = u_\infty f', \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}} (\eta f' - f). \quad (8.4.4)$$

Для определения функции f имеем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ff'' + 2f''' = 0 \quad (8.4.5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f = f' = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ f' = 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

Примем, что

$$\mathcal{G} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}. \quad (8.4.7)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} = \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} (T_w - T_\infty) \mathcal{G}', \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{u_\infty}{\nu x} (T_w - T_\infty), \\ \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} \mathcal{G}' (T_w - T_\infty). \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Подставляя (8.4.4), (8.4.8) в уравнение температурного пограничного слоя (8.4.1), получим

$$\begin{aligned} u_\infty f' \left(-\frac{\eta}{2x} \mathcal{G}' \right) (T_w - T_\infty) + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} (\eta f' - f) \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \mathcal{G}' (T_w - T_\infty) = \frac{a u_\infty}{\nu x} \mathcal{G}'' (T_w - T_\infty). \end{aligned} \quad (8.4.9)$$

После упрощений будем иметь уравнение

$$\mathcal{G}'' + \frac{\text{Pr}}{2} f \mathcal{G}' = 0 \quad (8.4.10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 1 \text{ при } \eta = 0, \\ \mathcal{G} = 0 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

Для интегрирования уравнения (8.4.10) введем интегрирующий множитель

$$e^{\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta}.$$

Получим

$$\left(e^{\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} \mathcal{G}' \right)' = 0, \quad (8.4.12)$$

откуда

$$\mathcal{G}' = C_1 e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} \quad (8.4.13)$$

и, окончательно,

$$\mathcal{G} = C_1 \int_0^\eta e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} + C_2. \quad (8.4.14)$$

При $\eta = 0$ имеем

$$1 = C_1 \int_0^0 e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} + C_2 \quad (8.4.15)$$

или

$$C_2 = 1. \quad (8.4.16)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ получаем

$$0 = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} + 1, \quad (8.4.17)$$

откуда

$$C_1 = - \left[\int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} \right]^{-1}. \quad (8.4.18)$$

Решение получается в виде

$$\mathcal{G} = 1 - \frac{\int_0^\eta e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta}} \quad (8.4.19)$$

или в виде

$$\mathcal{G} = \frac{\int_0^\eta e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} d\eta}. \quad (8.4.20)$$

Выражение (8.4.20) можно несколько упростить, если воспользоваться уравнением (8.4.5). Имеем

$$f = -\frac{2f'''}{f''}, \quad (8.4.21)$$

тогда

$$e^{-\frac{\text{Pr}}{2} \int_0^\eta f d\eta} = e^{\text{Pr} \int_0^\eta \frac{f'''}{f''} d\eta} = (f'')^{\text{Pr}} \quad (8.4.22)$$

и выражение (8.4.20) для \mathcal{G} принимает вид

$$\mathcal{G} = \frac{\int_0^\infty (f'')^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^\infty (f'')^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (8.4.23)$$

При $\text{Pr} = 1$ имеем

$$\mathcal{G} = 1 - f' = 1 - \frac{u}{u_\infty}. \quad (8.4.24)$$

Для вычисления коэффициента теплоотдачи воспользуемся граничным условием третьего рода

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \alpha (T_w - T_\infty), \quad (8.4.25)$$

которое преобразуется к виду

$$-\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} \right)_w \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \alpha. \quad (8.4.26)$$

Умножая обе части (8.4.26) на x и деля на λ , легко получить

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = -\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} \right)_w. \quad (8.4.27)$$

Взяв производную \mathcal{G} по η , вычислив ее значение на стенке (при $\eta = 0$) и имея в виду, что $f''(0) = 0,332$, найдем градиент температуры на стенке

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}\right)_w = Q(\text{Pr}) = \frac{(0,332)^{\text{Pr}}}{\int_0^{\infty} (f'')^{\text{Pr}} d\eta}. \quad (8.4.28)$$

Таким образом, величина $Q(\text{Pr})$ есть функция только числа Pr . Имеем для умеренных чисел Прандтля

$$Q_1 = 0,332\sqrt[3]{\text{Pr}} \quad (0,6 < \text{Pr} < 10). \quad (8.4.29)$$

Тогда получаем

$$\text{Nu}_x = 0,332\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\text{Re}_x}. \quad (8.4.30)$$

Для пластины длины L можно ввести среднее число Нуссельта

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = \frac{1}{L} \int_0^L \text{Nu}_x dx. \quad (8.4.31)$$

Непосредственным интегрированием можно убедиться, что

$$\frac{\text{Nu}_{\text{cp}}}{\sqrt{\text{Re}_L}} = 2 \frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (8.4.32)$$

Тогда можно написать

$$\text{Nu}_{\text{cp}} = 0,664\sqrt[3]{\text{Pr}}\sqrt{\text{Re}_L}. \quad (8.4.33)$$

Проверим, выполняется ли аналогия Рейнольдса (8.1.18)

$$\text{Nu}_x = \frac{c_f}{2} \text{Re}_x. \quad (8.4.34)$$

Подставляя значение c_f из выражения (8.3.27)

$$c_f = 0,664 \text{Re}_x^{-0,5} \quad (8.4.35)$$

в (8.4.34) получаем

$$\text{Nu}_x = 0,332\sqrt{\text{Re}_x}. \quad (8.4.36)$$

Сравнение (8.4.36) с выражением (8.4.30) при $\text{Pr} = 1$ показывает, что в этом случае аналогия Рейнольдса выполняется.

8.5 Течение и теплоотдача в передней критической точке

При взаимодействии потока с преградой, расположенной нормально к его скорости, теплоотдача осложняется действием градиента давления.

Рассмотрим процесс течения и теплообмена в окрестности критической точки (рисунок 8.5).

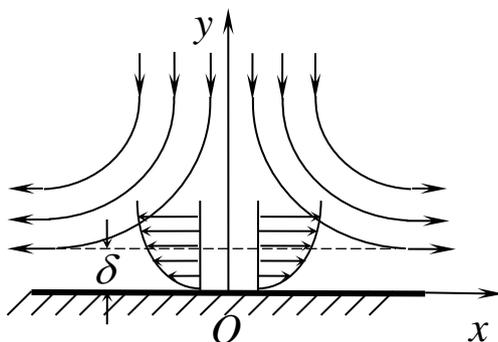


Рисунок 8.5 Течение в окрестности критической точки

В окрестности критической точки система уравнений пограничного слоя (8.2.18), (8.2.19)

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u \frac{du}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\
 u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.5.1}$$

При натекании потока на преграду по мере приближения к поверхности уменьшается его кинетическая энергия, а давление возрастает. Кинетическая энергия жидкости в точке O равна нулю, давление в критической точке ($x = 0$) наибольшее по сравнению с давлением в любой другой точке.

В точке O поток разворачивается и начинает двигаться вдоль поверхности в направлении оси x , при этом происходит уменьшение давления и увеличение скорости U . Значит, в окрестности передней критической точки существует градиент давления, а, следовательно, и скорости, поэтому течение в этой области называют градиентным.

За пределами пограничного слоя скорость U возрастает вдоль оси x по закону

$$U = u_1 x, \quad (8.5.2)$$

где u_1 – постоянная величина, которую можно рассматривать как градиент скорости. Очевидно, скорость на внешней границе пограничного слоя также подчиняется зависимости (8.5.2).

За пределами пограничного слоя течение будет потенциальным и поэтому для его описания можно применить уравнение Эйлера

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (8.5.3)$$

С учетом (8.5.2) уравнение динамического пограничного слоя можно представить в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = u_1^2 x + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (8.5.4)$$

Уравнение (8.5.4) должно решаться совместно с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0. \quad (8.5.5)$$

Введем новые переменные

$$u = u_1 x f', \quad f = f(\eta), \quad \eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}. \quad (8.5.6)$$

Функцию тока определим из условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_1 x f'. \quad (8.5.7)$$

Интегрируя, находим

$$\psi = \sqrt{\nu u_1} x f. \quad (8.5.8)$$

Производные от скорости в новых переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_1 \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} f'' x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_1^2 x}{\nu} f'''. \quad (8.5.9)$$

Подставим значения величин из (8.5.6), (8.5.9) в (8.5.4)

$$u_1 x f' u_1 f' - \sqrt{u_1 \nu} f u_1 \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} x f'' = u_1^2 x + u_1^2 x f'''. \quad (8.5.10)$$

После упрощения получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0. \quad (8.5.11)$$

Оно должно решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned} f = f' = 0 \text{ при } \eta = 0, \\ f' = 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

Результаты численного решения уравнения (8.5.11) даны в таблице 7, где представлены f , f' , f'' при разных η .

Таблица 7

Значения f , f' , f'' при различных η

$\eta = y\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''
0	0	0	1,233
0,4	0,088	0,414	0,846
0,8	0,312	0,686	0,529
1,2	0,622	0,847	0,294
1,6	0,980	0,932	0,147
2,0	1,36	0,973	0,066
2,4	1,76	0,991	0,026
2,8	2,15	0,997	0,009

График зависимости $f' = u/U$ от η изображен на рисунке 8.6.

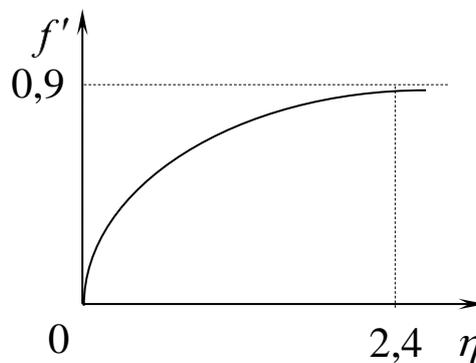


Рисунок 8.6 Распределение продольной скорости в окрестности критической точки

Из решения следует, что $f' = u/U = 0,99$ достигнет при $\eta = 2,4$. Тогда за толщину пограничного слоя δ следует брать величину

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{u_1}}. \quad (8.5.13)$$

Перейдем к решению уравнения температурного пограничного слоя

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8.5.14)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} T &= T_w \text{ при } y = 0, \\ T &= T_\infty \text{ при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.5.15)$$

Введем безразмерные температуру и координату

$$\mathcal{G} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \eta = y \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \quad (8.5.16)$$

и вычислим входящие в уравнение (8.5.14) величины. Имеем

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_w - T_\infty) \mathcal{G}' \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (T_w - T_\infty) \frac{u_1}{\nu} \mathcal{G}'', \quad (8.5.17)$$

тогда с учетом соотношений (8.5.9) можно получить

$$-\sqrt{u_1 \nu} f \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \mathcal{G}' = \frac{a}{\nu} u_1 \mathcal{G}'' \quad (8.5.18)$$

или, после упрощения

$$\mathcal{G}'' + \text{Pr} f \mathcal{G}' = 0. \quad (8.5.19)$$

Уравнение (8.5.19) должно решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= 0 \text{ при } \eta = 0, \\ \mathcal{G} &= 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.5.20)$$

Для решения (8.5.19) введем интегрирующий множитель

$$e^{\int_0^\eta \text{Pr} f d\eta}. \quad (8.5.21)$$

Тогда имеем

$$\left[\mathcal{G}' e^{\Pr \int_0^\eta f d\eta} \right]' = 0 \quad (8.5.22)$$

или

$$\mathcal{G}' e^{\Pr \int_0^\eta f d\eta} = C_1, \quad (8.5.23)$$

откуда

$$\mathcal{G}' = C_1 e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta}. \quad (8.5.24)$$

Интегрируя еще раз, получим

$$\mathcal{G} = C_1 \int_0^\eta e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta + C_2. \quad (8.5.25)$$

Подставляя (8.5.25) в граничное условие на стенке

$$0 = C_1 \int_0^0 e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta + C_2, \quad (8.5.26)$$

получим $C_2 = 0$. Подстановка (8.5.25) в граничное условие на бесконечности

$$1 = C_1 \int_0^\infty e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta, \quad (8.5.27)$$

позволяет определить C_1 . Окончательно, для температуры имеем

$$\mathcal{G} = \frac{\int_0^\eta e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta}{\int_0^\infty e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta}. \quad (8.5.28)$$

Величину

$$a(\text{Pr}) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta}, \quad (8.5.29)$$

зависящую только от числа Pr , можно подставить в виде функции

$$a(Pr) = 0,570Pr^{0,4}. \quad (8.5.30)$$

Определим коэффициент теплоотдачи α , для чего воспользуемся граничным условием III рода

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \alpha (T_w - T_\infty). \quad (8.5.31)$$

Для температуры T и градиента температуры имеем

$$T = T_w + a(Pr) \int_0^\eta e^{-Pr \int_0^\eta f d\eta} d\eta (T_\infty - T_w), \quad (8.5.32)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = (T_\infty - T_w) \sqrt{\frac{u_1}{\nu}}, \quad (8.5.33)$$

тогда можно записать

$$\alpha = a(Pr) \sqrt{\frac{u_1}{\nu}} \lambda. \quad (8.5.34)$$

Составим число $Nu_x = \alpha x / \lambda$, получим

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = a(Pr) \sqrt{\frac{u_1 x^2}{\nu}} \quad (8.5.35)$$

или, окончательно,

$$Nu_x = 0,570Pr^{0,4} Re_x^{0,5}, \quad (8.5.36)$$

где $Re_x = u_1 x^2 / \nu = Ux / \nu$.

В случае, когда на пластину натекает осесимметричный поток, жидкость растекается от передней критической точки во все стороны по радиусам.

Физическая обстановка в этом случае будет отличаться тем, что давление в окрестности передней критической точки будет больше, так как в первом случае удельный объем жидкости, текущей вдоль радиуса, возрастает быстрее, чем во втором. Большой градиент для осесимметричного потока вызовет большой градиент скорости. Интенсивность теплоотдачи прямо пропорциональна градиенту скорости u_1 , поэтому можно ожидать, что коэффициент теплоотдачи при натекании

осесимметричного потока на преграду будет больше, чем при обтекании плоским потоком. Решение уравнений пограничного слоя в этом случае приводят к зависимости

$$\text{Nu} = 0,763 \text{Pr}^{0,4} \text{Re}^{0,5}, \quad (8.5.37)$$

где $\text{Nu} = \alpha r / \lambda$, $\text{Re} = u_1 r^2 / \nu$.

8.6 Теплоотдачи при естественной конвекции

Свободная или естественная конвекция возникает за счет неоднородного распределения массовых сил. Рассмотрим уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{w}, \quad (8.6.1)$$

где \mathbf{w} – вектор скорости, p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости, \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения. В силу того, что вокруг нагретого тела установится неравномерное температурное поле, то и поле плотности вокруг тела будет неравномерным, т.е. между двумя точками среды возникнет разность плотностей.

Из определения температурного коэффициента расширения

$$\beta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 (T - T_0)}, \quad (8.6.2)$$

следует

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta \Delta T), \quad (8.6.3)$$

где $\Delta T = T - T_0$, ρ_0 , T_0 – плотность и температура в некоторой фиксированной точке, например, вдали от нагретого тела. Подставим (8.6.3) в (8.6.1)

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \rho_0 (1 - \beta \Delta T) \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (8.6.4)$$

Член $\rho_0 (1 - \beta \Delta T) \mathbf{g} = \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 \beta \Delta T \mathbf{g}$ может рассматриваться как сумма градиента гидростатического давления $\rho_0 \mathbf{g}$ в покоящейся жидкости и градиента подъемной силы $\rho_0 \beta \Delta T \mathbf{g}$. Тогда градиент гидростатического давления и градиент давления можно объединить в одно

$$\nabla p_1 = \nabla p - \rho_0 \mathbf{g} \quad (8.6.5)$$

и в дальнейшем индексы опустить. Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = -\beta \mathbf{g} \Delta T - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{w}. \quad (8.6.6)$$

Уравнение (8.6.6) должно быть дополнено уравнением переноса тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{w}, \text{grad} T) = a \nabla^2 T \quad (8.6.7)$$

и неразрывности

$$\text{div} \mathbf{w} = 0. \quad (8.6.8)$$

Опытные данные показывают, что при $Pr = 1$ основная область тепловых и гидродинамических возмущений при свободной конвекции сосредоточена в относительно узком слое жидкости около поверхности теплообмена. Около вертикальной пластины такой пограничный слой будет плоским, и давление в каждом его горизонтальном сечении равно гидростатическому давлению в невозмущенной области.

Распределение температур и скоростей в таком пограничном слое определяется системой уравнений (8.6.6-8.6.8). В стационарном потоке, в силу

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \nabla p = 0, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

указанная система приводится к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \beta g \Delta T + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

Здесь координата x направлена вверх (рисунок 8.7) вдоль пластины, координата y – по нормали к пластине вглубь потока. Впервые эта задача решена Лоренцом при граничных условиях

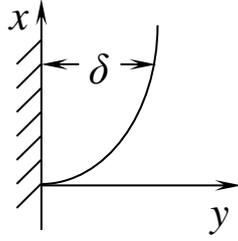


Рисунок 8.7 Схема течения около вертикальной нагретой пластины

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0, \\ u = 0, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

В дальнейшем для случая постоянной температуры Польшаузен ввел переменную подобия

$$\eta = Cux^{-1/4}. \quad (8.6.12)$$

Введем

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8.6.13)$$

где ψ – функция тока. Предположим, что

$$\psi = 4\nu Cx^{3/4} f, \quad f = f(\eta). \quad (8.6.14)$$

Компоненты скорости u и v имеют вид

$$\begin{aligned} u = 4\nu Cx^{3/4} Cx^{-1/4} f' = 4\nu C^2 x^{1/2} f', \\ v = \nu Cx^{-1/4} (\eta f' - 3f). \end{aligned} \quad (8.6.15)$$

Вычисляя члены, входящие в первое из уравнений (8.6.10), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \nu C^2 x^{-1/2} (2f' - \eta f''), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 4\nu C^3 x^{1/4} f'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\nu C^4 f'''. \end{aligned} \quad (8.6.16)$$

Подставляя (8.6.15), (8.6.16) в первое из уравнений (8.6.10)

$$\begin{aligned} 4\nu^2 C^2 x^{1/2} f' \nu C^2 x^{-1/2} (2f' - \eta f'') + \\ + \nu Cx^{-1/4} (\eta f' - 3f) 4\nu C^3 x^{1/4} f'' = \\ = \beta g \Delta T + 4\nu C^4 f''' \end{aligned} \quad (8.6.17)$$

или

$$\begin{aligned}
& 4\nu^2 C^4 (2f'^2 - \eta f f'') + \\
& + 4\nu^2 C^4 (\eta f' - 3ff'') = \\
& = \beta g \frac{\Delta T}{\Delta T_0} \Delta T_0 + 4\nu C^4 f'''.
\end{aligned} \tag{8.6.18}$$

Введем

$$\mathcal{G} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}, \quad 4\nu C^4 = \beta g \Delta T_0, \tag{8.6.19}$$

где $\Delta T = T - T_0$, $\Delta T_0 = T_w - T_0$. Тогда имеем

$$C = \sqrt[4]{\frac{\beta g \Delta T_0}{4\nu^2}}. \tag{8.6.20}$$

Уравнение (8.6.18) после упрощения принимает вид

$$f''' + 3ff'' - 2f'^2 + \mathcal{G} = 0. \tag{8.6.21}$$

Рассмотрим уравнение температурного пограничного слоя. Для его записи через переменную η вычислим входящие в него величины.

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x} &= -\frac{\eta}{4x} \mathcal{G}' \Delta T_0, \\
\frac{\partial T}{\partial y} &= Cx^{-1/4} \mathcal{G}' \Delta T_0, \\
\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= C^2 x^{-1/2} \mathcal{G}'' \Delta T_0.
\end{aligned} \tag{8.6.22}$$

После упрощения имеем

$$\mathcal{G}'' + 3\text{Pr} f \mathcal{G}' = 0. \tag{8.6.23}$$

Уравнения (8.6.21) и (8.6.23) должны решаться при граничных условиях

$$\begin{aligned}
f = 0, \quad f' = 0, \quad \mathcal{G} = 1 \quad \text{при } \eta = 0, \\
f' = 0, \quad \mathcal{G} = 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{8.6.24}$$

Система уравнений (8.6.21), (8.6.23) решается численно. На рисунке 8.8 приведены результаты расчета.

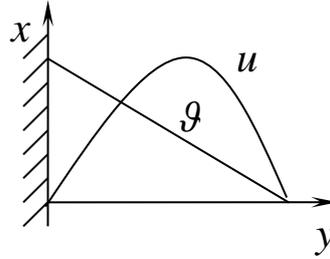


Рисунок 8.8 Распределение скорости и температуры около вертикальной нагретой пластины

Для определения коэффициента теплоотдачи воспользуемся граничным условием III рода

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \alpha (T_w - T_\infty). \quad (8.6.25)$$

С учетом (8.6.22), имеем

$$\alpha = -\lambda C x^{-1/4} g'_w. \quad (8.6.26)$$

Введем среднее значение коэффициента теплоотдачи

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha dx. \quad (8.6.27)$$

Расчет показывает, что градиент температуры на стенке имеет значение $g'_w = -0,508$. Тогда вычисления $\bar{\alpha}$ дают

$$\bar{\alpha} = 0,508 \frac{\lambda C}{L} \int_0^L \frac{1}{x^{1/4}} dx = 0,677 \lambda C L^{-1/4}. \quad (8.6.28)$$

Для среднего числа Нуссельта \bar{Nu} получим

$$\bar{Nu} = 0,677^4 \sqrt{\frac{\beta g \Delta T_0 L^3}{4\nu^2}}. \quad (8.6.29)$$

Полагая

$$Gr = \frac{gL^3 (T_w - T_0)}{\nu^2 T_0}, \quad (8.6.30)$$

равенство (8.6.29) можно привести к виду

$$\bar{Nu} = 0,478 Gr^{1/4}. \quad (8.6.31)$$

В выражении (8.6.30) принято, что температурный коэффициент расширения β остается неизменным и равным

$$\beta = \frac{1}{T_0}, \quad (8.6.32)$$

где T_0 – температура окружающей среды. Это справедливо для газов. В случае жидкостей вместо (8.6.30) используется формула

$$\text{Gr} = \frac{\beta g D^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2}, \quad (8.6.33)$$

где D – характерный размер тела.

Описанная картина свободного движения вдоль вертикальной стенки типична также и для свободного движения у наклонной стенки, шаров, горизонтальных труб.

Свободное движение около горизонтального цилиндра характеризуется тем, что вблизи задней критической точки происходит отрыв пограничного слоя. При прочих равных условиях отрыв возникает тем раньше, чем больше диаметр цилиндра.

Для ламинарной свободной конвекции при постоянной температуре стенки среднее число $\overline{\text{Nu}}$ можно выразить степенной зависимостью

$$\overline{\text{Nu}} = C \text{Ra}^m \text{Pr}^n, \quad (8.6.34)$$

где

$$\text{Ra} = \frac{\beta g (T - T_0) D^3}{\nu \alpha} \quad (8.6.35)$$

есть число Рэлея $\text{Ra} = \text{Gr} \text{Pr}$. В области значений $3 \times 10^2 < \text{Ra} < 2 \times 10^7$ параметры C, m, n принимают значения, соответственно,

$$C = 0,474, \quad m = 0,25, \quad n = 0,047. \quad (8.6.36)$$

При малых скоростях вынужденного движения жидкой среды и заметных разностях температур скорость свободной конвекции оказывается соизмеримой со скоростью течения, обусловленной внешним побудителем. В этом случае интенсивность теплоотдачи зависит от критерия Gr , так и от критерия Re . При этом в последний критерий

входит скорость вынужденного течения. Таким образом, в общем случае

$$\text{Nu} = \Phi(\text{Pr}, \text{Gr}, \text{Re}). \quad (8.6.37)$$

По экспериментам Ляховского, обобщенным в виде графика на рисунке 8.9, совместное воздействие вынужденной и свободной конвекции на теплоотдачу шаров наблюдается при $\text{Re} < 150$. Влияние тепловой гравитационной конвекции на поле скорости и температуры при течении жидкости и газа в каналах различной конфигурации наблюдается уже при относительно небольшой плотности теплового потока в ламинарных и турбулентных режимах течения.

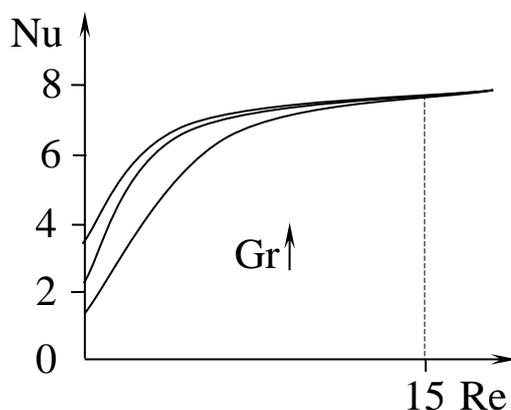


Рисунок 8.9 Совместное воздействие вынужденной и свободной конвекции на теплоотдачу шара

ГЛАВА 9 ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

9.1 Особенности движения и теплообмена в трубах

Процесс теплоотдачи при течении жидкости в трубах является более сложным по сравнению с процессом теплоотдачи при омывании поверхности неограниченным потоком. Жидкость, текущая вдали от пластины, не испытывает влияния процессов, происходящих у стенки.

Течение жидкости может быть ламинарным и турбулентным. О режиме течения в трубах судят по значению числа Рейнольдса

$$Re = \frac{\bar{u}d}{\nu}, \quad (9.1.1)$$

где \bar{u} – осредненная по сечению трубы скорость жидкости, d – внутренний диаметр трубы, ν – коэффициент кинематической вязкости. Если $Re \leq 2000$, то течение является ламинарным. При $Re > 2000$ поток после возмущения уже не возвращается к ламинарному режиму течения. Развитое турбулентное течение в технических трубах устанавливается к ламинарному режиму.

Если жидкость поступает в трубу из большого объема и стенки трубы на входе несколько закруглены, распределение скорости в начальном сечении считают равномерным (рисунок 9.1). При движении у стенок образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого постепенно нарастает. В достаточно длинных трубах на некотором расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение трубы. При постоянных физических свойствах жидкости после заполнения устанавливается постоянное распределение скорости, характерное для данного режима течения (в ламинарных потоках это распределение известно под названием течением Пуазейля).

Расстояние, отсчитываемое от входа до сечения, соответствующее слиянию пограничного слоя, называется длиной гидродинамического начального участка или участком гидродинамической стабилизации.

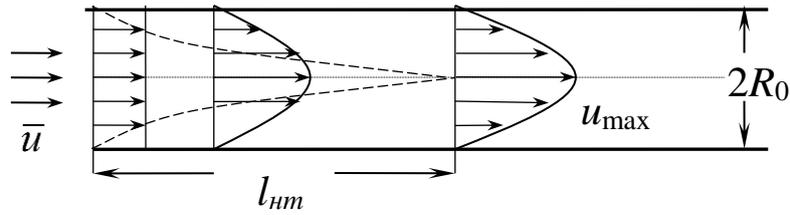


Рисунок 9.1 Распределение скорости потока в трубе

Стабилизированное течение ($x > l_{гт}$) не зависит от распределения скорости на входе, но распределение скорости как при $x < l_{гт}$, так и при $x > l_{гт}$ может зависеть от процесса теплообмена.

Наличие пограничного слоя означает, что скорость потока в нем меньше, чем на оси трубы. Так как количество жидкости, втекающего в трубу должно сохраняться неизменным, скорость в ядре потока должна стать больше, т.е. поток в центральной части трубы ускоряется. Как будет показано ниже, максимальная скорость на оси стабилизированного течения вдвое превышает среднюю по сечению трубы скорость потока.

По мере движения жидкости, температура которой ниже температуры стенок наблюдается прогрев пристенных слоев. В начале трубы центральное ядро жидкости еще имеет температуру, равную температуре на входе. Это ядро в теплообмене не участвует, все изменение температуры сосредоточено в пристенном слое. Таким образом, у поверхности трубы в ее начальной части образуется температурный пограничный слой, толщина которого по мере удаления от входа увеличивается. На некотором расстоянии от входа, равном $l_{гт}$ тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы. В дальнейшем вся жидкость участвует в теплообмене, причем интенсивность теплообмена уже не зависит от распределения скорости и температуры на входе. Участок трубы длиной $l_{гт}$ называют участком тепловой стабилизации. Если при $x > l_{гт}$ закон задания граничных условий на стенке не изменяется, то такой теплообмен называют стабилизированным. При $x > l_{гт}$ даже в случае постоянных физических свойств жидкости и при простейших граничных условиях, например, $T_w = \text{const}$, $q_w = \text{const}$,

коэффициент теплоотдачи, как будет видно из дальнейшего, при стабилизированном теплообмене является постоянным. На начальном участке коэффициент теплоотдачи максимален на входе и быстро убывает до значения при стабилизированном теплообмене.

Теория показывает, что при ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами и однородной температурой на входе в случае $T_w = \text{const}$

$$l_{\text{нт}} = 0,055 \text{Pe}, \quad (9.1.2)$$

а в случае $q_w = \text{const}$

$$l_{\text{нт}} = 0,07 \text{Pe}. \quad (9.1.3)$$

Эти равенства соответствуют предварительно гидродинамически стабилизированному течению.

9.2 Распределение скоростей и гидродинамическое сопротивление при стабилизированном течении

При установившемся ламинарном изотермическом течении потока $d\mathbf{w} / dt = 0$, и уравнение движения в цилиндрических координатах примет вид

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (9.2.1)$$

или

$$\frac{d}{dr} \left(\mu r \frac{du}{dr} \right) = r \frac{dp}{dx}. \quad (9.2.2)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой изменение по радиусу касательных напряжений в симметричном цилиндрическом ламинарном потоке, а правая – силы давления, действующей на столб жидкости единичной длины с сечением πr^2 .

Интегрируя уравнение (9.2.2) при граничных условиях

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= 0 \text{ при } r = 0, \\ u &= 0 \text{ при } r = R_0. \end{aligned} \quad (9.2.3)$$

Получаем параболический закон распределения скоростей

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R_0^2 - r^2), \quad (9.2.4)$$

где R_0 – внутренний радиус трубы. Вычислим среднюю по сечению скорость

$$\bar{u} = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} r u dr. \quad (9.2.5)$$

Имеем

$$\bar{u} = \frac{2}{R_0^2} \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{R_0^4}{2} - \frac{R_0^4}{4} \right) = -\frac{R_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (9.2.6)$$

Сравнивая формулы (9.2.4) и (9.2.6), находим

$$u = 2\bar{u} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right). \quad (9.2.7)$$

Таким образом, при ламинарном течении скорость на оси трубы в два раза больше средней скорости.

В гидродинамических расчетах падение давления на единицу длины изотермического потока выражается формулой Дарси

$$-\frac{dp}{dx} = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{2d}, \quad d = 2R_0. \quad (9.2.8)$$

Подставим сюда значение \bar{u} из формулы (9.2.6)

$$\frac{8\mu \bar{u}}{R_0^2} = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{2d}, \quad (9.2.9)$$

откуда

$$\zeta = \frac{8\mu d}{R_0^2 \rho \bar{u}} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (9.2.10)$$

где $\text{Re} = \bar{u}d/\nu$.

Рассмотренные закономерности впервые были установлены в работах Гагена и Пуазейля. Для каналов некруглого сечения зависимость $\zeta(\text{Re})$ имеет тот же характер, но меняется численное значение множителя пропорциональности.

9.3 Теплоотдача при ламинарном течении

Записав уравнение теплопереноса в цилиндрических координатах

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (9.3.1)$$

положив в нем для установившегося потока

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad v = 0 \quad (9.3.2)$$

и подставив значение u из (9.2.7), получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2\bar{u}}{a} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (9.3.3)$$

Введем следующие безразмерные координаты, полагая температуру стенки трубы постоянной

$$\mathcal{G} = \frac{T_w - T}{T_w - T_1}, \quad \xi = \frac{r}{R_0}, \quad X = \frac{x}{R_0}, \quad (9.3.4)$$

где T_1 – температура жидкости при входе в трубу. Тогда уравнение (9.3.3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} = \text{Pe} (1 - \xi^2) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} - \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial X^2}, \quad (9.3.5)$$

где $\text{Pe} = \bar{u}d/a$ – критерий Пекле.

Расчеты показывают, что уже при $\text{Pe} > 10$ величину $\partial^2 \mathcal{G} / \partial X^2$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с первым членом правой части уравнения (9.3.5), т.е. имеем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} = \text{Pe} (1 - \xi^2) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X}. \quad (9.3.6)$$

Как при нагревании, так и при охлаждении жидкости безразмерная температура \mathcal{G} убывает вдоль течения. В связи с этим ищем решение уравнения (9.3.6) в виде произведения двух функций, аналогично тому, как это делалось при исследовании тела, стремящегося к тепловому равновесию.

Положим в (9.3.6)

$$\mathcal{G} = \psi(\xi)e^{-\beta^2 X/Pe}, \quad (9.3.7)$$

получим

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\psi(\xi)}{d\xi} + \beta^2 (1 - \xi^2) \psi(\xi) = 0, \quad (9.3.8)$$

общее решение которого определяется как

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) e^{-\beta_i^2 X/Pe}. \quad (9.3.9)$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = 0, \quad \psi(1) = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \\ \mathcal{G} = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad X = 0. \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

По вычислениям Нуссельта функция $\psi_i(\xi)$ определяется в виде

$$\psi_i(\xi) = A_i \chi_i(\xi). \quad (9.3.11)$$

Коэффициенты β_i и A_i приведены в таблице 8, а функции χ_i изображены на рисунке 9.2.

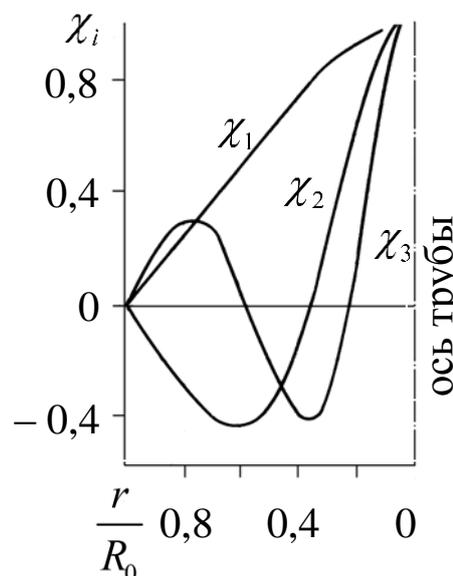


Рисунок 9.2 Распределения функций χ_i по радиальной координате

Таблица 8

Значения коэффициентов β_i и A_i

I	1	2	3
β_i	2,705	6,66	10,3
A_i	1,477	-0,810	0,385

Для вычисления коэффициента теплоотдачи вводим среднемассовую по сечению температуру потока

$$\bar{T}_x = \frac{2}{\bar{u}R_0^2} \int_0^{R_0} T u r dr. \quad (9.3.12)$$

Граничное условие на стенке трубы имеет вид

$$\alpha_x (T_w - \bar{T}_x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (9.3.13)$$

Принимая во внимание, что $y = R_0 - r$, можем записать

$$\alpha_x (T_w - \bar{T}_x) = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_w. \quad (9.3.14)$$

Переходя к безразмерной записи, получим

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha_x d}{\lambda} = -\frac{2}{\mathcal{G}_x} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1}, \quad (9.3.15)$$

где

$$\mathcal{G}_x = \frac{T_w - \bar{T}_x}{T_w - T_1} = \quad (9.3.16)$$

$$= 0,819e^{-14,62 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + 0,0976e^{-88,2 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + 0,0189e^{-212 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + \dots,$$

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = 1,489e^{-14,62 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + 1,114e^{-88,2 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + 0,503e^{-212 \frac{ax}{\bar{u}d^2}} + \dots \quad (9.3.17)$$

Из выведенных формул видно, что теплоотдача при ламинарном течении жидкости в трубе определяется комплексом

$$\frac{ax}{\bar{u}d^2} = \frac{x}{\text{Pe}d}. \quad (9.3.18)$$

На рисунке 9.3 представлена зависимость критерия Nu_x от комплекса $Re d/x$. На входном участке Nu_x максимально. С ростом x число Nu_x падает до некоторого постоянного значения. В случае круглой трубы это минимальное значение равно 3,66. Повышенное значение коэффициента теплоотдачи во входном участке объясняется тем, что температурное поле формируется постепенно на некотором расстоянии от места начала обогрева. При этом градиент температуры вблизи стенки трубы меняется от бесконечности в начальном сечении, где теоретически температура по всему сечению постоянна и на стенке имеет место скачок температуры от T_w до T_1 , до значения, соответствующего уже стабилизированному температурному полю.

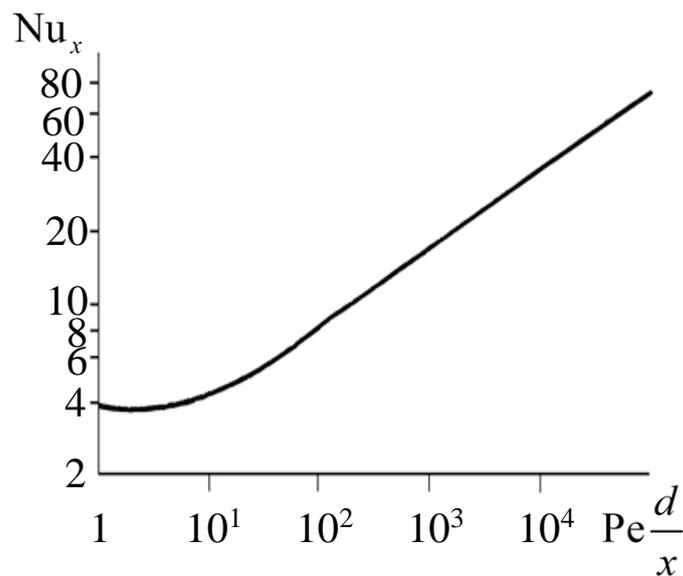


Рисунок 9.3 Зависимость критерия Nu_x от комплекса $Re \frac{d}{x}$

При задании условия постоянства плотности теплового потока на стенке трубы ($q_w = const$) значения среднего коэффициента теплоотдачи оказывается несколько более высоким, чем при условии $T_w = const$. Стабилизированное значение числа Nu при $q_w = const$ для круглой трубы равно 4,36.

Решение, изображенное на рисунке 9.3, с достаточной для практики точностью может быть аппроксимировано двумя линиями: а) при значениях определяющего комплекса $(\text{Pe } d/L)$, меньших некоторого числа $\text{Nu} = \text{const}$; б) при других значениях этого комплекса $\text{Nu} \sim (\text{Pe } d/L)^{1/3}$. Имеем

$$\overline{\text{Nu}} = 1,61(\text{Pe } d/L)^{1/3} \text{ при } \text{Pe} > 12, \quad (9.3.19)$$

$$\overline{\text{Nu}} = 3,66 \text{ при } \text{Pe} < 12. \quad (9.3.20)$$

ГЛАВА 10 УРАВНЕНИЯ ОСРЕДНЕННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

10.1 Турбулентность

Путем ввода краски в поток жидкости или дыма в поток газа, движущихся в канале с прозрачными стенками, можно наблюдать траектории отдельных элементов изучаемого потока. При этом оказывается, что характер движения существенно меняется при переходе от одних значений скоростей течения к другим.

В области малых скоростей окрашенные частицы следуют в потоке по вполне определенным траекториям, все время сохраняя движение в направлении вектора средней скорости потока, а возникающие в потоке случайные нерегулярности не развиваются, а гаснут. Этот вид движения называется ламинарным (слоистым) течением. При этом под средней скоростью потока при $\rho = \text{const}$ понимается отношение

$$\bar{u} = \int u ds dt \frac{1}{\Delta S \Delta t}, \quad (10.1.1)$$

где Δt – промежуток времени, за который производится осреднение, с. При некотором значении средней расходной скорости потока, упорядоченное движение резко нарушается: в потоке возникают пульсации скорости, подкрашенные струйки быстро размываются, отдельные объемы («комки») жидкости начинают двигаться поперек потока и даже в обратном направлении к общему осредненному движению. Возникшее нерегулярное, случайное в отношении малых элементов потока движение является весьма устойчивым в среднем и единственным реально существующим в области значительных скоростей течения. Таким образом, наиболее характерным видом движения среды является движение, не упорядоченное в малых элементах потоках. Такого рода течение называется турбулентным.

В области скоростей, при которых имеет место ламинарное течение, не только капельные жидкости, но и газы во многих случаях могут рассматриваться как практически несжимаемые среды. Кроме того,

при вынужденном течении обычно можно пренебречь действием силы тяжести. Уравнения движения и неразрывности установившегося течения при этих условиях имеют вид

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{w} = (\mathbf{w}, \text{grad}) \mathbf{w}, \quad (10.1.2)$$

$$\text{div } \mathbf{w} = 0.$$

Если величины ρ и ν заданы, то уравнения (10.1.2) содержат два неизвестных: давление p и скорость течения \mathbf{w} . Следовательно, движение рассматриваемого потока определяется вполне однозначно, если известны геометрическая конфигурация канала, кинематическая вязкость жидкости и поле скоростей течения или поле относительных перепадов давления $((V\rho)\text{grad } p)$.

Выбирая в качестве независимой переменной скорость течения жидкости, имеем в качестве определяющих параметров потока три величины $\{\nu, \bar{u}, l\}$. Здесь l – характерный геометрический размер канала (для круглой трубы $l = d$); \bar{u} – осредненная по сечению канала скорость течения жидкости. Составляя безразмерную комбинацию этих трех величин, получаем комплекс

$$\text{Re} = \frac{\bar{u}l}{\nu}. \quad (10.1.3)$$

Рейнольдс показал, что переход от одного режима течения жидкости к другому происходит при некотором определенном значении этого безразмерного комплекса, а именно при движении жидкости в круглой трубе ламинарное течение имеет место, когда $\text{Re} < 2000$, а турбулентное – при $\text{Re} > 2000$.

10.2 Уравнения осредненного турбулентного течения жидкости

Турбулентное течение характеризуется беспорядочным перемещением внутри потока отдельных объемов жидкости, много больших тех, к которым еще можно применить понятие дифференциального объема сплошной среды. Следовательно, общие уравнения гидродинамики применимы и к турбулентному течению.

При этом необходимо тем или иным способом учесть статическую природу турбулентности. Опыт показывает, что инерционный поток, дает достаточно устойчивые во времени показания, т.е. значения скоростей и температур в турбулентном потоке за достаточно большой промежуток времени в среднем остаются постоянными. Таким образом, при установившемся осредненном движении потока его средняя за некоторый промежуток времени Δt скорость течения \bar{u} остается постоянной, истинные же (актуальные) скорости элементов потока непрерывно отклоняются от этого среднего значения, как по величине, так и по направлению.

Актуальную скорость можно представить в виде суммы

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{w}} + w', \quad (10.2.1)$$

где $\bar{\mathbf{w}}$ – вектор осредненной скорости в данной точке потока; w' – вектор пульсационной составляющей истинной скорости, дающий отклонение этой скорости по величине и направлению от осредненного значения. Значение осредненной скорости в данной точке определяется интегралом

$$\bar{\mathbf{w}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \mathbf{w} dt, \quad (10.2.2)$$

где промежуток времени Δt должен быть достаточно большим по сравнению с периодом пульсаций скорости, чтобы для различных промежутков времени результат осреднения был одним и тем же. Отсюда очевидно, что

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} w' dt = 0. \quad (10.2.3)$$

Поскольку за период Δt все пульсационные составляющие скорости компенсируются.

Пульсации скорости вызывают в потоке также пульсации давления, температуры (в случае теплообмена), концентрации растворенного вещества (в случае диффузии) и т.п.

Примем, что пульсации плотности пренебрежимо малы. Тогда

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad w = \bar{w} + w', \quad p = \bar{p} + p'. \quad (10.2.4)$$

Рассмотрим уравнения движения стационарного потока

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u, \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v, \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w\end{aligned}\quad (10.2.5)$$

и неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10.2.6)$$

Умножим (10.2.6) на ρu и сложим его с первым уравнением (10.2.6).

Получим

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u. \quad (10.2.7)$$

Аналогично, если умножить (10.2.6) на ρv и сложить со вторым уравнением (10.2.5), то имеем

$$\frac{\partial(\rho v v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v. \quad (10.2.8)$$

Умножая (10.2.6) на ρw и складывая его с третьим уравнением (10.2.5) запишем

$$\frac{\partial(\rho w w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w. \quad (10.2.9)$$

Подставим соотношение (10.2.4) в уравнения (10.2.7-10.2.9) и проведем осреднение по времени входящих в них величин, следуя следующим правилам осреднения. Вторичное осреднение по той же переменной не изменяет значения, полученного после первого осреднения, т.е. если

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \varphi dt, \quad (10.2.10)$$

то

$$\bar{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} \bar{\varphi} dt = \bar{\varphi}. \quad (10.2.11)$$

Последнее означает, что на отрезке Δt величина φ может рассматриваться или как постоянная, или как линейная функция времени.

Осредненное произведение осредненного значения на актуальное значение равно произведению осредненных значений, т.е.

$$\overline{\bar{\varphi}\psi} = \bar{\varphi}\bar{\psi}. \quad (10.2.12)$$

В соответствии с (10.2.3), если пульсационная составляющая величины φ есть Φ , то

$$\int_{\Delta t} \Phi dt = 0. \quad (10.2.13)$$

Принимая это во внимание, находим

$$\overline{p + p'} = \bar{p}, \quad \overline{u + u'} = \bar{u} \quad (10.2.14)$$

и

$$\begin{aligned} \overline{\rho u u} &= \overline{\rho(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \rho\bar{u}\bar{u} + \overline{\rho u'^2}, \\ \overline{\rho u v} &= \overline{\rho(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = \rho\bar{u}\bar{v} + \overline{\rho u'v'}, \\ \overline{\rho u w} &= \overline{\rho(\bar{u} + u')(\bar{w} + w')} = \rho\bar{u}\bar{w} + \overline{\rho u'w'}. \end{aligned} \quad (10.2.15)$$

Очевидно, что уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (10.2.16)$$

Уравнения (10.2.7)-(10.2.9) можно записать, как

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\overline{u'v'})}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\overline{u'w'})}{\partial z} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \mu\nabla^2\bar{u}, \\ \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\overline{v'^2})}{\partial y} + \\ + \frac{\partial(\rho\bar{v}\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\overline{v'w'})}{\partial z} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \mu\nabla^2\bar{v}, \end{aligned} \quad (10.2.17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{u}'\bar{w}')}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}\bar{w})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\bar{v}'\bar{w}')}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial(\rho\bar{w}\bar{w})}{\partial z} + \frac{\partial(\rho\bar{w}'^2)}{\partial z} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \mu\nabla^2\bar{w}. \end{aligned}$$

Умножая уравнения неразрывности последовательно на $\rho\bar{u}$, $\rho\bar{v}$, $\rho\bar{w}$ и вычитая полученные выражения из уравнений (10.2.7) легко получить

$$\begin{aligned} & \rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \\ & + \left[\frac{\partial(-\rho\bar{u}'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho\bar{u}'\bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho\bar{u}'\bar{w}')}{\partial z}\right] + \mu\nabla^2\bar{u}, \\ & \rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + \\ & + \left[\frac{\partial(-\rho\bar{u}'\bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho\bar{v}'^2)}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho\bar{v}'\bar{w}')}{\partial z}\right] + \mu\nabla^2\bar{v}, \tag{10.2.18} \\ & \rho\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} + \\ & + \left[\frac{\partial(-\rho\bar{u}'\bar{w}')}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho\bar{v}'\bar{w}')}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho\bar{w}'^2)}{\partial z}\right] + \mu\nabla^2\bar{w}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений видно, что в осредненном движении пульсации скорости вызывают появление членов, стоящих в квадратных скобках и аналогичных по смыслу членам вязкого трения. Они называются членами турбулентного трения и выражают потерю энергии в результате переноса количества движения значительными (молярными) объемами жидкости, перемещающимися вследствие пульсаций скорости в потоке.

Нагляднее всего можно пояснить эту мысль на примере установившегося плоского потока, осредненное движение которого параллельно оси x , а скорость является функцией только координаты y . В этом случае из первого уравнения (10.2.18) следует, что

$$-\frac{d\bar{p}}{dx} + \mu \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \frac{d}{dy}(-\rho\overline{u'v'}) = 0. \quad (10.2.19)$$

Введя обозначения для турбулентных касательных напряжений

$$\tau_T = -\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (10.2.20)$$

и учитывая, что

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} + \frac{d}{dy} \left(\mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad (10.2.21)$$

получим выражение для суммарных касательных напряжений

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (10.2.22)$$

Величина μ_T рассматривается при этом как некоторый коэффициент турбулентной вязкости и называется коэффициентом турбулентного переноса количества движения. В потоке жидкости с постоянными ρ и μ величина μ_T зависит от абсолютного значения μ , числа Рейнольдса потока и координат. В развитом турбулентном потоке $\mu_T \gg \mu$.

10.3 Уравнение распространения тепла

В неизотермическом турбулентном потоке следствием пульсаций скорости является также и пульсация температуры. В этом случае можно написать

$$T = \bar{T} + T'. \quad (10.3.1)$$

С учетом уравнения неразрывности при $\rho = \text{const}$ можно написать

$$\rho c_p \left[\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} \right] = a \nabla^2 T. \quad (10.3.2)$$

Легко видеть, что

$$\overline{uT} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{T} + T')} = \overline{uT} + \overline{u'T'}. \quad (10.3.3)$$

Осредним уравнение (10.3.2) по времени, используя (10.3.3). С учетом уравнения неразрывности, получим

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right) = \\ = \left[\frac{\partial(-\rho c_p \overline{u'T'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho c_p \overline{v'T'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho c_p \overline{w'T'})}{\partial z} \right] + \lambda \nabla^2 \bar{T}. \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

Члены, стоящие в правой части (10.3.4) характеризуют теплопроводность, причем первые три (в квадратных скобках) – турбулентную теплопроводность, последний – молекулярную теплопроводность. Положим

$$\begin{aligned} \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} &= -\rho c_p \overline{u'T'}, \\ \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} &= -\rho c_p \overline{v'T'}, \\ \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} &= -\rho c_p \overline{w'T'}, \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

где λ_T называется коэффициентом турбулентной теплопроводности. Тогда (10.3.4) можно переписать так

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = a \nabla^2 \bar{T} + \frac{1}{\rho c_p} \operatorname{div}(\lambda_T \operatorname{grad} \bar{T}) \quad (10.3.6)$$

или

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = a \operatorname{div} \left[\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) \operatorname{grad} \bar{T} \right]. \quad (10.3.7)$$

10.4 Турбулентное трение и турбулентная теплопроводность в плоском потоке жидкости

В плоском, установившемся и развитом турбулентном потоке (т.е. при $\mu_T \gg \mu$, $\lambda_T \gg \lambda$), когда поперечные градиенты скоростей и

температур много больше продольных, а продольный градиент давления много больше поперечного из уравнений (10.2.18), (10.2.16) и (10.3.7) следует система уравнений

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}, \\ \rho c_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial (-\rho c_p \overline{v'T'})}{\partial y}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (10.4.1)$$

Эта система описывает движение и теплообмен в потоке жидкости в плоском канале (в плоском пограничном слое) при достаточно умеренных скоростях течения.

Из системы (10.4.1) следует, что для такого течения

$$\begin{aligned} q_T &= \rho c_p \overline{v'T'}, \\ \tau_T &= -\rho \overline{u'v'}. \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

10.5 Полуэмпирическое выражение турбулентного обмена в плоском несжимаемом потоке вблизи стенки

Осредненные уравнения движения и теплообмена в турбулентном потоке оказываются незамкнутыми, так как в них появляются члены, содержащие неизвестные величины пульсаций скорости и температуры. Длительное время не удавалось построить теорию, позволяющую вычислить эти величины, не прибегая к эксперименту. В связи с этим широкое распространение получили так называемые полуэмпирические теории турбулентности, в основу которых положено предположение о том или ином виде связи между переносимой турбулентными пульсациями величиной (количество движения, количество теплоты, напряженность вихря и т.п.) и соответствующими параметрами потока.

Уравнение Рейнольдса (10.2.18) показывает, что мерой интенсивности турбулентных пульсаций может являться величина $\sqrt{\tau / \rho}$. Особенно отчетливо это видно при рассмотрении области плоского потока, достаточно удаленной от твердой стенки. В этом случае $\mu_T \gg \mu$ и полное касательное напряжение практически равно τ_T , тогда из формулы (10.4.2) следует, что

$$|\sqrt{u'v'}| = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (10.5.1)$$

Величина $v^* = \sqrt{\tau / \rho}$ называется скоростью касательных напряжений, или динамической скоростью. Обычно в качестве характерного значения принимают значение этой величины на поверхности стенки

$$v_w^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}. \quad (10.5.2)$$

Рассмотрим соотношение между турбулентным и молекулярным трением в плоском турбулентном потоке несжимаемой жидкости без градиента давления. Оно может зависеть только от абсолютного уровня касательных напряжений, их распределения по толщине потока, расстояния от стенки и двух физических характеристик среды – плотности и молекулярной вязкости, т.е.

$$\mu_T = f(\tau_w, \rho, \mu, y, \delta), \quad (10.5.3)$$

где δ – толщина потока. Из величин, находящихся под знаком функции, можно составить два безразмерных комплекса: относительное расстояние от стенки и число Рейнольдса, построенное по локальной скорости касательного напряжения и расстоянию от стенки

$$\xi = \frac{y}{\delta}, \quad \eta = \frac{v^* y}{\nu}. \quad (10.5.4)$$

Таким образом, зависимость (10.5.3) можно представить в виде связи трех безразмерных величин

$$\frac{\mu_T}{\mu} = f_1(\eta, \xi). \quad (10.5.5)$$

На некотором удалении от стенки, когда молекулярное трение перестает влиять на турбулентные пульсации скорости, функция f принимает форму, в которой отсутствует величина μ . Этому условию соответствует зависимость

$$\frac{\mu_T}{\rho \nu^* y} = f_2(\xi). \quad (10.5.6)$$

Если вблизи стенки f_2 меняется слабо, то в области $y_1 < y < \delta$ (где y_1 – толщина слоя, в котором существенно проявляется молекулярное трение)

$$\mu_T = \kappa \rho \nu^* y. \quad (10.5.7)$$

Здесь κ – некоторая константа, характеризующая структуру турбулентного потока. Тогда

$$\tau_T = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \kappa \rho \nu^* y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (10.5.8)$$

Полагая

$$\rho \nu^{*2} = \kappa \rho \nu^* y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (10.5.9)$$

откуда

$$\nu^* = \kappa y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (10.5.10)$$

С учетом выражения (10.5.10) имеем

$$\tau_T = \rho \left(\kappa y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (10.5.11)$$

Формула (10.5.11) может быть обобщена введением некоторой характерной длины

$$l = y f(\xi), \quad (10.5.12)$$

причем в области $y_1 < y < \delta$ имеем $f(\xi) = \kappa$. При таком обобщении формула (10.5.11) принимает вид

$$\tau_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (10.5.13)$$

где введение модуля производной скорости обусловлено необходимостью сохранения знака касательного напряжения. Запишем выражение (10.5.7) в виде

$$\varphi = \frac{\mu_T}{\rho \nu^* R_0} = \kappa \frac{y}{R_0}. \quad (10.5.14)$$

Из (10.5.14) следует, что между φ и y/R_0 , где R_0 – радиус трубы, существует линейная связь. Однако из экспериментальной зависимости φ от расстояния до стенки трубы (рисунок 10.1) следует, что линейная зависимость $\varphi = \varphi(y)$ наблюдается только в пристенной области потока.

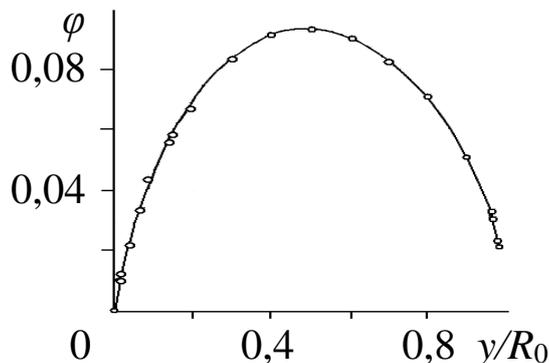


Рисунок 10.1 Распределение коэффициента турбулентной вязкости по радиусу трубы

10.6 Связь между коэффициентами турбулентной теплопроводности и вязкости

Рассматривая теплопроводность в направлении оси y в плоском турбулентном потоке несжимаемой жидкости в соответствии с выражением (10.4.2) имеем

$$q_T = \rho c_p \overline{\nu' T'}. \quad (10.6.1)$$

Следовательно, пульсация ν' переносит избыточное теплосодержание $\rho c_p T'$. По аналогии с переносом количеством движения можно положить

$$T' \sim l_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (10.6.2)$$

тогда

$$q_T = \rho c_p l_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{d\bar{T}}{dy}. \quad (10.6.3)$$

Здесь l_T – длина пути рассеяния теплосодержания, в общем случае не обязательно равная длине пути перемешивания l . Касательное напряжение τ_T , выражаемое вторым уравнением (10.4.2) можно записать в виде

$$\tau_T = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (10.6.4)$$

С учетом

$$\tau_T = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (10.6.5)$$

имеем

$$\mu_T = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad (10.6.6)$$

а с учетом

$$q_T = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \rho c_p l_T \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (10.6.7)$$

получаем

$$\lambda_T = \rho c_p l_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (10.6.8)$$

Для отношения (λ_T / μ_T) можно записать

$$\frac{\lambda_T}{\mu_T} = c_p \frac{l_T}{l} \quad (10.6.9)$$

или

$$\lambda_T = \varepsilon c_p \mu_T. \quad (10.6.10)$$

Здесь ε – коэффициент подобия рассеяния тепла и количества тепла в результате турбулентных пульсаций скорости. Величина, обратная ε , имеет смысл числа Прандтля для турбулентного обмена

$$\text{Pr}_T = c_p \frac{\mu_T}{\lambda_T}. \quad (10.6.11)$$

По Прандтлю эта величина равна 1, по Тейлору 0,5. Однако, эксперименты показывают, что $\text{Pr}_T = 0,75$.

Для дальнейших расчетов оказывается удобным пользоваться не соотношением (10.6.10), а выражением

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = \frac{\varepsilon c_p \mu_T}{\lambda} = \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}, \quad (10.6.12)$$

где использовано $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$.

10.7 Распределение скоростей в плоском несжимаемом потоке вблизи стенки

Полное касательное напряжение в турбулентном потоке выражается формулой

$$\tau = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_\mu + \tau_T, \quad (10.7.1)$$

где τ_μ , τ_T – соответственно молекулярное и турбулентное касательные напряжения. С учетом соотношения (10.5.11) формулу (10.7.1) можно переписать в виде

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad l = xy. \quad (10.7.2)$$

Согласно гипотезе Кармана, турбулентный поток состоит из двух областей – пристеночного вязкого подслоя толщиной y_1 и турбулентного ядра. Считается, что в вязкий подслой турбулентные пульсации не проникают, поэтому там $\mu_T \ll \mu$. В турбулентном ядре, наоборот, молекулярная вязкость пренебрежимо мала по сравнению с турбулентной, т.е. $\mu_T \gg \mu$. Введем переменные

$$\varphi = \frac{\bar{u}}{\nu^*}, \quad \eta = \frac{\nu^* y}{\nu} \quad (10.7.3)$$

в уравнении для касательных напряжений (10.7.2), где под ν^* понимается динамическая скорость на стенке. Получим

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\frac{l}{y} \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - \bar{\tau} = 0. \quad (10.7.4)$$

Здесь $\bar{\tau} = \tau / \rho \nu^{*2} = \tau / \tau_w$, а τ_w касательное напряжение на стенке. В вязком подслое, где $0 < \eta < \eta_1$ и $\eta_1 = \nu^* y_1 / \nu$ второй член в левой части (10.7.4) равен нулю. Кроме того, $\bar{\tau}$ в этой области близко к единице, поэтому

$$\frac{d\varphi}{d\eta} - 1 = 0. \quad (10.7.5)$$

Выражение (10.7.5) легко интегрируется. В случае $\varphi = 0$ при $\eta = 0$ будем иметь

$$\varphi = \eta. \quad (10.7.6)$$

Рассмотрим область $\eta > \eta_1$, в которой достаточно точно выполняется условие $\mu_T = \kappa \rho \nu^* y$ и $\bar{\tau} = 1$. В этом случае имеем

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\kappa \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 - 1 = 0. \quad (10.7.7)$$

Если учесть, что в этой области $\mu_T \gg \mu$, то можно пренебречь и членом $d\varphi/d\eta$. Тогда из (10.7.7) получаем

$$\kappa \eta \frac{d\varphi}{d\eta} = 1, \quad (10.7.8)$$

интеграл которого равен

$$\varphi = C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \eta. \quad (10.7.9)$$

Из условия монотонности профиля скорости следует, что

$$(\varphi)_{\eta_1-0} = (\varphi)_{\eta_1+0}. \quad (10.7.10)$$

Тогда

$$\eta_1 = C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \eta_1, \quad (10.7.11)$$

откуда

$$C_* = \eta_1 - \frac{1}{\kappa} \ln \eta_1. \quad (10.7.12)$$

С учетом (10.7.12), решение (10.7.9) будет иметь вид

$$\varphi = \eta_1 + \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{\eta}{\eta_1} \right). \quad (10.7.13)$$

По данным экспериментов

$$\kappa = 0,4, \quad \eta_1 = 11,6. \quad (10.7.14)$$

Логарифмический профиль скоростей (10.7.13) существует практически почти до оси симметрии при течении в замкнутом канале и нарушается во внешней области пограничного слоя. Обычно логарифмический профиль скорости удобно записывать в форме (10.7.9). Из (10.7.12) имеем

$$C_x = 5,5. \quad (10.7.15)$$

Если вместо натурального логарифма применить десятичный, то с учетом (10.7.15), получим

$$\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta. \quad (10.7.16)$$

Закон распределения скоростей (10.7.6) и (10.7.16) приведен на рисунке 10.2.

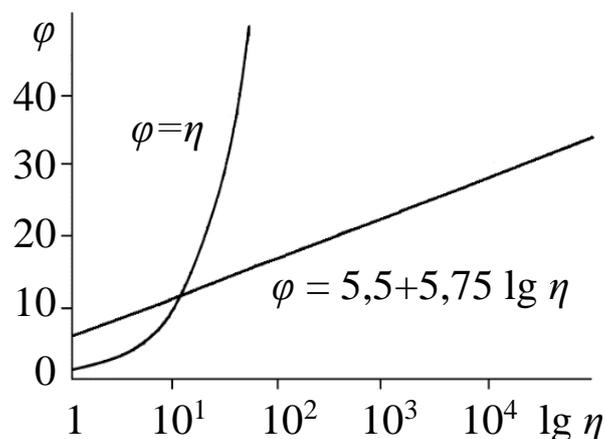


Рисунок 10.2 Распределение скоростей в турбулентном потоке

10.8 Распределение скоростей и гидродинамическое сопротивление при турбулентном течении в трубах

При развитом турбулентном течении распределение скоростей в основной части потока описывается формулой (10.7.16). Сопоставление профилей скоростей в ламинарном (1) и турбулентном (2) потоках в трубе показано на рисунке 10.3. Видно, что в ламинарном потоке максимальная скорость в два раза превышает среднюю. Турбулентный профиль скорости более заполненный, чем ламинарный. В развитом турбулентном потоке средняя по сечению скорость близка к максимальной, отношение достигает 0,8-0,9.

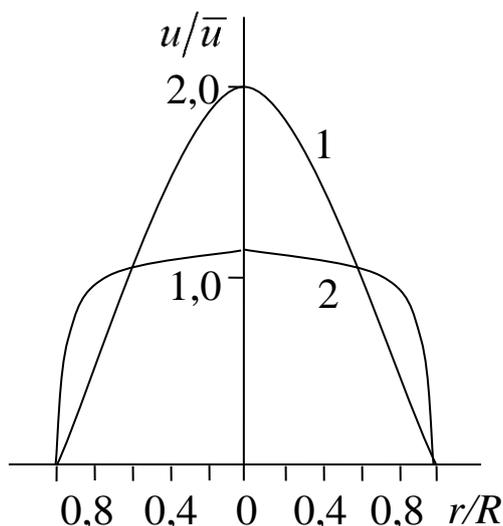


Рисунок 10.3 Профили скоростей в ламинарном (1) и турбулентном (2) потоках в трубе

Зависимость отношения \bar{u} / u_{\max} от $\lg Re$ представлена на рисунке 10.4. Видно, что переход \bar{u} / u_{\max} от значения 0,5 до значений 0,8 достигается при $\lg Re = 4$, т.е. $Re = 10000$.

Толщина вязкого подслоя составляет не более $0,02R_0$, поэтому при вычислении средней по сечению скорости вязкий подслей не учитывают. Тогда с большой степенью точности среднюю скорость турбулентного течения можно описать уравнением

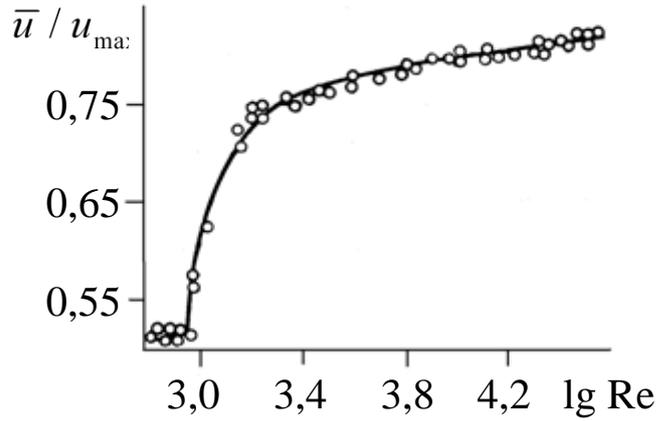


Рисунок 10.4 Зависимость отношения \bar{u} / u_{\max} от $\lg Re$

$$\bar{u} = \frac{2\nu^*}{R_0^2} \int_0^{R_0-y_0} \left[C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu^*}{\nu} (R_0 - r) \right] r dr, \quad (10.8.1)$$

где y_0 – толщина вязкого подслоя, $R_0 - r = y$. Выполняя замену переменных в интеграле, имеем

$$\begin{aligned} dr &= -dy, \quad y = R_0 - (R_0 - y_0) = y_0 \quad \text{при} \quad r = R_0 - y_0, \\ & \quad y = R_0 \quad \text{при} \quad r = 0 \end{aligned} \quad (10.8.2)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{2\nu^*}{R_0^2} \int_{R_0}^{y_0} (R_0 - y) \left(C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu^* y}{\nu} \right) dy = \\ &= \frac{2\nu^*}{R_0^2} \int_{y_0}^{R_0} (R_0 - y) \left(C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu^* y}{\nu} \right) dy. \end{aligned} \quad (10.8.3)$$

Интегрируя (10.8.3) по частям

$$\bar{u} = \frac{2\nu^*}{R_0^2} \left[\left(R_0 y - \frac{y^2}{2} \right) \left(C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu^* y}{\nu} \right) \Big|_{y_0}^{R_0} - \int_{y_0}^{R_0} \left(R_0 y - \frac{y^2}{2} \right) \frac{1}{\kappa y} dy \right], \quad (10.8.4)$$

и отбрасывая малые члены, получим

$$\bar{u} = \nu^* \left(C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu^* R_0}{\nu} - \frac{3}{2\kappa} \right). \quad (10.8.5)$$

Сила давления, действующая на жидкость в установившемся прямолинейном потоке, уравнивается касательными напряжениями, т.е.

$$-\pi r^2 \frac{dp}{dx} = 2\pi r\tau. \quad (10.8.6)$$

Касательное напряжение на стенке трубы

$$\tau_w = -\frac{R_0}{2} \frac{dp}{dx}. \quad (10.8.7)$$

С учетом

$$-\frac{dp}{dx} = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{2d}, \quad (10.8.8)$$

имеем

$$\tau_w = \zeta \frac{\rho \bar{u}^2}{8} \quad (10.8.9)$$

и, соответственно,

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \bar{u} \sqrt{\frac{\zeta}{8}}. \quad (10.8.10)$$

Подставляя выражение (10.8.10) в уравнение (10.8.5) и вводя численные значения $C_* = 5,5$ и $K = 0,4$, получим связь между коэффициентом сопротивления и числом Re для развитого турбулентного течения в гладкой трубе

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 0,88 \ln(\text{Re} \sqrt{\zeta}) - 0,9. \quad (10.8.11)$$

Выражение (10.8.11) не разрешается алгебраически относительно ζ , но хорошо аппроксимируется в области $10^4 < \text{Re} < 10^5$ эмпирической формулой Блазиуса

$$\zeta = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}, \quad (10.8.12)$$

а в области $\text{Re} > 10^5$ – эмпирической формулой Никурадзе

$$\zeta = 0,0032 + \frac{0,221}{\text{Re}^{0,237}}. \quad (10.8.13)$$

Гидравлическое сопротивление шероховатых труб оказывается таким же, как и у гладких труб, до тех пор, пока толщина вязкого подслоя больше высоты выступов шероховатости k . После того, как выступы шероховатости попадают в турбулентную область потока, около них начинается вихреобразование, и вязкое трение перестает заметно влиять на профиль скоростей течения в основной массе жидкости. Как видно из рисунка 10.5, при достаточно значительных числах Re в шероховатых трубах имеет место независимость (автомодельность) коэффициента сопротивления от этого критерия.

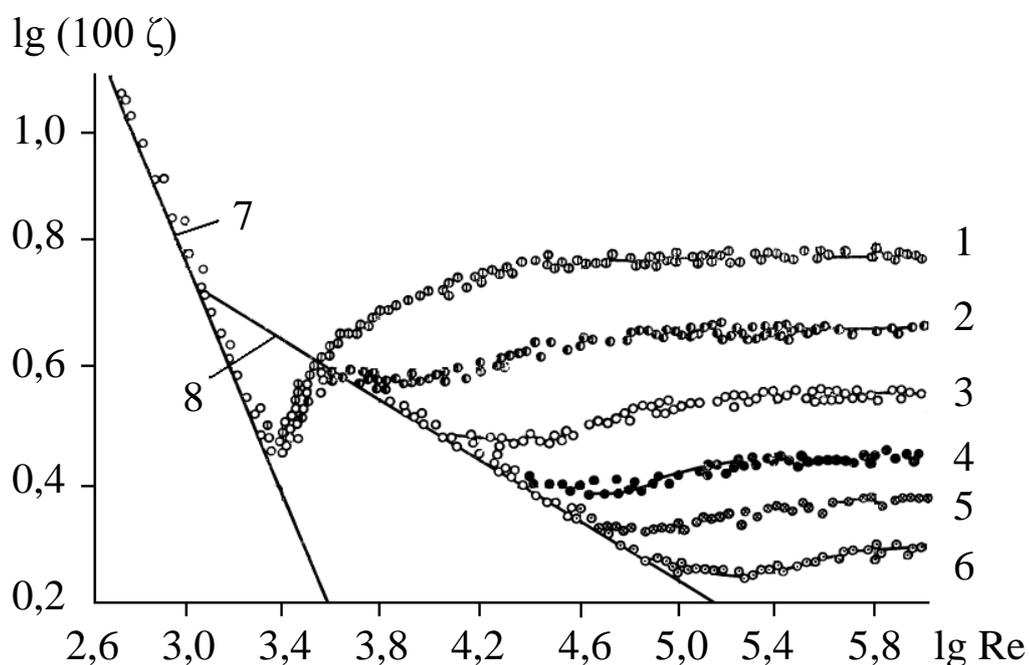


Рисунок 10.5 Коэффициент сопротивления труб с однородной зернистой шероховатостью: 1 — $d/k = 30$, 2 — $d/k = 61,2$, 3 — $d/k = 120$, 4 — $d/k = 258$, 5 — $d/k = 504$, 6 — $d/k = 1014$, 7 — кривая соответствует закону сопротивления при ламинарном течении (9.2.10), 8 — закону сопротивления при турбулентном течении (10.8.12) в гладкой трубе

Эти результаты получены в лабораторных условиях с достаточно однородной зернистой шероховатостью. В эксплуатационных условиях шероховатость труб весьма неоднородна, вследствие чего переход к автомодельной области осуществляется постепенно.

10.9 Уравнение теплопереноса в турбулентном потоке

Рассматривая установившийся осесимметричный поток и полагая, что теплопроводность в радиальном направлении много больше, чем в осевом, можно написать осредненное уравнение теплопереноса в следующем виде

$$a \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \overline{v'T'} \right) = \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (10.9.1)$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\rho c r \overline{v'T'} \right) = \rho c \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (10.9.2)$$

В силу

$$\rho c \overline{v'T'} = q_r = -\lambda_r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r}, \quad (10.9.3)$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[(\lambda + \lambda_r) r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] = \rho c r \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (10.9.4)$$

Поскольку при рассмотрении турбулентных течений мы будем оперировать только величинами, осредненными за период пульсаций, то в дальнейшем их локальные значения будем писать без знака осреднения. С учетом выражения

$$\frac{\lambda_r}{\lambda} = \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}, \quad (10.9.5)$$

равенство (10.9.4) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu} \right) r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] = \rho c r \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \quad (10.9.6)$$

или, с учетом $a = \lambda / \rho c$,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu} \right) r \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \right] = \frac{ur}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x}. \quad (10.9.7)$$

Введя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{R_0}, \quad X = \frac{x}{R_0}, \quad \vartheta = \frac{T_w - T}{T_w - T_x}, \quad \omega = \frac{u}{\bar{u}}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}, \quad \text{Pe} = \frac{ud}{a}, \quad (10.9.8)$$

легко получить уравнение

$$2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu} \right) \xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right] = \text{Pe} \xi \omega \frac{\partial \vartheta}{\partial X}. \quad (10.9.9)$$

Найдем среднюю по сечению трубы температуру ϑ_x

$$\vartheta_x = \frac{2}{\bar{u} R_0^2} \int_0^{R_0} u \vartheta r dr = 2 \int_0^1 \omega \xi \vartheta d\xi. \quad (10.9.10)$$

С другой стороны,

$$\vartheta_x = \frac{1}{T_w - T_x} \left(\frac{2}{u R_0^2} \int_0^{R_0} u T_w r dr - \frac{2}{u R_0^2} \int_0^{R_0} u T r dr \right) = \frac{T_w - T_x}{T_w - T_x} = 1. \quad (10.9.11)$$

Таким образом,

$$\vartheta_x = 2 \int_0^1 \omega \xi \vartheta d\xi = 1. \quad (10.9.12)$$

По тем же причинам, что и в ламинарном потоке, коэффициент теплоотдачи α при турбулентном течении имеет повышенные значения в начальном участке трубы и постепенно снижается до некоторого постоянного значения, определяемого только физическими свойствами жидкости, скоростью ее течения и диаметром трубы. В связи с этим общее решение уравнения (10.9.9) также может разыскиваться в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной.

10.10 Связь между коэффициентами теплоотдачи и трения

При турбулентном течении в трубе с числом $\text{Pr} = 1$ имеет место приближенное подобие полей температур и скоростей. Следовательно, в этом случае можно воспользоваться для стабилизированного течения формулой

$$\text{Nu} = \frac{c_f}{2} \text{Re}. \quad (10.10.1)$$

При этом следует иметь в виду, что, согласно формулам (10.8.8) и (10.8.9)

$$c_f = \frac{\zeta}{4}. \quad (10.10.2)$$

Следовательно, при турбулентном течении и $Pr = 1$

$$Nu = \frac{\zeta}{8} Re. \quad (10.10.3)$$

Здесь $Nu = \alpha d / \lambda$ и $Re = \bar{u}d / \nu$, где d – диаметр трубы.

Формула Блазиуса для коэффициента сопротивления гладких труб применима вплоть до $Re = 10^5$, однако, если записать ее в виде

$$\zeta = 0,184 Re^{-0,2}, \quad (10.10.4)$$

то вплоть до чисел $Re = 2 \times 10^6$ можно с небольшой погрешностью (порядка 3,6%) переписать уравнение (10.10.3) в виде

$$Nu = 0,023 Re^{0,8}. \quad (10.10.5)$$

10.11 Решение при линейном изменении температуры стенки

Уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \varepsilon Pr \frac{\mu_T}{\mu} \right) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \frac{ur}{a} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (10.11.1)$$

проинтегрируем по r от 0 до r . Получим

$$\left(1 + \varepsilon Pr \frac{\mu_T}{\mu} \right) r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{a} \int_0^r ur \frac{\partial T}{\partial x} dr, \quad (10.11.2)$$

откуда

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{ar \left(1 + \varepsilon Pr \frac{\mu_T}{\mu} \right)} \int_0^r ur \frac{\partial T}{\partial x} dr. \quad (10.11.3)$$

Проинтегрируем это выражение по r от r до R_0 . В силу

$$\int_r^{R_0} \frac{\partial T}{\partial r} dr = T_w - T, \quad (10.11.4)$$

имеем

$$T_w - T = \frac{1}{a} \int_0^{R_0} \frac{\int_0^r ur \frac{\partial T}{\partial x} dr}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_r} dr. \quad (10.11.5)$$

Полагая

$$\xi = \frac{r}{R_0}, \quad X = \frac{x}{R_0}, \quad \mathcal{G} = \frac{T_w - T}{T_w - T_x}, \quad \omega = \frac{u}{\bar{u}}, \quad (10.11.6)$$

приведем уравнение (10.11.5) к безразмерному виду

$$\mathcal{G} = -\frac{\text{Pe}}{2} \int_0^1 \frac{\int_0^\xi \omega \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_\xi} d\xi. \quad (10.11.7)$$

Предположим, что температура зависит от x линейно

$$T = Ax + f(r), \quad (10.11.8)$$

а плотность теплового потока вдоль всей трубы остается постоянной

$$\frac{dq_w}{dx} = \text{const}. \quad (10.11.9)$$

С учетом того, что на стенке $\mu_T = 0$, из уравнения (10.11.3), записанного на стенке, можно получить

$$\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = \frac{\rho c}{R_0} \int_0^{R_0} u A dr, \quad (10.11.10)$$

откуда, введя среднюю скорость

$$\bar{u} = \frac{2}{R_0^2} \int_0^{R_0} ur dr, \quad (10.11.11)$$

имеем

$$A = \frac{2q_w}{\rho c_p \bar{u} R_0}. \quad (10.11.12)$$

В безразмерных величинах

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial X} = -\frac{R_0}{T_w - T_x} \frac{\partial T}{\partial X} = -\frac{R_0}{T_w - T_x} \frac{2q_w}{\rho c_p \bar{u} R_0}, \quad (10.11.13)$$

В силу $q_w = \alpha(T_w - T_x)$, имеем

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial X} = -\frac{2\alpha}{\rho c \bar{u}} = -2 \frac{\text{Nu}}{\text{Pe}}. \quad (10.11.14)$$

Подставляя (10.11.14) в (10.11.7), запишем

$$\vartheta = \text{Nu} \int_{\xi}^1 \frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi. \quad (10.11.15)$$

Умножим уравнение (10.11.15) на $\omega \xi$ и проинтегрируем по ξ от 0 до 1

$$\int_0^1 \omega \vartheta \xi d\xi = \text{Nu} \int_0^1 \omega \xi \left[\int_{\xi}^1 \frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi \right] d\xi. \quad (10.11.16)$$

В силу (10.9.12), имеем

$$2 \int_0^1 \omega \vartheta \xi d\xi = 1, \quad (10.11.17)$$

тогда (10.11.16) преобразуется к виду

$$\text{Nu}^{-1} = 2 \int_0^1 \omega \xi \left[\int_{\xi}^1 \frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi \right] d\xi. \quad (10.11.18)$$

Обозначим

$$dv = \omega \xi d\xi, \quad v = \int_0^{\xi} \omega \xi d\xi,$$

$$du = -\frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)}, \quad u = \int_{\xi}^1 \frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)} d\xi \quad (10.11.19)$$

и проинтегрируем (10.11.18) один раз по частям

$$\text{Nu}^{-1} = 2 \left[\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi \int_{\xi}^1 \frac{\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi \right]_0^1 +$$

$$+ 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi\right)^2}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi. \quad (10.11.20)$$

Очевидно, что первый член в правой части (10.11.20) равен нулю, тогда

$$\text{Nu}^{-1} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^{\xi} \omega \xi d\xi\right)^2}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}\right)_{\xi}} d\xi. \quad (10.11.21)$$

В основной части турбулентного потока профиль скоростей весьма пологий, и скорости в данной области мало отличаются от средней скорости по сечению, т.е. в ядре потока $\omega \approx 1$. Если принять $\omega = 1$, то такое приближение соответствует линейному распределению плотности теплового потока по радиусу трубы. Действительно, опуская в уравнение (10.9.4) черту над величинами, можно получить

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq) = \rho c u r \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10.11.22)$$

где

$$q = (\lambda + \lambda_T) \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (10.11.23)$$

Подставляя $u = \bar{u}$, $\partial T / \partial x = A = 2q_w / \rho c \bar{u} R_0$ в (10.11.22), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq) = 2q_w \frac{r}{R_0}. \quad (10.11.24)$$

Интегрируя выражение (10.11.24), запишем

$$q = q_w \frac{r}{R_0} = q_w \left(1 - \frac{y}{R_0} \right), \quad (10.11.25)$$

где q_w – плотность теплового потока на внутренней стенке трубы, y – расстояние от внутренней поверхности трубы вглубь потока.

Положив в формуле (10.11.21) $\omega = 1$, получаем для безразмерного коэффициента теплоотдачи следующее простое выражение

$$\text{Nu} = 2 \left[\int_{\xi}^1 \frac{\xi^3 d\xi}{\left(1 + \varepsilon \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu} \right)} \right]^{-1}. \quad (10.11.26)$$

Таким образом, стабилизированное значение коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении зависит не только от коэффициента теплопроводности и диаметра трубы, как это имеет место при ламинарном течении, но и от отношения (ν / a) и скорости течения жидкости через величину (μ_T / μ) .

10.12 Теплоотдача к турбулентному потоку при $\text{Pr} > 1$

Для сред с числом $\text{Pr} > 1$ в основной части потока значение ε близко к 1. Так, вблизи стенки $\varepsilon \approx 1,08$, достигая на оси трубы значения 1,48.

Для развития процесса теплообмена при числах $\text{Pr} > 1$ существенна именно пристенная область, в которой имеет место наиболее сильное изменение температуры среды. Поэтому можно положить $\varepsilon = 1$. Это обстоятельство существенно облегчает вычисление интеграла (10.11.26).

Обращаясь к профилю скоростей в плоском турбулентном потоке, замечаем, что такой поток можно разделить на три области:

1) турбулентное ядро ($0 < \xi < \xi_2$), распределение скоростей в котором с высокой точностью выражается формулой (10.7.16) и трение практически полностью определяется турбулентным перемешиванием;

2) промежуточный слой ($\xi_2 < \xi < \xi_1$), в котором молекулярное и турбулентное трения соизмеримы, причем роль молекулярного трения увеличивается по мере уменьшения расстояния от твердой стенки;

3) вязкий подслой ($\xi_1 < \xi < 1$), в котором решающее значение имеет молекулярное трение, и распределение скоростей с большой степенью точности выражается формулой (10.7.6).

Соответственно, координата $\xi = 0$ соответствует оси трубы, ξ_2 – условной границе промежуточного слоя и ядра, ξ_1 – условной границе вязкого и промежуточного слоев.

Несмотря на то, что распределение скоростей в промежуточном слое имеет сложный характер, оно достаточно хорошо аппроксимируется полулогарифмической прямой аналогично профилю скоростей в турбулентном ядре. При этом, конечно, константы C_* и K имеют другие значения, чем в формуле (10.7.16), являясь чисто эмпирическими коэффициентами. Такая аппроксимация существенно упрощает вычисление интеграла (10.11.25).

Входящая в формулы для распределения скоростей величина η связана с относительным радиусом ξ следующим отношением

$$\eta = \frac{v^* y}{\nu} = \frac{v^*}{\nu} (R_0 - r) = \text{Re} \sqrt{\frac{\xi}{32}} (1 - \xi). \quad (10.12.1)$$

Как видно из таблицы 9, толщина вязкого подслоя настолько мала, что в его пределах можно считать, что $\xi^3 = 1$. Толщина промежуточного слоя несколько больше толщины вязкого слоя, и при малых числах Re значение ξ^3 в этом слое может отличаться на 10-30% от единицы.

Вышеизложенное позволяет для случая $\text{Pr} > 1$ представить формулу (10.11.26) в следующем виде

$$\text{Nu} \approx 2 \left(\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\text{Pr} \mu_T / \mu} + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \text{Pr} \mu_T / \mu} + \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi}{1 + \text{Pr} \mu_T / \mu} \right)^{-1}. \quad (10.12.2)$$

Таблица 9

Значения относительного радиуса границы вязкого слоя ξ_1 , относительной толщины этого слоя $1 - \xi_1$, относительного расстояния промежуточного слоя от стенки трубы ξ_2 , относительной толщины этого слоя $1 - \xi_2$ и комплекса $Re\sqrt{\zeta/32}$

Re	1×10^4	5×10^4	5×10^5	1×10^6
ξ_1	0,978	0,995	0,997	0,999
$1 - \xi_1$	0,022	0,005	0,003	0,001
ξ_2	0,905	0,976	0,987	0,997
$1 - \xi_2$	0,095	0,024	0,013	0,003
$Re\sqrt{\zeta/32}$	314	1280	2310	9900

Первый из интегралов (10.12.2) характеризует термическое сопротивление ядра потока, обусловленное полностью турбулентным перемешиванием. Второй – промежуточного слоя, в котором молекулярный и турбулентный переносы тепла соизмеримы. Третий – вязкого слоя, в котором интенсивность турбулентных пульсаций весьма мала, вследствие чего они сказываются на теплообмене только при больших значениях Pr.

Для каждой из областей существуют следующие расчетные соотношения:

турбулентное ядро ($0 \leq \xi \leq \xi_2$):

$$\mu_T \gg \mu, u = v^* \left(C_* + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} \right),$$

$$\tau = \tau_T = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R_0} \right) = \tau_w \xi,$$

$$\mu_T = \frac{\tau_T}{du/dy} = \frac{\rho v^{*2} \xi}{\frac{v^*}{\kappa y}} = \rho \kappa v^* y \xi,$$

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\rho \kappa \nu^* R_0 (1-\xi) \xi}{\mu} = \chi \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} (1-\xi) \xi,$$

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = \operatorname{Pr} \frac{\mu_T}{\mu};$$

промежуточный слой ($\xi_2 < \xi < \xi_1$):

$$u = \nu^* \left(C'_* + \frac{1}{\kappa'} \ln \frac{\nu^* y}{\nu} \right),$$

$$\tau = \tau_T + \mu \frac{du}{dy} = \tau_w \xi \approx \tau_w,$$

$$\mu_T = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} - \mu = \rho \kappa' \nu^* y - \mu,$$

$$\frac{\mu_T}{\mu} = \frac{\rho \kappa' \nu^* y}{\nu} - 1 = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} (1-\xi) - 1,$$

$$\frac{\lambda_T}{\lambda} = \operatorname{Pr} \frac{\mu_T}{\mu};$$

вязкий слой ($\xi_1 < \xi < 1$):

$$\mu_T \ll \mu, \quad u = \frac{\nu^{*2} y}{\nu}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, вычислим каждый из трех интегралов уравнения (10.12.2)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{\operatorname{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}} = \int_0^{\xi_2} \frac{\xi^2 d\xi}{\kappa \operatorname{Pr} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} (1-\xi)} = \\ &= \frac{1}{\kappa \operatorname{Pr} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \left[- \int_0^{\xi_2} (1+\xi) d\xi + \int_0^{\xi_2} \frac{1}{1-\xi} d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{\kappa \operatorname{Pr} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \left[-\xi - \frac{\xi^2}{2} - \ln(1-\xi) \right]_0^{\xi_2}. \end{aligned}$$

Из (10.12.1) следует, что

$$\xi = 1 - \frac{\eta}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}.$$

Тогда имеем

$$I_1 = \frac{1}{\kappa \text{Pr Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \left[\ln \frac{\text{Re}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} - 1 + \frac{\eta_2}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\text{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}} \right)^2 \right].$$

При $\text{Re} > 10^4$ с погрешностью менее 2% имеем

$$I_1 = \int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}} = \frac{1}{\text{Pr} \kappa \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \left(\ln \frac{\text{Re}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} - \frac{3}{2} \right). \quad (10.12.3)$$

Далее

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}} = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} (1 - \xi) - (\text{Pr} - 1)} = \\ &= \frac{1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 - \xi - \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$Z = 1 - \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}},$$

тогда

$$I_2 = \frac{1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \left[Z^3 \ln \frac{1 + \text{Pr} \kappa' \eta_2 - \text{Pr}}{1 + \text{Pr} \kappa' \eta_1 - \text{Pr}} + \frac{\eta_2 - \eta_1}{\text{Re} \sqrt{\zeta / 32}} (1 - Z - Z^2) \right].$$

При $\text{Re} > 10^4$ с погрешностью менее 1% последнее выражение перепишем как

$$I_2 = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3 d\xi}{1 + \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}} = \frac{1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}} \ln \frac{1 + \text{Pr} \kappa' \eta_2 - \text{Pr}}{1 + \text{Pr} \kappa' \eta_1 - \text{Pr}}. \quad (10.12.4)$$

Наконец, для решения

$$I_3 = \int_{\xi_1}^1 \frac{d\xi}{1 + \text{Pr} \frac{\mu_T}{\mu}}$$

учитываем, что при $\text{Pr} \sim 1$ величина $\text{Pr} \mu_T / \mu$ в вязком слое имеет порядок μ_T / μ , т.е. много меньше единицы. Тогда

$$I_3 \approx \int_{\xi_1}^1 d\xi = 1 - \xi_1 = \frac{\eta_1}{\text{Re} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}}. \quad (10.12.5)$$

Таким образом, подставляя в (10.12.2) равенства (10.12.3)-(10.12.5), получаем

$$\begin{aligned} \text{Nu} = 2 \left[\frac{1}{\kappa \text{Pr} \text{Re} \sqrt{32/\zeta}} \left(\ln \frac{\text{Re} \sqrt{\frac{\zeta}{32}}}{\eta_2} - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{Pr} \kappa' \text{Re} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}} \ln \frac{1 + \text{Pr}(\kappa' \eta_2 - 1)}{1 + \text{Pr}(\kappa' \eta_1 - 1)} + \frac{\eta_1}{\text{Re} \sqrt{\frac{32}{\zeta}}} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (10.12.6)$$

Положим $\eta_2 = 30$ и $\eta_1 = 6$ и по графику на рисунке 10.2 запишем равенства для определения κ' и C'_*

$$6 = C'_* + \frac{1}{\kappa'} \ln 6,$$

$$14 = C'_* + \frac{1}{\kappa'} \ln 30,$$

откуда

$$\kappa' = 0,2, \quad C'_* = 3,0.$$

Перепишем (10.12.6) в виде, аналогичном (10.10.3). Имеем

$$\text{Nu} = \frac{\zeta}{8} \text{Re} f(\text{Pr}, \text{Re}), \quad (10.12.7)$$

где

$$f(\text{Pr}, \text{Re}) = \sqrt{\frac{8}{\zeta}} \frac{\kappa \text{Pr}}{\ln \frac{\text{Re}}{4,5\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} + \frac{\kappa}{\kappa'} \ln \frac{1 + \text{Pr}(\kappa'\eta_2 - 1)}{1 + \text{Pr}(\kappa'\eta_1 - 1)}} + \kappa \text{Pr} \quad (10.12.8)$$

После подстановки в (10.12.8) численных значений κ , κ' , η_1 , η_2 получим

$$f(\text{Pr}, \text{Re}) = \sqrt{\frac{8}{\zeta}} \frac{0,4\text{Pr}}{\ln \frac{\text{Re}}{270} \sqrt{\frac{\zeta}{8}} + 2 \ln \frac{1 + 5\text{Pr}}{1 + 0,2\text{Pr}}} + 2,4\text{Pr} \quad (10.12.9)$$

Сопоставление формул (10.12.7) с формулой (10.10.3), выведенной из весьма общих соображений для сред с $\text{Pr} = 1$, приводит к условию

$$f(1, \text{Re}) = 1. \quad (10.12.10)$$

Некоторые значения функции, вычисленные по формуле (10.12.9) приведены в таблице 10.

Таблица 10

Значения функции $f(\text{Pr}, \text{Re})$

Re	Pr = 1	Pr = 2	Pr = 5	Pr = 10
10^4	0,990	1,33	1,78	2,1
10^6	0,995	1,63	2,30	3,1

Полученное решение с большой степенью точности удовлетворяет общему условию (10.12.10).

Как видно из этого расчета, интенсивность теплоотдачи в турбулентном потоке резко возрастает с увеличением числа Pr жидкости, причем степень его влияния несколько повышается в области больших чисел Re .

В области $0,5 < \text{Pr} < 25$ удовлетворительные результаты дает степенная формула, структура которой была впервые предложена Нуссельтом

$$\text{Nu} = 0,023 \text{Pr}^{0,4} \text{Re}^{0,8}. \quad (10.12.11)$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Кутателадзе, С.С.** Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – 5-е изд., переработ. и доп. – Москва: Атомиздат, 1979. – 416 с.
2. **Кутателадзе, С.С.** Теплопередача и гидродинамическое сопротивление. Справочное пособие / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 366с.
3. **Шлихтинг, Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 711с.
4. **Кудинов, В.А.** Техническая термодинамика и теплопередача: учебник для академического бакалавриата / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, Е.В. Стефанюк. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2015. – 566 с. – Серия: Бакалавр. Академический курс.