Математика в школе 2025. № 1. С. 30–36 Mathematics at school 2025. № 1. P. 30–36

ОПЫТ СОЗДАНИЯ СЕРИИ ЗАДАЧ ДЛЯ ОЛИМПИАД НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ

THE EXPERIENCE OF CREATING A SERIES OF TASKS FOR OLYMPIADS BASED ON THE PROBLEM OF AVERAGES

Научная статья 5.8.2
УДК: 372.851

Scientific article 5.8.2
DOI: 10.47639/0130-9358_2026_1_30

И.С. Григорьева, к.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань), igrigori_@mail.ru

I.S. Grigorieva, Ph.D. (Phys&Math), Ass. Prof., KFU (Kazan), igrigori_@mail.ru

Аннотация: описывается процесс создания математических задач на примере изучения средних значений для пересекающихся множеств; задачи подойдут для олимпиад разного уровня, сам сюжет можно использовать также в качестве темы исследования для одарённых учеников

Abstract: the article describes the process of creating mathematical problems based on the study of average values for overlapping sets; the problems are suitable for competitions of various levels, and the plot can also be used as a research topic for gifted students

Ключевые слова: математические олимпиады, создание задач, темы исследования для школьников

Keywords: mathematical Olympiads, problem creation, research topics for schoolchildren

В настоящее время проводится много городских и вузовских математических олимпиад. Всё большему количеству людей приходится составлять задачи для них. Ясно, что такие задачи не должны быть полностью оригинальными, поэтому можно модифицировать какие-то известные математические сюжеты. Процесс модификации задачи требует проведения некоего математического исследования, так что можно также предложить поработать с этими сюжетами заинтересованным школьникам в рамках факультативных занятий [1].

Рассмотрим в качестве примера сюжет о средних значениях[1].

Предзадача 1 (№ 88156). Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды – 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушёл с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

Р е ш е н и е. Сумма возрастов всех игроков команды – $11 \cdot 22 = 242$ года, а оставшихся десяти – $10 \cdot 21 = 210$ лет. Значит, выбывшему игроку $242 - 210 = 32$ года.

А теперь основной сюжет.

Задача 1 (№ 116811). Кое-кто в классе смотрит футбол, кое-кто – мультики, но нет таких, кто не смотрит ни то ни другое. У любителей мультиков средний балл по математике меньше 4, у любителей футбола – тоже меньше 4. Может ли средний балл по математике у всего класса быть больше 4?

1 Номера задач далее указаны согласно нумерации на сайте problems.ru.

Похожий сюжет, видимо, повторялся не раз. Что тут можно переделать? Например, можно конкретизировать средние в двух группах. А также попытаться выяснить, какие значения может принимать среднее в объединенной группе. Назовём его для краткости *общим средним*.

Задача о коробках

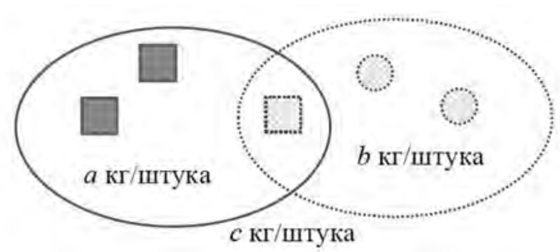
На одной из олимпиад WinKid в 2023 году были предложены задачи примерно такого содержания (числовые данные изменены).

Задача 2. На складе лежали товары, упакованные в коробки. Кладовщик Пётр нашёл средний вес всех квадратных коробок, он оказался равным 15 кг. Кладовщица Клава нашла средний вес всех розовых коробок. Он оказался равным 10 кг. Неквадратных не розовых коробок не было. Может ли оказаться, что средний вес всех коробок: 1) равен 20 кг; 2) больше 25 кг; 3) равен 8 кг; 4) меньше 6 кг?

Интуитивно кажется, что общее среднее должно находиться между средними двух групп. По крайней мере, для непересекающихся групп A и B это верно: если P – вес группы (значение показателя), а n – её размер (количество объектов), то общее среднее равно $\frac{P(A)+P(B)}{n(A)+n(B)}$. Это выражение иногда называют медиантой дробей $\frac{P(A)}{n(A)}$ и $\frac{P(B)}{n(B)}$. Медианта заключена между дробями, из которых она получена (считаем числители дробей неотрицательными, а знаменатели положительными) [2].

Тем не менее в некоторых из случаев 1)–4) ответ отрицательный, а в других – положительный. Мы можем получить достаточно много задач, отличающихся не только числовыми данными, но и решениями.

Удобнее исследовать задачу в общем виде. Есть две пересекающиеся группы объектов, среднее значение показателя в одной группе равно a, в другой – b. Какие значения может принимать общее среднее c?



Для краткости будем называть первую группу «элементы типа A», вторую – «элементы типа B». Общая часть групп – пересечение AB, или «элементы типа AB». Исследование можно разбить на этапы в зависимости от того, как расположено значение c по отношению к a и b.

Если задача предлагается школьникам в качестве исследования, можно предложить им выбрать систему величин, описывающих данную ситуацию. Это довольно сложная и запутанная проблема. Можно ввести размеры групп A, B и их пересечения AB. Через них вычислить суммарные веса

$$P(A) = a \cdot n(A),\ P(B) = b \cdot n(B)$$

(как в предзадаче 1) и составить соотношение

$$a \cdot n(A) + b \cdot n(B) - P(AB) = \\ = c \cdot (n(A) + n(B) - n(AB)) \qquad (1)$$

В равенстве (1) дважды использована формула включения и исключения (для весов и для размеров групп).

Необходимо исследовать возможные значения c в зависимости от четырёх параметров, которые к тому же не являются независимыми друг от друга: должны выполняться соотношения

$$n(AB) \le n(A) \text{ и } n(AB) \le n(B).$$

Интуиция подсказывает, что в сюжете есть принципиально разные случаи: «естественный», когда общее среднее лежит между a и b, а также «особые», когда c больше максимального из средних или меньше минимального[2].

● *«Естественный» случай*

При большом количестве обозначений важно выбрать их экономно. Разобьём всё множество элементов $C = A \cup B$ на *непересекающиеся* группы: «только A» – $A_1 = A \setminus B$, «только B» – $B_1 = B \setminus A$ и $AB = A \cap B$. Такое разделение хорошо тем, что размеры групп – m, n и k соответственно – можно выбирать независимо друг от друга.

Перейдём от средних к суммарным весам. Перепишем (1) в виде

$$a(m + k) + b(n + k) - P(AB) = c(m + n + k).$$

Вес $P(AB)$ должен быть неотрицательным.

$$P(AB) = a(m + k) + b(n + k) - c(m + n + k) \geq 0. \quad (2)$$

Кроме того, вес $P(AB)$ не должен превосходить общего веса как объектов типа A, так и объектов типа B, то есть

$$\begin{cases} P(AB) \leq a(m+k) \\ P(AB) \leq b(n+k), \end{cases}$$

что после замены $P(AB)$ выражением из (2) и упрощения приводит к системе

$$\begin{cases} (n+k)(c-b) + cm \geq 0 \\ (m+k)(c-a) + cn \geq 0. \end{cases}$$

Можно показать, что для любого числа c, лежащего между a и b, можно подобрать размеры групп A, B и AB так, что средний общий вес будет равен c.

Исследуем теперь «особые» случаи.

● *Случай «большого» среднего*

Пусть $c > a$ и $c > b$. Перепишем (2) в виде

$$P(AB) = k(a + b - c) - m(c - a) - n(c - b) \geq 0. \quad (3)$$

Оба вычитаемых неотрицательны, тогда и $k(a + b - c) \geq 0$.

Если $k(a + b - c) > 0$, то $k \neq 0$ и $c < a + b$. Тогда

$$k \geq \frac{m(c-a) + n(c-b)}{a+b-c}.$$

То есть, задавшись величинами m и n, можно подобрать достаточно большое k так, чтобы неравенство (3) выполнялось.

Исключительный случай – когда $k(a + b - c) = 0$, но тогда равны нулю и вычитаемые. Это возможно при $m = n = 0$, то есть группы A и B совпадают. Тогда общее среднее c совпадает с a и b, что противоречит условиям $c > a$ и $c > b$. Итак, ограничение $c < a + b$ является строгим.

Упражнение 1. Покажите, что этого ограничения достаточно для существования решения, то есть при $\max(a, b) < c < a + b$ можно подобрать веса объектов так, чтобы средние были равны a, b и c соответственно.

Вывод. Для заданных средних a и b общее среднее c меньше их суммы, причём любое значение из $(\max(a, b); a + b)$ достижимо.

Наше рассуждение выглядит довольно коротким. Однако, чтобы сделать его таким, пришлось потратить немало труда. Полезно сказать об этом школьникам: вполне возможно, их первые рассуждения будут гораздо более громоздкими и нерациональными. Умение отточить решение и записать его компактно также можно тренировать на подобной задаче-исследовании.

● *Случай «малого» среднего*

Ясно, что число c может оказаться и меньше минимального из значений a, b. Можно провести для этого случая аналогичное исследование. Например, поручить двум школьникам (или группам

---

[2] Можно заранее потребовать, что $a \leq b$, но мы отказались от этого ограничения, оно не дало упрощения выкладок.

школьников) разобрать случаи «больших» и «малых» общих средних.

Ответ: если средние в двух пересекающихся группах равны a и b, то в их объединении среднее будет больше $ab : (a + b)$, причём допустимы значения, сколь угодно близкие к этому числу. Например, в условиях задачи 2 нижняя граница общего среднего $10 \cdot 15 : 25 = 6$.

Реалистичность условия

Предзадача 2. Классная руководительница подсчитала долю девочек в своём классе. Округлив ответ до целого числа процентов, она получила в результате 51%. Докажите, что в классе нечётное число учеников. Каково наименьшее возможное число учеников в классе?

Упражнение 2. Решите эту задачу.

Эта задача была предложена на одной из олимпиад. Некоторые решавшие написали, что условие задачи неверное, так как один из ответов – в классе 68 человек, из них 35 – девочки. Это вызвало сложности при оценивании, поскольку авторы предполагали, что класс не может быть таким большим. В этом сложность текстовых формулировок: трудно сказать, какие ограничения «естественные», а какие нет. Видимо, лучше пожертвовать краткостью формулировки, если это приводит к неправильному пониманию условия.

С другой стороны, текстовые формулировки могут придать задаче дополнительные ограничения, способные повлиять как на ход решения, так и на подбор численных данных. Например, в задаче о коробках при $c = 24$ мы получили трёхзначные веса и веса, меньшие 1 кг. Можно ли подобрать их более сбалансированно?

Как мы показали, должно выполняться ограничение $k \geq 9m + 14n$. Пусть $k = 9m + 14n + p$, где $p \geq 0$. Вычислим средние веса коробок в непересекающихся группах:

$$\frac{P(A_1)}{m} = 14\frac{n+k}{m} + 24 = 14\frac{9m+15n+p}{m} + 24 = 150 + \frac{15n+p}{m},$$

$$\frac{P(B_1)}{n} = 9\frac{m+k}{n} + 24 = 9\frac{10m+14n+p}{n} + 24 = 150 + \frac{10m+p}{n},$$

$$\frac{P(AB)}{k} = \frac{k-(9m+14)}{k} = 1 - \frac{9m+14n}{9m+14n+p}.$$

Как мы видим, с ростом p все средние веса коробок увеличиваются, однако первые два будут всегда больше 150 кг, а последний – менее 1 кг.

Формально говоря, коробки могут иметь и такой вес. Однако в другой текстовой формулировке данные могут оказаться «нереалистичными». Например, задача о коробках была представлена ещё в таком варианте.

Задача 3. Несколько школьников при подготовке к олимпиаде ходили в кружки: часть ребят в школьный, часть – в университетский, некоторые даже в оба. Оказалось, что средний балл, полученный на олимпиаде теми, кто ходил в школьный кружок, – 25 баллов, а теми, кто ходил в университетский, – 30 баллов. Может ли оказаться, что средний балл всех этих школьников составляет 35 баллов?

Наше исследование показывает, что общий средний балл не выше 55. Однако можно ли заменить в условии 35, например, средним баллом $c = 50$? Получим:

$$k = \frac{m(c-a)+n(c-b)}{a+b-c} + p = \frac{25m+20n}{5} + p = 5m + 4n + p,$$

$$\frac{P(A_1)}{m} = 20\frac{n+k}{m} + 50 = 20\frac{5m+5n+p}{m} + 50 + 150\frac{5n+p}{m}.$$

Всё-таки трудно представить себе олимпиаду, в которой один ученик сможет набрать 150 или более баллов. Хотя формально такое возможно, но подобные ответы могут смутить школьников. Поэтому более простым для решения будет случай, когда c только немного больше максимума из a и b.

Учёт целочисленности

Заметим, что формулировка в «терминах баллов» имеет и другую особенность: обычно олимпиада оценивается целым числом баллов. Это ещё более важно, если в качестве усредняемого показателя выбрать школьные оценки или число родственников и т. п. В этом случае некоторые из наших примеров будут неподходящими.

Может ли случиться так, что ограничения на средние выполняются, но задача не решается в целых числах? Может, например при иррациональных средних. Конечно, если требуется целочисленный ответ, то все средние должны быть рациональными числами. Нужно учесть, что средние не изменятся, если одновременно умножить все P и n на одно и то же число. Поэтому мы можем просто найти общий знаменатель всех показателей и умножить ответ на него. Скажем, для $m = 1$, $n = 1$, $k = 24$ в задаче 2 мы получим веса коробок, равные 374, 249 и $\frac{1}{24}$. После умножения на 24 получим 24 коробки весом по 8976 кг, ещё 24 (розовые неквадратные) по 5976 кг и $24 \cdot 24 = 576$ коробок по 1 кг. Правда, при этом ответ станет ещё более нереалистичным.

Использовать целочисленность можно и по-другому: потребовать, чтобы результат получался «красивым». Например, в задаче о коробках нижняя граница веса равна 6 кг, хотя она задаётся дробным выражением.

Чтобы граница была целочисленной, надо найти такие натуральные a и b, чтобы и число $\frac{ab}{a+b}$ было натуральным. Будем считать, что $\frac{ab}{a+b} = d$, тогда $ab - (a + b)d = 0$. Это известное диофантово уравнение, решается оно следующим преобразованием: $(a - d)(b - d) = d^2$, то есть $(a - d)$ и $(b - d)$ – делители числа d^2. Итак, выбрав произвольное d и разложив на множители его квадрат, $d^2 = p \cdot q$, мы получим решение $a = d + p$, $b = d + q$. Например, при $d = 2$ можно считать, что $p = 1$, $q = 4$, тогда $a = 2$, $b = 6$.

Возможности дальнейшего обобщения

Можно увеличить число групп (типов объектов). Можно поискать более «сбалансированные» решения, когда веса отдельных предметов не сильно отличаются друг от друга. При этом надо как-то формализовать само понятие «не сильно отличаются».

Решения упражнений

1. Покажем подбор параметров на конкретном примере. В задаче о коробках $a = 15$, $b = 10$, значит, $c < 25$. Для $c = 24$ имеем $k \geq 9m + 14n$. Пусть, например, $m = n = 1$, то есть у нас есть по одной коробке только розовой и только квадратной и как минимум $9 + 14 = 23$ квадратных розовых коробки. Если $k = 23$, то квадратных коробок 24, их суммарный вес – $24 \cdot 15 = 360$ кг. Аналогично вес 24 розовых коробок – $24 \cdot 10 = 240$ кг. Вес квадратных розовых коробок – $360 + 240 - 24(1 + 1 + 23) = 0$ кг.

Мы получили 23 невесомых коробки, одну (квадратную) с весом 360 кг и одну (розовую) с весом 240 кг. Можно добиться того, что все коробки будут сколько-то весить, для этого надо увеличить k. Так, при $k = 24$ имеем 25 квадратных коробок общим весом $25 \cdot 15 = 375$ кг и 25 розовых общим весом $25 \cdot 10 = 250$ кг. Вес всех квадратных розовых коробок – $375 + 250 - 24(1 + 1 + 24) = 1$ кг. Например, каждая квадратная розовая коробка весит $\frac{1}{24}$ кг, квадратная не розовая – $375 - 1 = 374$ кг, розовая неквадратная – $250 - 1 = 249$ кг.

Заметим, что подобное вычисление всегда даст неотрицательные веса групп A_1 и B_1, так как система неравенств

$$\begin{cases} P(A_1) = (n+k)(c-b) + cm \geq 0 \\ P(B_1) = (m+k)(c-a) + cn \geq 0 \end{cases}$$

выполняется при наших предположениях для любого $k \geq 0$.

Теперь достаточно выбрать в каждой из групп A_1, B_1, AB объекты одинакового веса. То есть «квадратные не розовые» коробки будут весить по $\frac{P(A_1)}{m}$, «розовые неквадратные» по $\frac{P(B_1)}{n}$, а «розовые квадратные» – по $\frac{P(AB)}{k}$.

2. *Ответ*: в классе как минимум 35 человек.

Пусть из общего числа n учеников в классе m девочек. Тогда

$$0{,}505n \leq m < 0{,}515n.$$

Если $n = 2k$, то неравенство приобретает вид $1{,}01k \leq m < 1{,}03k$. В частности, $m > k$, то есть $m \geq k + 1$, тогда $k + 1 < 1{,}03k$, откуда $k > 1 : 0{,}03$, $k \geq 34$. Но тогда в классе должно быть не менее 68 учеников, что нереально.

Наименьшее число n, при котором такая доля девочек возможна, равно 35. Действительно, $1{,}01n \leq 2m < 1{,}03n$, $n \geq 34$. Если $n = 34$, то $34{,}34 \leq 2m < 35{,}02$, откуда $2m = 35$, что невозможно. Если $n = 35$, то $35{,}35 \leq 2m < 36{,}05$, откуда $2m = 36$, $m = 18$. Проверим: $18 : 35 = 0{,}514\ldots$.

Задания для самостоятельного исследования

1. Решите задачи о средних с сайта problems.ru с номерами 64936, 116494, 116442, 65281, 66039, 98415, 110019, 66287, 111333, 116960, 65115. Найдите ещё интересные задачи на эту тему.

2. Некоторое количество учебников по химии и физике разложили в пачки с одинаковым числом книг в каждой. При этом оказалось, что в одну из пачек попало $\frac{2}{15}$ всех учебников по химии и $\frac{1}{9}$ всех учебников по физике. Сколько всего было пачек?

Решите задачу, сравните её с задачей № 109458. Как выбрать исходные данные, чтобы задача имела единственное решение? Как можно обобщить эти задачи?

3 (№ 115500). У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?

Решите эту задачу, сравните её с задачами № 35532 и № 65261. Придумайте свои задачи на эту тему.

4 (№ 103866). Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал два подъезда и добавил три этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать ещё два подъезда и добавить ещё три этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

Подумайте, как можно обобщить или модифицировать эту задачу.

5. Исследуйте так называемый парадокс Симпсона[3]. Придумайте задачи, где бы он использовался.

6. Рассмотрим следующую задачу по теории вероятностей на тему «Формула полной вероятности»[4]. Имеется 11 чёрных и 14 белых шаров. Можно ли разложить их в два одинаковых сосуда так, чтобы вероятность вынуть случайным образом чёрный шар из случайно выбранного сосуда была равна $\frac{2}{3}$?

Ответ: в один сосуд можно положить 4 чёрных шара, а в другой – 7 чёрных и 14 белых. Тогда искомая вероятность равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{21}=\frac{2}{3}$. В данном случае ответ получается «вырожденным», так как для одного из сосудов вероятность вынуть чёрный шар равна 1, а белый – 0.

Исследуйте эту задачу в общем виде. При каких исходных данных: а) ответ на вопрос положительный; б) способ распределения шаров по сосудам единственный; в) существует невырожденное решение (в каждом сосуде есть шары обоих типов)?

Найдите варианты, когда искомый пример практически очевиден (нетрудно находится перебором), а также такие, в которых нужно проводить исследование в общем виде (в алгебраической форме).

Придумайте, как можно оформить эту задачу в виде текстовой, чтобы она имела однозначную интерпретацию и адекватные числовые данные.

7 [3]. В двух урнах лежит 25 шаров двух цветов: белые и чёрные. Из каждой урны вынимают по одному шару. Вероятность того, что оба они белые, равна 0,54. Найти вероятность того, что оба шара чёрные.

Эта задача объединяет стандартную вероятностную задачу и задачу на целые числа. Её особенность в том, что точное количество шаров каждого цвета определить нельзя, однако для любых вариантов вероятность появления двух черных шаров одинакова. Подберите другие численные данные так, чтобы сохранялось указанное свойство. Можете ли вы придумать алгоритм, порождающий такие варианты?

* * *

На примере одной задачи о средних мы показали, как можно провести нетривиальное математическое исследование, доступное способному школьнику. Эта деятельность поможет ему решать задачи с несколькими параметрами, логично рассуждать, выбирать удобную формализацию при работе с данными, а также улучшать полученное решение (рассуждение). С другой стороны, исследование математического сюжета в достаточной общности помогает генерировать на его основе олимпиадные задачи, причём они могут быть одинаковой сложности, что актуально при создании нескольких вариантов, или разной, хотя внешне похожие.

Список источников

1. *Сгибнев А.И.* Исследовательские задачи для начинающих. – М.: МЦНМО, 2015.

2. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Физматлит, 1961.

3. Задачи студенческих олимпиад по математике, посвящённых дню рождения Н.И. Лобачевского. Казанский университет (1999–2019 гг.) / Сост. Д.Ф. Абзалилов, И.С. Григорьева, Э.Ю. Лернер. – Казань: Фэн, 2020.

Статья поступила в редакцию 06.03.2025.
Принята к публикации 08.08.2025.

[3] См. Википедию: ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_Симпсона.

[4] Задача была предложена на олимпиаде памяти В.Р. Фридлендера в 2025 году.