(1) $K \subseteq K_d$;

(2) $K \cap B_{d_i}(a^i_j) \neq \emptyset$ для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$;

(3) Для любого $p \in K$ существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, m_i\}$ такие, что $\Big(K \setminus \{p\}\Big) \cap B_{d_i}(a^i_j) = \emptyset$.

Теорема. *Минимальный компакт Штейнера K_λ — единственный минимальный в $\Sigma_d(A)$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $p \in K_\lambda$ существует точка a^i_j такая, что* $\mathrm{HP}(a^i_j) = p$.

Автор выражает благодарность своим научным руководителям, профессору А.А. Тужилину и профессору А.О. Иванову, за постановку задачи и постоянное внимание к ней в процессе совместной работы.

Работа подготовлена при финансовой поддержке программы “Leading Scientific Schools” (grant no. NSh-6399.2018.1).

Литература

1. Ivanov A., Tuzhilin A. *Branching Solutions To One-Dimensional Variational Problems*. – World Scientific, 2001. – 364 p.

2. Ivanov A., Tuzhilin A., Tropin A. *Fermat–Steiner problem in the metric space of compact sets endowed with Hausdorff distance* // Journal of Geom. – 2017. – V. 108. – P. 575–590.

FERMAT–STEINER PROBLEM IN SPACE OF COMPACT SUBSETS OF THE EUCLIDEAN PLANE

A.K. Galstyan

The Fermat–Steiner problem consists of finding all points of a metric space Y, such that the sum of distances from each of them to points from some fixed finite subset A of the space Y is minimal [2]. We study this problem in the case when Y is a space of compact subsets of the Euclidean plane, endowed with the Hausdorff distance, and points from A are finite pairwise disjoint compacts.

Keywords: Fermat–Steiner problem, Steiner compact, criterion of a minimal Steiner compact, number of points in a minimal Steiner compact.

УДК 514.8

О СУПЕРАДДИТИВНОСТИ ЭССЕНА ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Л.И. Гафиятуллина[1]

1 *gafiyat@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В 1951 г. Эссен получил результат для жесткости кручения, который назвали супераддитивностью. В данной работе показано, что утверждение Эссена справедливо и для евклидовых моментов областей относительно своей границы порядка p.

Ключевые слова: жесткость кручения, евклидовый момент области относительно своей границы, функция напряжения, функция расстояния.

Пусть G — односвязная область на плоскости. Рассмотрим функцию напряжений $u(x, G)$, которая удовлетворяет уравнению $\triangle u = -2$ внутри области G и граничному условию $u = 0$ на границе области ∂G. Хорошо известно, что для широкого класса областей такая функция существует и определяется единственным образом.

Физический функционал

$$\mathrm{P(G)} := 2\int\limits_G u(x, G)\mathrm{dA}, \tag{1}$$

называется жесткостью кручения области G, здесь через dA обозначен дифференциальный элемент площади (см. [1]).

Теорема 1 (Эссен). *Пусть B_1 и B_2 — две необязательно непересекающиеся ограниченные односвязные области на плоскости. Пусть P_i — жесткость кручения области B_i, $P_\cup$ — жесткость кручения $B_1 \cup B_2$ и $P_\cap$ — жесткость кручения $B_1 \cap B_2$. Тогда*

$$P_1 + P_2 \leq P_\cap + P_\cup. \tag{2}$$

Это неравенство называют супераддитивностью Эссена [5]. Тот же результат выполняется для самих функций напряжений и поэтому (2) следует из интегрирования по всему пространству, если функции напряжений продолжаются нулем вне их областей определения.

Геометрический функционал, определяемый равенством

$$\mathrm{I}_p(G) = \int\limits_G \rho(x, G)^p \mathrm{dA}, \tag{3}$$

где $\rho(x, G)$ — функция расстояния от точки x до границы области G, называется евклидовым моментом области относительно границы порядка p. При $p = 2$ функционал естественно назвать евклидовым моментом инерции области (см. [2], [3]), а при $p = 1$ — стационарным евклидовым моментом области.

Нетрудно показать, что утверждение Эссена справедливо и для евклидовых моментов областей относительно своей границы порядка p.

Теорема 2. *Пусть B_1 и B_2 — две необязательно непересекающиеся ограниченные односвязные области на плоскости. Пусть I_i — евклидовый момент относительно границы B_i, $\mathrm{I}_\cup$ — евклидовый момент относительно границы области $\mathrm{I}_1 \cup B_2$ и $\mathrm{I}_\cap$ — евклидовый момент относительно границы области $B_1 \cap B_2$. Тогда*

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \leq \mathrm{I}_\cap + \mathrm{I}_\cup. \tag{4}$$

Литература

1. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.

2. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Казанск. фонд Математика, 1996.

3. Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, № 12. – С. 3-12.

4. Aissen M. *A class of superadditive functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – V. 4. – P. 360-362.

5. Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. – 1967. – V. 9, № 3. – P. 453-488.

ON SUPERADDITIVITY BY ESSEN FOR FORSIONAL RAGIDITY

L.I. Gafiyatullina

In 1951, Essen obtained a result for torsional rigidity, which is called the superadditivity. This paper shows that the statement of Essen is also true for the Euclidean moments of domains with respect to their boundary of order p.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to its boundary, isoperimetric inequality, distance to the boundary of domain.

УДК 004.42

МЕТОДЫ СЕМАНТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОЛЛЕКЦИЙ ЦИФРОВОЙ БИБЛИОТЕКИ LOBACHEVSKII-DML

П.О. Гафурова[1], Е.К. Липачев[2]

1 *polina.mannshtern@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *elipachev@gmail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Описан алгоритм формирования метаданных цифровых коллекций электронной библиотеки Lobachevskii DML. Учтена специфика этой библиотеки, построенной на основе парадигмы управления объектами, и часть метаданных сгенерирована в виде связей с внешними ресурсами. Разработаны инструменты, с помощью которых в набор метаданных добавлены связи авторов документов с их профилями на MathNet.ru, Google Scholar и др. Предложена система XSL-преобразований, позволяющих сгенерировать фундаментальный или обязательный набор метаданных в соответствии со схемами Европейской цифровой математической библиотеки EuDML.

Ключевые слова: цифровая коллекция, цифровая математическая библиотека, метаданные, семантический метод, Lobachevskii DML, Европейская цифровая математическая библиотека, Всемирная цифровая математическая библиотека.

Переход к распространению научных знаний через Интернет, происходящий в настоящее время, принято обозначать как новую научную революцию [2]. Одним из направлений формирования глобальной научной инфраструктуры является создание специализированных электронных библиотек. Математические электронные библиотеки являются основой формирования цифровой инфраструктуры математических знаний. Принципы построения такой инфраструктуры оформлены в документах проекта Всемирной цифровой математической библиотеки – World Digital Mathematics Library (WDML) [3]. Основной задачей этого проекта является объединение в распределенной системе электронных коллекций всего корпуса цифровых математических документов. Определяющая роль в этом объединении отведена национальным электронным математическим библиотекам [3]. На