

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙ-
СКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) фе-
деральный университет»

Набережночелнинский институт (филиал)

Кафедра Автомобили, автомобильные двигатели и дизайн

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОМОБИЛЕ - И
ДВИГАТЕЛЕСТРОЕНИИ

Учебное пособие

Набережные Челны
2019

УДК 534.1: 629.01.(075.8)

Н62

Печатается по рекомендации к изданию, принятой на заседании кафедры «Автомобили, автомобильные двигатели и дизайн» Набережночелнинского института (филиала) КФУ от «5» марта 2019 г., протокол № 2.

Рецензенты:

доктор технических наук Ф.Д.Байрамов

доктор технических наук В.Н.Кравец

Никишин В.Н., Басыров Р.Р., Павленко А.П. Прикладная теория колебаний в автомобиле - и двигателестроении: учебное пособие / В.Н. Никишин, Р.Р. Басыров, А.П. Павленко – Набережные Челны: Изд-во Набережночелнинского института КФУ, 2019. – 223 с.

В настоящем учебном пособии представлена прикладная теория колебаний систем с сосредоточенными параметрами. Теоретический материал сопровождается примерами и задачами. Кроме классического рассмотрения теории колебаний, представлены специальные разделы, такие как БПФ, крутильные колебания коленчатых валов, экспериментальные методы исследований крутильных колебаний, колебания силового агрегата автомобиля.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Автомобиле- и тракторостроение», направления подготовки «Наземные транспортно-технологические комплексы», а также «Энергетическое машиностроение» профиля «Двигатели внутреннего сгорания».

Может быть полезно аспирантам, преподавателям и работникам промышленных предприятий.

©Никишин В.Н, Басыров Р.Р., Павленко А.П, 2019

© НЧИ КФУ, 2019

© Кафедра Автомобиля, автомобильные двигатели и дизайн, 2019

Оглавление

Предисловие 6

Часть I. Основные понятия 7

ГЛАВА 1. Некоторые сведения из теоретической механики 7

1.1. Единицы измерения механических величин 7

1.2. Некоторые термины теоретической (общей) механики 12

1.3. Некоторые положения теоретической механики 17

1.3.1. Трение 17

1.3.2. Краткие сведения из кинематики 18

1.3.3. Краткие сведения из динамики 19

1.3.4. Краткие сведения из аналитической механики 23

Часть II. Колебания линейных систем с одной степенью свободы 28

ГЛАВА 2. Колебания линейной системы с одной степенью свободы 28

2.1. Предмет теории колебаний 28

2.1.1. Классификация колебательных систем 29

2.1.2. Классификация колебательных процессов 31

2.1.3. Количественные характеристики колебательных процессов 38

2.1.4. Классификация сил 40

2.2. Свободные гармонические колебания 43

2.2.1. Свободные колебания консервативной системы (без затухания) 44

2.2.2. Свободные колебания неконсервативной системы (с затуханием) 46

2.3. Вынужденные колебания 52

2.3.1. Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления 52

2.3.2. Вынужденные колебания при наличии линейного вязкого сопротивления	59
2.4. Биения	65
2.5. Механический импеданс	70
2.6. Основы виброзащиты	74
2.7. определение затухания в системах с одной степенью свободы	80
2.7.1. Метод измерения свободных затухающих колебаний	81
2.7.2. Метод оценки коэффициента затухания по ширине резонансной амплитуды	82
2.7.3. Метод измерения механического импеданса	86
2.8. Вынужденные колебания при произвольном возбуждении	89
2.9. Вынужденные колебания при синусоидальном импульсе	95
2.11. численные способы определения динамических перемещений	101
2.12. Примеры и задачи к главе 2	108
2.13. Контрольные вопросы к главе 2	139
ГЛАВА 3. Крутильные колебания системы с одной степенью свободы	144
3.1. Свободные крутильные колебания вала с одной массой	144
3.1.2. Свободные крутильные колебания неконсервативной системы (с затуханием)	146
3.2. Вынужденные крутильные колебания	148
3.2.1. Вынужденные крутильные колебания при отсутствии вязкого сопротивления	148
3.2.2. Вынужденные крутильные колебания с затуханием	151
3.3. Примеры и задачи к главе 3	154
Задачи к главе 3	156
3.4. Контрольные вопросы к главе 3	156

Часть III. колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы 158

Глава 4. колебания системы с двумя степенями свободы 158

4.1. Примеры систем с двумя степенями свободы 158

4.2. Свободные крутильные колебания консервативной системы с двумя массами 159

4.3. Свободные колебания консервативной системы с двумя массами 162

4.4. Вынужденные колебания консервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении 166

4.4.1. Вынужденные колебания при приложении силы к одной массе 166

4.4.2. Вынужденные колебания при приложении силы одновременно к двум массам 168

4.5. Вынужденные крутильные колебания консервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении 170

4.6. Свободные колебания неконсервативной системы с двумя массами 172

4.7. Вынужденные колебания неконсервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении. Динамический демпфер колебаний 173

4.8. Примеры к главе 4 180

Глава 5. Колебания системы с конечным числом степеней свободы 201

5.1. Свободные крутильные колебания консервативной системы с тремя массами 201

5.2. Свободные крутильные колебания консервативной системы со многими массами 204

Литература 221

Предисловие

В настоящем учебном пособии представлена прикладная теория колебаний систем с сосредоточенными параметрами. Теоретический материал сопровождается примерами и задачами.

Кроме классического рассмотрения теории колебаний, представлены специальные разделы, такие как БПФ, крутильные колебания коленчатых валов, экспериментальные методы исследований крутильных колебаний, колебания силового агрегата автомобиля.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Автомобиле- и тракторостроение», направления подготовки «Наземные транспортно-технологические комплексы», а также «Энергетическое машиностроение» профиля «Двигатели внутреннего сгорания».

Может быть полезно аспирантам, преподавателям и работникам промышленных предприятий.

Часть I. Основные понятия

ГЛАВА 1. Некоторые сведения из теоретической механики

1.1. Единицы измерения механических величин

До 1963 г. существовали три системы метрических единиц:

- *абсолютная метрическая система* СГС (ССС), в которой основными единицами являются **сантиметр, грамм и секунда**;
- *абсолютно практическая система* МКС (МКС), в которой основными единицами являются **метр, килограмм и секунда**;
- *техническая система* МКГСС (МКС), в которой основными единицами являются **метр, килограмм-сила и секунда**.

С 1963 г. в СССР введена *Международная система единиц* СИ (SI), которая для механических единиц совпадает с системой МКС. В табл. 1.1 представлены *основные* и *дополнительные* единицы механических единиц системы СИ и их обозначения.

Т а б л и ц а 1.1

Основные единицы СИ				
Величина	Единица наименование	Обозначение		Определение
		русское	международное	
Длина	метр	м	m	Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299\,792\,458$ с
Масса	килограмм	кг	kg	Килограмм равен массе международного прототипа килограмма
Время	секунда	с	s	Секунда равна 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Дополнительные единицы СИ				
Плоский угол	радиан	рад	rad	Радий равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу
Телесный угол	стерадиан	ср	sr	Стерadian равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы

В табл. 1.2 представлены производные единицы механических величин системы СИ и их размерности.

Т а б л и ц а 1.2

Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования					
Величина	Единица		Выражение производной единицы		Определение
	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ	
1	2	3	4	5	6
Площадь	Квадратный метр			м^2	Квадратный метр равен площади квадрата со сторонами, длины которых равны 1 м
Объем, вместимость	Кубический метр			м^3	Кубический метр равен объёму куба с рёбрами, длины которых равны 1 м
Скорость	Метр в секунду			м/с	Метр в секунду равен скорости прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м
Ускорение	Метр на секунду в квадрате			м/с^2	Метр на секунду в квадрате равен ускорению прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 с скорость точки возрастает на 1 м/с
Угловая скорость	Радииан в секунду			рад/с	Радииан в секунду равен угловой скорости равномерно вращающегося тела, при которой за время 1 с совершается поворот тела относительно оси вращения на угол 1 рад
Угловое ускорение	Радииан на секунду в квадрате			рад/с^2	
Период	Секунда			с	
Частота	Герц	Гц		с^{-1}	Герц равен частоте периодического процесса, при которой за время 1 с происходит один цикл периодического процесса
1	2	3	4	5	6
Угловая частота	Радииан в секунду			рад/с	
Плотность	Килограмм			кг/м^3	Килограмм на кубический метр равен плот-

	на кубический метр				ности однородного вещества, масса которого при объёме 1 м^3 равна 1 кг
Импульс (количество движения)	Килограмм-метр в секунду			$\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$	Килограмм-метр в секунду равен импульсу (количеству движения) тела массой 1 кг , движущегося со скоростью $1 \text{ м}/\text{с}$
Сила	Ньютон	Н	–	$\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$	Ньютон равен силе, сообщающей телу массой 1 кг ускорение $1 \text{ м}/\text{с}^2$ в направлении действия силы
Момент силы, момент пары сил	Ньютон-метр		Н·м	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$	Ньютон-метр равен моменту силы, создаваемому силой 1 Н относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы
Импульс силы	Ньютон-секунда		Н·с	$\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$	Ньютон-секунда равна импульсу силы, создаваемому силой 1 Н , действующей в течение времени 1 с
Давление, напряжение (механическое)	Паскаль	Па	$\text{Н}/\text{м}^2$	$\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$	Паскаль равен давлению (механическому напряжению), вызываемому силой 1 Н , равномерно распределённой по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2
Энергия, работа	Джоуль	Дж	Н·м	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$	Джоуль равен работе, совершаемой при перемещении точки приложения силы 1 Н на расстояние 1 м в направлении действия силы
Мощность, поток энергии	Ватт	Вт	Дж/с	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$	Ватт равен мощности, при которой совершается работа 1 Дж за время 1 с
Поверхностное натяжение	Ньютон на метр		Н/м	$\text{кг}/\text{с}^2$	Ньютон на метр равен поверхностному напряжению, создаваемому силой 1 Н , приложенной к участку контура свободной поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности
1	2	3	4	5	6

Динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения)	Паскаль-секунда		Па·с	кг/(м·с)	
Кинематическая вязкость	Квадратный метр на секунду		м ² /с		
Модули линейного растяжения и всестороннего сжатия	Паскаль	Па	Н/м ²	кг/(м·с ²)	

В табл. 1.3 представлены внесистемные единицы и их связь с единицами системы СИ.

Т а б л и ц а 1.3

Внесистемные единицы				
Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	наименование	обозначение	через другие единицы СИ	через основные единицы СИ
Плоский угол	градус	°		($\pi/180$)·рад
	минута	'		($\pi/108$)·10 ⁻² рад
	секунда	"		($\pi/648$)·10 ⁻³ рад
Угловая скорость		мин ⁻¹		($\pi/30$)·рад/с
		с ⁻¹		2 π ·рад/с
Давление	бар	бар	10 ⁵ Па	10 ⁵ кг/(м·с ²)
	миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	133,322 Па	133,322 кг/(м·с ²)
	миллиметр водяного столба	мм вод. ст.	9,80665 Па	9,80665 кг/(м·с ²)
Мощность	лошадиная сила	л.с.	735,499 Вт	735,499 кг·м ² /с ³
		л.с.	0,735499 кВт (1кВт=1,359621 л.с.)	

В табл. 1.4 представлены приставки производных единиц метрических систем, кратных и дольных основной единице и их обозначения.

Т а б л и ц а 1.4

Приставки и множители десятичных кратных и дольных единиц международной системы СИ

Приставка	Множитель	Обозначение приставки	
		русское	международное
экса	10^{18}	Э	E
пета	10^{15}	П	P
тера	10^{12}	Т	T
гига	10^9	Г	G
мега	10^6	М	M
кило	10^3	к	k
гекто	10^2	г	h
дека	10^1	да	da
деци	10^{-1}	д	d
санتي	10^{-2}	с	c
милли	10^{-3}	м	m
микро	10^{-6}	мк	μ
нано	10^{-9}	н	n
пико	10^{-12}	п	p
фемто	10^{-15}	ф	f
атто	10^{-18}	а	a

1.2. Некоторые термины теоретической (общей) механики

Движение может иметь различные виды.

Механическое движение состоит в изменении взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Механикой называют науку, изучающую механические движения и механическое взаимодействие материальных тел.

Абсолютно твёрдым телом называют такое материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остаётся постоянным.

Классическая механика состоит из трёх основных отделов: *статики, кинематики и динамики*.

Статика занимается изучением законов сложения и условия равновесия материальных тел (статика твёрдого тела).

Кинематика изучает механическое движение тел без учета их масс и действующих на них сил.

Динамика изучает движения механических систем под действием сил.

Колебательным называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин.

Механические колебания – колебания во времени каких-либо механических величин: кинематических – перемещений, скоростей, ускорений и деформаций; динамических – сил, моментов, напряжений.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного материального тела на другое.

Масса – одна из основных характеристик любого материального объекта, определяющая его инертные и гравитационные свойства.

Материальная точка – точка, имеющая массу.

Элементарное перемещение точки – перемещение точки из данного положения в положение, бесконечно близкое к нему.

Скорость точки – кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиуса-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчёта.

Ускорение точки – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчёта.

Поступательное движение твёрдого тела – движение тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Вращательное движение твёрдого тела – движение тела, при котором все точки, лежащие на некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными в рассматриваемой системе отсчёта.

Угол поворота твёрдого тела – угол между двумя положениями полуплоскости, неизменно связанной с телом и проходящей через его ось вращения.

Угловая скорость – кинематическая мера вращательного движения тела, численно равная первой производной от угла поворота по времени.

Угловое ускорение – мера изменения угловой скорости тела, равная производной от угловой скорости по времени.

Линия действия силы – прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу.

Система сил – любая совокупность сил, действующих на механическую систему.

Плечо силы – расстояние от данной точки до линии действия силы.

Момент силы относительно точки – величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведённого из данной точки в точку приложения силы, на эту силу.

Момент силы относительно оси – величина, равная проекции на эту ось момента силы, взятого относительно любой точки оси.

Внешняя сила – сила, действующая на какую-либо материальную точку механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Внутренняя сила – сила, действующая на какую-либо материальную точку механической системы со стороны других материальных точек, принадлежащих рассматриваемой системе.

Приведение системы сил к данной точке – операция замены системы сил, действующих на абсолютно твёрдое тело, эквивалентной ей системой сил, состоящей из одной силы, приложенной в данной точке, и пары сил.

Момент инерции механической системы относительно оси – величина, равная сумме произведений масс всех материальных точек, образующих механическую систему, на квадраты их расстояний до данной оси.

Количество движения точки – векторная мера механического движения, равная произведению массы материальной точки на её скорость.

Кинетическая энергия точки – скалярная мера механического движения, равная половине произведения массы на квадрат её скорости.

Элементарный импульс силы – векторная мера действия силы на элементарный промежуток времени её действия.

Импульс силы за конечный промежуток времени – величина, равная определённому интегралу от элементарного импульса силы, где пределами интеграла являются моменты начала и конца данного промежутка времени.

Элементарная работа силы – скалярная мера действия силы, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение точки её приложения.

Работа силы на конечном перемещении – величина, равная криволинейному интегралу от элементарной работы силы, действующей на данную материальную точку, взятому вдоль дуги кривой, описанной точкой при этом перемещении.

Мощность силы – величина, равная скалярному произведению силы на скорость точки её приложения.

Сила тяжести – сила, действующая на материальную точку, равная произведению массы этой точки на ускорение её свободного падения.

Сила инерции – величина, равная произведению массы материальной точки на её ускорение и направленная противоположно этому ускорению.

Потенциальная энергия точки – величина, равная работе, которую произведёт сила, действующая на материальную точку, находящуюся в потенциальном силовом поле, при перемещении этой точки из данного положения в положение, для которого значение потенциальной энергии условно считается равным нулю.

Полная механическая энергия точки – величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергий материальной точки.

Консервативная механическая система – механическая система, для которой имеет место закон сохранения полной механической энергии (нет диссипации энергии).

Неконсервативная механическая система – механическая система, для которой имеет место диссипация полной механической энергии.

Диссипативные силы – силы сопротивления, зависящие от скоростей точек механической системы и вызывающие убывание её полной механической энергии.

Связи – ограничения, налагаемые на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых, действующих на систему, силах.

Голономные связи – геометрические связи и дифференциальные связи, уравнения которых могут быть проинтегрированы.

Неголономные связи – дифференциальные связи, уравнения которых не могут быть проинтегрированы.

Голономная система – механическая система, на которую наложены только голономные связи.

Неголономная система – механическая система, на которую наложена хотя бы одна неголономная связь.

Стационарные связи – связи, в уравнения которых время явно не входит.

Нестационарные связи – связи, в уравнения которых явно входит время.

Идеальные связи – связи, для которых сумма элементарных работ их реакций равна нулю.

Функция Лагранжа – разность между кинетической и потенциальной энергиями, выраженная через обобщённые координаты и обобщённые скорости.

Математический маятник – материальная точка, совершающая под действием силы тяжести колебания вдоль заданной плоской кривой.

Физический маятник – твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения и совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг этой оси.

Удар – механическое взаимодействие материальных тел, приводящее к конечному изменению скоростей их точек за бесконечно малый промежуток времени.

Ударная сила – сила, импульс которой за время удара является конечной величиной.

Ударный импульс – импульс ударной силы за время удара.

Центральный удар – удар, при котором линия действия ударного импульса, приложенного к ударяемому телу, проходит через его центр.

Коэффициент восстановления при ударе – величина, равная модулю отношения скорости точки в конце и начале удара.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором коэффициент восстановления равен единице.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором коэффициент восстановления равен нулю.

1.3. Некоторые положения теоретической механики

1.3.1. Трение

Трение скольжения

Сухое трение это такое трение между поверхностями тел, когда между ними нет смазывающего вещества. Различают трение скольжения *при покое* и трение скольжения *при движении* одного тела относительно другого с некоторой относительной скоростью.

Третий закон Кулона. Максимальная сила трения скольжения пропорциональна нормальному давлению N

$$F_{\max} = f \cdot N,$$

где f – коэффициент трения скольжения, величина безразмерная. Он не зависит от нормального давления. Размерность F_{\max} и N – [Н].

Коэффициент трения скольжения зависит от материалов и физического состояния трущихся поверхностей, т.е. от шероховатости, влажности, температуры. Величина коэффициента трения скольжения определяется экспериментально.

В приближенных расчётах обычно считают, что коэффициент трения скольжения не зависит от относительной скорости скольжения.

Трение при наличии смазывающего слоя между поверхностями определяется распределением относительной скорости скольжения в этом слое. Трение происходит не между поверхностями тел, а между слоями смазки. Данное трение рассматривается в гидродинамике.

Трение качения

Трение качения наблюдается при качении колеса электровоза, вагона, автомобиля, шарика и ролика в подшипнике качения.

Наибольшее значение момента сопротивления качению M_{\max} достигается в момент начала качения катка по плоскости.

1. Наибольший момент сопротивления качению не зависит от радиуса катка.

2. Наибольший момент сопротивления качению пропорционален нормальному давлению

$$M_{\max} = \delta \cdot N,$$

где δ – коэффициент трения качения при покое, или коэффициент трения второго рода. Его размерность [м].

3. Коэффициент трения качения зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей.

Момент сопротивления качению (момент трения) выражается через силу трения, как

$$M = F \cdot r = \delta \cdot N, \quad [\text{Н} \cdot \text{м}]$$

где F – сила трения качения – [Н];

r – радиус катка – [м].

Или сила трения качения равна

$$F = (\delta \cdot N)/r.$$

1.3.2. Краткие сведения из кинематики

Скорость

Средняя скорость точки

$$v_{\text{ср}} = \Delta s / \Delta t, \quad [\text{м/с}]$$

где Δs – длина пути [м],

Δt – продолжительность пути [с].

Мгновенная скорость точки. Мгновенной скоростью называется векторная величина \mathbf{v} , равная первой производной по времени от радиус-вектора \mathbf{r} движущейся точки

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Ускорение

Средним ускорением точки в промежуток времени от t до $t + \Delta t$ называется вектор $\mathbf{w}_{\text{ср}}$, равный отношению приращения $\Delta \mathbf{v}$ вектора скорости \mathbf{v} точки за этот промежуток времени к его продолжительности Δt

$$\mathbf{w}_{\text{ср}}(t, \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \quad [\text{м/с}^2].$$

Мгновенным ускорением называется векторная величина \mathbf{w} , равная первой производной скорости точки по времени или второй производной радиус-вектора точки по времени

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Поступательным движением твёрдого тела называют такое движение тела, при котором любая прямая в теле перемещается, оставаясь параллельной своему первоначальному направлению.

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется движение твёрдого тела, имеющего две неподвижные точки.

Средней угловой скоростью тела называют отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt , за который оно происходит

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad [\text{рад/с} = 1/\text{с}].$$

Если частота вращения тела n , например, коленчатого вала двигателя, измеряется в мин^{-1} , то угловая скорость в рад/с будет

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}.$$

Мгновенная угловая скорость равна первой производной от угла поворота тела по времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Линейная скорость v произвольной точки вращающегося тела прямо пропорциональна расстоянию R от оси вращения

$$v = \omega \cdot R.$$

Среднее угловое ускорение

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad [1/\text{с}^2].$$

Мгновенное угловое ускорение равно первой производной от угловой скорости тела по времени или второй производной от угла поворота тела по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

1.3.3. Краткие сведения из динамики

Второй закон Ньютона

Ускорение \mathbf{w} , сообщаемое материальной точке, пропорционально действующей на точку силе \mathbf{F} , направлено по этой силе и обратно пропорционально массе точки m

$$\mathbf{w} = \mathbf{F}/m \text{ или } \mathbf{F} = m \cdot \mathbf{w}.$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},$$

или в прямоугольной декартовой системе координат при движении точки по прямой линии

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x.$$

Момент инерции

Момент инерции массы m , находящейся на расстоянии ρ от оси, равен

$$J = m \cdot \rho^2 \text{ [кг} \cdot \text{м}^2 \text{]} .$$

Момент инерции диска относительно оси равен

$$J = (m \cdot R^2)/2,$$

где m – масса диска, R – радиус диска.

Момент инерции стержня:

– относительно центральной оси симметрии стержня

$$J_c = (m \cdot l^2)/12;$$

– относительно конца стержня

$$J_a = (m \cdot l^2)/3,$$

где m – масса стержня, l – длина стержня.

Момент инерции сплошного круглого цилиндра относительно центральной оси

$$J_{\text{ц}} = (m \cdot R^2)/2,$$

где m – масса цилиндра, R – радиус цилиндра.

Момент инерции полого круглого цилиндра относительно центральной оси

$$J_{\text{зпц}} = \frac{m(R^2 + R_0^2)}{2},$$

где R – наружный радиус цилиндра; R_0 – внутренний радиус цилиндра.

Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum M_z,$$

где φ – угол поворота [рад]; J_z – момент инерции относительно оси вращения; $\sum M_z$ – сумма моментов внешних сил относительно оси вращения.

Работа силы

Элементарная работа dA силы \mathbf{F} на элементарном перемещении ds определяется как

$$dA = F_\tau ds,$$

где F_τ – проекция силы \mathbf{F} на направление элементарного перемещения.

Полная работа силы на перемещении ds от точки 1 до точки 2

$$A = \int_1^2 F_\tau ds; \text{ или } A = \int_0^t \mathbf{Fv} dt.$$

Если F_τ является величиной постоянной, то работа сил равна

$$A = F_\tau s,$$

где s – путь, пройденный точкой.

Работа силы тяжести ($G = m \cdot g$)

$$A = m \cdot g \cdot h,$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести тела.

Работа линейной силы упругости

Линейная сила упругости растягиваемой пружины по закону Гука равна

$$F_{\text{упр}} = -c \cdot \lambda,$$

где c – коэффициент жёсткости пружины; λ – удлинение (сжатие) пружины.

Работа линейной силы упругости равна

$$A = F_{\text{упр}} \cdot \lambda, \text{ или } A = - (c \cdot \lambda^2) / 2.$$

Размерность работы дж, [1 дж = 1 Н·м = (кг·м²)/с²].

Мощность силы

Мощность силы по определению оценивают той работой, которую она может совершить за единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Или мощность можно представить как скалярное произведение силы на скорость точки

$$N = F \cdot v.$$

Размерность мощности определяется равенством

$$[N] = \frac{[\text{работа}]}{[\text{время}]}$$

Мощность, равная 1 дж в с, называется ваттом (Вт)

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с.}$$

Вследствие малости этой величины, в инженерной практике часто используют кВт (1 кВт = 1000 Вт).

В двигателестроении ещё используют внесистемную единицу, называемую лошадиной силой (л.с.)

$$1 \text{ л.с.} = 75 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$$

Соотношение между лошадиной силой и ваттом определяется исходя из того, что 1 кг·м = 9,81 Дж. Следовательно, 1 л.с. = 75 кг·м/с = 75·9,81 Дж/с = 736 Вт = 0,736 кВт, или 1 кВт = 1,36 л.с.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия T точки по определению равна

$$T = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса точки; v – скорость точки.

Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной. Размерность кинетической энергии совпадает с размерностью работы [(кг·м²)/с = Дж].

Кинетическая энергия при *поступательном* движении твёрдого тела

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия при *вращении* тела вокруг неподвижной оси

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси вращения;
 ω – угловая скорость тела.

1.3.4. Краткие сведения из аналитической механики

Связи

Связи или ограничения – это обычно различного рода закрепления системы: подшипники для валов машин, шарнирные опоры, жёсткие или упругие заделки концов стержней или балок, опорные поверхности. Считают, что влияние связей на положение и движение материальных точек осуществляется посредством действия *реакций связей*. Приложив к точкам системы *реакции связей*, формально её можно рассматривать как свободную систему точек.

Связи подразделяют на голономные и неголономные связи, а также зависящие и независящие от времени.

Обобщённые координаты

Допустим, что некоторая система состоит из N точек, на которые наложены голономные связи. Положение системы в момент времени t определяют $3N$ координат точек уравнения связей

$$f_v(x_k, y_k, z_k, t) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, l).$$

Причём $l < 3N$.

В этом случае l координат могут быть выражены через остальные $(3N - l)$ *независимые координаты*, которым можно давать любые (достаточно малые) изменения *без нарушения связей*. Вариации этих независимых координат однозначно определяют вариации остальных зависимых координат. Число независимых координат системы, подчинённой только голономным связям, определяет *число степеней свободы системы*.

Числом степеней свободы системы с голономными связями называют число независимых обобщённых координат, через которые можно выразить декартовы координаты всех точек системы.

Вместо декартовых координат в качестве «независимых координат» выбирают обычно другие, связанные с ним величины, иногда другой физической природы и другой размерности. Эти независимые величины называют *обобщёнными координатами*. Далее будем их обозначать через

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

где n – число степеней свободы, $n = 3N - l$.

Число обобщённых координат должно быть равно числу независимых величин, однозначно определяющих положение системы, и через

них должны выражаться все декартовы координаты системы в форме, например, уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Если голономные связи не зависят явно от времени t , то формулы, выражающие декартовы координаты через обобщённые координаты, не будут содержать времени явно. Так как радиус-вектор r_k каждой точки системы выражается векторным образом через координаты этой точки в виде $r_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$, то, следовательно, радиус-вектор каждой точки тоже является функцией, но векторной, от обобщённых координат и времени при реономных связях, так же как и проекции его x_k, y_k, z_k :

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Таким образом, чтобы найти траекторию движения данной системы и закон движения по ней каждой точки, достаточно найти сначала в функциях времени все обобщённые координаты q_i , а затем выразить все декартовы координаты в функциях времени, тем самым установить закон движения системы.

Обобщённые силы

Обобщённая сила Q_i , соответствующая обобщённой координате q_i

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right),$$

где F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции равнодействующих всех активных сил на оси координат; N – число точек системы; q_1, q_2, \dots, q_n – обобщённые координаты рассматриваемой системы.

Размерность обобщённой силы зависит от размерности обобщённой координаты. Если обобщённая сила имеет размерность *длины*, то обобщённая сила имеет размерность физической силы [Н]. Если же обобщённая координата имеет размерность угла [рад], то обобщённая сила Q_i имеет размерность момента силы.

Кинетическая энергия в обобщённых координатах в случае связей, не зависящих от времени

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

где a_{ij} – зависит от всех величин q_i .

Принцип Даламбера

Принцип Даламбера для свободной материальной точки эквивалентен основному закону динамики (второй закон Ньютона). Для несвободной материальной точки он эквивалентен основному закону динамики вместе с аксиомой связей и имеет вид

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{R},$$

где \mathbf{F} – равнодействующая активных сил; \mathbf{R} – равнодействующая реакций связей; \mathbf{w} – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчёта.

Уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Составление уравнений Лагранжа выполняется в следующем порядке:

1. Взять частную производную от кинетической энергии по обобщённой скорости. Получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + b_i.$$

2. Взять полную производную по времени от этого выражения. Результатом будут вторые производные по времени \ddot{q}_i , т. е. обобщённые ускорения. Так как коэффициенты a_{ij} зависят от q_i и от t , то от дифференцирования появляются и обобщённые скорости. Обобщённые ускорения войдут линейно, в первых степенях, а обобщённые скорости в общем случае нелинейно; так же нелинейно в зависимости от вида коэффициентов a_{ij} , b_i , c и обобщённых сил войдут обобщённые координаты q_i .

3. Составить частную производную $\partial T / \partial q_i$ от кинетической энергии по обобщённой координате, которая так же входит в уравнения Лагранжа, дифференцируя коэффициенты a_{ij} , b_i , c по q_i .

4. Найти выражения обобщённых сил по данным силам, приложенным к точкам системы.

Получим систему уравнений Лагранжа второго рода, состоящую из n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщённых координат.

Для определения обобщённых координат как функции времени необходимо произвести интегрирование уравнений Лагранжа

$$q_i = q_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Произвольные интегрирования $(C_1, C_2, \dots, C_{2n})$ определяются исходя из начальных условий при $t = 0$, т.е. задаём соответствующие значения обобщённых координат $(q_i)_0$ и обобщённых скоростей $(\dot{q}_i)_0$.

Зная обобщённые координаты и обобщённые скорости в функции времени, окончательно определяем декартовы координаты всех точек системы и их скорости по следующим зависимостям

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t}; \quad \dot{y}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial y_k}{\partial t}; \quad \dot{z}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial z_k}{\partial t}.$$

Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил

Силы, действующие на механическую систему, в этом случае могут быть выражены через силовую функцию U ; обобщённые силы выражаются по формулам

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что силовая функция U зависит только от обобщённых координат q_i , но не зависит от обобщённых скоростей \dot{q}_i , следовательно

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Соответственно

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial(T + U)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Вследствие этого каждое уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Введём функцию Лагранжа $L = T + U$, причём $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Тогда уравнения Лагранжа окончательно примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Механическая энергия системы E равна

$$E = T - U = T + \Pi.$$

А функция Лагранжа L не является механической энергией системы $L = T - \Pi$.

часть II. Колебания линейных систем с одной степенью свободы

ГЛАВА 2. Колебания линейной системы с одной степенью свободы

2.1. Предмет теории колебаний

Место колебательных процессов в науке и технике. Большинство наблюдаемых в природе и технике процессов являются колебательными. К колебательным процессам относятся самые разнообразные явления: от ритмов головного мозга и биения сердца до колебаний звёзд, туманностей и других космических объектов; от колебаний атомов или молекул в твёрдом теле до климатических изменений на Земле, от вибраций звучащей струны до землетрясений. Все акустические явления и явления, связанные с распространением электромагнитных волн, также сопровождаются колебательными процессами.

Здесь будут рассмотрены *механические системы*. Колебательные процессы, происходящие в этих системах, называются *механическими колебаниями*. Под *механическими колебаниями* подразумеваются колебания во времени каких-либо механических величин: координат точек тела, деформаций, сил, моментов, напряжений. В технике, особенно в машиностроении, широко применяют также термин *вибрация*. Он является почти синонимом терминов механические колебания или колебания механической системы. Термином *вибрация* чаще всего пользуются там, где речь идёт о колебаниях *кинематических величин*, которые имеют относительно малую амплитуду и не слишком низкую частоту (например, едва ли можно принять термин вибрация, говоря о колебаниях маятника часов или о раскачивании качелей).

Прикладная теория колебаний и вибротехника. Совокупность методов и средств для измерения величин, характеризующих колебания, называется *виброметрией*. Совокупность методов и средств для уменьше-

ния вредного воздействия вибрации на человека, приборы и механизмы называется *виброзащитой*. Совокупность технологических приёмов, основанных на целенаправленном использовании вибрации, называется *виброобработкой*, а использование вибрации для перемещения материалов, изделий и т. п. называется *вибротранспортировкой*. Для обеспечения способности объектов выполнять свои функции и сохранять параметры в пределах установленных норм, а также сохранять прочность в условиях вибрации необходимы расчеты на *виброустойчивость* и *вибропрочность* или, в более общей постановке, на *вибронадёжность*. Задачей *виброиспытаний* является изучение виброустойчивости, вибропрочности и эффективности объектов в условиях вибраций, а также изучение эффективности виброзащиты; задачей *вибродиагностики* — изучение состояния объекта на основе анализа эксплуатационных или искусственно возбуждаемых вибраций.

2.1.1. Классификация колебательных систем

Принято классифицировать колебательные системы по ряду признаков. Одним из важнейших признаков является *число степеней свободы системы*.

По числу учитываемых в расчётной схеме степеней свободы различают:

- а) колебания в системах с одной степенью свободы;
- б) колебания в системах с конечным числом степеней свободы;
- в) колебания в системах с распределёнными параметрами (с бесконечным числом степеней свободы).

Системы с конечным числом степеней свободы и распределённые системы.

Различают *системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы*. В последнем случае множество степеней свободы может быть либо счётным, либо континуальным. Системы, обладающие континуальным множеством степеней свободы, называют *распределёнными (континуальными)*. Число степеней свободы зависит от характера идеализации реальной системы. Упругие системы с распределённой массой являются распределёнными системами; заменяя распределённую массу конечным числом сосредоточенных масс, получим систему с конечным числом степеней свободы. С математической точки зрения колебания систем с ко-

нечным числом степеней свободы описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями; колебания распределённых систем – дифференциальными уравнениями в частных производных. Математическое описание весьма широкого и наиболее важного для приложений класса распределённых систем может быть сведено к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот класс распределённых систем эквивалентен, таким образом, системам с бесконечным счётным числом степеней свободы. Приближенная трактовка последних приводит к системам с конечным числом степеней свободы.

Стационарные и нестационарные системы. Если свойства системы не изменяются на данном отрезке времени, то систему называют *стационарной* на этом отрезке. Отрезком времени, в частности, может быть вся числовая ось $(-\infty, \infty)$. Если свойства системы изменяются во времени, то её называют *нестационарной*. Процессы, происходящие в стационарных системах, описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами; процессы, происходящие в нестационарных системах, – дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. В литературе встречаются также термины *система с постоянными параметрами* и *система с переменными параметрами*.

Автономные и неавтономные системы. Колебательные процессы в автономных системах могут происходить лишь за счёт внутренних источников энергии либо энергии, сообщённой системе в виде начального возмущения. Остальные системы называются *неавтономными*. Различие между автономными и неавтономными системами условно, поскольку граница, отделяющая систему от окружающей среды, выбирается при формулировке математической модели.

Консервативные и неконсервативные системы. Система называется *консервативной*, если её полная механическая энергия остаётся постоянной при колебаниях. В противном случае система называется *неконсервативной*. В свою очередь, среди неконсервативных систем могут быть выделены системы, обладающие определёнными характерными свойствами. Так, система называется *диссипативной*, если полная механическая энергия при любом движении соответствующей автономной системы убывает. Систему называют *автоколебательной*, если она стационарна и автономна и если при определённых условиях в ней возможно *самовозбуждение колебаний*. Автоколебательные системы характеризуются наличием в них источника энергии не колебательной природы, причём поступление энергии регулируется движением самой системы.

2.1.2. Классификация колебательных процессов

По типу колебательного процесса выделяют:

- а) свободные колебания;
- б) вынужденные колебания;
- в) параметрические колебания;
- г) автоколебания.

Свободные колебания. Колебания, которые совершаются при отсутствии переменного внешнего воздействия и без поступления энергии извне, называются *свободными колебаниями*. Они происходят за счёт первоначально накопленной энергии, величина которой определяется перемещениями и скоростями, заданными системе в некоторый начальный момент времени. Свободные колебания могут происходить лишь в автономных системах.

Вынужденные колебания. Колебания, которые вызываются переменным внешним воздействием, называют *вынужденными колебаниями*. Они характерны для неавтономных систем.

Параметрические колебания. Колебания называют *параметрическими*, если они вызываются периодическим изменением во времени извне какого-либо физического параметра системы (например, массы, жёсткости). Такие колебания возможны лишь в *нестационарных системах*.

Автоколебания (самовозбуждающиеся колебания). Колебания называют *самовозбуждающимися* или *автоколебаниями*, если они возникают и поддерживаются от источника энергии не колебательной природы, причём этот источник включён в систему. Поступление энергии регулируется движением системы. Автоколебания возможны лишь в неконсервативных стационарных системах. Часто под автоколебаниями понимают установившиеся колебательные процессы, которые поддерживаются источниками энергии не колебательной природы; при этом параметры установившихся автоколебаний в существенной степени определяются нелинейными свойствами системы.

В колебательных системах возможны процессы смешанного характера, которые представляют собой результат наложения свободных колебаний, колебаний, возбуждаемых внешними воздействиями, параметрически возбуждаемых колебаний и колебаний, возбуждаемых внутренними источниками энергии.

Кинематические характеристики периодических колебательных процессов. Дадим кинематическое описание колебательных процессов для случая, когда процесс характеризуется одной скалярной переменной

$s(t)$. Пусть эта переменная – перемещение; тогда её первая производная по времени – скорость, а вторая производная – ускорение.

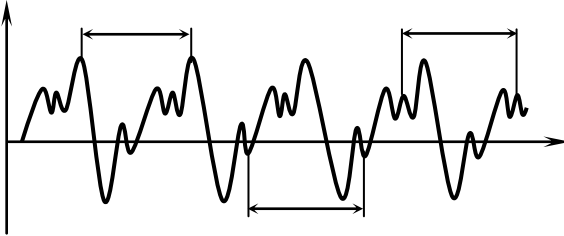


Рис. 2.1. Реализация периодического процесса $s(t)$ с периодом T

Периодические колебания. Колебания называются периодическими, если любые значения колеблющейся величины повторяются через равные отрезки времени. Более точно, колебания называются периодическими, если существует такое число T , что для любого t выполняется условие (рис. 2.1) $s(t + T) = s(t)$. Наименьшее из этих значений называется периодом колебаний. Обозначим его через T . Величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний: $f = 1/T$. В технике период колебаний обычно измеряется в секундах; частота f , следовательно, имеет размерность с^{-1} . В теоретические формулы входит величина $\omega = 2\pi = 2\pi/T$ называемая *угловой (циклической) частотой*. Она также измеряется в с^{-1} (рад/с). Эта частота равна числу периодов колебаний, которые укладываются на отрезке времени продолжительностью $2\pi \cdot \text{с}$. Необходимо остерегаться смешения частот f и ω . Частоту f обычно измеряют в герцах (Гц). Для угловой частоты наряду с размерностью с^{-1} часто используют размерность рад/с.

Гармонические колебания. Простейшим (и наиболее важным) видом периодических колебаний являются гармонические (синусоидальные) колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется во времени по закону

$$s(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.1)$$

где A , ω , φ – постоянные параметры.

Параметр A равен наибольшему значению колеблющейся величины и называется амплитудой гармонических колебаний или просто амплитудой. Постоянный параметр φ называется *начальной фазой колебаний*, а аргумент $(\omega t + \varphi)$ называется *фазой колебаний в момент времени t* . Параметр ω является угловой частотой. Период гармонических колебаний выражается через угловую частоту:

Для наглядного представления гармонических колебаний можно использовать круговую диаграмму (рис. 2.2).

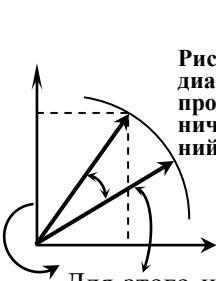


Рис. 2.2. Круговая диаграмма для простых гармонических колебаний

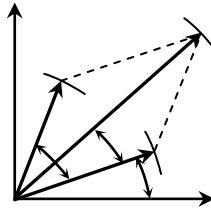


Рис. 2.3. Круговая диаграмма для суммы двух гармонических колебаний

Для этого на плоскости вводится вектор длиной A , который вращается с постоянной угловой скоростью, равной ω (отсюда происходит термин угловая скорость). Начальное положение вектора задаётся углом φ . Проектируя конец вектора на вертикальную ось, получим закон движения в форме (2.1).

Скорость при гармонических колебаниях

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi).$$

а ускорение

$$w = \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, скорость $v(t)$ и ускорение $w(t)$ при гармонических колебаниях также изменяются во времени по синусоидальному закону с той же частотой, что и перемещение $s(t)$. Амплитуды скорости и ускорения равны соответственно ωA и $\omega^2 A$.

В технической литературе перемещение, скорость и ускорение при колебательном движении называют соответственно *виброперемещением*, *виброскоростью* и *виброускорением*.

Часто удобнее пользоваться следующей записью гармонических колебаний:

$$s(t) = A \cos(\omega t + \psi), \quad (2.5)$$

где ψ – вновь введённая начальная фаза.

Начальная фаза ψ связана с фазой φ в формуле (2.1) соотношением $\psi = \varphi - (\pi/2)$. Иногда начальная фаза вводится с противоположным знаком.

Сумма двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами будет гармоническим колебанием с той же частотой:

$$A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \psi) = A \cos(\omega t + \gamma). \quad (2.6)$$

Амплитуда A и фаза γ результирующих колебаний могут быть найдены, например, из круговой диаграммы (рис. 2.3):

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cos \psi}; \\ \operatorname{tg} \gamma &= \frac{A_2 \sin \psi}{A_1 + A_2 \cos \psi}. \end{aligned} \right\}$$

Комплексное представление гармонических колебаний.

Напомним, что величины вида $x + iy$ называются *комплексными числами* (где x и y вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$ мнимая единица).

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой на плоскости (рис. 2.2). При этом по оси абсцисс откладывает величину x (т.е. *вещественную или действительную часть*, обозначается как **Re**), а по оси ординат – величину y (*мнимую часть*, обозначается как **Im**). Каждому z отвечает определённая точка плоскости. Положение точки на плоскости характеризуется её расстоянием от начала координат r и углом φ между вектором z и осью x . Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $|z|$. Угол φ называется *аргументом* (\arg) комплексного числа. Он отсчитывается от положительной части оси x против часовой стрелки. Для вещественного положительного числа $\varphi = 0$, для чисто мнимого числа $\varphi = \pi/2$.

Из рис. 2.2 можно выразить z через r и φ :

$$z = x + iy = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ называется *тригонометрической формой комплексного числа*. Зная x и y , получим

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Формула Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (2.8)$$

(i – мнимая единица) даёт удобную интерпретацию закона гармонических колебаний (2.1) на комплексной плоскости. Так, используя формулу (2.8), представим выражение (2.1) в виде

$$s = A \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im} [Ae^{i(\omega t + \varphi)}]. \quad (2.9)$$

Это тождество соответствует интерпретации гармонических колебаний при помощи круговой диаграммы (см. рис. 2.2).

Возможны другие варианты комплексного представления гармонических колебаний. Например, закон колебаний в форме (2.5) получается из комплексного представления

$$s = A \cos(\omega t + \psi) \equiv \text{Re} [Ae^{i(\omega t + \psi)}]. \quad (2.10)$$

В формулах (2.9) и (2.10) амплитуда A является действительным числом. Наряду с *действительной амплитудой* используются также *комплексные амплитуды*, равные в зависимости от способа задания гармонических колебаний $Ae^{i\varphi}$ или $Ae^{i\psi}$. Рассмотрим, например, выражение $s = \text{Re} (A_c e^{i\omega t})$, где A_c – комплексное число, действительная и мнимая части которого равны соответственно A_r и A_i . Тогда с учётом выражения (2.8) приходим к формуле (2.5), причём амплитуда и начальная фаза равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{A_r^2 + A_i^2} = |A_c|; \\ \text{tg } \psi &= \frac{A_i}{A_r}. \end{aligned} \right\}$$

Полигармонические колебания. Следующий вид периодических колебаний – это *полигармонические колебания*. *Полигармоническими* называют колебания, которые могут быть представлены в виде суммы двух или более гармонических колебаний с частотами (периодами), находящимися между собой в рациональном соотношении. Примером может служить колебательный процесс

$$s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t, \quad (2.12)$$

который является суммой двух гармонических процессов типа (2.5). Существенно, чтобы отношение частот ω_1/ω_2 было рациональным числом. Пусть ω_1 и ω_2 выражаются через некоторую частоту ω так, что $\omega_1 = m \cdot \omega$,

$\omega_2 = n \cdot \omega$, где m и n – целые числа, причём m/n несократимая дробь. Тогда сумма (2.12) будет периодической функцией с периодом $2\pi/\omega$.

Биения. Биениями называют почти гармонические колебания, амплитуда $A(t)$ которых является колеблющейся функцией времени с квазипериодом, большим по сравнению с квазипериодом $2\pi/\omega$ несущего колебательного процесса. В случае биений амплитуда колебаний, достигнув некоторого максимального значения, начинает убывать почти до нуля, затем снова возрастает; при этом возрастание и убывание происходят периодически, но их период во много раз больше основного периода (рис. 2.4).

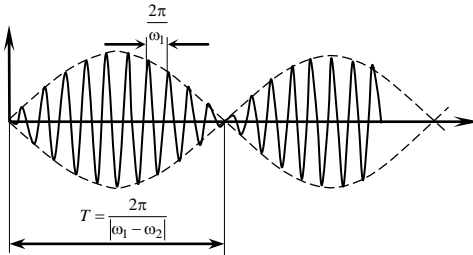


Рис. 2.4. Биения, возникающие при наложении двух близких по частоте

В простейшем случае биения можно получить при наложении двух гармонических колебаний с близкими частотами ω_1 и ω_2 . Пусть частоты удовлетворяют условию

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2 \quad (2.13)$$

Исходя из формул (2.6) и (2.7), получим

$$s(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \equiv A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos(\omega_1 t - \psi),$$

где сдвиг фазы $\psi = (\omega_1 - \omega_2)t$ в соответствии с (2.13) можно трактовать как медленно изменившуюся по сравнению с $\cos \omega_1 t$ функцию времени. Исходя из выражения (2.6), имеем

$$s(t) = A(t) \cos[\omega_1 t - \gamma(t)], \quad (2.14)$$

где амплитуда и фаза результирующих колебаний являются медленно изменяющимися функциями времени:

$$A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t},$$

$$\text{tg } \gamma(t) = \frac{A_2 \sin(\omega_1 - \omega_2)t}{A_1 + A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}.$$

Графически биение согласно выражению (2.14) представлено на рис. 2.4. Амплитуда $A(t)$ периодически изменяется во времени с частотой $|\omega_1 - \omega_2|$ и периодом

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$

Примеры биений из инженерной практики приведены на рис. 2.5 [15].

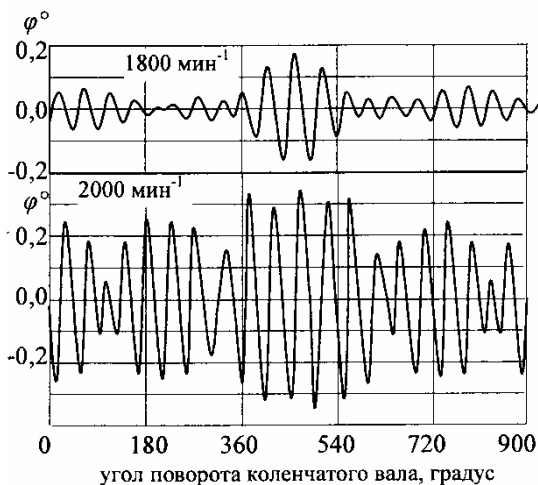


Рис. 2.5. Угловые колебания носка коленчатого вала автомобильного дизеля при различной частоте вращения коленчатого вала. Виде рлюи φ урве.

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t.$$

Этому разложению соответствует представление периодических колебаний в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi/T$. Для представления функции $s(t)$ в форме (2.18) она должна удовлетворять условиям Дирихле, т.е. быть ограниченной и иметь конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва первого рода на любом конечном интервале.

Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ называются *коэффициентами Фурье*. Коэффициент $a_0/2$ характеризует среднее значение колеблющейся величины; коэффициенты a_1 и b_1 – компоненту движения с основной частотой ω . Эта компонента называется *первой* или *основной гармоникой* колебательного движения. Компоненты движения с частотой $k\omega$, где $k > 1$, называются *высшими гармониками*, а число k – *номером гармоники*.

2.1.3. Количественные характеристики колебательных процессов

Пиковые значения и размах колебаний. Чисто гармонический колебательный процесс (рис. 2.6) характеризуется амплитудой A , двойной амплитудой $2A$, максимальным A_{\max} и минимальным A_{\min} пиковым значением, средним S_{cp} и среднеквадратичным $S_{скз}$ (или эффективным) значениями.

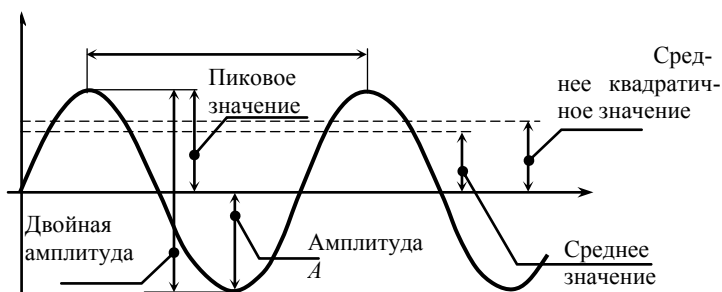


Рис. 2.6. Характеристики гармонического колебательного процесса

са

Для случайного процесса характеристики показаны на рис. 2.7.

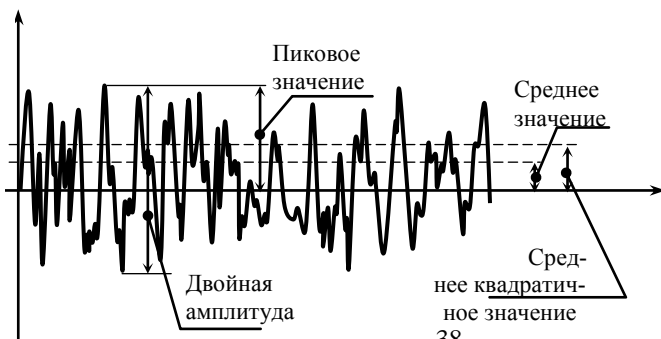


Рис. 2.7. Характеристики случайного процесса колебаний

Абсолютные значения максимума и минимума колеблющейся величины называются *пиковыми значениями*

$$S_{\max} = |\max s(t)|; \quad S_{\min} = |\min s(t)|.$$

Среднее значение. Под средним значением понимают среднее арифметическое от всех мгновенных значений колебательной величины $s(t)$ за период:

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt.$$

Среднее квадратичное значение (СКЗ)

$$S_{\text{СКЗ}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt}.$$

В данных выражениях T – время усреднения.

Между $S_{\text{СКЗ}}$, $S_{\text{ср}}$ и максимальной амплитудой S_{\max} существует связь, которая определяется коэффициентом амплитуды или пикфактором K_a и коэффициентом формы K_ϕ

$$K_a = S_{\max} / S_{\text{СКЗ}}; \quad K_\phi = S_{\text{СКЗ}} / S_{\text{ср}}. \quad (2.21)$$

Для гармонического колебательного процесса эти значения равны

$$\begin{aligned} S_{\text{СКЗ}} &= S_{\max} / 2^{1/2} = 0,707 \cdot S_{\max}; \\ S_{\text{ср}} &= 2 \cdot S_{\max} / \pi = 0,637 \cdot S_{\max}; \\ K_\phi &= \pi / (2 \cdot 2^{1/2}) = 1,11; \\ K_a &= 2^{1/2} = 1,41. \end{aligned}$$

Двойная амплитуда, отображающая полный размах колебаний, является важным параметром, например, в случаях, когда смещение механических колебаний детали машины является критическим с точки зрения максимально допустимых механических напряжений и зазоров.

Пиковое значение эффективно именно при оценке кратковременных механических ударов и т.д. Однако пиковое значение отображает только максимальное значение исследуемых колебаний, а не включает в себе их временное развитие.

Среднее значение отображает временное развитие исследуемых колебаний, но его практическое применение ограничено ввиду того, что оно не имеет непосредственной связи ни с коей физической величиной этих колебаний.

Среднее квадратичное значение (СКЗ) является самым важным, так как в нем учитывается временное развитие исследуемых колебаний, и оно непосредственно отображает значение, связанное с энергией и, следовательно, разрушающей способностью этих колебаний.

СКЗ пропорционально энергии процесса или его средней мощности. Физический смысл этого определения наиболее наглядно можно проиллюстрировать на примере из электротехники. В качестве переменной величины возьмём мгновенное значение переменного тока i . Известно, что при прохождении электрического тока произвольной формы по электрическому сопротивлению выделяется электрическая энергия. Величина этой энергии в случае постоянного тока вычисляется по формуле:

$$E = I^2 \cdot R \cdot t, \quad (2.22)$$

где I – сила тока, А; R – сопротивление цепи, Ом; t – время, с.

Мгновенное значение переменного тока непрерывно изменяется и соответственно энергия выделяется неравномерно. Замечательным свойством СКЗ тока является то, что оно позволяет определить величину переменного тока также по формуле (2.22). На рис. 2.8 показан пример графического изображения СКЗ переменного электрического тока. Если известно СКЗ (эффективное) переменного тока равно, например, 10 А, то при прохождении этого тока по некоторой цепи в ней выделяется такая же электрическая мощность, как и при прохождении по ней постоянного тока силой 5 А.

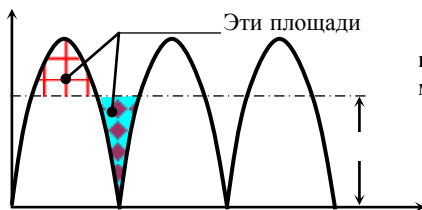


Рис. 2.8. Иллюстрация СКЗ на примере переменного электрического тока

2.1.4. Классификация сил

Силы, действующие на механическую систему, весьма разнообразны. Рассмотрим силы применительно к сосредоточенной системе с одной степенью свободы.

Восстанавливающие силы. К восстанавливающим силам относятся силы упругости, обусловленные деформациями упругих связей – внешних или внутренних. В инженерной практике эти деформации малы и не выходят за предел пропорциональности, обусловленной законом Гука. Восстанавливающая сила записывается как

$$F_{\text{упр}} = -c \cdot s(t) \text{ Н}, \quad (2.23)$$

где c – коэффициент жёсткости или жёсткость, Н/м;

$s(t)$ – деформация (перемещение), м.

Минус в правой части означает, что восстанавливающая сила направлена против деформации.

Жёсткостью пружины c называется отношение силы F , приложенной к пружине, к деформации пружины s , вызванной этой силой. Для винтовой цилиндрической пружины жёсткость рассчитывается по формуле

$$c = G d^4 / (8nD^3), \quad (2.24)$$

где G – модуль сдвига [Н/м²]; d – диаметр проволоки [м]; n – число витков; D – диаметр пружины [м].

Единица измерения жёсткости в системе СИ – Н/м.

На рис. 2.9 показаны некоторые случаи образования упругого подвеса несколькими пружинами.

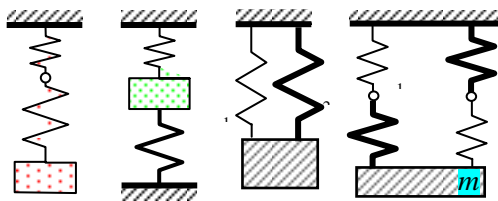


Рис. 2.9. Схемы образования подвеса из нескольких пружин:

а) – последовательное соединение; б), в) – параллельное соединение;

г) – последова-

Общий коэффициент жёсткости подвеса для схем с последовательным соединением пружин (рис. 2.9, а): найдём, исходя из следующих положений. Каждая пружина нагружена одним и тем же весом, и удлинение каждой в отдельности пружины равно $\lambda_1 = mg/c_1$ и $\lambda_2 = mg/c_2$. Полное статическое перемещение груза составит

$$\lambda_{cm} = \lambda_1 + \lambda_2 = mg/c_1 + mg/c_2 = mg (1/c_1 + 1/c_2) = mg [(c_1 + c_2)/c_1 \cdot c_2].$$

По определению жёсткость пружины для эквивалентной системы равняется $c = mg / \lambda_{ст}$, тогда

$$c = c_1 \cdot c_2 / (c_1 + c_2). \quad (2.25)$$

При параллельном соединении пружин (рис. 2.9, а и б) исходим из того, что каждая пружина должна изменять свою длину на одинаковую величину. В результате чего имеем

$$\lambda_{ст} = \lambda_1 = \lambda_2 = mg/c.$$

Вес распределён по пружинам как $mg = F_{упр1} + F_{упр2}$. Восстанавливающие силы в пружинах 1 и 2 соответственно равны:

$F_{упр1} = c_1 \lambda_{ст}$; $F_{упр2} = c_2 \lambda_{ст}$. И также $mg = c \lambda_{ст}$. Следовательно

$$c \lambda_{ст} = c_1 \lambda_{ст} + c_2 \lambda_{ст}.$$

Окончательно эквивалентная жёсткость параллельно соединённых пружин равна сумме их жёсткостей

$$c = c_1 + c_2. \quad (2.26)$$

Эквивалентную жёсткость для системы пружин смешанного типа (последовательно-параллельного), изображённой на рис. 2.9, г, находят с помощью формул (2.25) и (2.26). Сначала вычисляют для пружин жёсткостью c_1 и c_2 их эквивалентную жёсткость $c_{1эк}$ по формуле (2.25), также для второй пары пружин c_3 и $c_4 - c_{2эк}$. Затем через найденные значения $c_{1эк}$ и $c_{2эк}$ по формуле (2.26) находят эквивалентную жёсткость всей системы.

Диссипативные силы. При колебаниях реальных механических систем всегда имеются в наличии силы сопротивления. Данные силы совершают необратимую отрицательную работу, что приводит к диссипации (поглощению) механической энергии. К таким силам относятся силы трения в опорах (подшипниках), силы сопротивления жидкой или газообразной среды, в которой происходят колебания, а также силы внутреннего трения в материале элементов системы. Могут применяться специальные поглотители энергии, называемые демпферами.

Диссипативные силы всегда имеют направление противоположное скорости движения и описываются при помощи характеристик трения, зависящих от колебательной скорости в первой степени. Так в самом простом случае, изображённом на рис. 2.10, сила сопротивления имеет вид

$$F_{сопр} = h \cdot v(t), \text{ Н}; \quad (2.27)$$

где h – коэффициент линейного вязкого сопротивления, (Н·с)/м;
 $v(t)$ – колебательная скорость, м/с.

Вынуждающие силы. Вынуждающие силы являются функцией времени и не зависят от движения системы, к которой они приложены $F_{\text{внш}}(t)$. К наиболее характерным способам возбуждения колебаний можно отнести: *силовое возбуждение; кинематическое и инерционное возбуждение.*

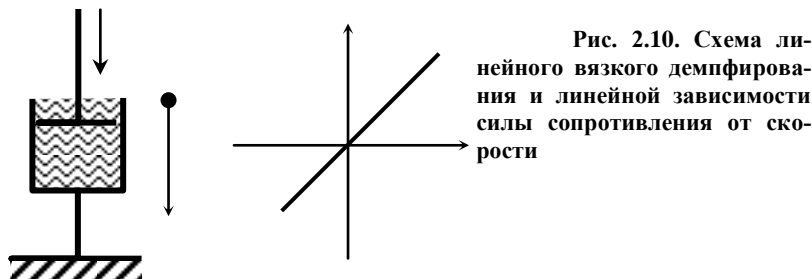


Рис. 2.10. Схема линейного вязкого демпфирования и линейной зависимости силы сопротивления от скорости

При силовом гармоническом возбуждении силу можно представить как

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_b t + \beta), \quad (2.28)$$

где ω_b – круговая частота вынуждающей силы; β – начальная фаза.

При кинематическом возбуждении вынужденные колебания возникают в результате задаваемого извне перемещения точки опоры

$$s(t) = S_0 \sin(\omega_b t + \beta). \quad (2.29)$$

При инерционном возбуждении, например, вращающимся эксцентриком массой m_1 и радиусом ρ , сила равна

$$F(t) = m_1 \omega_b^2 \rho \sin(\omega_b t + \beta). \quad (2.30)$$

Амплитуда силы $F_0 = m_1 \cdot \omega_b^2 \cdot \rho$, причём в отличие от силового возбуждения, амплитуда инерционной силы пропорциональна квадрату угловой частоты ω_b^2 .

2.2. Свободные гармонические колебания

Свободные движения колебательной системы возникают при отсутствии внешнего воздействия только вследствие начального возмущения, т.е. выведения системы из состояния покоя.

2.2.1. Свободные колебания консервативной системы (без затухания)

Рассмотрим систему, состоящую из массы m подвешенной на пружине жёсткостью c (рис. 2.11).

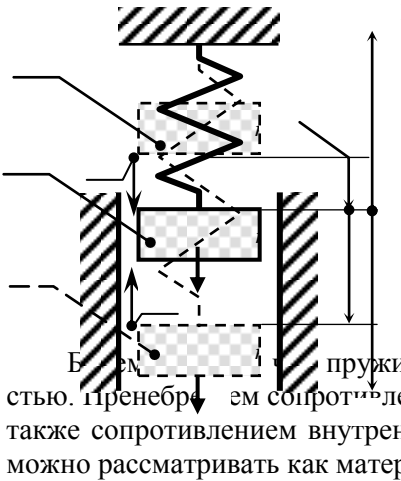


Рис. 2.11. Схема свободных колебаний одномассовой системы без трения:

c – жёсткость пружины;

m – масса груза;

P – вес груза, $P = m \cdot g$;

$\lambda_{ст}$ – статическое удлинение пружины под действием силы тяжести;

s – отклонение массы от положения статического равновесия;

1 – положение жёсткого тела m , а статического равновесия системы;

2 – крайнее нижнее положение системы;

Как только груз подвешен к пружине, пружина растягивается на величину $\lambda_{ст} = P/c$.

Выберем начало координат в положении статического равновесия системы $s=0$.

Выведем систему из состояния статического равновесия, отклонив тело на величину s . В крайнем нижнем положении в одно массовой системе действуют следующие силы. При растяжении пружины в ней возникает внутренняя сила упругой реакции $F_{упр}$, приложенная к телу

$$F_{упр} = -c (\lambda_{ст} + s). \quad (2.31)$$

Эта сила направлена вверх. Сила упругости $c \cdot s$ стремится возвратит точку m в положение статического равновесия. Эта сила называется *восстанавливающей силой*.

Мгновенно уберём связь. Скорость тела в этот момент равна нулю и кинетическая энергия также равна нулю. При этом под действием восстанавливающей силы тело начнёт двигаться вверх, скорость возрастает

от 0 до максимального значения, что соответствует положению статического равновесия, а $F_{\text{упр}} = 0$. Под действием силы инерции тело продолжает двигаться вверх, сжимая пружину. В крайнем верхнем положении пружина сожмётся на величину $-s$, восстанавливающая сила $F_{\text{упр}}$ будет направлена вниз, скорость тела равна 0. Под действием восстанавливающей силы $F_{\text{упр}}$, направленной вниз, тело начнёт двигаться вниз к нейтральному положению, увеличивая скорость до её максимального значения. Возникнут колебания. Такие колебания, которые поддерживаются только упругими силами пружины, называются *свободными* или *собственными*.

В соответствии со вторым законом Ньютона с учетом восстанавливающей силы, получим

$$m\ddot{s} = P - c(\lambda_{\text{ст}} + s).$$

Или

$$m\ddot{s} + c\lambda_{\text{ст}} - P + cs = 0.$$

Так как $\lambda_{\text{ст}} = P/c$, то окончательно получим

$$m\ddot{s} + cs = 0.$$

Из сравнения выражений (2.31) и (2.32) следует, что *сила тяжести тела не оказывает влияния на колебательный процесс*, поэтому в дальнейшем её не учитываем.

Разделим выражение (2.33) на m , и, вводя обозначения $\omega_c^2 = c/m$, получим

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = 0,$$

где ω_c – круговая частота собственных колебаний, измеряемая в рад/с.

Периодом колебаний T (время в секундах) называется величина обратная круговой частоте ω_c

$$T = 2\pi/\omega_c = 2\pi/(c/m)^{1/2}.$$

Частота собственных колебаний в Гц

$$f = 1/T = \omega_c/2\pi = (c/m)^{1/2}/2\pi. \text{ [Гц]}$$

Из определения частоты собственных колебаний следует, что она зависит от величины массы тела m и жёсткости пружины c и не зависит от величины перемещения, т.е. от начальных условий.

Общее решение уравнения (2.34) можно записать в общем виде

$$s = C_1 \cos\omega_c t + C_2 \sin\omega_c t, \quad (2.35)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования находят из начальных условий. В начальный момент времени ($t = 0$) тело имеет перемещение ($s(0) = S_{c0}$) от положения равновесия, а начальная скорость равна $\dot{s}(0) = 0$.

Из уравнения (2.35) получим

$$s_{t=0} = S_{c0} = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1; C_1 = S_{c0}.$$

Первая производная от выражения (2.35) равна

$$\dot{s}_{t=0} = -\omega_c C_1 \sin 0 + \omega_c C_2 \cos 0 = 0; C_2 = 0.$$

Таким образом, (2.35) преобразуется к виду

$$s = S_{c0} \cos \omega_c t. \quad (2.36)$$

Последнее уравнение выражает *простое гармоническое колебательное движение*, в котором S_{c0} является амплитудой цикла. Графически эта зависимость представляет косинусоиду (рис. 2.12).

2.2.2. Свободные колебания неконсервативной системы (с затуханием)

При выводе уравнений свободных колебаний консервативной системы влияние диссипативных сил не рассматривалось. В соответствие с этим получено, что свободные колебания могут продолжаться сколь угодно долго. В действительности колебания постепенно затухают ввиду наличия сил сопротивления (сопротивление воздуха, жидкости, трение в подшипниках, а также внутреннее трение в материале и т.д.). Рассмотрим *вязкое демпфирование*, так как оно является простейшим с математической точки зрения. Будем рассматривать вязкое демпфирование или *демпфирующую силу*, величина которой изменяется пропорционально колебательной скорости.

Рассмотрим сосредоточенную систему с одной степенью свободы, состоящую из пружины, сосредоточенной массы и жидкостного демпфера (рис. 2.13). Полагаем, что пружина и демпфер не обладают массой.

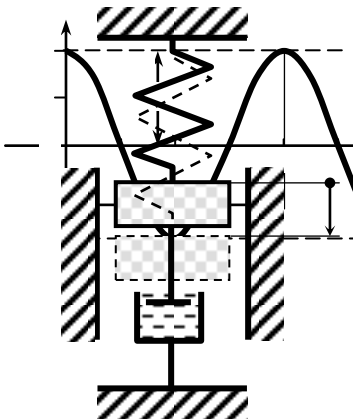


Рис. 2.13. Схема свободных колебаний одномассовой системы с вязким демпфированием:

c — жёсткость пружины;

m — масса груза;

s — отклонение массы от положения статического равновесия;

h — коэффициент линейного вязкого демпфирования

Диф

дифференциальное уравнение поступательного движения тела имеет вид

$$m\ddot{s} = -h\dot{s} - cs, \text{ или } m\ddot{s} + h\dot{s} + cs = 0.$$

Коэффициент h представляет собой *коэффициент линейного вязкого демпфирования* и имеет размерность в системе СИ (Н·с/м). Знак минус перед демпфирующей силой означает, что эта сила всегда имеет направление, противоположное направлению колебательной скорости. Разделив последнее выражение на m и введя обозначения

$$\omega_c^2 = c/m; \quad 2\varepsilon = h/m,$$

получим уравнение *свободных колебаний с вязким демпфированием*

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \omega_c^2 s = 0.$$

Величина ε называется *коэффициентом затухания* или *коэффициентом демпфирования*. Размерность ε совпадает с размерностью круговой частоты собственных колебаний ω_c .

Дифференциальное уравнение (2.37) является однородным линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, его решение следует искать в форме

$$s = Ce^{\lambda t},$$

где e – основание натурального логарифма; t – время; λ – постоянная величина, определяемая из условия того, что последнее выражение должно удовлетворять уравнению (2.37). Продифференцировав два раза последнее выражение и подставив в уравнение (2.37), получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + \omega_c^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_c^2}.$$

Колебательный процесс определяется соотношениями между значениями ε и ω_c .

Возможны три случая:

1. $\varepsilon < \omega_c$. Это случай *малого сопротивления* – корни уравнения (2.38) являются комплексно-сопряжёнными.
2. $\varepsilon = \omega_c$. *Критическое сопротивление* – корни уравнения (2.38) кратные.
3. $\varepsilon > \omega_c$. *Большое сопротивление* – уравнение (2.38) имеет два отрицательных вещественных корня.

1. Малое сопротивление. Если $\varepsilon < \omega_c$, то величина под знаком квадратного корня в (2.38) отрицательна. Обозначим $\omega_3 = (\omega_c^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$, которая называется *условной частотой затухающих колебаний*. Тогда из (2.38) получим следующие значения для корней характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega_3.$$

Подставляя значения λ_1 и λ_2 в выражение $s = Ce^{\lambda t}$, получим два решения уравнения (2.37):

$$s_1 = \frac{C_1}{2}(e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) = C_1 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_3 t;$$

$$s_2 = \frac{C_2}{2i}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = C_2 e^{-\varepsilon t} \sin \omega_3 t.$$

Соответственно общее решение дифференциального уравнения (2.37) будет суммой этих решений

$$s = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t), \quad (2.39)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые должны определяться из начальных условий.

В амплитудной форме решение (2.39) выглядит как

$$s = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_3 t + \alpha), \quad (2.40)$$

где A и α – тоже произвольные постоянные.

Раскрывая синус суммы, имеем

$$s = A e^{-\varepsilon t} \sin(\omega_3 t + \alpha) = e^{-\varepsilon t}(A \sin \alpha \cos \omega_3 t + A \cos \alpha \sin \omega_3 t).$$

Из сопоставления последнего выражения и формулы (2.39), получаем формулы связи постоянных интегрирования:

$$C_1 = A \sin \alpha; \quad C_2 = A \cos \alpha,$$

или $A = (C_1^2 + C_2^2)^{1/2}$; $\sin \alpha = C_1/A$; $\cos \alpha = C_2/A$; $\operatorname{tg} \alpha = C_1/C_2$.

Постоянные C_1 , C_2 и соответственно A , α определяются из начальных условий: $t = 0$; $s = S_0$; $\dot{s} = \dot{S}_0$.

Дифференцируя (2.39) по времени, получим

$$\dot{s} = -\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t) + e^{-\varepsilon t} (-C_1 \omega_3 \sin \omega_3 t + C_2 \omega_3 \cos \omega_3 t). \quad (2.41)$$

Используя выражение (2.39) для s , а (2.41) для \dot{s} при $t = 0$, получим уравнения для определения C_1 и C_2 :

$$C_1 = S_0; \quad \dot{S}_0 = -\varepsilon C_1 + \omega_3 C_2.$$

Откуда

$$C_1 = S_0; \quad C_2 = (\dot{S}_0 + \varepsilon S_0) / \omega_3 = (\dot{S}_0 + \varepsilon S_0) / (\omega_e^2 - \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Учитывая начальные условия, постоянные A и α будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{S_0^2 + \frac{(\dot{S}_0 + \varepsilon \dot{S}_0)^2}{\omega_3^2}}; & \sin \alpha &= \frac{S_0}{A}; \\ \cos \alpha &= \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{A \omega_3}; & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{S_0 \omega_3}{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}; & \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{S_0 \omega_3}{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в решение (2.39), получим

$$s = e^{-\varepsilon t} \left(S_0 \cos \omega_3 t + \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right).$$

В этом выражении первое слагаемое определяется начальным перемещением S_0 , а второе слагаемое зависит от начального перемещения S_0 и от начальной скорости \dot{S}_0 .

Для графической интерпретации решения (2.40) построим её зависимость, которая изображена на рис. 2.14.

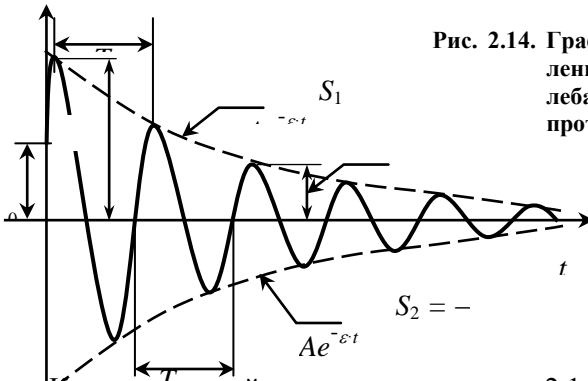


Рис. 2.14. Графическое представление затухающих колебаний при малом сопротивлении

Кроме основной зависимости на рис. 2.14 представлены вспомогательные функции $S_1 = Ae^{-\varepsilon t}$ и $S_2 = -Ae^{-\varepsilon t}$. Данные кривые являются ограничивающими для кривой $\sin(\omega_3 t + \alpha)$. Из рис. 2.14 следует, что величины последовательных наибольших отклонений s от положения равновесия уменьшаются с течением времени и стремятся к нулю. Колебания такого типа называются *затухающими*.

Величину $T_3 = 2\pi/\omega_3 = 2\pi/(\omega_c^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$ называют *условным периодом затухающих колебаний*, а ω_3 – *условной частотой затухающих колебаний*. Величину $Ae^{-\varepsilon t}$ можно назвать *условной амплитудой затухающих колебаний*.

Из анализа уравнения (2.40) следует, что при малых значениях коэффициента затухания ($\varepsilon \ll \omega_c$) условная частота затухающих колебаний $\omega_1 \approx \omega_c$, следовательно и $T_3 \approx T$.

Не являясь чисто периодическим движением, затухающие колебания чередуются через равный промежуток времени T_3 , то есть получают периодически максимальные и нулевые значения. Поэтому их можно классифицировать как *условно-периодические*.

Декремент колебаний. Если в выражение $Ae^{-\varepsilon t}$ подставить значение $t_0 = 1/\varepsilon = T_1/2\pi$, называемую *постоянной времени затухающих колебаний* и измеряемую в рад/с, то последовательность амплитуд колебаний с периодом t_0 будет следующим (начиная с $t=0$):

$$A_1 = Ae^{-\varepsilon t_0} = A; \quad A_2 = Ae^{-\varepsilon 2t_0} = Ae^{-1}; \quad A_3 = Ae^{-2} \dots$$

То есть амплитуда затухающих колебаний за каждый период уменьшается в e раз. Через $3 t_0$ условная амплитуда уменьшится в e^3 , то есть примерно в 20 раз. Как правило, считается, что по истечении времени 3-х периодов затухающие колебания прекращаются.

Введём понятие *декремента колебаний* Δ , которым называют *отношение двух последовательных амплитудных значений*. Пусть

$$A_i = Ae^{-\varepsilon t_i} \sin(\omega_3 t_i + \alpha);$$

$$A_{i+1} = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_3)} \sin[\omega_3(t_i + T_3) + \alpha] = Ae^{-\varepsilon(t_i + T_3)} \sin(\omega_3 t_i + \alpha),$$

где t_i – время, соответствующее i -му максимуму координаты.

Исходя из этого, *декремент колебаний* равен

$$\Delta = \frac{A_i}{A_{i+1}} = e^{\varepsilon T_3}.$$

Логарифмическим декрементом колебаний δ называют натуральный логарифм от декремента колебаний:

$$\delta = \ln \Delta = \varepsilon T_3. \quad (2.42 a)$$

С помощью δ экспериментально находят коэффициент затухания ε , используя соотношение двух соседних амплитуд

$$\varepsilon T_3 = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}.$$

Экспериментально определяются T_3 , последовательные значения A_i и A_{i+1} и вычисляется ε .

Повысить точность определения ε можно, если использовать соотношения двух амплитуд, отделённых j циклами согласно выражению

$$\varepsilon T_3 j = \ln \frac{A_i}{A_{i+j}}.$$

2. Критическое сопротивление ($\varepsilon = \omega_c$). В этом случае

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon.$$

При кратных корнях общее решение дифференциального уравнения (2.37) имеет вид

$$s = C_1 e^{-\varepsilon t} + C_2 t e^{-\varepsilon t} = e^{-\varepsilon t} (C_1 + C_2 \cdot t). \quad (2.43)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий при $t = 0$, $s(0) = S_0$, $\dot{s}(0) = \dot{S}_0$

$$C_1 = S_0; \quad C_2 = \dot{S}_0 + \varepsilon \cdot S_0. \quad (2.44)$$

Решение (2.43) представляет собой произведение экспоненты в отрицательной степени и линейной функции времени. Известно, что экспонента в отрицательной степени убывает быстрее, чем возрастает любая степенная функция. Поэтому это решение обратится в нуль только однажды, если константы C_1 и C_2 имеют разные знаки. Исходя из (2.44) начальное отклонение и начальная скорость должны иметь разные знаки и при этом должно выполняться условие $|\dot{S}_0| > \varepsilon |S_0|$.

Вне зависимости от начальных условий движение при критическом сопротивлении не имеет колебательного характера (рис. 2.15). Такое движение называют *апериодическим*. Причем, чем меньше начальная скорость \dot{S}_0 , тем быстрее уменьшается амплитуда полупериода колебаний. Хотя с инженерной точки зрения сложно воспроизвести собственные колебания с начальными условиями $\dot{S}_0 > 0$ или $\dot{S}_0 < 0$.

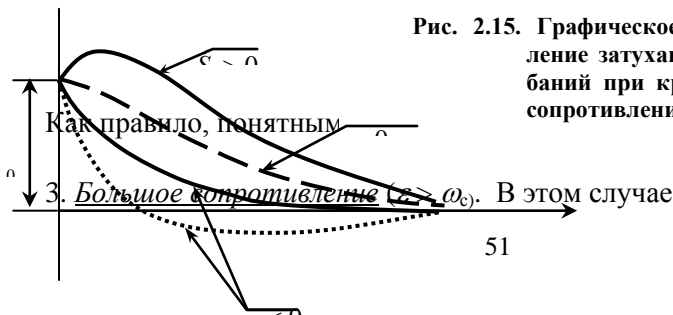


Рис. 2.15. Графическое представление затухающих колебаний при критическом сопротивлении а $\dot{S}_0 = 0$.

$\lambda_{1,2} = -\varepsilon \pm k$, где $k = (\varepsilon^2 - \omega_c^2)^{1/2}$. Поскольку $k < \varepsilon$, оба корня характеристического уравнения будут отрицательными. Общее решение дифференциального уравнения (2.37) для данного вида демпфирования имеет вид

$$s = (C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}) = e^{-\varepsilon t} (C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}). \quad (2.44, a)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются также из начальных условий:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(S_0 + \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{k} \right); \quad C_2 = \frac{1}{2} \left(S_0 - \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{k} \right). \quad (2.44. б)$$

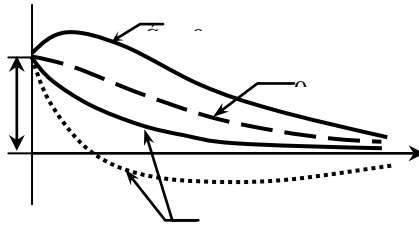


Рис. 2.16. Графическое представление затухающих колебаний при большом сопротивлении

Движение в случае большого сопротивления также имеет аperiodический характер. Но с увеличением демпфирования в системе (ε) время окончательного затухания возрастает и кривые зависимости $s(t)$ растягиваются по времени (рис. 2.16), поскольку с повышением вязкого сопротивления скорость движения убывает.

2.3. Вынужденные колебания

2.3.1. Вынужденные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

Гармоническое возбуждение колебаний. Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{s} + cs = F_0 \sin(\omega_b t + \beta).$$

Постоянные члены F_0 [Н], ω_b [рад/с] и β [рад] правой части выражения (2.45) характеризуют гармоническую возмущающую силу и соответственно являются амплитудой, круговой частотой и начальной фазой этой силы. Разделим обе части выражения (2.45) на m и введём обозначения $\omega_c^2 = c/m$ [рад/с] – круговая частота собственных колебаний, $f_0 = F_0/m$ [Н/кг] – относительная амплитуда возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления в окончательной форме имеет вид:

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = f_0 \sin(\omega_b t + \beta).$$

Получено неоднородное, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение состоит из общего решения однородного уравнения s_1 и частного решения неоднородного уравнения s_2 . Общее решение есть сумма этих двух решений, т.е. $s = s_1 + s_2$.

Однородное уравнение для определения s_1 совпадает с дифференциальным уравнением собственных колебаний (2.32). Поэтому его решение s_1 называют собственным колебанием системы. Оно может быть представлено в двух эквивалентных формах:

$$s_1 = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t = A_1 \sin(\omega_c t + \alpha_1). \quad (2.47)$$

Часть движения системы, характеризуемая функцией s_2 , является частным решением уравнения (2.46) и её называют вынужденным колебанием системы. Функция s_2 определяется в зависимости от соотношения частот собственных колебаний ω_c и вынужденных ω_b . Возможны два случая: отсутствие резонанса $\omega_b \neq \omega_c$ и резонанс $\omega_b = \omega_c$.

1. Случай отсутствия резонанса. Частное решение s_2 является решением уравнения (2.46) с правой частью и имеет вид его правой части

$$s_2 = S_b \sin(\omega_b t + \beta). \quad (2.48)$$

Определим значение S_b , удовлетворяющее уравнению (2.46), для чего в это уравнение подставим значения s_2 и $d^2 s_2 / dt^2$:

$$d s_2 / dt = S_b \omega_b \cos(\omega_b t + \beta), \quad d^2 s_2 / dt^2 = - S_b \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \beta).$$

Получим следующее тождество, справедливое в любой момент времени:

$$(- S_b \omega_b^2 + S_b \omega_c^2 - f_0) \sin(\omega_b t + \beta) \equiv 0.$$

Так как синус переменного аргумента равен нулю не для всех значений t , то полученное тождество выполняется только тогда, когда постоянный коэффициент в скобках при синусе равен нулю:

$$S_B (\omega_c^2 - \omega_B^2) - f_0 = 0.$$

Откуда

$$S_B = f_0 / (\omega_c^2 - \omega_B^2).$$

Или окончательно вынужденные колебания будут иметь вид

$$s_2 = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin(\omega_B t + \beta).$$

Таким образом, движение системы характеризуется суммарным перемещением s , состоящим из двух колебаний с различными частотами, собственных s_1 с круговой частотой ω_c и вынужденных s_2 с круговой частотой ω_B :

$$s = s_1 + s_2 = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin(\omega_B t + \beta).$$

В амплитудной форме

$$s = A_1 \sin(\omega_c t + \alpha_1) + \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin(\omega_B t + \beta).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 или A_1 и α_1 определим из начальных условий: $t = 0$; $s = S_0$; $\dot{s} = \dot{S}_0$.

Подставляя эти значения в выражения (2.49), получаем

$$C_1 = S_0 - \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin \beta; \quad C_2 = \frac{\dot{S}_0}{\omega_c} - \frac{f_0 \omega_B}{\omega_c (\omega_c^2 - \omega_B^2)} \cos \beta.$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \alpha_1 = \arctg \frac{C_1}{C_2}.$$

Как видно из (2.49) и (2.50), решение состоит из двух гармонических колебаний с частотами ω_c и ω_B соответственно.

В реальных системах, где всегда присутствуют силы вязкого сопротивления, свободные колебания с частотой ω_c с течением времени затухают (рис. 2.17, *a* и *в*), и устанавливаются не зависящие от начальных условий стационарные вынужденные колебания с частотой ω_B (рис. 2.17, *б*), уравнение которых имеет вид

$$s = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin(\omega_B t + \beta)$$

Если частота вынужденных колебаний меньше частоты собственных колебаний системы ($\omega_b < \omega_c$), то установившиеся вынужденные колебания будут *совпадать по фазе* с возмущающей силой. При $\omega_b > \omega_c$ сдвиг по фазе будет равен π , то есть вынужденные колебания будут находиться в противофазе по отношению к возмущающей силе.

В выражении (2.51) дробь

$$S_{вА} = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_b^2} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_c^2 - \omega_b^2)}$$

является амплитудой вынужденных колебаний, величина которой зависит только от амплитуды возбуждающей силы F_0 , её круговой частоты ω_b , величины массы m и круговой частоты собственных колебаний. Амплитуда вынужденных колебаний $S_{вА}$ не зависит от начальных условий.

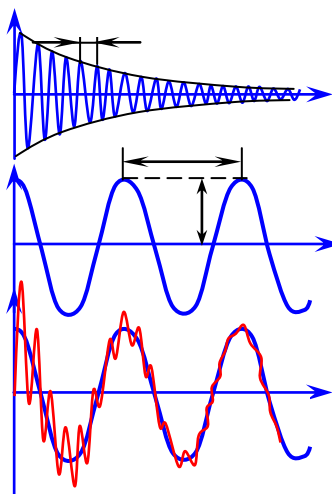


Рис. 2.17. Процесс установления вынужденных колебаний:

- а) – затухающие свободные колебания с круговой частотой ω_c ;
- б) – вынужденные колебания с круговой частотой ω_b ;
- в) – процесс затухания свободных колебаний и установления только вынужденных

Определим изменение амплитуды $S_{вА}$ с изменением круговой частоты ω_b возбуждающей силы F_b . Частота изменения возмущающей силы очень мала ($\omega_b \approx 0$). Подставляя значение $\omega_b = 0$ в уравнение (2.52), получим

$$S_{в0} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_c^2} = \frac{F_0}{m} \frac{m}{c} = \frac{F_0}{c} = S_{ст},$$

то есть амплитуда вынужденных колебаний в этом случае равна статическому перемещению, на которое переместится груз под действием постоянной силы F_0 .

Отношение амплитуды $S_{\text{вА}}$ вынужденных колебаний к статическому перемещению $S_{\text{ст}}$ под действием постоянной силы F_0 называется *коэффициентом динамичности* или *коэффициентом нарастания колебаний*:

$$k_{\text{д}} = \frac{S_{\text{вА}}}{S_{\text{ст}}} = \frac{\omega_{\text{с}}^2}{\omega_{\text{с}}^2 - \omega_{\text{в}}^2} = \frac{1}{\left(\frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_{\text{с}}}\right)^2}.$$

При $\omega_{\text{в}} = 0$ имеем $S_{\text{вА}} = S_{\text{ст}}$ и $k_{\text{д}} = 1$.

2. Случай резонанса. Резонансом называется случай совпадения частот собственных колебаний и возмущающей силы, то есть тогда когда $\omega_{\text{с}} = \omega_{\text{в}}$. При совпадении частот частное решение следует искать в форме

$$s_2 = S_{\text{в}} t \cos(\omega_{\text{в}} t + \beta).$$

Определим производные от s_2

$$\ddot{s} = -2S_{\text{в}} \omega_{\text{в}} \sin(\omega_{\text{в}} t + \beta) - S_{\text{в}} t \omega_{\text{в}}^2 \cos(\omega_{\text{в}} t + \beta)$$

и подставив их вместе с s_2 в (2.46), получим

$$-2S_{\text{в}} \omega_{\text{в}} \sin(\omega_{\text{в}} t + \beta) = f_0 \sin(\omega_{\text{в}} t + \beta).$$

Отсюда $S_{\text{в}} = -f_0/2\omega_{\text{в}}$ и, следовательно,

$$s_2 = -\frac{f_0 t}{2\omega_{\text{в}}} \cos(\omega_{\text{в}} t + \beta) = \frac{f_0 t}{2\omega_{\text{в}}} \sin\left(\omega_{\text{в}} t + \beta - \frac{\pi}{2}\right).$$

Из (2.55) следует, что вынужденные колебания при резонансе запаздывают по фазе от вынуждающей силы на $\pi/2$. Главной особенностью вынужденных колебаний при резонансе является зависимость их амплитуды от времени:

$$S_{\text{вА}} = f_0 \cdot t / 2\omega_{\text{в}}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний нарастает линейно пропорционально времени, что представлено на рис. 2.18.

Рассмотренный случай колебаний при резонансе без сопротивления практически не встречается, так как при движении системы всегда имеются силы сопротивления движению. Установленный теоретический рост амплитуды с течением времени по линейному закону в действительности тоже не наблюдается, амплитуды при резонансе могут достигать больших значений. Резонанс, сопровождающийся нарастанием амплитуды колебаний до больших значений, может стать причиной разрушения конструкции или возникновения опасных напряжений, снижающих срок службы изделия.

Проанализируем зависимость коэффициента динамичности k_d от соотношения частот вынужденных и собственных колебаний ω_b/ω_c . Из (2.54) следует, что коэффициент динамичности зависит только от соотношения частот ω_b/ω_c . Представленная на рис. 2.19 зависимость называется *резонансной кривой* или *амплитудно-частотной характеристикой*.

При малой частоте вынуждающей силы коэффициент динамичности близок к единице. С ростом ω_b значение k_d быстро увеличивается и $\omega_b = \omega_c$ становится теоретически неограниченным, что соответствует резонансу. В зарезонансной зоне, когда $\omega_b > \omega_c$, коэффициент динамичности вновь становится конечным. Следует обратить внимание, что при $\omega_b/\omega_c = 2^{1/2}$ его значение равно единице, а при дальнейшем увеличении этого значения коэффициент динамичности резко падает ниже единицы. Таким образом, когда на тело действует высокочастотная сила, она не способна вызвать большие амплитуды колебаний, то есть механическая система как бы не успевает отзываться на быстрые изменения вынуждающей силы, а тело сохраняет стационарное положение.

Инерционное возбуждение колебаний. В выражении (2.45) в качестве возмущающего фактора была рассмотрена сила, изменяющаяся по гар-

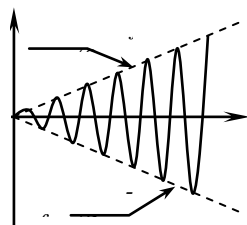


Рис. 2.18. Нарастание колебаний при резонансе

баний практически движется со скоростью течения воды достигая скорости сопротивления

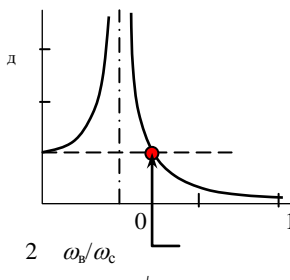


Рис. 2.19. Резонансная кривая при отсутствии сопротивления

моническому закону, с постоянной амплитудой не зависимой от частоты. В инженерной практике чаще бывает по-другому. При вращении неуравновешенного ротора (или коленчатого вала поршневого двигателя) возникает вынуждающая сила

$$F(t) = m_0 \omega_b^2 \rho \sin(\omega_b t + \beta),$$

где m_0 – масса неуравновешенной части ротора; ρ – радиус-вектор неуравновешенной части ротора; ω_b – угловая скорость.

В данном случае амплитуда возмущающей силы $m_0 \omega_b^2 \rho$ пропорциональна квадрату частоты ω_b и уравнение (2.45) в этом случае примет вид

$$m\ddot{s} + cs = m_0 \omega_b^2 \rho \sin(\omega_b t + \beta).$$

Введём обозначения: $F_0 = m_0 \omega_b^2 \rho$, $f_0 = (m_0 \omega_b^2 \rho)/m = \hat{S} \cdot \omega_b^2$,

где $\hat{S} = (m_0 \cdot \rho)/m$, имеет размерность перемещения.

Амплитуда вынужденных колебаний согласно (2.52) равна

$$S_{вА} = \frac{\hat{S} \omega_b^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2} = \hat{S} k_{д.ин},$$

где $k_{д.ин}$ – коэффициент динамичности при инерционном возбуждении колебаний,

$$k_{д.ин} = \frac{\omega_b^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2}.$$

Коэффициент динамичности $k_{д.ин}$ показывает, во сколько раз амплитуда колебаний при инерционном возбуждении с конечной частотой ω_b отличается от амплитуды вынужденных колебаний бесконечно большой частоты $(\omega_b/\omega_c) \rightarrow \infty$. При нулевой частоте $k_{д.ин} = 0$, поскольку при этом отсутствует инерционное возбуждение. При $(\omega_b/\omega_c) \rightarrow \infty$ коэффициент динамичности $k_{д.ин}$ (рис. 2.20).

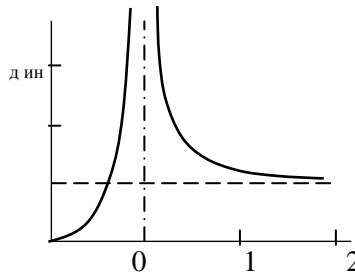


Рис. 2.20. Резонансная кривая при инерционном возбуждении

2.3.2. Вынужденные колебания при наличии линейного вязкого сопротивления

Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{s} + h\dot{s} + cs = F_0 \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Или, деля на m , получим

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \omega_c^2 s = f_0 \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Полученное уравнение является неоднородным уравнением, его решение состоит из двух решений: s_1 – общего решения однородного уравнения и s_2 – частного решения неоднородного уравнения. То есть общее решение $s = s_1 + s_2$.

Общее решение s_1 однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \omega_c^2 s = 0$$

в зависимости от соотношения между величинами ω_c и ε выражается в одной из трёх форм:

при $\varepsilon < \omega_c$, $s_1 = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t)$, где $\omega_3 = (\omega_c^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$;

при $\varepsilon = \omega_c$, $s_1 = e^{-\varepsilon t}(C_1 + C_2 \cdot t)$;

при $\varepsilon > \omega_c$, $s_1 = e^{-\varepsilon t}(C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt})$, где $k = (\varepsilon^2 - \omega_c^2)^{1/2}$.

Известно, что в любом из этих случаев, из-за наличия множителя $e^{-\varepsilon t}$, s_1 стремится к нулю, то есть колебания затухают. Следовательно, при наличии линейного сопротивления по истечении достаточного времени общее вынужденное движение s не существенно отличается от вынужденных колебаний и можно считать, что $s = s_2$.

Частное решение уравнения (2.58) ищем в виде

$$s_2 = S_b \sin(\omega_b t + \beta - \gamma).$$

Постоянные S_b и γ подлежат определению путём подстановки в уравнение (2.58) s_2 и её производных:

$$\dot{s}_2 = S_b \omega_b \cos(\omega_b t + \beta - \gamma), \quad \ddot{s}_2 = -S_b \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \beta - \gamma).$$

Преобразуем правую часть выражения (2.58) так, чтобы в неё входили косинус и синус такого же аргумента, что и функции s_2 . Для этого к фазе правой части следует прибавить и вычесть величину γ и раскрыть синус суммы:

$$\begin{aligned}
 f_0 \sin(\omega_b t + \beta) &= f_0 \sin[(\omega_b t + \beta - \gamma) + \gamma] = \\
 &= f_0 \sin \gamma \cos(\omega_b t + \beta - \gamma) + f_0 \cos \gamma \sin(\omega_b t + \beta - \gamma).
 \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (2.58) и соберём члены при $\sin(\omega_b t + \beta - \gamma)$ и $\cos(\omega_b t + \beta - \gamma)$. Получим тождество:

$$\begin{aligned}
 [S_b(\omega_c^2 - \omega_b^2) - f_0 \cos \gamma] \sin(\omega_b t + \beta - \gamma) + \\
 + [2S_b \varepsilon \omega_b - f_0 \sin \gamma] \cos(\omega_b t + \beta - \gamma) \equiv 0.
 \end{aligned}$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равняются нулю одновременно, то тождество может выполняться только тогда, когда каждое из постоянных в квадратных скобках равно нулю, то есть

$$\begin{aligned}
 S_b(\omega_c^2 - \omega_b^2) &= f_0 \cos \gamma, \\
 2S_b \varepsilon \omega_b &= f_0 \sin \gamma.
 \end{aligned}$$

Для определения амплитуды вынужденных колебаний S_b возведём данные уравнения в квадрат и сложим:

$$S_b^2 [(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2] = f_0^2 (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma).$$

Откуда

$$S_b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}}.$$

Сдвиг фаз γ определится как $\operatorname{tg} \gamma = 2\varepsilon \omega_b / (\omega_c^2 - \omega_b^2)$. Окончательная форма выражения вынужденных колебаний

$$s_2 = S_b \sin(\omega_b t + \beta - \gamma). \quad (2.60)$$

Согласно уравнению (2.60), установившиеся вынужденные колебания характеризуются следующими основными свойствами:

- эти колебания являются незатухающими;
- эти колебания не зависят от начальных условий;
- частота колебаний равняется частоте вынуждающей силы;
- колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину γ .

Основные параметры установившихся вынужденных колебаний – амплитуда S_b и сдвиг фазы γ зависят от соотношения между частотами ω_b и ω_c и коэффициента затухания (демпфирования) ε . Построим и про-

ведём анализ так называемых амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик.

Разделив числитель и знаменатель амплитуды (2.59) на ω_c^2 , и учитывая, что $f_0 = F_0/m$; $\omega_c^2 = c/m$; $F_0/c = S_{ст}$ получим:

$$S_B = \frac{F_0}{m} \frac{m}{c} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2 \omega_B^2}{\omega_c^4}}} = S_{ст} \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}},$$

или $S_B = S_{ст} k_d$; откуда коэффициент динамичности равняется

$$k_d = \frac{S_B}{S_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}},$$

где d – безразмерный коэффициент затухания, $d = 2\varepsilon/\omega_c$;

z – коэффициент расстройки, $z = \omega_B/\omega_c$.

На рис. 2.21 показана амплитудно-частотная характеристика системы при различных величинах безразмерного коэффициента затухания d . Амплитудно-частотная характеристика системы представляет собой зависимость коэффициента динамичности k_d от коэффициента расстройки z , т.е. $k_d = f(z)$.

При изменении z от 0 до ∞ коэффициент динамичности k_d изменяется от 1 до 0, достигая максимума вблизи резонанса при значении z , несколько меньшем единицы, что объясняется сдвигом фаз возмущающей

силы и вынужденных колебаний γ (рис. 2.22).

Сдвиг фаз определяется по выра-

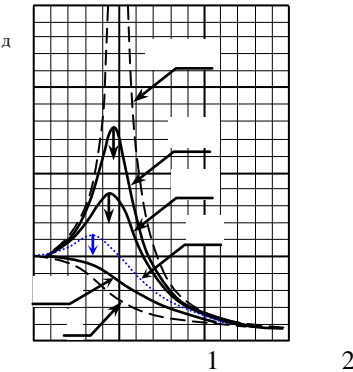


Рис. 2.21. Амплитудно-частотная характеристика

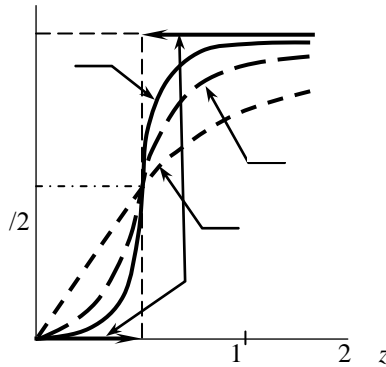


Рис. 2.22. Фазо-частотная характеристика

жению

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\varepsilon \omega_{\text{в}}}{\omega_{\text{с}}^2 - \omega_{\text{в}}^2} = \frac{2\varepsilon}{\omega_{\text{с}}} \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_{\text{с}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{в}}^2}{\omega_{\text{с}}^2}\right)} = \frac{2\varepsilon}{\omega_{\text{с}}} \frac{\omega_{\text{в}}}{\omega_{\text{с}}(1 - z^2)},$$

т.е. величина γ также является функцией коэффициента расстройки z или соотношения частот вынужденных и собственных колебаний ($\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{с}}$).

При изменении z от 0 до ∞ величина γ изменяется от 1 до π , при резонансе $\omega_{\text{в}} = \omega_{\text{с}}$ величина $\gamma = \pi/2$.

Из выражения (2.62) следует, что:

$$k_{\text{д}} = 1 \text{ при } \omega_{\text{в}} = 0, \text{ режим статики;}$$

$$k_{\text{д}} = 1/d \text{ при } \omega_{\text{в}} = \omega_{\text{с}}, \text{ режим резонанса;}$$

$$k_{\text{д}} \rightarrow 0 \text{ при } \omega_{\text{в}} \rightarrow \infty.$$

Из амплитудно-частотной характеристики следует, что когда угловая частота вынужденных колебаний мала по сравнению с собственной угловой частотой ($\omega_{\text{в}} \ll \omega_{\text{с}}$), коэффициент динамичности близок к единице. Когда угловая частота вынужденных колебаний велика по сравнению с угловой частотой собственных колебаний ($\omega_{\text{в}} \gg \omega_{\text{с}}$), величина коэффициента динамичности близка к нулю, независимо от безразмерного коэффициента затухания d . Откуда следует, что демпфирование вне зоны резонанса ($\omega_{\text{в}} \ll \omega_{\text{с}}$ и $\omega_{\text{в}} \gg \omega_{\text{с}}$) оказывает незначительное влияние на величину коэффициента динамичности $k_{\text{д}}$. Поэтому в практических расчётах вне зоны резонанса вполне допустимо не учитывать демпфирование.

В тоже время при малых значениях $d < 1$, вязкое демпфирование оказывает значительное влияние на величину коэффициента динамичности в окрестности резонанса ($1 < z < 1,5$).

При $d = 1$ и $z = 1$ коэффициент динамичности равен $k_{\text{д}} = 1$.

При $d \geq 2^{1/2}$ ($\approx 1,41$) коэффициент динамичности имеет максимальное значение, равное 1, соответствующее $z = 0$. При $z > 0$ коэффициент динамичности $k_{\text{д}} < 1$. Это означает, что амплитуда вынужденных колебаний не превышает статического смещения.

Случай инерционного возбуждения колебаний. Рассмотрим случай, когда на одну массовую систему с вязким демпфированием действует инерционная сила от двух неуравновешенных эксцентриков массой m_1 . Такая система показана на рис. 2.23.

Эксцентрики m_1 вращаются в противоположные стороны. Центробежные силы инерции F_1 и F_2 по абсолютной величине равны, но противоположно направлены $F_1 = -F_2 = m_1 \rho \omega_b^2$. В вертикальном направлении эти силы складываются, а в горизонтальном уравновешивают друг друга.

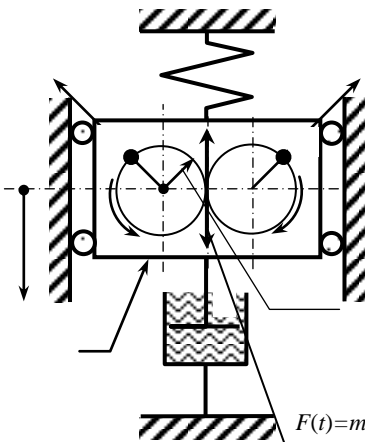


Рис. 2.23. Схема инерционного возбуждения колебаний в вертикальном направлении:

$$F_1 = m_1 \rho \omega_b^2; F_2 = -m_1 \rho \omega_b^2;$$

m_1 – масса эксцентрика;

ρ – радиус вращения эксцентриков;

ω_b – круговая частота вращения эксцентриков;

m, c, h – соответственно масса, жёсткость, вязкое демпфирование колеблющейся системы

Суммарная сила действует только в вертикальном направлении и изменяется по гармоническому закону

$$F(t) = m_0 \rho \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \beta),$$

где $m_0 = 2m_1$; β – начальная фаза.

Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{s} + h\dot{s} + cs = m_0 \rho \omega_b^2 \sin(\omega_b t + \beta).$$

Как было показано ранее (2.56), в этом случае

$$F_0 = m_0 \rho \omega_b^2, f_0 = (m_0 \rho \omega_b^2)/m = \hat{S} \cdot \omega_b^2,$$

где $\hat{S} = (m_0 \cdot \rho) / m$.

Амплитуда вынужденных колебаний согласно (2.59) будет равна

$$S_{\text{вА}} = \frac{\hat{S} \omega_b^2}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}} = \hat{S} k_{\text{дин}}, \quad (2.64)$$

откуда коэффициент динамичности при инерционном возбуждении

$$k_{\text{дин}} = \frac{\omega_b^2}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}} = \frac{z^2}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}}.$$

Заменим коэффициент расстройки z на обратную ему величину $\check{z} = \omega_c / \omega_b$

$$k_{\text{д.ин}} = \frac{1/\bar{z}^2}{\sqrt{(1-1/\bar{z}^2)^2 + d^2/\bar{z}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\bar{z}^2)^2 + d^2\bar{z}^2}}.$$

Полученная зависимость полностью совпадает по форме с выражением $k_{\text{д}}$ из (2.62).

Следовательно

$k_{\text{д.ин}} = 0$ при $z = 0$, или $\check{z} \rightarrow \infty$;

$k_{\text{д.ин}} = 1/d$ при $z = 1$, или $\check{z} = 1$;

$k_{\text{д.ин}} = 1$ при $z \rightarrow \infty$, или $\check{z} \rightarrow 0$.

На рис. 2.24 представлена амплитудно-частотная характеристика при инерционном возбуждении колебаний. Проведём анализ зависимости $k_{\text{д.ин}}$ от z . Из выражения (2.65) следует, что максимальному значению $k_{\text{д.ин}}$ должно соответствовать минимальное значение знаменателя. Вычислим производные от подкоренного выражения

$$y(\check{z}) = (1 - \check{z}^2)^2 + d^2 \check{z}^2;$$

$$y'(\check{z}) = -4\check{z}(1 - \check{z}^2) + 2d^2 \check{z} = 2\check{z}(d^2 - 2 + 2\check{z}^2);$$

$$y''(\check{z}) = 2(d^2 - 2 + 2\check{z}^2) + 8\check{z}^2 = 12\check{z}^2 - 4(1 - d^2/2).$$

Максимальное значение коэффициента динамичности получим, приравняв к нулю $y'(\check{z})$. Соответственно получим два значения \check{z} :

$$\check{z}_1 = 0; \quad \check{z}_2 = (1 - d^2/2)^{1/2}.$$

Подставляя значение \check{z}_2 в выражение (2.65), получим

$$k_{\text{д.ин.мак}}(z_2) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{2}\right)^2 + d^2 - \frac{d^4}{2}}} = \frac{1}{d\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}}.$$

При отсутствии демпфирования в системе ($d = 0$) максимальное значение $k_{\text{д.ин.мак}}$ соответствует $z = 1$.

При $d = \sqrt{2}$ резонанс не наступает, а $k_{\text{д.ин.мак}}$ не превосходит значение 1.

При $d < \sqrt{2}$ максимальное значение $k_{\text{д.ин.мак}}$ имеет место при $\check{z} = (1 - d^2/2)^{1/2} < 1$ или $z = 1/(1 - d^2/2)^{1/2} > 1$. Откуда следует вывод, что при увеличении демпфирования в системе максимальное значение $k_{\text{д.ин}}$ смещается

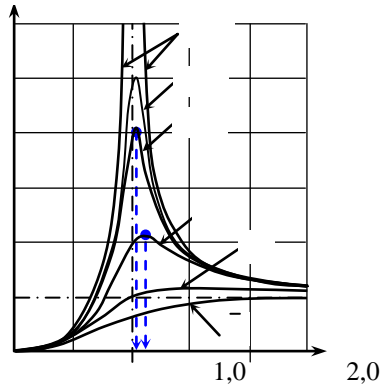


Рис. 2. 24. Амплитудно-частотная характеристика при инерционном возбуждении колебаний

вправо от $z = 1$, то есть резонанс возникает при $z > 1$, что и демонстрирует рис. 2.24.

Фазо-частотная характеристика не зависит от способа возбуждения колебаний.

2.4. Биения

Явление биений могут проявляться в нескольких случаях.

Рассмотрим три случая возникновения биений:

– частота вынужденных колебаний ω_b весьма мало отличается от частоты собственных колебаний, вязкое демпфирование в системе отсутствует;

– частота вынужденных колебаний ω_b приблизительно равна частоте затухающих колебаний ω_s , при наличии малого вязкого демпфирования в системе;

– внешняя сила, вызывающая вынужденные колебания состоит из двух слагаемых с частотами ω_{b1} и ω_{b2} весьма близкими друг к другу.

Случай 1. $\omega_b \approx \omega_c$; $h = 0$. Исходя из этого, полагаем, что колебания происходят в области, весьма близкой к резонансу.

Можно принять, что

$$\left. \begin{aligned} \omega_b + \omega_c &\approx 2\omega_c; \quad \omega_b / \omega_c \approx 1; \\ \omega_c^2 - \omega_b^2 &= (\omega_c + \omega_b)(\omega_c - \omega_b) \approx 2\omega_c(\omega_c - \omega_b). \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Если принять для случая резонанса начальные условия при $t = 0$; $S_0 = 0$; $\dot{S}_0 = 0$ то произвольные постоянные C_1 и C_2 будут равны

$$C_1 = -\frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \sin \beta; \quad C_2 = -\frac{f_0 \omega_b}{\omega_c(\omega_c^2 - \omega_b^2)} \cos \beta.$$

Подставляя данные значения в (2.49), получим

$$s = -\frac{f_0 \cos \omega_c t \sin \beta}{\omega_c^2 - \omega_b^2} - \frac{f_0 \omega_b \sin \omega_c t \cos \beta}{\omega_c(\omega_c^2 - \omega_b^2)} + \frac{f_0 \sin(\omega_b t + \beta)}{\omega_c^2 - \omega_b^2}$$

или

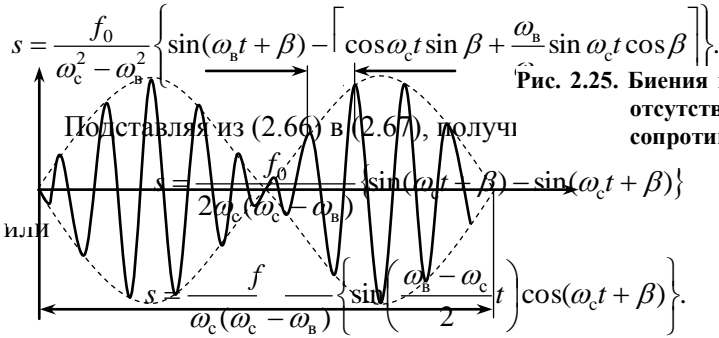


Рис. 2.25. Биения в случае отсутствия сил сопротивления

Данное уравнение описывает колебания системы в случае биений. Амплитуда при биениях равна

$$S_B(t) = \frac{f_0}{\omega_c(\omega_c - \omega_B)} \sin \frac{\omega_B - \omega_c}{2} t.$$

Исходя из последнего выражения следует, что амплитуда изменяется во времени. Период изменения равен

$$T_0 = \frac{4\pi}{\omega_B - \omega_c}.$$

Период вынужденных колебаний

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}.$$

Так как $\omega_B \approx \omega_c$, то $T_0 \gg T_B$. Графически такие колебания показаны на рис. 2.25.

Случай 2. $\omega_B \approx \omega_c = (\omega_c^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$; при этом $\varepsilon < \omega_c$.

Учитывая затухающие колебания и полагая $\beta = 0$, решение уравнения (2.58) будет

$$s = e^{-\varepsilon t}(C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t) + S_B \sin \omega_B t,$$

где S_B исходя из (2.59) и подстановки в него (2.66) получим

$$S_B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_B^2}} \approx \frac{f_0}{\varepsilon \sqrt{4\omega_c^2 - 3\varepsilon^2}}.$$



Рис. 2.26. Биения в случае малого сопротивления колебаниям (2.69)
 ощие вынужденные колебания системы, второй – затухающие колебания биений с амплитудой

$$S_{BA}(t) = 2S_B e^{-\varepsilon t} \sin \frac{\omega_B - \omega_3}{2} t$$

и периодом $T_B = 2\pi/\omega_B$.

Период изменения амплитуды биений $S_{BA}(t)$

$$T_B = 4\pi/(\omega_B - \omega_3) \gg T_B.$$

Таким образом, в реальных системах, где $\varepsilon \neq 0$ колебания биений, вызываемые возмущающей силой, с частотой, близкой к частоте затухающих колебаний, быстро затухают (рис. 2.26). С практической точки зрения учёт биений в этом случае возможен только в начале движения системы, т.е. в переходный период, когда наблюдается неустановившееся состояние колебаний. При установившемся режиме, который наступает тем быстрее, чем больше сопротивление $e^{-\varepsilon t} \rightarrow 0$, из (2.69) получим уравнение установившихся колебаний

$$s = S_B \sin \omega_B t = S_B \sin \omega_3 t.$$

Случай 3. В реальных системах могут происходить незатухающие биения при наличии возмущающей силы, состоящей из нескольких слагающих с частотами ω_{b1} и ω_{b2} весьма близкими друг к другу (различие составляет 1÷2%). Механизм образования биений показан на рис. 2.27. Колебание точки происходит от движений, изменяющихся по закону $S_{b1}\sin\omega_{b1}t$ с периодом T_{b1} (рис. 2.27, а) и $S_{b2}\sin\omega_{b2}t$ с периодом T_{b2} (рис. 2.27, б).

Уравнение вынужденных колебаний системы в этом случае имеет вид

$$s = S_{b1}\sin(\omega_{b1}t + \beta_1) + S_{b2}\sin(\omega_{b2}t + \beta_2), \quad (2.70)$$

где β_1 и β_2 – начальные сдвиги фаз колебаний.

Введём обозначения:

$$\omega_{b2} - \omega_{b1} = \Delta\omega; \quad \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta.$$

С учётом обозначений, уравнение (2.70) принимает следующий вид:

$$s = S_{b1}\sin(\omega_{b1} + \beta_1) + S_{b2}\sin\{(\omega_{b1}t + \beta_1) + (\Delta\omega t + \Delta\beta)\} = \\ = \{S_{b1} + S_{b2}\cos(\Delta\omega t + \Delta\beta)\}\sin(\omega_{b1}t + \beta_1) + S_{b2}\sin(\Delta\omega t + \Delta\beta)\cos(\omega_{b1}t + \beta_1).$$

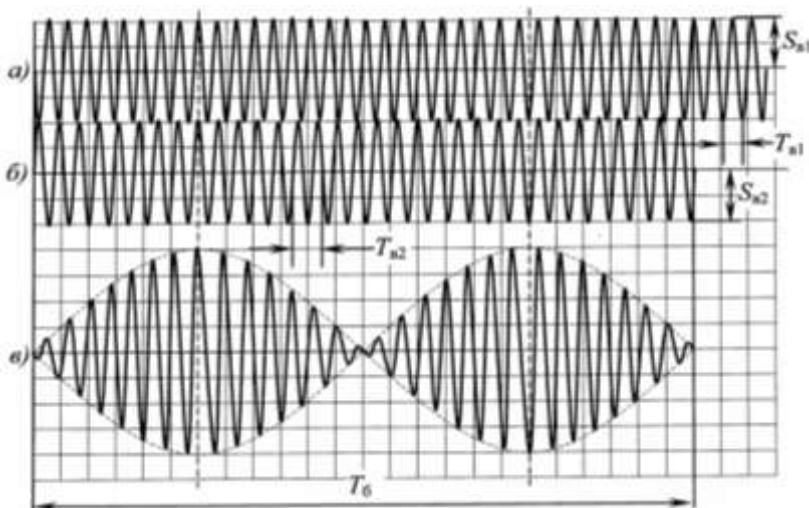


Рис. 2.27. Незатухающие колебания биений:

- а) – колебания с периодом T_{b1} и амплитудой S_{b1} ;
- б) – колебания с периодом T_{b2} и амплитудой S_{b2} ;
- в) – суммарные колебания;
- $T_б$ – период биения

Принимая для сокращения обозначения

$$\begin{aligned} S(t)\cos\psi &= S_{B1} + S_{B2}\cos(\Delta\omega t + \Delta\beta), \\ S(t)\sin\psi &= S_{B2}\sin(\Delta\omega t + \Delta\beta). \end{aligned}$$

Откуда

$$s = S(t)[\cos\psi \sin(\omega_{B1}t + \beta_1) + \sin\psi \cos(\omega_{B1}t + \beta_1)]$$

или

$$s = S(t)\sin(\omega_{B1}t + \beta_1 + \psi), \quad (2.71)$$

где

$$\begin{aligned} S(t) &= \sqrt{S_{B1}^2 + S_{B2}^2 + 2S_{B1}S_{B2}\cos(\Delta\omega t + \Delta\beta)}, \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{S_{B2}\sin(\Delta\omega t + \Delta\beta)}{S_{B1} + S_{B2}\cos(\Delta\omega t + \Delta\beta)}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.71) выражает незатухающие колебания, носящие название биений. Эти колебания характеризуются суммарной амплитудой $S(t)$, которая медленно изменяется с течением времени. В частном случае при $S_{B1} = S_{B2} = S_B$ и $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ суммарная амплитуда изменяется от 0 до $S = 2S_B$ или

$$S(t) = 2S_B\cos(\Delta\omega/2)t; \quad \psi = (\Delta\omega/2)t.$$

Или окончательно будем иметь

$$s = 2S\cos\left(\frac{\omega_{B2} - \omega_{B1}}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_{B2} + \omega_{B1}}{2}t + \beta\right). \quad (2.72)$$

Значение под знаком косинуса выражает круговую частоту биений. При этом *период биений* T_6 является большей величиной по сравнению с периодами T_{B1} и T_{B2} , поскольку $\Delta\omega$ есть малая величина. Период биений равняется

$$T_6 = \frac{4\pi}{\omega_{B2} - \omega_{B1}}. \quad (2.73)$$

Под знаком синуса имеем круговую частоту вынужденных колебаний в случае биений. Эта частота равна полу сумме вынужденных частот. Период вынужденных колебаний равен

$$T_B = \frac{4\pi}{\omega_{B2} + \omega_{B1}}. \quad (2.74)$$

В других случаях амплитуда $S(t)$ медленно изменяется между крайними значениями $(S_{в1} + S_{в2})$ и $(S_{в1} - S_{в2})$.

2.5. Механический импеданс

Механическим импедансом (сопротивлением) называют отношение комплексной амплитуды гармонической *вынуждающей силы* к комплексной амплитуде *виброскорости*. Кроме этого отношения в вибрационной технике рассматривают также отношения силы и *виброперемещения*, *виброускорения*, а также величины им обратные. Размерности и наименования вышеприведённых параметров сведены в табл. 2.1.

Т а б л и ц а 2.1

Параметры механического импеданса (сопротивления) соответственно по скорости v , перемещению s и ускорению w

Параметры механического сопротивления колебаниям		Формула	Размерность
1	Механический импеданс (полное механическое сопротивление)	$Z_v = F_a / \dot{S}_a$	$\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$
	Подвижность	$Z'_v = \dot{S}_a / F_a$	$\text{м} \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$
2	Комплексная жёсткость	$Z_s = F_a / S_a$	$\text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$
	Комплексная податливость	$Z'_s = S_a / F_a$	$\text{м} \cdot \text{Н}^{-1}$
3	Комплексная масса (условная масса)	$Z_w = F_a / \ddot{S}_a$	кг
	Восприимчивость	$Z'_w = \ddot{S}_a / F_a$	кг^{-1}

Запишем уравнение вынужденных колебаний при наличии линейного вязкого сопротивления (2.58) в комплексной форме

$$m\ddot{s} + h\dot{s} + cs = F_a e^{i\omega_b t},$$

где e – основание натурального логарифма;

$i^2 = -1$; F_a – амплитуда возбуждающей силы.

Такая запись возможна исходя из равенства Эйлера

$$F_a e^{i\omega_b t} = F_a (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

Решение уравнения (2.75) ищется в виде

$$s = S_a e^{i\omega_b t},$$

где $|S_a|$ – амплитуда колебаний.

Амплитуда колебательной скорости равна модулю комплексной величины

$$\dot{S}_a = i\omega_b S_a.$$

Из (2.76) колебательная скорость и колебательное ускорение будут

$$\dot{s} = i\omega_b S_a e^{i\omega_b t} = i\omega_b s; \quad u \quad \ddot{s} = i\omega_b S_a e^{i\omega_b t} i\omega_b = -\omega_b^2 s.$$

В выражении колебательной скорости i – означает поворот вектора на 90° .

Важный параметр, характеризующий виброактивность системы – его колебательная скорость; она определяет величину энергии колебаний механической системы. Определим колебательную скорость, для этого выразим колебательное смещение и ускорение через колебательную скорость. Из формул (2.78) с учётом (2.77) имеем

$$s = \frac{\dot{s}}{i\omega_b} = -i \frac{\dot{s}}{\omega_b} = -i \frac{\dot{S}_a e^{i\omega_b t}}{\omega_b};$$

$$\ddot{s} = i\omega_b \dot{s} = i\omega_b \dot{S}_a e^{i\omega_b t}.$$

После подстановки в формулу (2.75) и сокращения получим

$$i\omega_b m \dot{S}_a + h \dot{S}_a - i \frac{c}{\omega_b} \dot{S}_a = F_a.$$

Отсюда амплитуда колебательной скорости равна

$$\dot{S}_a = \frac{F_a}{i\omega_b m + h - i \frac{c}{\omega_b}} = \frac{F_a}{i \left(\omega_b m - \frac{c}{\omega_b} \right) + h}.$$

Так как по определению полное механическое сопротивление или механический импеданс есть отношение

$$Z_v = \frac{F_a}{\dot{S}_a},$$

то выражение в знаменателе формулы (2.79) и есть механический импеданс системы.

$$Z_v = i \left(\omega_B m - \frac{c}{\omega_B} \right) + h.$$

Модуль импеданса равен

$$|Z_v| = \sqrt{\left(\omega_B m - \frac{c}{\omega_B} \right)^2 + h^2}.$$

Из выражения (2.79) следует, что с увеличением модуля механического сопротивления при неизменной амплитуде возбуждающей силы колебательная скорость падает.

Полное механическое сопротивление (2.80) можно разложить на составляющие:

$$Z_v = Z_{vm} + Z_{vc} + Z_{vh},$$

где $Z_{vm} = i\omega_B m$ – импеданс массы, прямо пропорционален вынуждающей частоте;

$Z_{vc} = ic/\omega_B$ – импеданс упругости (жесткости), обратно пропорционален вынуждающей частоте;

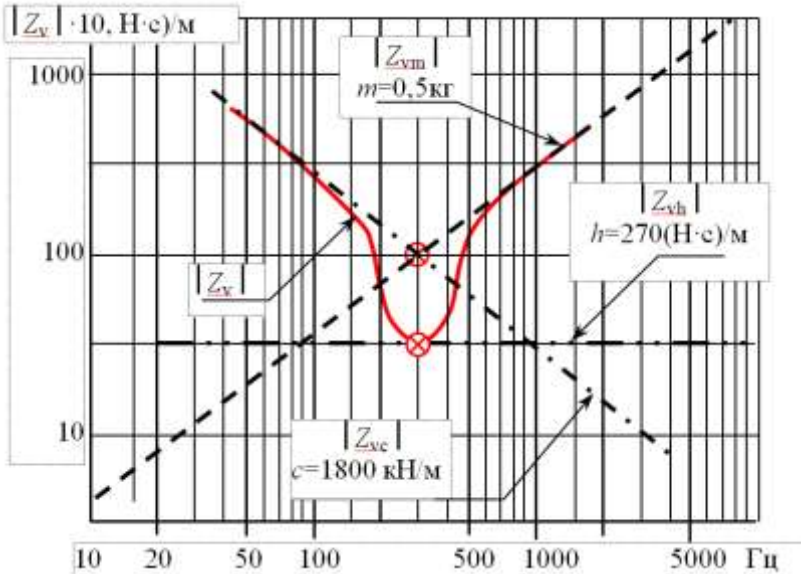
$Z_{vh} = h$ – импеданс линейного вязкого сопротивления не зависит от вынуждающей частоты.

Исследуем зависимость модуля механического сопротивления от возмущающей частоты для системы, состоящей из массы, упругости и линейного вязкого сопротивления. Данная зависимость заимствована из [10] и представлена на рис. 2.28.

С повышением вынуждающей частоты модуль $|Z_{vm}|$ возрастает, а $|Z_{vc}|$ падает линейно. Для системы с параметрами [$m = 0,5$ кг; $h = 270$ (Н·с)/м; $c = 1800$ кН/м] наблюдается резкое уменьшение полного механического сопротивления при частоте 300 Гц. Или, другими словами, колебательная система при этой частоте входит в резонанс. При этой частоте модуль импеданса массы $|Z_{vm}|$ равен модулю импеданса упругости $|Z_{vc}|$, а поскольку в формуле (2.80) они имеют разные знаки, то в сумме дают нуль. Полное же механическое сопротивление будет минимальным и соответственно определяется только модулем импеданса вязкого сопротивления $|Z_{vh}|$. В дорезонансной зоне полный модуль механического импеданса определяется модулем импеданса упругости $|Z_{vc}|$ то есть возму-

щающая сила преодолевает силу упругости системы, а в зарезонансной зоне соответственно модулем импеданса массы $|Z_{vm}|$ или преодолевает силу инерции массы системы.

В некоторых случаях удобнее пользоваться величиной обратной механическому сопротивлению. Её называют подвижностью и обозначают $Z'_v = \dot{S}_a / F_a$, размерность показана в табл. 2.1.



В инженерной практике кроме сопротивления системы колебательной скорости Z_v

Рис. 2.28. Полный модуль механического импеданса и его соотношения с сопротивлением системы колебательному ускорению или условной массе Z_w :

$$Z_w = \frac{F_a}{\ddot{S}_a} = m - \frac{c}{\omega_B^2} - i \frac{h}{\omega_B}. \quad (2.82)$$

Величина обратная условной массе $Z'_w = \ddot{S}_a / F_a$ носит название восприимчивости.

Сопротивление системы колебательному перемещению носит название комплексной жёсткости

$$Z_s = F_a / S_a = c + i \omega_B h - m \omega_B^2. \quad (2.83)$$

Величина обратная комплексной жёсткости $Z'_s = S_a / F_a$ носит название комплексной податливости.

2.6. Основы виброзащиты

Под *виброзащитой* будем понимать совокупность методов и средств для уменьшения вредного воздействия вибрации на человека, приборы, механизмы и перевозимые грузы.

Рассмотрим систему, состоящую из двух объектов – *источника колебаний И* и *объекта виброзащиты О* (рис. 2.29).

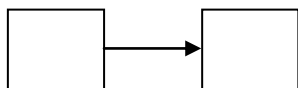


Рис. 2.29. Схема виброзащиты:

И – источник колебаний; *О* – объект виброзащиты; *С* – связи

Источник виброзащиты и объект виброзащиты соединены между собой *связями С*.

В источнике происходят физические процессы, вызывающие колебания (вибрации). Цель виброзащиты – снизить колебания (вибрации) объекта. В связях возникают силы, передающиеся от источника к объекту, их называют *динамическими воздействиями*.

Применительно к автомобилю в качестве источника колебаний может рассматриваться силовой агрегат (двигатель со сцеплением и коробкой передач), связями будет подвеска силового агрегата, а объектом кузов легкового автомобиля (место водителя и пассажиров). Или источником являются неровности дороги, объектом – груз, перевозимый грузовым автомобилем, а связями будут колеса, рессоры – подвеска ходовой части автомобиля.

Воздействия могут быть как *динамические*, так и *кинематические*. Принято их объединять общим термином – *механические воздействия*.

Влияние механических воздействий на технические объекты и человека. Наиболее опасными для технических объектов оказываются *вибрационные воздействия*. Вибрации приводят к накоплению повреждений в материале и появлению усталостных трещин и разрушений. Вибрации вызывают малые относительные смещения неподвижных соединений, приводят к ослаблению усилий затяжки болтового соединения, изменению жёсткости, повышенному износу и возможности фреттинг-коррозии.

Механические воздействия могут вызвать как разрушения, так и отказы машин, приборов и аппаратуры. Способность объектов не разру-

шаться при механических воздействиях называется *вибропрочностью*, а способность нормально функционировать - *виброустойчивостью*. Таким образом, цель виброзащиты технических объектов – повышение их вибропрочности и виброустойчивости.

Длительное воздействие вибраций нарушает нормальное состояние человека. Особенно неприятны для человека высокочастотные вибрации и колебания с частотой, близкой к частотам собственных колебаний отдельных органов человека. Колебания с частотой 3÷11 Гц вызывают резонансные колебания всего человеческого тела и отдельных его частей. Частота 3÷5 Гц вызывает расстройство вестибулярного аппарата и «морскую болезнь». Интенсивные колебания в области звуковых частот (20÷16000 Гц) могут вызвать вибрационную болезнь. Международная организация по стандартизации (ИСО) установила предельно допустимые нормы вибраций на рабочем месте, а также предельно допустимые нормы вибраций транспортных средств. В России предельно допустимые нормы вибраций регламентируются специальными техническими регламентами.

Основные методы виброзащиты. Уменьшение интенсивности колебаний объекта может быть достигнуто тремя способами:

1. *Снижением виброактивности самого источника.*
2. *Применением внутренней виброзащиты объекта.*

3. *Виброизоляцией объекта*, то есть установкой виброизоляторов между источником и объектом.

Снижение виброактивности источника. Возмущающие факторы подразделяются на две группы. К первой относятся сами рабочие процессы функционирования объекта: процессы горения в двигателях внутреннего сгорания, процессы взаимодействия жидкости или газа с лопатками турбин, пульсацию жидкости или газа в трубопроводах. Сюда относятся процессы трения в кинематических парах, а так же удары, связанные с перекладками в зазорах кинематических, например, перекладка поршня. Снижение виброактивности этих факторов связано с изменением параметров физико-химических процессов или конструкций специфичных для каждого объекта.

Вторая группа возмущающих факторов связана с движущимися телами, это как внутренняя неуравновешенность элементов объекта, так и внешняя – дебалансы вращающихся и возвратно-поступательно движущихся деталей.

Внутренняя виброзащита объекта. В первую очередь необходимо устранить резонансные явления в объекте. Второй способ состоит в применении *демпфирования* объекта, т.е. использования устройств, называемых *демпферами*. Из дополнительных устройств применяют *динамические гасители*.

Виброизоляция объекта. Действие виброизоляции сводится к *ослаблению связей* между источником и объектом; при этом уменьшаются динамические воздействия, передаваемые объекту.

Эффективность виброзащитных устройств. Демпферы, динамические гасители и виброизоляторы образуют в совокупности виброзащитные устройства. Они делятся на *пассивные* и *активные*. Пассивными называют устройства, состоящие из инерционных, упругих и диссипативных элементов. Активными называют устройства, содержащие дополнительные независимые источники энергии и, как правило, управляемые.

Эффективность виброзащитных устройств принято оценивать отношением величины параметра колебаний объекта при применении виброзащитного устройства к величине того же параметра при отсутствии виброзащиты.

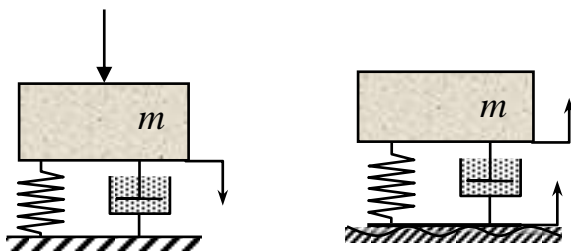
Рассмотрим два случая виброзащиты:

1. Снижение вибрации от источника на фундамент машины.

2. Снижение вредного воздействия вибраций на пассажиров, груз со стороны, например, дороги, возникающие при транспортировке.

В первом случае возмущающая сила приложена непосредственно к телу (рис. 2.30, *а*) – силовое возбуждение колебаний, во втором (рис. 2.30, *б*) имеет место кинематическое возбуждение колебаний, например, из-за неровностей дороги.

Как правило, станки, электрические двигатели, силовые агрегаты автомобилей устанавливают на основание (фундамент, раму) через амортизаторы специальной конструкции. Амортизаторы могут быть резиновыми или резинометаллическими, обладающими упругостью и большим внутренним неупругим сопротивлением. Данные амортизаторы можно привести к пружине жёсткостью c и демпферу с коэффициентом вязкого сопротивления h (рис. 2.30, *а*).



При силовом возбуждении задача виброзащиты - минимальное воздействие на фундамент.

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}_c + h\dot{x}_c + cx_c = F(t),$$

где x_c – перемещение тела относительно положения статического равновесия;

h – коэффициент вязкого сопротивления в материале пружины или демпфера (например, амортизатор автомобиля);

c – жёсткость пружины подвески.

Считаем, что возмущающая сила изменяется по гармоническому закону.

Частное решение уравнения (2.84) ищем в виде комплексных амплитуд

$$x_c = X_a e^{i\omega_b t},$$

где X_a – амплитуда перемещения;

ω_b – круговая частота вынужденных колебаний.

Поскольку масса воздействует на основание посредством жёсткости c и демпфера h , динамическое воздействие на фундамент будет равно

Продифференцировав $x_c(t)$ дважды и подставив в уравнение (2.84) и (2.85), получим

$$F(t) = (-m\omega_b^2 + ih\omega_b + c)X_a e^{i\omega_b t};$$

$$R(t) = (ih\omega_b + c)X_a e^{i\omega_b t}.$$

Из последних выражений получим отношение воздействия на фундамент к вынуждающей силе

$$\frac{R(t)}{F(t)} = \frac{(ih\omega_b + c)}{(c - m\omega_b^2 + ih\omega_b)}.$$

Поделив числитель и знаменатель на m и учитывая ранее введенные обозначения $\omega_c^2 = c/m$; $2\varepsilon = h/m$, окончательно получим

$$\frac{R(t)}{F(t)} = \frac{(\omega_c^2 + 2\varepsilon i \omega_b)}{(\omega_c^2 - \omega_b^2 + 2\varepsilon i \omega_b)}$$

В данном случае важна действительная часть данного выражения, так как фазовый сдвиг не представляет практического интереса. Обозначим модуль отношения этих амплитуд через β_c , которое известно как *передаточное число* или как *коэффициент передачи силы*:

$$\beta_c = \frac{\sqrt{\omega_c^4 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}}$$

При кинематическом возбуждении задача виброзащиты – обеспечить минимальные перемещения x_k тела.

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{x}_k + h[\dot{x}_k - \dot{s}(t)] + c[x_k - s(t)] = 0,$$

или

$$m\ddot{x}_k + h\dot{x}_k + cx_k = cs(t) + h\dot{s}(t).$$

Считаем, как и при силовом возбуждении, вибрация основания изменяется по гармоническому закону $s(t) = s_0 e^{i\omega_b t}$.

Частное решение уравнения (2.87) ищем в виде

$$x_k = X_a e^{i\omega_b t}.$$

Подставив $s(t)$ и x_k в (2.87), получим

$$(c - m\omega_b^2 + hi\omega_b)x_k(t) = (c + hi\omega_b)s(t),$$

откуда

$$\frac{x(t)}{s(t)} = \frac{(c + hi\omega_b)}{(c - m\omega_b^2 + hi\omega_b)} = \frac{\omega_c^2 + 2\varepsilon i \omega_b}{(\omega_c^2 - \omega_b^2 + 2\varepsilon i \omega_b)}.$$

Как и в случае силового возбуждения важна действительная часть данного выражения, так как фазовый сдвиг не представляет практического интереса. Обозначим модуль отношения этих амплитуд – *передаточное число* через β_k :

$$\beta_k = \frac{\sqrt{\omega_c^4 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_b^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_b^2}} \quad 78.$$

Выражения (2.86) и (2.88) идентичны. Таким образом, условие виброзащиты в обоих случаях силового и кинематического возбуждения совпадают, и передаточное число имеет вид

$$\beta = \beta_k = \beta_c = \frac{\sqrt{\omega_c^4 + 4\varepsilon^2 \omega_B^2}}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_B^2}} < 1.$$

Для удобства построения амплитудно-частотной характеристики, введём, как и ранее, коэффициент расстройки $z = \omega_B / \omega_c$ и безразмерный коэффициент затухания $d = 2\varepsilon / \omega_c$. Разделив числитель и знаменатель выражения (2.89) на ω_c^2 , получим значение передаточного числа в виде

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + d^2 z^2}}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}} < 1.$$

Отсюда

$$(1 - z^2)^2 + d^2 z^2 > 1 + d^2 z^2,$$

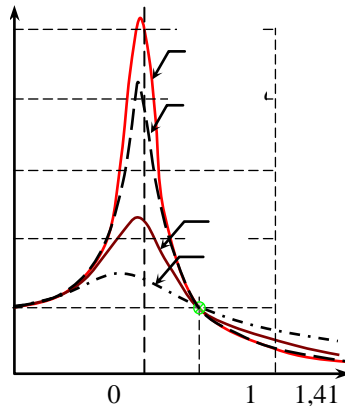
или

$$z^2(z^2 - 2) > 0.$$

Это неравенство имеет место при $z > \sqrt{2}$ или $\omega_B > \sqrt{2} \cdot \omega_c$.

Построим амплитудно-частотную характеристику, то есть зависимость β от z . Данная зависимость представлена на рис. 2.31.

Хотя данный график на рис. 2.21, все кривые проходят через точку с абсциссой $\beta = 1,41$. Это отличие от рис. 2.21 обусловлено влиянием силы затухания. Из зависимости $\beta(z)$ следует, что зависимо от величины демпфирования в системе, условием эффективной виброзащиты является ношения частот вынужденных собственных колебаний системы. *Необходимо, чтобы собственная*



поми-
ходят
1,41.
слов-
Из за-
неза-
рова-
фек-
соот-
и соб-
Необ-
час-

Рис. 2.31. Амплитудно-частотная характеристика виброзащитной системы

тота колебаний системы была бы значительно ниже частоты возбуждения, как минимум, в 1,41 раза.

При $z > 1,41$ при увеличении демпфирования величина β несколько возрастает, то есть эффект виброзащиты снижается. С теоретической точки зрения, казалось бы, что необходимо уменьшать демпфирование. Однако в инженерной практике необходимо учитывать режимы разгона и торможения источника. При этом резонансные частоты могут находиться в зоне между минимальными и рабочими частотами источника. Частота возбуждения изменяется от нуля до $\omega_{\text{вmax}}$ и наоборот, то есть система проходит через резонанс. Хотя амплитуда при резонансе зависит от скорости прохождения через резонанс, её необходимо снижать, следовательно, конструктор вынужден повышать демпфирование в системе.

2.7. определение затухания в системах с одной степенью свободы

При проектировании демпфирующих устройств перед конструктором (расчётчиком) стоит задача определения необходимого уровня демпфирования. Этот вопрос нельзя решить до тех пор, пока не известно, какое демпфирование присутствует в самой конструкции. При расчётах собственных или вынужденных колебаний, например, крутильных колебаний коленчатых валов поршневых двигателей, также встаёт задача неопределённости в коэффициенте демпфирования. Определение этого начального демпфирования очень важно, потому что все усовершенствования и точности расчётов связаны с этой характеристикой.

При рассмотрении колебаний системы с одной степенью свободы предполагалось, что их динамические характеристики (масса, жёсткость и затухание) известны. В большинстве случаев массу и жёсткость конструкций можно определить достаточно просто из общих соображений или с помощью формул приведения. С другой стороны механизмы рассеяния энергии в реальных сооружениях хорошо известны лишь в отдельных случаях. Поэтому невозможно определить параметр затухания с помощью достаточно общих выражений. По этой причине в инженерной и научной практике используют экспериментальные методы.

Напомним, что для описания демпфирования используются, как правило, три коэффициента.

1. Коэффициент линейного вязкого сопротивления h . Размерность этого коэффициента [Н·с/м].

2. Коэффициент затухания или коэффициент демпфирования ε – уравнение (2.37). Размерность ε [рад/с].

3. Безразмерный коэффициент затухания $d = 2\varepsilon/\omega_c$ – уравнение (2.62).

В зависимости от потребности и возможности используются различные методы определения сопротивления колебаниям.

Запишем выражения коэффициентов сопротивления через динамические характеристики системы m – масса; h – коэффициент линейного вязкого сопротивления; c – жёсткость:

$$\varepsilon = h/2m; \quad d = \frac{2\varepsilon}{\omega_c} = \frac{h}{\sqrt{cm}},$$

где ω_c – круговая частота собственных колебаний без трения, $\omega_c^2 = c/m$.

Методы определения сопротивления колебаниям будем подразделять в зависимости от определяемого коэффициента.

1. Измерение затухания свободных колебаний – *определение коэффициента затухания ε* .

2. Оценка демпфирования по ширине резонансной амплитуды – *определение безразмерного коэффициента затухания d* .

3. Метод измерения механического импеданса – *определения коэффициента линейного вязкого сопротивления h* .

2.7.1. Метод измерения свободных затухающих колебаний

Данный метод был описан в разделе «2.2.2. Декремент колебаний». Этот метод является самым простым и доступным. Систему выводят из состояния равновесия и мгновенно обрывают связь, вызывая собственные колебания (рис. 2.14). Величину коэффициента затухания находят из выражения

$$\varepsilon = \frac{1}{T_3 j} \ln \frac{A_i}{A_{i+j}}, \quad (2.90)$$

где A_i – амплитуда колебаний в любой момент времени;

A_{i+j} – амплитуда колебаний через j циклов;

T_3 – период затухающих колебаний.

Величины A_i ; A_{i+j} ; T_3 берутся с осциллограммы, полученной в цифровом или аналоговом виде (рис. 2.14).

Большое достоинство такого метода состоит в том, что потребность в оборудовании и измерительных приборах минимальна. Колебания могут возбуждаться любым удобным способом.

2.7.2. Метод оценки коэффициента затухания по ширине резонансной амплитуды

Данный метод позволяет определить *безразмерный коэффициент затухания d* и *коэффициент затухания ε* .

Метод основан на определении ширины резонансного пика колебаний в двух точках А и В кривой динамического перемещения (рис. 2.32). Принято считать, что точки А и В соответствуют частотам, при которых амплитуда динамических перемещений в $1/\sqrt{2}$ раз меньше максимальной амплитуды. Ширина частотной полосы между этими точками соответствует половине рассеиваемой мощности. Термин взят из теории электрических цепей.

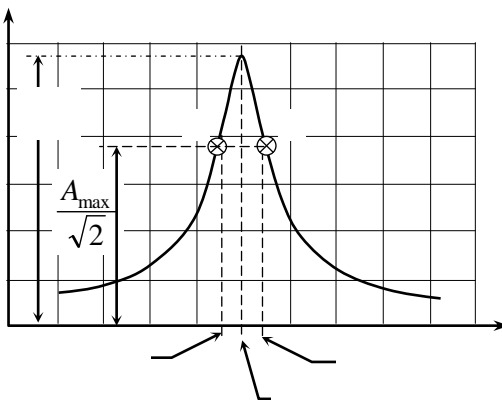


Рис. 2.32. Амплитудно-частотная характеристика по динамическому перемещению от гармонической силы:

$$F_a \cos \omega_b t; \quad F_a - \text{постоянная величина при изменении } \omega_b$$

Для колебательной системы с сопротивлением характерны следующие частоты колебаний:

1. Круговая частота собственных колебаний без затухания.
2. Круговая частота собственных колебаний с затуханием,
3. Резонансная частота, при которой модуль податливости максимален.

Из выражения (2.83) определим модуль податливости

$$|Z'_s| = \left| \frac{S_a}{F_a} \right| = \frac{1}{\omega_3 = \sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{m\omega_B}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}}. \quad (2.91)$$

Резонансная частота колебательной системы соответствует максимальному значению $|Z'_s|$ или минимальному значению подкоренного выражения. Подкоренное выражение приобретает минимальное значение тогда когда

$$\frac{d[(c - m\omega_B^2)^2 + \omega_B^2 h^2]}{d\omega_B} = 0.$$

Или

$$2(c - m\omega_B^2)(-2m\omega_B) + 2\omega_B h^2 = 0.$$

Раскрыв скобки и сократив на ω_B , получим

$$2m^2\omega_B^2 - 2cm + h^2 = 0,$$

откуда

$$\omega_B = \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{cm - h^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{c}{m} \left(1 - \frac{h^2}{2cm}\right)}. \quad (2.92)$$

Подставив значения $\varepsilon = h/2m$, $f_0 = F_0/m$ преобразуем выражение (2.59) к виду

$$S_B = \frac{F_0}{\sqrt{(c - m\omega_B^2)^2 + h^2\omega_B^2}}.$$

Подставив значение резонансной частоты из (2.92) в (2.93), найдём виброперемещение при резонансе

$$S_{\text{рез}} = \frac{F_0}{\sqrt{\left[\left(c - m \frac{c}{m} \left(1 - \frac{h^2}{2cm} \right) \right)^2 + h^2 \frac{c}{m} \left(1 - \frac{h^2}{2cm} \right) \right]}}.$$

Окончательно получим

$$S_{\text{рез}} = \frac{F_0}{\sqrt{\frac{h^4}{4m^2} + \frac{ch^2}{m} - \frac{h^4}{2m^2}}} = \frac{F_0}{\sqrt{\frac{h^2(4cm - h^2)}{4m^2}}} = \frac{2mF_0}{h\sqrt{4cm - h^2}}.$$

Для нахождения частот соответствующим точкам А и В резонансное перемещение (2.94) умножим на $1/\sqrt{2}$ и приравняем динамическому перемещению (2.91)

$$\frac{F_0}{\sqrt{(c - m\omega_B^2)^2 + \omega_B^2 h^2}} = \frac{F_0}{n\sqrt{\frac{h^2(4cm - h^2)}{4m^2}}}.$$

Освободимся от числителя и корня, получим

$$(c - m\omega_B^2)^2 + \omega_B^2 h^2 - n^2 \frac{h^2(4cm - h^2)}{4m^2} = 0.$$

Разделим на c^2 , получим

$$\left(1 - \frac{m\omega_B^2}{c}\right)^2 + \frac{\omega_B^2 h^2}{c^2} - n^2 \frac{h^2(4cm - h^2)}{4m^2 c^2} = 0.$$

Раскроем скобки

$$1 - 2\frac{m\omega_B^2}{c} + \left(\frac{m\omega_B^2}{c}\right)^2 + \frac{\omega_B^2 h^2}{c^2} - n^2 \frac{h^2 4cm}{4m^2 c^2} \left(1 - \frac{h^2}{4cm}\right) = 0.$$

Или

$$\left(\frac{m\omega_B^2}{c}\right)^2 - 2\frac{m\omega_B^2}{c} \left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right) + 1 - 4n^2 \frac{h^2}{4cm} \left(1 - \frac{h^2}{4cm}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения:

$$= \frac{c^2}{m^2} \left[\frac{m}{c} \left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right) \pm \frac{m}{c} \sqrt{\left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right)^2 - \left(1 - 4n^2 \frac{h^2}{4cm} \left(1 - \frac{h^2}{4cm}\right)\right)} \right] =$$

$$= \frac{c}{m} \left[1 - \frac{2h^2}{4cm} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right)^2 - 1 + 4n^2 \frac{h^2}{4cm} \left(1 - \frac{h^2}{4cm}\right)} \right] =$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2 \frac{m}{c} \left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right) \pm \sqrt{4 \frac{m^2}{c^2} \left(1 - \frac{2h^2}{4cm}\right)^2 - 4 \frac{m^2}{c^2} \left(1 - 4n^2 \frac{h^2}{4cm} \left(1 - \frac{h^2}{4cm}\right)\right)}}{2 \frac{m^2}{c^2}} =$$

Окончательно

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c}{m} \left[1 - \frac{2h^2}{4cm} \pm 2\sqrt{n^2 - 1} \frac{h}{2\sqrt{cm}} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4cm}} \right]. \quad (2.95)$$

При $\frac{h^2}{4cm} \ll 1$ и применяя формулу $\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$, получим

$$\omega_{1,2} \sqrt{\frac{m}{c}} = 1 \pm \sqrt{n^2 - 1} \frac{h}{2\sqrt{cm}}.$$

Заменив $\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{1}{\omega_{рез}}$, получим следующее соотношение

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{рез}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_{рез}} = 2\sqrt{n^2 - 1} \frac{h}{2\sqrt{cm}}.$$

Следовательно, при $n = \sqrt{2}$ имеем

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{рез}} = \frac{h}{\sqrt{cm}} = d, \quad (2.96)$$

где d – безразмерный коэффициент затухания.

Определение коэффициента затухания ε . Из (2.96) запишем

$$\Delta\omega = \frac{h\omega_{рез}}{\sqrt{cm}} = h\sqrt{\frac{c}{mcm}} = \frac{h}{m} = 2\varepsilon.$$

Или $2\varepsilon = h/m$. Окончательно $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{2}$. (2.97)

2.7.3. Метод измерения механического импеданса

С помощью измерения механического импеданса удобно определить коэффициент линейного вязкого демпфирования h .

На рис. 2.33 показаны примеры простых и сложных колебательных систем. В схему измерений включаются обязательно датчики силы и акселерометр. Датчик силы предназначен для измерения динамического усилия передаваемого на гильзу от возбудителя колебаний (вибростенд). Акселерометр предназначен для замера ускорения колебаний гильзы, вызванного приложенной силой.

На рис. 2.34 показан пример измерения механического импеданса гильзы цилиндра автомобильного дизеля. Прикладывая к системе колебательное усилие с изменяющейся частотой так, чтобы колебательная скорость, вызываемая этой силой, была постоянной, получим зависимость $Z_v = f(\omega)$.

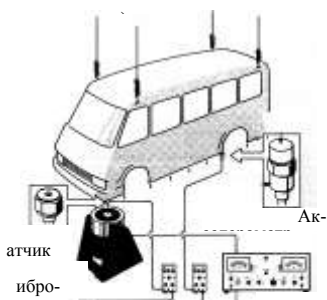
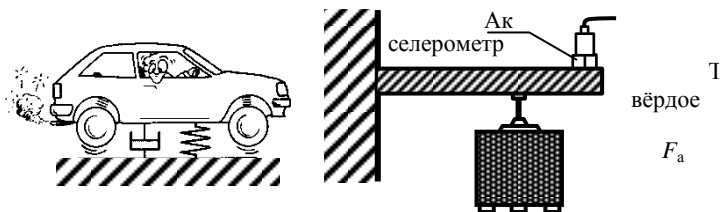


Рис. 2.33. Примеры колебательных систем, подвергаемых динамическим исследованиям:

а) – моделирование подвески легкового автомобиля одномассовой системой;

б) – простая кон-

Синусоидальный сигнал с генератора сигналов 5 через усилитель мощности 6 подаётся на возбудитель колебаний 7, который возбуждает колебания через датчик силы 1. Электрический сигнал с выхода акселерометра 8, усиленный предусилителем 9 (после однократного интегрирования), подаётся на цепь обратной связи генератора 5, устанавливая замкнутый контур обратной связи.

Таким образом, генератор синусоидальных сигналов регулирует выходной сигнал возбудителя колебаний для того, чтобы амплитуда скорости возбуждения поддерживалась постоянной независимо от частоты возбуждения. Усиленный предусилителем 2 и усилителем 3 электрический сигнал с датчика силы 1 поступает на регистрирующий прибор 4. При этом, исходя из определения, модуль импеданса равен $|Z_v| = F_a/v_a$ и,

поскольку амплитуда скорости v_a возбуждения гильзы поддерживается постоянной с изменением частоты, регистрируемый сигнал непосредственно пропорционален численному значению механического импеданса.

На рис. 2.35 показан пример экспериментальной кривой механического импеданса гильзы цилиндра дизеля. Поскольку данная система является сложной, то она имеет множество частот свободных колебаний.

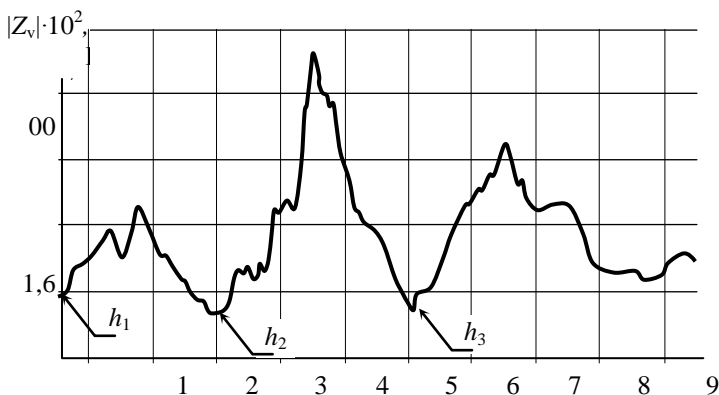


Рис. 2.35. Импеданс гильзы цилиндра дизеля, вставленной в блок цилиндров с поршнем

Резонанс соответствует частоте колебаний при минимальном значении модуля механического импеданса. Исходя из формулы (2.81) модуль импеданса имеет минимальное значение, если $\omega_B m = \frac{c}{\omega_B}$, равное $|Z_v|_{\min} = h$. Исходя из этого положения, и определяем величину коэффициента вязкого линейного демпфирования

$$h = |Z_v|_{\min}. \quad (2.98)$$

На рис. 2.28 показано значение h для одномассовой системы, а на рис. 2.35 для распределённой системы — значения h_1 , h_2 и h_3 .

2.8. Вынужденные колебания при произвольном возбуждении

Вынужденные колебания для системы без затухания

Для случая *возмущающей силы произвольного вида* сила изменяется не по периодическому закону, например, как изображено на рис. 2.36. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения одномассовой системы при отсутствии сопротивления ($\varepsilon = 0$) при действии возмущающей силы $F(t)$.

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = \frac{1}{m} F(t). \quad (2.99)$$

Известны несколько методов решения уравнения (2.99). Распространенным методом – *метод вариации произвольных постоянных*, применение которого позволяет получить результат, пригодный для любых законов изменения возмущающей силы.

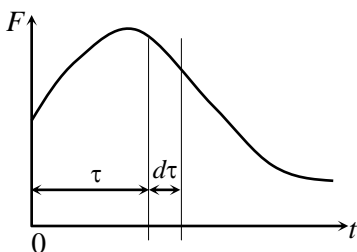


Рис. 2.36. Возмущающая сила произвольного вида

ления
щаю-

дов
СМОТ-
МЫЙ
воль-

которо-

Идея метода состоит в том, что частное решение уравнения (2.99) ищется в виде соответствующем решению однородного уравнения

но здесь величины C_1 и C_2 следует считать не постоянными, а переменными. Величины $C_1(t)$ и $C_2(t)$ являются искомыми функциями времени. В результате задача определения функции $s(t)$ заменяется задачей определения двух функций – $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Так как для этого имеется только одно уравнение (2.100), то функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ можно связать ещё одной произвольной зависимостью.

Дифференцируя выражение (2.100) по времени, получим выражение скорости

$$\dot{s} = \dot{C}_1(t) \cos \omega_c t + \dot{C}_2(t) \sin \omega_c t - C_1(t) \omega_c \sin \omega_c t + C_2(t) \omega_c \cos \omega_c t.$$

В соответствии с методом варьирования произвольных постоянных полагаем

$$\dot{C}_1(t) \cos \omega_c t + \dot{C}_2(t) \sin \omega_c t = 0. \quad (2.101)$$

Тогда скорость запишется в форме

$$\dot{s} = -C_1(t) \omega_c \sin \omega_c t + C_2(t) \omega_c \cos \omega_c t. \quad (2.102)$$

Дифференцируя второй раз, получим ускорение

$$\ddot{s} = -\dot{C}_1(t) \omega_c \sin \omega_c t + \dot{C}_2(t) \omega_c \cos \omega_c t - \omega_c^2 [C_1(t) \cos \omega_c t + C_2(t) \sin \omega_c t]. \quad (2.103)$$

Подставляя (2.100) и (2.103) в (2.99), получим

$$-\dot{C}_1(t) \sin \omega_c t + \dot{C}_2(t) \cos \omega_c t = \frac{1}{m\omega_c} F(t). \quad (2.104)$$

Уравнения (2.101) и (2.104) представляют собой неоднородную алгебраическую систему относительно \dot{C}_1 и \dot{C}_2 ,

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1(t) \cos \omega_c t + \dot{C}_2(t) \sin \omega_c t &= 0; \\ -\dot{C}_1(t) \sin \omega_c t + \dot{C}_2(t) \cos \omega_c t &= \frac{1}{m\omega_c} F(t), \end{aligned} \right\}$$

невырожденную при любых значениях ω_c , поскольку определитель этой системы

$$\Delta = \cos^2 \omega_c t + \sin^2 \omega_c t = 1.$$

Решая эту систему по способу Крамера, получаем

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{m\omega_c} F(t) \sin \omega_c t;$$

$$\dot{C}_2(t) = \frac{1}{m\omega_c} F(t) \cos \omega_c t.$$

Интегрируя, получим

$$\left. \begin{aligned} C_1(t) &= B_1 - \frac{1}{m\omega_c} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_c \tau d\tau; \\ C_2(t) &= B_2 + \frac{1}{m\omega_c} \int_0^t F(\tau) \cos \omega_c \tau d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

где τ – время, изменяющееся от 0 до t ; B_1, B_2 – произвольные постоянные, равные соответственно C_1 и C_2 при $t = 0$ и определяемые из начальных условий при $t = 0$ $s(0) = S_0, \dot{s}(0) = \dot{S}_0$. С учётом начальных условий из выражений (2.100) и (2.102) имеем

$$B_1 = S_0; B_2 = \dot{S}_0/\omega_c,$$

где S_0 и \dot{S}_0 – начальные отклонение и скорость.

Подставив (2.105) с учётом начальных условий в (2.100), получим

$$s = S_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{S}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{1}{m\omega_c} \left[\sin \omega_c t \int_0^t F(\tau) \cos \omega_c \tau d\tau - \cos \omega_c t \int_0^t F(\tau) \sin \omega_c \tau d\tau \right].$$

Поскольку тригонометрические члены $\sin \omega_c t$ и $\cos \omega_c t$, стоящие перед интегралами, не зависят от переменной интегрирования τ , то их можно внести под знаки интегралов:

$$\begin{aligned}
 s &= S_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{S}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + \\
 &+ \frac{1}{m\omega_c} \int_0^t F(\tau) (\sin \omega_c t \cos \omega_c \tau - \cos \omega_c t \sin \omega_c \tau) d\tau = \\
 &= S_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{S}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t + \frac{1}{m\omega_c} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_c (t - \tau) d\tau. \quad (2.106)
 \end{aligned}$$

Если начальные условия нулевые ($S_0 = 0$, $\dot{S}_0 = 0$), т.е. система находится в покое, то решение имеет вид

$$s = \frac{1}{m\omega_c} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_c (t - \tau) d\tau. \quad (2.107)$$

Данное выражение называют *интегралом Дюамеля*.

Слагаемое $S_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{S}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t$ описывает свободные колебания, возникшие в результате начального отклонения и начальной скорости.

Вынужденные колебания для системы с затуханием

При наличии вязкого сопротивления дифференциальное уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \omega_c^2 s = \frac{1}{m} F(t). \quad (2.108)$$

Сделаем замену переменных

$$s = e^{-\varepsilon y}, \quad \dot{s} = (\dot{y} - \varepsilon y) e^{-\varepsilon y}; \quad \ddot{s} = (\ddot{y} - 2\varepsilon\dot{y} + \varepsilon^2 y) e^{-\varepsilon y}, \quad (2.109)$$

где y – новая переменная.

Подставив s , \dot{s} , \ddot{s} в (2.108), получаем

$$e^{-\varepsilon t} \ddot{y} + (\omega_c^2 - \varepsilon^2) e^{-\varepsilon t} y = \frac{1}{m} F(t).$$

Разделив на $e^{-\varepsilon t}$ и учитывая, что $(\omega_c^2 - \varepsilon^2) = \omega_3^2$, находим

$$\ddot{y} + \omega_3^2 y = \frac{1}{m} F(t) e^{\varepsilon t}. \quad (2.110)$$

Данное уравнение (2.109) аналогично уравнению (2.99). Решение будет иметь вид

$$y = C_1(t) \cos \omega_3 t + C_2(t) \sin \omega_3 t. \quad (2.111)$$

поступая также, как при решении уравнения (2.99), найдём $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\left. \begin{aligned} C_1(t) &= B_1 - \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_3 \tau d\tau; \\ C_2(t) &= B_2 + \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \omega_3 \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

Подставляя (2.112) в (2.111), и производя преобразования, аналогичные (2.106), получим

$$y = B_1 \cos \omega_3 t + B_2 \sin \omega_3 t + \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau.$$

Умножая полученное уравнение в соответствии с (2.109) на $e^{-\varepsilon t}$ и внося $e^{-\varepsilon t}$ под знак интеграла, имеем

$$\begin{aligned} s &= e^{-\varepsilon t} (B_1 \cos \omega_3 t + B_2 \sin \omega_3 t) + \\ &+ \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Произвольные постоянные B_1 и B_2 определяем в зависимости от начальных условий.

При $t = 0$, $s(0) = S_0$, $\dot{s}(0) = \dot{S}_0$, $B_1 = S_0$; $B_2 = (\dot{S}_0 + \varepsilon S_0) / \omega_3$ и уравнение (2.113) будет иметь вид

$$\begin{aligned} s &= e^{-\varepsilon t} (S_0 \cos \omega_3 t + \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t) + \\ &+ \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.114a)$$

При $t = 0$, $S_0 = 0$, $\dot{S}_0 = 0$ (нулевые начальные условия) решение будет иметь вид

$$s = \frac{1}{m\omega_3} \int_0^t F(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_3(t-\tau) d\tau. \quad (2.114)$$

Данное выражение носит название *интеграла Дюамеля с затуханием*.

Выражение (2.114) представляет полное перемещение при действии возмущающей силы $F(t)$ на интервале времени от 0 до t . Оно включает как установившиеся, так и неустойчившиеся формы колебаний. При невозможности представления силы $F(t)$ аналитически, интеграл вычисляется с помощью численного интегрирования.

2.9. Вынужденные колебания при синусоидальном импульсе

Колебания без учёта затухания

Рассмотрим синусоидальный импульс, представленный на рис. 2.37. Реакция системы разделяется на две фазы: соответственно для интервала времени непосредственного приложения нагрузки и следующей за ней фазы свободных колебаний.

Фаза действия нагрузки. В этой фазе система, находящаяся в состоянии покоя, подвергается гармонической нагрузке. Вынужденные колебания описываются уравнением (2.46)

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = f_0 \sin(\omega_b t + \beta).$$

Можно принять, что реакция гармонической нагрузке гармонична и имеет фазу, одинаковую с нагрузкой ($\beta = 0$). Решение однородного уравнения запишется в виде

$$s_1 = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t.$$

Частное решение имеет вид

$$s_2 = S_b \sin \omega_b t,$$

где S_b – амплитуда, подлежащая определению.

Проводя преобразования, аналогичные разделу 2.3.1, получим

$$s_2 = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \sin \omega_b t.$$

Общее решение складывается из решения однородного уравнения и частного решений

$$s = s_1 + s_2 = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \sin \omega_b t.$$

Значения постоянных C_1 и C_2 определяются из начальных условий. Для системы, колебания которой начинаются из состояния покоя, т.е. при нулевых начальных условиях $t = 0$, $S_0 = 0$, $\dot{S}_0 = 0$, постоянные принимают следующие значения

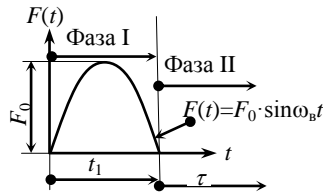


Рис. 2.37. Полусинусоидальный импульс

при
ческой
грузкой
уравне-

$$C_1 = 0; \quad C_2 = -\frac{f_0 \omega_B}{\omega_c (\omega_c^2 - \omega_B^2)}.$$

Окончательно

$$s = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2} (\sin \omega_B t - \frac{\omega_B}{\omega_c} \sin \omega_c t).$$

Проведём преобразование последнего выражения, учитывая ранее введенные обозначения $f_0 = F_0/m$; $z = \omega_B/\omega_c$ и $\omega_c^2 = c/m$ получим

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{F_0}{m \omega_c^2 (1 - z^2)} (\sin \omega_B t - \frac{\omega_B}{\omega_c} \sin \omega_c t) = \\ &= \frac{F_0}{c} \frac{1}{1 - z^2} (\sin \omega_B t - z \sin \omega_c t). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Данное уравнение определяет колебания системы на интервале времени $0 \leq t < t_1$, т.е. фазы I.

Из (2.114) коэффициент динамичности равен

$$k_d = \frac{s(t)c}{F_0} = \frac{1}{1 - z^2} (\sin \omega_B t - z \sin \omega_c t). \quad (2.116)$$

Фаза свободных колебаний системы.

Свободные колебания, которые происходят в этой фазе, зависят от перемещений $s(t_1)$ и скорости $\dot{s}(t_1)$ в конце фазы I и могут быть получены для $\tau = t - t_1 \geq 0$. Свободные колебания описываются уравнением (2.32)

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = 0.$$

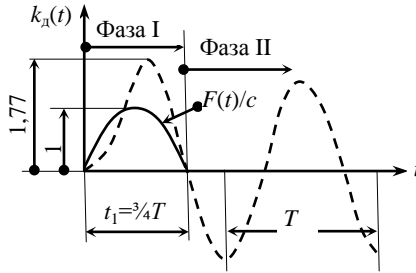
Общее решение ищется в виде (2.35), а постоянные интегрирования определяются из начальных условий при $t = 0$ $s(0) = S_{c0}$; $\dot{s}(0) = \dot{S}_{c0}(t_1)$. Отсюда $C_1 = S_{c0}$; $C_2 = \dot{S}_{c0}(t_1)/\omega_c$. Окончательно

$$s(\tau) = S_{c0}(t_1) \cos \omega_c \tau + \frac{\dot{S}_{c0}(t_1)}{\omega_c} \sin \omega_c \tau \quad (\text{рис. 2.3}) \quad (2.117)$$

Величина динамической реакции при приложении такого импульса нагрузки зависит от длительности нагружения, т.е. времени t_1 к периоду собственных колебаний системы. Коэффициент динамичности в функции времени можно представить как отношение динамического перемещения к статическому перемещению. Для случая соотношений $t_1 = \frac{3}{4} \cdot T$ значение

$k_d(t)$ представлено на рис. 2.38 [7]. Здесь также представлена зависимость $F(t)/c$ и принято максимальное значение $F(t)/c$ за 1.

Во многих инженерных задачах большой интерес представляет не весь процесс деформирования системы или коэффициента динамичности. Определяем время достижения максимальной реакции системы. Для этого продифференцируем выражение (2.115) по времени и приравняем нулю:



вания, коэффициент динамичности этого реактивного при-

Рис. 2.38. Коэффициент динамичности при полусинусоидальном импульсе

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0 = \frac{F_0}{c} \frac{1}{1-z^2} (\omega_B \cos \omega_B t - \omega_C \cos \omega_C t),$$

откуда

$$\cos \omega_B t = \cos \omega_C t,$$

и, следовательно,

$$\omega_B t = 2\pi n \pm \omega_C t; \quad n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots \quad (2.118)$$

Это выражение справедливо только пока $\omega_C t \leq \pi$, что соответствует возникновению максимума реакции в период действия синусоидального импульса нагрузки.

Рассмотрим случай нагружения, когда частота нагрузки приближается к частоте собственных колебаний системы ($\omega_B \rightarrow \omega_C$). В этом случае, подставляя $n = 1$, получим время в момент достижения максимальной реакции системы:

$$\omega_B t = 2\pi - \omega_C t,$$

отсюда

$$t = \frac{2\pi}{\omega_B + \omega_C}; \quad \text{или} \quad \omega_B t = \frac{2\pi}{1 + (\omega_C / \omega_B)}. \quad (2.119)$$

При этом в выражении (2.118) принят отрицательный знак. Амплитуда максимальной реакции определяется подстановкой (2.119) в уравнение (2.115).

$$S_{\max} = \frac{F_0}{c} \frac{1}{1-z^2} \left(\sin \frac{2\pi}{1+z^{-1}} - z \sin \frac{2\pi}{1+z} \right). \quad (2.120)$$

Результат справедлив при $\omega_b t \leq 1$, что соответствует случаю $z = (\omega_b / \omega_c) \leq 1$, т.е. $\omega_b \leq \omega_c$.

Из (2.120) коэффициент динамичности будет равен

$$k_d = \frac{1}{1-z^2} \left(\sin \frac{2\pi}{1+z^{-1}} - z \sin \frac{2\pi}{1+z} \right). \quad (2.121)$$

При $\omega_b > \omega_c$ максимум реакции приходится на фазу свободных колебаний (фаза II, рис. 2.38). Начальное перемещение и скорость для этой фазы определяется подстановкой $t_1 = \pi/\omega_b$ в уравнение (2.115):

$$s(t_1) = \frac{F_0}{c} \frac{1}{1-z^2} \left(0 - z \sin \frac{\pi}{z} \right); \quad (2.122)$$

$$\dot{s}(t_1) = \frac{F_0}{c} \frac{\omega_b}{1-z^2} \left(-1 - \cos \frac{\pi}{z} \right).$$

Уравнение (2.116) можно записать в амплитудной форме

$$s = A \cos(\omega_c t - \alpha), \quad (2.123)$$

где A и α – произвольные постоянные;

A – амплитуда колебаний;

α – фаза колебаний.

Амплитуда колебаний с учётом (2.122) равна:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{[s(t_1)]^2 + \left[\frac{\dot{s}(t_1)}{\omega_c} \right]^2},$$

или

$$A = \frac{F_0}{c} \frac{z}{1-z^2} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{z}}. \quad (2.124)$$

Коэффициент динамичности для фазы II ($t > t_1$) и $z > 1$ равен

$$k_d = \frac{S_{\max}}{S_{\text{ст}}} = \frac{S_{\max} c}{F_0} = \frac{2z}{1-z^2} \cos \frac{\pi}{2z}. \quad (2.125)$$

2.10. Вынужденные колебания при произвольном перемещении опоры

В инженерной практике часто приходится решать задачи вынужденных колебаний вызываемых перемещениями опоры. Такие динамические

нагрузки возникают, например, при воздействии на подвеску автомобиля от неровностей дороги (рис. 2.39, а). Аналитическое описание таких кинематических возбуждений весьма сложно.

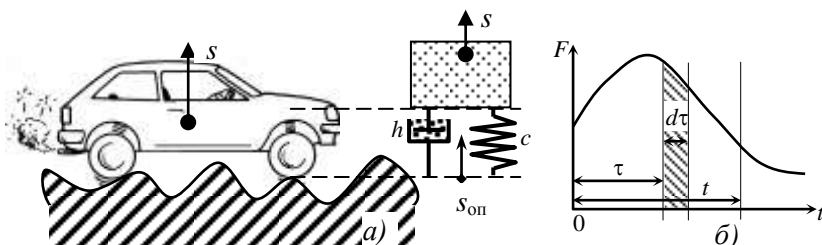


Рис. 2.39. Произвольное перемещение колеса автомобиля от случайного профиля дороги:

- а) – одномассовая система, имитирующая подвеску автомобиля;
 б) – возмущающая сила

Рассмотрим систему с одной степенью свободы с демпфированием. Кинематические параметры опоры можно задать в виде перемещения или ускорения.

Случай 1. Параметры кинематического возбуждения опоры зададим в виде перемещения опоры как функции времени $s_{\text{оп}}$ и скорости опоры $\dot{s}_{\text{оп}}$. Уравнение движения примет вид

$$m\ddot{s} = -h(\dot{s} - \dot{s}_{\text{оп}}) - c(s - s_{\text{оп}}),$$

после простых преобразований получим

$$m\ddot{s} + h\dot{s} + cs = cs_{\text{оп}} + h\dot{s}_{\text{оп}}.$$

Разделив обе части уравнения на массу m , получим

$$\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + \omega_c^2 s = f_{\text{оп1}} + f_{\text{оп2}} = f_{\text{оп}}, \quad (2.126)$$

$$f_{\text{оп1}} = (c/m) \cdot s_{\text{оп}} = \omega_c^2 \cdot s_{\text{оп}};$$

$$f_{\text{оп2}} = \frac{2\varepsilon}{m} \dot{s}_{\text{оп}}.$$

Выразим $f_{\text{оп2}}$ через $f_{\text{оп1}}$. Так как имеем $f_{\text{оп1}} = \omega_c^2 \cdot s_{\text{оп}}$, то

$$\dot{s}_{\text{оп}} = \frac{\dot{f}_{\text{оп1}}}{\omega_c^2} \quad \text{или} \quad f_{\text{оп2}} = \frac{2\varepsilon}{\omega_c^2} \dot{f}_{\text{оп1}}.$$

Предполагаем, что перемещение $s_{\text{оп}}$ и соответствующая ему сила $f_{\text{оп1}}$ являются функцией фиктивного времени τ (рис. 2.39, б). Исходя из этого, в произвольный момент времени τ можно подсчитать приращение импульса $f_{\text{оп}} d\tau$. Приращение данного импульса состоит из двух частей ($f_{\text{оп1}} + f_{\text{оп2}}$) $d\tau$. Этот импульс сообщает единице массы мгновенное увеличение скорости (приращение скорости)

$$ds = (f_{\text{оп1}} + f_{\text{оп2}})d\tau,$$

где первое слагаемое представляет собой заштрихованную область на рис. 2.39, б. Рассматривая это приращение скорости, как начальную скорость в момент τ , и используя выражение (2.42)

$$s = e^{-\varepsilon t} \left(S_0 \cos \omega_3 t + \frac{\dot{S}_0 + \varepsilon S_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right),$$

получим, что приращение перемещения системы в любой момент времени t будет иметь вид

$$ds = e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{1}{\omega_3} (f_{\text{оп1}} + f_{\text{оп2}}) \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau.$$

Суммарное перемещение массы принимает вид

$$s = s_1 + s_2 = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_3} \int_0^t e^{-\varepsilon \tau} (f_{\text{оп1}} + f_{\text{оп2}}) \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau, \quad (2.127)$$

что является наиболее полным выражением для интеграла Дюамеля.

Если в системе отсутствует затухание, т.е. $h = 0$ и $\omega_3 = \omega_c$, то получим упрощённое выражение

$$s = \frac{1}{\omega_c} \int_0^t f_{\text{оп1}} \sin \omega_c (t - \tau) d\tau = \omega_c \int_0^t s_{\text{оп}} \sin \omega_c (t - \tau) d\tau. \quad (2.128)$$

Случай 2. Параметры кинематического возбуждения опоры зададим в виде ускорения опоры $\ddot{s}_{\text{оп}}$. Выразим кинематические параметры массы относительно опоры

$$\widehat{s} = s - s_{\text{оп}}; \quad \widehat{\dot{s}} = \dot{s} - \dot{s}_{\text{оп}}; \quad \widehat{\ddot{s}} = \ddot{s} - \ddot{s}_{\text{оп}},$$

где через \widehat{s} обозначено перемещение массы относительно опоры.

Уравнение колебаний в этом случае запишется

$$m\widehat{\ddot{s}} + h\widehat{\dot{s}} + c\widehat{s} = -m\widehat{\ddot{s}}_{\text{оп}}.$$

В правой части член уравнения выражает возмущающую силу, действующую непосредственно на массу. Разделим последнее уравнение на m , получим

$$\ddot{\widehat{s}} + 2\varepsilon\dot{\widehat{s}} + \omega_c\widehat{s} = \widehat{f}_{\text{оп}}, \quad (2.129)$$

где $\widehat{f}_{\text{оп}} = -\ddot{s}_{\text{оп}}$ является функцией, описывающей в относительных координатах возмущающую силу, обусловленную ускорением опоры.

Уравнение (2.129) аналогично (2.108). В этом случае интеграл Дюамеля (2.114) для перемещения относительно опоры при наличии затухания имеет вид

$$\widehat{s} = \frac{1}{\omega_3} \int_0^t \widehat{f}_{\text{оп}} e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_3(t-\tau) d\tau. \quad (2.130)$$

Если демпфирование отсутствует, то решение (2.130) принимает вид

$$\widehat{s} = \frac{1}{\omega_c} \int_0^t \widehat{f}_{\text{оп}} \sin \omega_c(t-\tau) d\tau. \quad (2.131)$$

2.11. численные способы определения динамических перемещений

В разделах 2.8 ÷ 2.10 рассмотрены вынужденные колебания при различном представлении возбуждающей силы в аналитическом виде. Во многих прикладных задачах машиностроения вынуждающую силу не удаётся представить в аналитическом виде, например, индикаторная диаграмма двигателя внутреннего сгорания. В этом случае их представляют графически или в виде таблиц. Для решения таких задач используют численные методы [13]. Рассмотрим некоторые из них.

Первый метод. Представление непрерывной функции в виде набора ступенчатых функций.

На рис. 2.40 приведён пример такой графической зависимости возбуждающей силы $F = f(t)$.

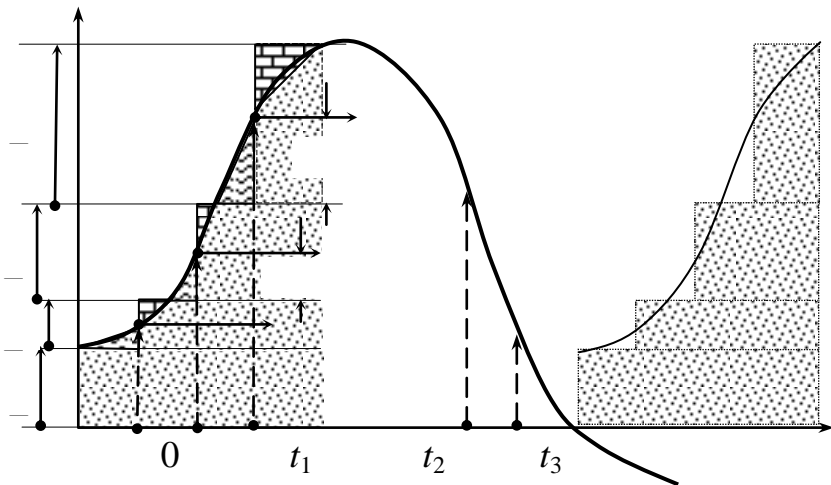


Рис. 2.40. Аппроксимация непрерывной функции ступенчатыми функциями

Эту непрерывную функцию, описывающую возмущающую силу, можно приближённо представить в виде набора ступенчатых функций. На рис. 2.40 это показано в виде закрашенных прямоугольников. Справа показан фрагмент аппроксимирующей функции в виде отдельных прямоугольных импульсов. Каждая ступень смещена по времени на шаг, который равен

$$\Delta t = (t_1 - t_0), (t_2 - t_1), \dots, (t_i - t_{i-1}).$$

Величина ординаты соответствующей ступени равна $\Delta F_0, \Delta F_1, \dots, \Delta F_{i-1}, \Delta F_i$. Для нулевой аппроксимирующей ступени значение ординаты равно $\Delta F_0 = F(t_0)$, то есть равно силе в начальный момент времени при $t = 0$.

Ордината первой ступени ($t = t_1$) равна

$$\Delta F_1 = 2[F(t_1) - \Delta F_0].$$

Ордината второй ступени ($t = t_2$) равна

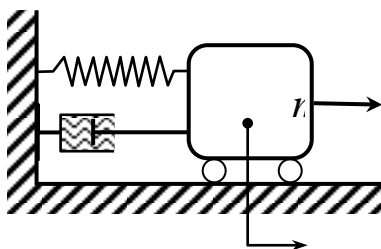
$$\Delta F_2 = 2 \left[F(t_2) - F(t_1) - \frac{\Delta F_1}{2} \right].$$

Или для i -й ступени ($t = t_i$)

$$\Delta F_i = 2 \left[F(t_i) - F(t_{i-1}) - \frac{\Delta F_{i-1}}{2} \right].$$

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы с демпфированием (рис. 2.41). На систему действует ждающая сила $F(t)$ согласно 2.40.

Представим сложную симость силы $F(t)$ в виде моугольных импульсов. Для интервал времени от 0 до t ваается на малые интервалы стояанным шагом



(рис. выну- рис.

зави- пря- этого разби- с по-

$$\Delta t = (t_1 - t_0); (t_2 - t_1); \dots (t_i - t_{i-1}).$$

Для получения достаточной точности необходимо выбирать минимальный шаг Δt с тем, чтобы заштрихованные площадки под кривой (волна) и над кривой (кирпич) само компенсировались. На рис. 2.40 показан шаг достаточно большим, таким он выбран для наглядности и видно, что при большом шаге площадки отличаются по размерам. Использование такого приёма означает, что каждый (после первого) шаг начинается в момент времени, когда ордината кривой равна средней высоте ординат на заданном шаге.

Для одиночного прямоугольного импульса, что соответствует $F = \text{const}$, выражение (2.114) можно представить в следующем виде

$$s = \frac{F e^{-\varepsilon t}}{m \omega_3} \int_0^t e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_3 (t - \tau) d\tau. \quad (2.132)$$

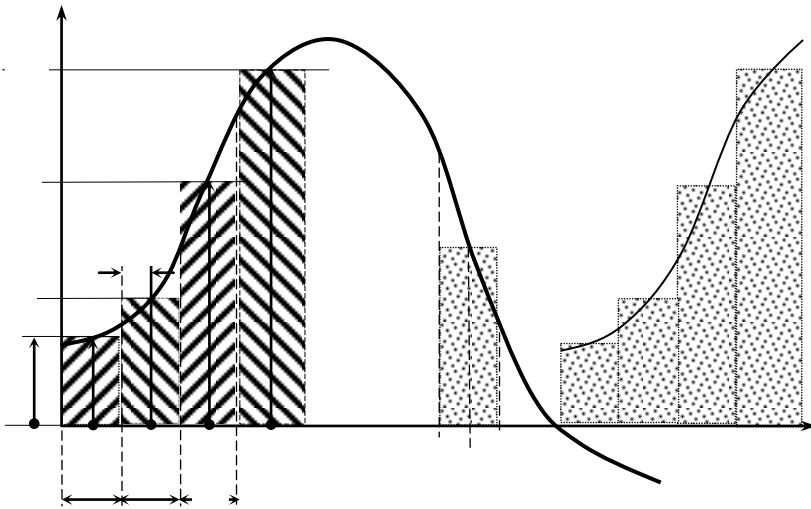
Выражение (2.132) можно проинтегрировать по частям и представить в следующем виде:

$$s = \frac{F}{c} \left[1 - e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_3 t + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right) \right]. \quad (2.133)$$

Полученное решение представляет собой сумму статического перемещения F/c и перемещения при свободных колебаниях с демпфированием, у которого амплитуда

$$S_a = \frac{F}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega_3} \right)^2}. \quad (2.134)$$

Или суммарное перемещение для всего периода изменения силы F , состоящего из n ступеней получим



$$s_{\Sigma} = \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta F_i \left\{ \begin{array}{l} 1 - e^{-\varepsilon(t-t_i)} * \\ \left[\cos \omega_3(t-t_i) + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3(t-t_i) \right] \end{array} \right\}. \quad (2.135)$$

Второй метод. Представление непрерывной функции в виде набора ряда импульсов прямоугольной формы.

В этом случае кривая аппроксимируется рядом импульсов прямоугольной формы различной величины, как показано на рис. 2.42. Длительность Δt может быть также различной. Для получения достаточной точности ордината импульса F_i должна быть выбрана такой, чтобы она равнялась значению силы F в середине временного интервала Δt_i . Исходя из этого, ордината первого импульса равняется

$$F_1 = F(t_1 - \Delta t_1/2).$$

Для второго импульса

$$F_2 = F(t_2 - \Delta t_2/2),$$

или

$$F_i = F(t_i - \Delta t_i/2).$$

При одиночном прямоугольном импульсе (за время действия этого импульса Δt) реакция системы определяется также, как и в случае сту-

пенчатой функции, то есть в соответствии с формулой (2.133). Для последующих импульсов необходимо учесть начальные условия со стороны предыдущего импульса

s_{i-1} , \dot{s}_{i-1} в момент времени t_{i-1} и влияния самого импульса, действующего на интервале времени Δt_i . Исходя из выражений (2.114 а) и (2.133), получим

$$s = e^{-\varepsilon(t-t_{i-1})} \left[s_{i-1} \cos \omega_3(t-t_{i-1}) + \frac{\dot{s}_{i-1} + \varepsilon s_{i-1}}{\omega_3} \sin \omega_3(t-t_{i-1}) \right] + \frac{F_i}{c} \left\{ 1 - e^{-\varepsilon(t-t_{i-1})} * \left[\cos \omega_3(t-t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3(t-t_{i-1}) \right] \right\}. \quad (2.136)$$

В конце i -го интервала это выражение принимает вид

$$s_i = e^{-\varepsilon \Delta t_i} \left[s_{i-1} \cos \omega_3 \Delta t_i + \frac{\dot{s}_{i-1} + \varepsilon s_{i-1}}{\omega_3} \sin \omega_3 \Delta t_i \right] + \frac{F_i}{c} \left[1 - e^{-\varepsilon \Delta t_i} \left(\cos \omega_3 \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3 \Delta t_i \right) \right]. \quad (2.137)$$

При отсутствии демпфирования получим

$$s_i = s_{i-1} \cos \omega_c \Delta t_i + \frac{\dot{s}_{i-1}}{\omega_c} \sin \omega_c \Delta t_i + \frac{F_i}{c} (1 - \cos \omega_c \Delta t_i). \quad (2.138)$$

Из последнего выражения находим скорость \dot{s}_i в конце i -го интервала времени

$$\dot{s}_i = -s_{i-1} \omega_c \sin \omega_c \Delta t_i + \dot{s}_{i-1} \cos \omega_c \Delta t_i + \frac{F_i}{c} \omega_c \sin \omega_c \Delta t_i. \quad (2.139)$$

Данные выражения (2.138) и (2.139) позволяют определить динамические параметры одномассовой системы без демпфирования в конце i -го интервала времени. Одновременно они являются начальными условиями в начале шага ($i+1$). Последовательно используя эти формулы, можно определить перемещения и скорость колеблющейся системы во времени.

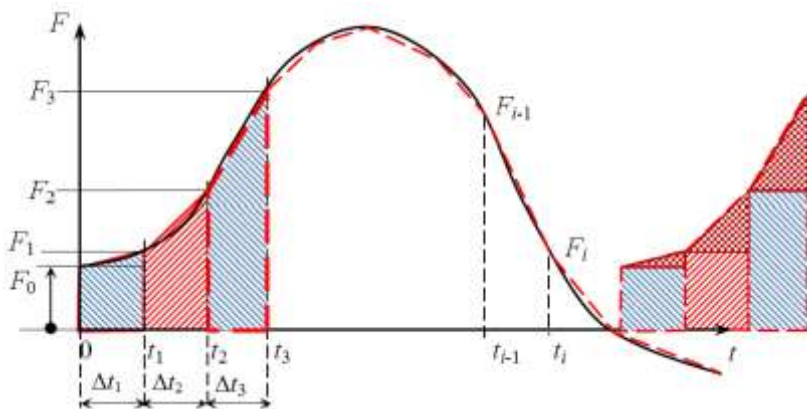
Оба представленных способа численного интегрирования относятся к *интерполяции кусочно-постоянного типа*. При этом не всегда удобно делать равными погрешности площади областей, лежащих над кривой функции возмущающей силы и под ней. Рассмотрим третий способ представления импульсного возмущения с помощью наклонных линий и вертикальных полос.

Третий метод. Представление непрерывной функции методом интерполяции кусочно-линейного типа.

На рис. 2.43 показан пример интерполяции кривой импульсного возмущения методом интерполяции кусочно-линейного типа.

Гладкая кривая заменяется на интервале времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ прямой линией, то есть возрастает по линейному закону, называемому линейной функцией. Скорость возрастания функции F в единицу времени равна $\frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} = \frac{F_i - F_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$. Из анализа рис. 2.43 площадью правой части (над прямой линией) можно пренебречь. Заменяющий импульс будет состоять из двух частей – прямоугольного импульса и самой линейной функции. Исходя из этого, реакция колебательной системы будет определяться выражением (2.136) для прямоугольного импульса и выражением (2.114) при изменении силы F по линейному закону $F = \frac{\Delta F_i}{\Delta t_i} t'$,

где t' – фиктивное время на интервале Δt_i .



Учитывая вышеизложенное,

проинтегрируем (2.114) и получим окончательно

$$\begin{aligned}
s &= e^{-\varepsilon(t-t_{i-1})} \left[s_{i-1} \cos \omega_3(t-t_{i-1}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\dot{s}_{i-1} + \varepsilon s_{i-1}}{\omega_3} \sin \omega_3(t-t_{i-1}) \right] \\
&+ \frac{F_{i-1}}{c} \left\{ 1 \right. \\
&\quad \left. - e^{-\varepsilon(t-t_{i-1})} \left[\cos \omega_3(t-t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3(t-t_{i-1}) \right] \right\} \\
&+ \frac{\Delta F_i}{c \Delta t_i} \left\{ t - t_{i-1} - \frac{2\varepsilon}{\omega_3^2} + e^{-\varepsilon(t-t_{i-1})} \left[\frac{2\varepsilon}{\omega_3^2} \cos \omega_3(t-t_{i-1}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega_3^2 - \varepsilon^2}{\omega_c^2 \omega_3} \sin \omega_3(t-t_{i-1}) \right] \right\}. \tag{2.140}
\end{aligned}$$

В конце i -го интервала времени выражение (2.140) будет иметь форму

$$\begin{aligned}
s &= e^{-\varepsilon \Delta t_i} \left[s_{i-1} \cos \omega_3 \Delta t_i + \frac{\dot{s}_{i-1} + \varepsilon s_{i-1}}{\omega_3} \sin \omega_3 \Delta t_i \right] \\
&+ \frac{F_{i-1}}{c} \left\{ 1 - e^{-\varepsilon \Delta t_i} \left[\cos \omega_3 \Delta t_i + \frac{\varepsilon}{\omega_3} \sin \omega_3 \Delta t_i \right] \right\} \\
&+ \frac{\Delta F_i}{c \Delta t_i} \left\{ t - t_{i-1} - \frac{2\varepsilon}{\omega_3^2} + e^{-\varepsilon \Delta t_i} \left[\frac{2\varepsilon}{\omega_3^2} \cos \omega_3 \Delta t_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega_3^2 - \varepsilon^2}{\omega_c^2 \omega_3} \sin \omega_3 \Delta t_i \right] \right\}. \tag{2.141}
\end{aligned}$$

Пренебрегая демпфированием, из последнего выражения получим

$$\begin{aligned}
s_i &= s_{i-1} \cos \omega_c \Delta t_i + \frac{\dot{s}_{i-1}}{\omega_c} \sin \omega_c \Delta t_i + \frac{F_{i-1}}{c} \times \\
&\times (1 - \cos \omega_c \Delta t_i) + \frac{\Delta F_i}{\omega_c c \Delta t_i} (\omega_c \Delta t_i - \sin \omega_c \Delta t_i), \tag{2.142}
\end{aligned}$$

откуда находим колебательную скорость \dot{s}_i в конце i -го интервала времени

$$\begin{aligned}
\dot{s}_i &= -s_{i-1} \omega_c \sin \omega_c \Delta t_i + \dot{s}_{i-1} \cos \omega_c \Delta t_i + \frac{F_{i-1}}{c} \omega_c \sin \omega_c \Delta t_i \\
&+ \frac{\Delta F_i}{\omega_c c \Delta t_i} (1 - \cos \omega_c \Delta t_i). \tag{2.143}
\end{aligned}$$

2.12. Примеры и задачи к главе 2

Пример 2.1

Груз массой m подвешен на двух пружинах, как показано на рис. 2П.1, а и б.

Определить:

1. Эквивалентный коэффициент жёсткости системы и частоту вертикальных колебаний груза, если коэффициенты жёсткости пружин равны c_1 и c_2 .

2. Эквивалентный коэффициент жёсткости системы и частоту вертикальных колебаний груза, если коэффициенты жёсткости пружин равны $c_1 = c_2$.

Решение:

1. В случае, показанном на рис. 2П.1, а, статическое перемещение груза массой m равно

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{c_1} + \frac{mg}{c_2} = \frac{mg(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}.$$

Эквивалентный коэффициент жёсткости равен $c = c_1 c_2 / (c_1 + c_2)$.

Круговая частота собственных колебаний в соответствии с формулой (2.32) равна

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}, \text{ рад/с.}$$

Частота собственных колебаний в Гц

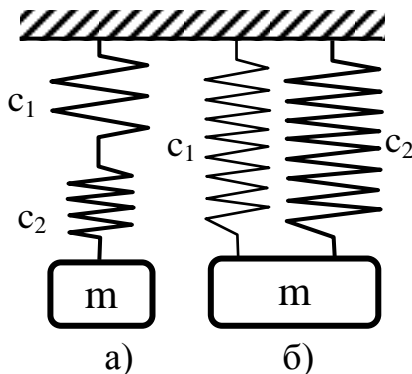


Рис. 2П.1

$$f = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}, \text{ Гц.}$$

2. В случае, показанном на рис. 2П.1, б

$$\lambda_{ст} = \frac{mg}{2c} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2c}{m}}.$$

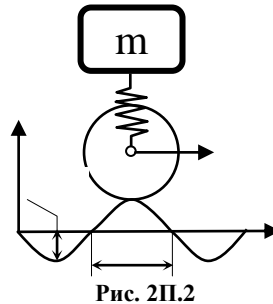
Пример 2.2

Колесо катится с постоянной горизонтальной скоростью v вдоль волнистой поверхности (рис. 2П.2). Определить туду вынужденных вертикальных колебаний груза массой m , связанного пружиной с осью са, если статическая деформация пружины под действием груза mg составляет $\lambda_{ст} = 0,098$ м, $v = 18$ м/с и поверхность профиля дороги задана уравнением $s_1 = S_{a,пр} \sin \frac{\pi x}{l}$,

где $S_{a,пр} = 0,025$ м и $l = 0,9$ м. Массой колеса пренебречь.

Решение

В разделе 2.3.1 было принято, что возмущающая сила изменяется по гармоническому закону $F = F_0 \cdot \sin \omega_b t$ формула (2.45). В разделе 2.10 рассмотрены вынужденные колебания при произвольном перемещении опоры. В



яни-
стью
сти
пли-
каль-
м,
коле-
ция

данном примере перемещение опоры задано кинематически по синусоидальному закону.

Рассмотрим вынужденные колебания системы с одной степенью свободы при кинематическом возбуждении по гармоническому закону перемещения опоры $s(t) = S_a \cdot \sin \omega_B t$,

где S_a – амплитуда перемещения опоры;

ω_B – круговая частота вынужденных колебаний опоры.

Уравнение вынужденных колебаний запишется

$$m\ddot{s} + cs = cS_a \sin \omega_B t.$$

Разделив предыдущее уравнение на m , и вводя обозначения

$$\omega_c^2 = \frac{c}{m}, \quad q = \frac{cS_a}{m}, \quad (2П. 1)$$

получим

$$\ddot{s} + \omega_c^2 s = q \cdot \sin \omega_B t.$$

Это уравнение идентично ранее полученному уравнению (2.46) и, следовательно, установившиеся вынужденные колебания описываются аналогично выражению (2.51)

$$s = \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t = \frac{cS_a}{m} \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t = \frac{\omega_c^2 \cdot S_a}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \sin \omega_B t.$$

Или окончательно

$$s = \frac{S_a}{1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}} \sin \omega_B t. \quad (2П. 2)$$

Определим частоту собственных колебаний груза массой m по формуле (2П.1). Жёсткость пружины по определению равна

$c = mg/\lambda_{\text{ст}}$. Тогда круговая частота собственных колебаний массы m определится как $\omega_c^2 = g/\lambda_{\text{ст}} = 100 \text{ с}^{-2}$, или $\omega_c = 10 \text{ с}^{-1}$.

Центр O катящегося колеса совершает вертикальные колебания вследствие волнистости пути. Предполагая, что в начальный момент $t = 0$ точка соприкосновения колеса находится в начале координат $x = 0$, и подставляя $x = vt$, получаем для этих вертикальных колебаний уравнение $s_1 = S_a \sin \frac{\pi vt}{l} = S_a \sin \omega_v t$.

Вынужденные колебания груза определяются из уравнения (2П.2). Подставим в него значения $S_a = 0,025 \text{ м}$, $\omega_v = \frac{\pi v}{l} = 20\pi \text{ с}^{-1}$, $\omega_c^2 = 100 \text{ с}^{-2}$.

Примем $\sin \omega_v t = -1$, что соответствует максимальному перемещению колеса вверх. Получим амплитуду вынужденных колебаний груза массой m , которая равна $s = 0,025/(4\pi^2 - 1) = 0,00065 \text{ м}$. При данной скорости v вертикальные колебания колеса лишь в очень слабой степени передаются массе m в связи с большим значением вынужденной частоты. Вынужденная частота в Гц равна $f = \omega_v/2\pi = 10 \text{ Гц}$. Отношение $\omega_v/\omega_c \approx 6,28$, а следовательно коэффициент динамичности

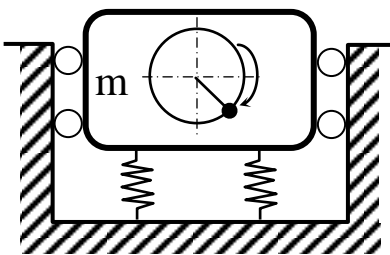
$k_d \ll 1$, это говорит о том, что система находится далеко в зарезонансной зоне.

Если уменьшить вчетверо скорость v колеса, то есть снизить круговую частоту вынужденных колебаний, которая будет равняться $\omega_v = 5\pi \text{ с}^{-1}$ ($f = 2,5 \text{ Гц}$), это приведёт к уменьшению коэффициента расстройки системы $z = \omega_v/\omega_c = 1,57$ в 4 раза и приближению режима работы системы к зоне резонанса. Амплитуда вынужденных колебаний массы m увеличится и будет равняться $s = 0,025/(\pi^2/4 - 1) = 0,017 \text{ м}$. Следовательно, коэффициент динамичности колебаний массы m возрастает более чем в 26 раз.

При дальнейшем уменьшении скорости v , соответствующей $\omega_v = \omega_c$, наступит резонанс, при этом будут происходить весьма сильные колебания массы m .

Пример 2.3

Двигатель массой 45 кг, опирается на че-
винтовые пружины (рис. 2П.3), изготовленные из
стальной проволоки
метром $d = 12$ мм.
Средний диаметр пружины
 $D = 100$ мм и число витков $n = 10$, угловая скорость вращения вала $\omega = 1800 \text{ мин}^{-1}$, модуль сдвига $G = 80 \cdot 10^9$ Па, центробежная сила инерции от неуравновешенности вала $F_0 = 4,5 \text{ Н}$ при угловой скорости 1 рад/с . Определить наибольшую вертикальную возмущающую силу, передаваемую фундаменту.



$m =$
тыре
(рис.
диа-
жины

Решение

Жёсткость одной пружины равна

$$c = \frac{d^4 G}{8nD^3} = \frac{0,012^4 \cdot 80 \cdot 10^9}{8 \cdot 10 \cdot 0,1^3} = 20736 \text{ Н/м.}$$

Эквивалентная жёсткость 4-х параллельных пружин равна $c_{\text{экв}} = 4 \cdot c = 82944 \text{ Н/м}$.

Квадрат угловой частоты свободных колебаний составляет $\omega_c^2 = c/m = 1843,2 \text{ с}^{-2}$. Круговая частота вынужденных колебаний $\omega_b = \pi/30 = 188,5 \text{ с}^{-2}$.

Тогда центробежная сила, соответствующая этой частоте, равна $F = F_0 \cdot \omega_b = 4,5 \cdot 188,5 = 848,25 \text{ Н}$.

Используя уравнение (2.85) и учитывая, что коэффициент демпфирования $\varepsilon = 0$, получим коэффициент передачи силы

$$\beta = \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2} = \frac{R(t)}{F(t)}$$

где $R(t)$ – сила динамического воздействия на фундамент.

Откуда

$$R(t) = \frac{F(t)\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2} = \frac{848,25 \cdot 1843,2}{1843,2 - 188,5^2} = 46,4 \text{ Н.}$$

Пример 2.4

Тело, колеблющееся с вязким сопротивлением (рис. 2.13), совершает 10 полных колебаний в секунду. При этом амплитуда колебаний уменьшилась до 0,9 начальной амплитуды за 10 с.

Определить:

1. Коэффициент демпфирования ε .
2. Уменьшение периода колебаний, которое получится, если устранить затухание.
3. Логарифмический декремент колебаний δ .

Решение

1. Предположим, что движение описывается уравнением

$$x = x_0 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_3 t.$$

Частота затухающих колебаний ω_3 определится как $\omega_3 = 2\pi \cdot f = 20\pi$.

Подставим в это уравнение $x = 0,9 \cdot x_0$, $t = 10$ с, $\omega_3 = 20\pi$, находим:

$$e^{10\varepsilon} = \frac{1}{0,9} = 1,111.$$

Откуда $\varepsilon = 0,01054$.

2. По определению $\omega_3^2 = \omega_c^2 - \varepsilon^2$, или $\omega_c^2 = \omega_3^2 + \varepsilon^2$.

Вычислим

$$\omega_c^2 = 3947,8418 \text{ с}^{-1}.$$

Период затухающих колебаний

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}}.$$

Период свободных колебаний без затухания $T_c = 2\pi/\omega_c$.

Отношение

$$\frac{T_3}{T_c} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_c^2}}}$$

После вычислений получаем $T_3/T_c = 0,99999998$.

3. Логарифмический декремент затухания по определению равен $\delta = \ln\Delta = \varepsilon \cdot T_3 = 0,01054 \cdot 1/10 = 0,001054$.

Пример 2.5

Дано: Одномассовая система с затуханием (рис. 2.13). Система выведена из состояния равновесия и совершает свободные колебания. Начальные условия: начальное смещение $s = S_0$, начальная скорость $\dot{s} = 0$, затухание больше критического, т.е. $\varepsilon > \omega_c$.

Определить общий характер графической зависимости перемещение массы по времени.

Решение

Подставляя начальные условия $s = S_0$ и $\dot{s} = 0$ при $t = 0$ в выражение (2,44, а) и его первую производную по времени, находим:

$C_1 + C_2 = S_0$; $C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = 0$, откуда

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 S_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = +\frac{\lambda_1 S_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Таким образом, в этом случае общее решение принимает вид:

$$s = \frac{S_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}).$$

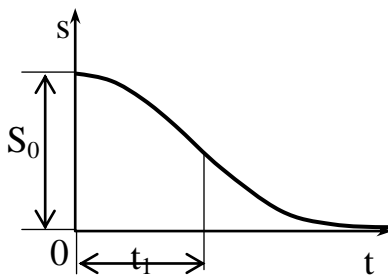
Дважды дифференцируя это выражение по времени, находим следующие выражения для скорости и ускорения:

$$\dot{s} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \quad (2П.4)$$

$$\ddot{x} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 S_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t}) \quad (2П.5)$$

Анализом выражения (2П.4) но, что при $t = 0$ и при скорости равна нулю и что она отрицательна для всех промежуточных значений t , так как обе величины отрицательны. Чтобы найти t_1 , в котором эта отрицательная скорость максимальна, приравняем жение (2П.5) нулю и получим:

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$



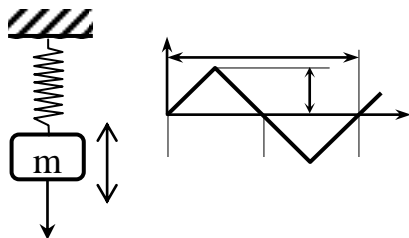
выявляе-
 $t = \infty$
отри-
ных
 λ_1 и λ_2
момент
ско-
выра-

$$(2П.6)$$

Из выражений (2П.3...2П.6) заключаем, что кривая «перемещение – время» имеет вид, показанный на рис. 2П.4.

Пример 2.6

Система, показанная на рис. 2П.5, подвергается действию вертикальной возмущающей силы $F(t)$, которая изменяется во времени соответственно графику, изображённому на этом же рисунке. Пренебрегая демпфированием, найти установившийся процесс вынужденных колебаний $x = f(t)$, если масса m и коэффициент жё-



сткости пружины $c_{\text{пр}}$ таковы, что $\omega_{\text{в}}/\omega_{\text{с}} = 0,9$.

Решение

Разложим функцию $F(t)$ в ряд Фурье:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_{\text{в}} t + a_2 \cos 2\omega_{\text{в}} t + \dots + b_1 \sin \omega_{\text{в}} t + b_2 \sin 2\omega_{\text{в}} t + \dots, \quad (2\text{П.7})$$

где $\omega_{\text{в}} = 2\pi/T_{\text{в}}$ – круговая частота возмущающей силы.

Или можно записать

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\omega_{\text{в}} t + b_i \sin i\omega_{\text{в}} t, \quad (2\text{П.8})$$

где

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_{\text{в}}} \int_0^{T_{\text{в}}} F(t) dt; \quad a_i = \frac{2}{T_{\text{в}}} \int_0^{T_{\text{в}}} F(t) \cos i\omega_{\text{в}} t dt; \\ b_i = \frac{2}{T_{\text{в}}} \int_0^{T_{\text{в}}} F(t) \sin i\omega_{\text{в}} t dt; \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2\text{П.9})$$

или в амплитудной форме

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \sin(\omega_{\text{в}i} t + \beta_i), \quad (2\text{П.10})$$

где

$$F_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \omega_{\text{в}i} = i\omega_{\text{в}}; \quad \beta_i = \arctg \frac{a_i}{b_i}.$$

Рассматривая сначала выражение (2П.9), мы видим, что $\int_0^{T_{\text{в}}} F(t) dt$ есть просто площадь, ограниченная пилообразным графиком на рис. 2П.5, в интервале от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega_{\text{в}}$. Ясно, что эта площадь равна нулю, и поэтому $a_0 = 0$.

Рассматривая далее выражение (2П.9) в отношении a_i , мы видим, что каждая ордината графика рис. 2П.5 должна быть умножена на $\cos i\omega_{\text{в}} t$ и проинтегрирована в пределах от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega_{\text{в}}$. Из антисимметрии функции $F(t)$ относительно прямой $t = \pi/\omega_{\text{в}}$ и симметрии функции $\cos i\omega_{\text{в}} t$ относительно той же прямой заключаем, что этот интеграл исчезает и $a_i = 0$.

Рассматривая, наконец, выражение b_i , мы видим, что каждая ордината графика рис. 2П.5 должна быть умножена на $\sin i\omega_{\text{в}} t$ и проинтегрирована в пределах от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega_{\text{в}}$. В данном случае функция $F(t)$, рассматриваемая в интервале от $t = 0$ до $t = \pi$ и от $t = \pi$ до $t = 2\pi/\omega_{\text{в}}$.

$t = \pi/\omega_в$ симметрична относительно прямой $t = \pi/2\omega_в$, а рассматриваемая в интервале от $t = \pi/\omega_в$ до $t = 2\pi/\omega_в$, симметрична относительно прямой $t = 3\pi/2\omega_в$.

Если i есть чётное число, то соответствующие участки функции $\sin i\omega_в t$ антисимметричны относительно тех же прямых $t = \pi/2\omega_в$ и $t = 3\pi/2\omega_в$. Таким образом, для $i = 2, 4, 6, \dots$ мы получим $b_i = 0$.

Если i есть нечётное число, то функции $F(t)$ и $\sin i\omega_в t$ антисимметричны относительно прямой $t = \pi/\omega_в$ и получим:

$$b_i = \frac{\omega_в}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_в}} F(t) \sin i\omega_в t dt = \frac{4\omega_в}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega_в}} F(t) \sin i\omega_в t dt. \quad (2П.11)$$

Обращаясь к рис. 2П.5, мы видим, что в интервале от $t = \pi/2\omega_в$ до $t = 3\pi/2\omega_в$

$$F(t) = \frac{2F_0\omega_в}{\pi} t.$$

Подставляя это в выражение (2П.11), получаем:

$$b_i = \frac{8F_0\omega_в^2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2\omega_в}} t \sin i\omega_в t dt = \frac{8F_0}{i^2\pi^2} \int_0^{\frac{i\pi}{2}} u \sin u du.$$

Интегрируя и подставляя пределы, находим:

$$b_i = \frac{8F_0}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi}{2} = \frac{8F_0}{i^2\pi^2} (-1)^{\frac{i-1}{2}}, \quad (2П.12)$$

где, очевидно, $i = 1, 3, 5, 7, \dots$

Учитывая, что $a_0 = 0$, $a_i = 0$ и используя выражение (2П.12) для b_i , получим ряд Фурье в виде:

$$F(t) = \frac{8F_0}{\pi^2} \left(\sin \omega_в t - \frac{1}{3^2} \sin 3\omega_в t + \frac{1}{5^2} \sin 5\omega_в t - \dots \right). \quad (2П.13)$$

Как видно, для представления пилообразного графика на рис. 2П.5 в виде тригонометрического ряда, мы должны суммировать синусоиды только с нечётным числом волн в интервале от $t = 0$ до $t = 2\pi/\omega_B$. Это совершенно естественно, так как только в этом случае мы можем сохранить антисимметричную форму данного графика. Далее мы видим, что ряд (2П.13) сходится настолько быстро, что практически важен только первый член. Это попросту означает, что пилообразная возмущающая сила вызывает практически тот же эффект, что и простая гармоническая возмущающая сила несколько меньшей амплитуды:

$$F(t) = \frac{8}{\pi^2} F_0 \sin \omega_B t. \quad (2П.14)$$

Чтобы оценить несущественность второго члена ряда, заметим, что при $\omega_B / \omega_c = 0,9$ коэффициент динамичности равен

$$k_{д3} = \frac{1}{1 - (3\omega_B / \omega_c)^2} = -0,159.$$

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний, вызванных вторым членом ряда, равна всего $0,159/3^2 = 0,0177$ от прогиба при статическом приложении силы $8F_0/\pi^2$. Коэффициент динамичности для первого члена ряда равен

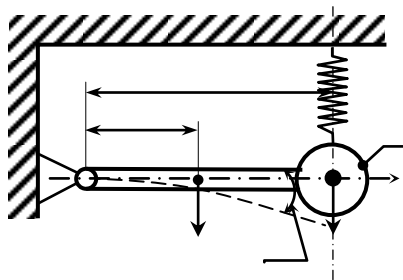
$$k_{д1} = \frac{1}{1 - (\omega_B / \omega_c)^2} = 5,26.$$

Следовательно, можно сделать вывод, не учёт второго члена ряда даёт ошибку, меньшую 0,4%. Приближенное выражение, описывающее перемещение, примет вид

$$x = \frac{8F_0 k_{д1}}{\pi^2 c_{пр}} \sin \omega_B t. \quad (2П.15)$$

Пример 2.7

Стержень весом G_1 прикреплён к стене при помощи шарнира O . На конце стержня находится груз B весом G . Стержень с грузом удерживается в горизонтальном положении вертикальной пружиной с коэффициентом жёсткости c (рис. 2П.6). Расстояние от шарнира до центра тяжести груза и стержня соответственно равны l и l_1 . Момент инерции стержня относительно оси O равен J_0 . Принять за обобщённые координаты z – отклонение центра тяжести груза B от положения горизонтального равновесия или φ – угол поворота стержня.



Стержень с грузом удерживается в горизонтальном положении вертикальной пружиной с коэффициентом жёсткости c (рис. 2П.6). Расстояние от шарнира до центра тяжести груза и стержня соответственно равны l и l_1 . Момент инерции стержня относительно оси O равен J_0 . Принять за обобщённые координаты z – отклонение центра тяжести груза B от положения горизонтального равновесия или φ – угол поворота стержня.

Определить:

1. Коэффициенты инерции и жёсткости этой системы.
2. Частоту и период её колебаний.

Решение

Приняв за обобщённую координату z , получаем кинетическую и потенциальную энергию:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{G}{g} + \frac{J_0}{l^2} \right) \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m_{пр} \dot{z}^2;$$

$$\Pi = -G_1 z \frac{l_1}{l} - Gz + \frac{c(f+z)^2}{2} - \frac{cf^2}{2} = - \left(G_1 \frac{l_1}{l} + G \right) z + cfz + \frac{cz^2}{2},$$

где m_{np} – приведённая масса;

f – статическое удлинение пружины в положении равновесия системы;

$cf^2/2$ – потенциальная энергия пружины в положении равновесия, по отношению к которому вычисляется потенциальная энергия системы.

Так как при равновесии

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{z=0} = - \left(G_1 \frac{l_1}{l} + G \right) + cf = 0; \quad cf = G_1 \frac{l_1}{l} + G,$$

то $\Pi = cz^2/2$.

Из выражения кинетической энергии T устанавливаем коэффициент инерции системы, соответствующий обобщённой координате z :

$$a_z = m_{np} = \frac{G}{g} + \frac{J_o}{l^2}.$$

Из выражения потенциальной энергии Π находим коэффициент жёсткости системы, соответствующий этой обобщённой координате $c_z = c$.

Приняв за обобщённую координату угол φ , получаем

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{Gl^2}{g} + J_o \right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} J_{np} \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2} cz^2 = \frac{1}{2} cl^2 \varphi^2.$$

Из выражений T и Π устанавливаем коэффициенты инерции и жёсткости, соответствующие обобщённой координате φ :

$$a_\varphi = J_{np} = \frac{Gl^2}{g} + J_o; \quad c_\varphi = cl^2.$$

Сравнение полученных значений коэффициентов инерции и жёсткости показывает, что они различны для различных обобщённых координат, которые выбираются произвольно. Произвольный выбор обобщённых координат не отражается на значениях частоты и периода свободных колебаний системы, которые являются основными физическими характеристиками этой системы, не зависящими от выбора обобщённых координат.

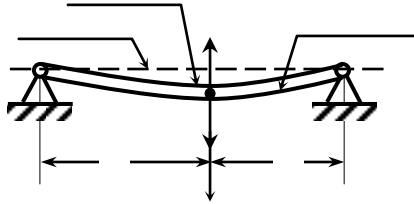
В рассмотренном примере частота ω_c и период T собственных колебаний равны

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_z}{a_z}} = \sqrt{\frac{c_\varphi}{a_\varphi}} = \sqrt{\frac{c}{\frac{G}{g} + \frac{J_0}{l^2}}};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{Gl^2 + J_0 g}{cgl^2}}.$$

Пример 2.8

Балка расположена на двух опорах согласно рис. 2П.7. На балке находится груз G ; расстояния от груза до опор балки равны a и b . Весом балки пренебречь. Определить частоту свободных поперечных колебаний груза на двухопорной балке.



Решение

Определим частоту свободных колебаний груза на балке. Для этого вычислим кинетическую и потенциальную энергию поперечных колебаний балки. Примем за обобщённую координату y , отсчитываемую от равновесного положения. Тогда кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальной энергии в поле сил тяжести Π_I , и потенциальной энергии силы упругости Π_{II} :

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II}.$$

Потенциальная энергия системы в поле сил тяжести

$$\Pi_I = -G \cdot y.$$

Потенциальную энергию сил упругости определим как разность двух значений потенциальной энергии, из которых первое соответствует потенциальной энергии сил упругости в момент, когда прогиб балки в точке расположения груза равен $f+y$, а второе – потенциальной энергии сил упругости в равновесном положении, когда прогиб балки в точке расположения груза равен f .

Имеем

$$\Pi_{II} = \frac{1}{2}c(f+y)^2 - \frac{1}{2}cf^2.$$

Подставляя найденные значения в формулу для вычисления Π получаем

$$\Pi = -Gy + \frac{1}{2}cf^2 + cfy + \frac{1}{2}cy^2 - \frac{1}{2}cf^2,$$

откуда

$$\Pi = -Gy + cfy + \frac{1}{2}cy^2.$$

В положении равновесия

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \text{ т.е. } -G + cf = 0.$$

Таким образом, окончательно

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2.$$

Коэффициент жёсткости c для балки с шарнирными опорами равен

$$c = \frac{3EJ(a+b)}{a^2b^2},$$

где E – модуль упругости материала;

J – экваториальный момент инерции поперечного сечения балки.

Зная массу груза m и коэффициент жёсткости балки c , найдём частоту свободных поперечных колебаний рассматриваемой балки с грузом:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{3EJ(a+b)}{ma^2b^2}}.$$

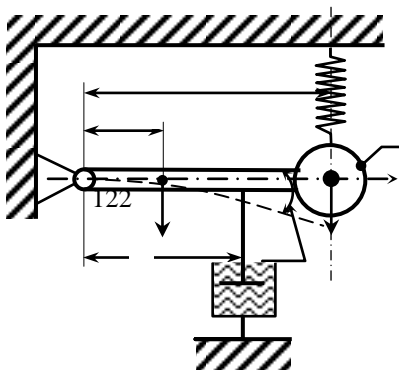
Период колебаний балки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{ma^2b^2}{3EJ(a+b)}}.$$

Величина полученного периода колебаний балки с грузом меньше величины её действительного периода колебаний, так как в расчётах вес балки не учтён.

Пример 2.9

На рис. 2П.8 представлена балка с грузом и присоединённым жидкостным демпфером. Демпфер присоединён на расстоянии шарнира O . Демпфирование при-



система
ным
Демп-
 l_2 от
нять

линейным, то есть пропорциональным скорости колебаний $F_{\text{сопр}} = h \cdot v$, где h – коэффициент линейного вязкого сопротивления; v – колебательная скорость.

Определить:

1. Частоту и период колебаний системы.

2. Установить также значение h , при котором система совершает апериодическое движение.

Решение

Примем за обобщённую координату механической системы угол поворота φ .

Кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой механической системы определены при решении примера 2.7 и равны:

$$T = \frac{1}{2}(ml^2 + J_0)\dot{\varphi}^2; \quad \Pi = \frac{1}{2}cl^2\varphi^2.$$

Из этих выражений находим коэффициент инерции механической системы a_φ и коэффициент жёсткости c_φ :

$$a_\varphi = ml^2 + J_0; \quad c_\varphi = cl^2.$$

Обобщённая сила сопротивления демпфера

$$F_{\text{сопр}} = -h v = -hl_2\dot{\varphi}.$$

Так как

$$F_{\text{сопр}} = -b_\varphi\dot{\varphi} = -hl_2\dot{\varphi},$$

то

$$b_\varphi = hl_2.$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний механической системы при наличии сопротивления, пропорционального первой степени скорости, имеет вид

$$a_\varphi\ddot{\varphi} + b_\varphi\dot{\varphi} + c_\varphi\varphi = 0.$$

Подставляя найденные значения a_φ , b_φ и c_φ , получаем

$$(ml^2 + J_0)\ddot{\varphi} + hl_2\dot{\varphi} + cl^2\varphi = 0$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{hl_2}{ml^2 + J_0}\dot{\varphi} + \frac{cl^2}{ml^2 + J_0}\varphi = 0, .$$

где

$$2\varepsilon = \frac{hl_2}{ml^2 + J_0}, \quad \text{т.е.} \quad \varepsilon = \frac{hl_2}{2(ml^2 + J_0)},$$

$$\omega_c^2 = \frac{cl^2}{ml^2 + J_0}, \quad \text{т.е.} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{cl^2}{ml^2 + J_0}}.$$

Зная частоту свободных колебаний механической системы ω_c и коэффициент затухания ε , определяем частоту затухающих колебаний ω_3 :

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}.$$

Период затухания колебаний механической системы

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}}.$$

Значение коэффициента линейного вязкого сопротивления, при котором система совершает аperiodическое движение, определяем из условия $\varepsilon \geq \omega_c$, т.е.

$$\frac{hl_2}{2(ml^2 + J_0)} \geq \sqrt{\frac{cl^2}{ml^2 + J_0}},$$

откуда

$$h \geq \frac{2l}{l_2} \sqrt{c(ml^2 + J_0)}.$$

Пример 2.10

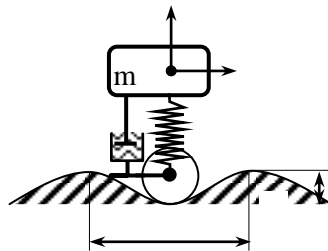
Надрессорный груз m движется по ровной поверхности согласно рис. 2П.9. Профиль дорожного покрытия определяется уравнением

$$y = Y_{\max} \sin^2 \frac{\pi l_1}{l},$$

где l – длина волны профиля. Скорость движения груза v постоянная.

Исследовать относительные колебания движущегося груза, вызываемые неровностями пути.

Решение



мас-
ров-
но
рож-
ется

филя.

Относительное положение наддрессорного груза определяется координатой s . Дифференциальное уравнение относительных колебаний системы аналогично дифференциальному уравнению (2.108), необходимо лишь к силам, действующим на эту систему, присоединить переносную силу инерции (переносное движение – движение поступательное).

Кинетическая энергия наддрессорного груза в относительном движении $T_r = 1/2ms^2$.

Следовательно, коэффициент инерции $a = \tau$.

Так как в рассматриваемой задаче обобщённая возмущающая сила $F(t) = 0$, то дифференциальное уравнение относительных колебаний груза принимает вид

$$\ddot{y} + 2h\dot{s} + c^2s = \frac{1}{m}\Phi_e,$$

где Φ_e – переносная сила инерции;

h – коэффициент демпфирования:

$(h < \omega_c)$, $\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – частота свободных колебаний.

Найдём переносную силу инерции Φ_e . Так как $l_1 = vt$, то

$$\begin{aligned}\Phi_e &= -m\ddot{y} = -m \frac{d^2}{dt^2} \left(Y_{\max} \sin^2 \frac{\pi vt}{l} \right); \\ \Phi_e &= -m \frac{2\pi^2 v^2 Y_{\max}}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + c^2s &= -\frac{2\pi^2 v^2 Y_{\max}}{l^2} \cos \frac{2\pi vt}{l} \quad \text{ИЛИ} \\ \ddot{s} + 2\varepsilon\dot{s} + c^2s &= -q \cos \omega_b t,\end{aligned}$$

где $\omega_b = \frac{2\pi v}{l}$; $q = \frac{Y_{\max} \omega_b^2}{2}$.

Общее решение этого дифференциального уравнения вынужденных колебаний имеет вид

$$s = e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_3 \cdot t + C_2 \sin \omega_3 \cdot t) - A_B \cos(\omega_B t - \gamma),$$

где $\omega_3 = \sqrt{\omega_c^2 - \varepsilon^2}$ – частота затухающих колебаний;

ω_B – частота вынужденных колебаний;

A_B – амплитуда вынужденных колебаний,

$$A_B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_c^2}};$$

γ – разность или сдвиг фаз,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{2\varepsilon \omega_B}{\omega_c^2 - \omega_B^2};$$

C_1 и C_2 – постоянные, определяемые из начальных условий задачи.

Найдём эти постоянные из условий при $t=0$; $s_0=0$; $\dot{s}_0=0$.

Так как

$$\begin{aligned} s &= e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t) - A_B \cos(\omega_B t - \gamma); \\ \dot{s} &= e^{-\varepsilon t} (C_2 \omega_3 \cos \omega_3 t - C_1 \omega_3 \sin \omega_3 t) - \\ &- \varepsilon e^{-\varepsilon t} (C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t) + A_B \omega_B \sin(\omega_B t - \gamma), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} y_0 &= C_1 - A_B \varepsilon \cos \gamma = 0; \quad C_1 - A_B \varepsilon \cos \gamma; \\ \dot{s}_0 &= C_2 \omega_3 - \varepsilon C_1 - A_B \omega_B \sin \gamma = 0; \quad C_2 = \frac{A_B}{\omega_3} (\varepsilon \cos \gamma + \omega_B \sin \gamma). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение относительных колебаний наддрессорного груза

$$s = A_B e^{-\varepsilon t} \left(\cos \gamma \cos \omega_3 t + \frac{1}{\omega_3} (\varepsilon \cos \gamma + \omega_B \sin \gamma) \sin \omega_3 t \right) - A_B \cos(\omega_B t - \gamma).$$

Первый член правой части этого уравнения определяет затухающие, а второй вынужденные колебания груза,

вызываемые неровностями пути. Если сопротивление не учитывается, то $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0$; $\omega_3 = \omega_B$ и уравнение принимает вид

$$s = \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_B^2} (\cos \omega_c t - \cos \omega_B t).$$

В случае резонанса, т.е. когда $\omega_B = \omega_c$; $\gamma = \frac{\pi}{2}$; $\varepsilon \neq 0$,

$$s = \frac{q}{2\varepsilon\omega_c} \left(\frac{\omega_c e^{-\varepsilon t}}{\omega_3} \sin \omega_3 t - \sin \omega_c t \right).$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A_B = \frac{q}{2\varepsilon\omega_c} = \frac{\omega_c Y_{\max}}{4\varepsilon}.$$

Для коэффициента затухания $\varepsilon = 0,1\omega_c$

$$A_B = 2,5Y_{\max}.$$

Критическая скорость, при которой наступает резонанс, определится из следующего соотношения:

$$\omega_c = \omega_B = \frac{2\pi v_k}{l}; v_k = \frac{\omega_c l}{2\pi} = \frac{l}{T},$$

где T – период свободных колебаний груза.

Если длина волны $l = 6$ м; $T = 0,3$ с, то $v_k = 20$ м/с = 72 км/час.

Период T обычно вычисляют по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Так как

$$c = \frac{mg}{f},$$

где f – статическое удлинение винтовой пружины, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}$$

Для коэффициента затухания $\varepsilon = 0$ правая часть уравнения

$$s = \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_b^2} (\cos \omega_c t - \cos \omega_b t)$$

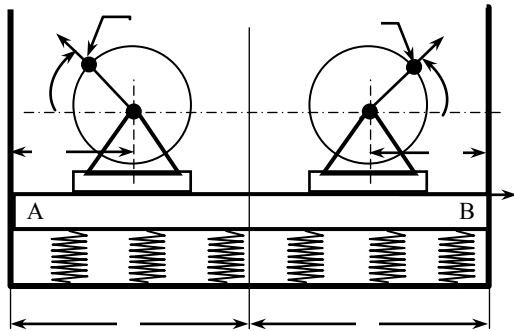
при $\omega_b = \omega_c$, т.е. в случае резонанса, обращается в неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Раскрывая эту неопределённость, получаем

$$s = -\frac{qt}{2\omega_c} \sin \omega_c t = -\frac{\omega_c Y_{\max} t}{4} \sin \omega_c t.$$

Амплитуда вынужденных колебаний груза $A_B = \frac{\omega_c Y_{\max} t}{4}$ с течением времени неограниченно возрастает.

Пример 2.11

На рис. 2П.10 представлена плита АВ на упругом основании. На плите установлены два инерционных возбуждителя. Масса неуравновешенных грузов m_1 , грузы расположены на радиусе r . Жёсткость упругого основания c_0 ; площадь основания s ; масса всей системы m ; силы сопротивления пропорциональны



скорости; угловая скорость вала каждого вибратора ω_b постоянна; деформацией плиты АВ пренебречь.

Исследовать колебания системы.

Решение

Положение системы определяется координатой y , отсчитывается от состояния устойчивого равновесия системы.

Кинетическая энергия системы $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$; коэффициент инерции t . Потенциальная энергия системы

$$П = \frac{c_0(y+f)^2}{2} - Gy - \frac{c_0sf^2}{2} = \frac{c_0sy^2}{2},$$

так как

$$-Gy + c_0sfy = 0,$$

где $G = mg$; c_0sf – статическая реакция упругого основания $P_c = G$; следовательно, $c = c_0s$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний рассматриваемой системы без учёта сопротивлений имеет вид

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \frac{1}{m} F(t),$$

где $F(t)$ – возмущающая сила;

ω_c – частота свободных колебаний системы,

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_0s}{m}}.$$

Найдём силу $F(t)$. Сила $F(t)$ равна алгебраической сумме проекций на ось y центробежных сил инерции неуравновешенных грузов вибраторов (рис. 2П.10), т.е.

$$F(t) = 2\Phi_n \sin \omega_b t = 2m_1 r \omega_b^2 \sin \omega_b t.$$

Следовательно, без учёта демпфирования

$$\ddot{y} + \omega_c^2 y = \frac{2m_1 r \omega_B^2}{m} \sin \omega_B t; \quad \text{ИЛИ} \quad \ddot{y} + \omega_c^2 y = f_0 \sin \omega_B t,$$

где

$$f_0 = \frac{2m_1 r \omega_B^2}{m}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний согласно (2.52) равна

$$A_B = \frac{f_0}{\omega_c^2 - \omega_B^2}.$$

Если $\omega_B = \omega_c$, то наступает резонанс и $A_B \rightarrow \infty$.

Критическая угловая скорость ω_k определится из условия

$$\omega_k = \sqrt{\frac{c_0 s}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f_{ст}}}, \quad \text{так как} \quad c_0 s = \frac{mg}{f_{ст}},$$

где $f_{ст}$ – статическая осадка упругого основания;
для осадки $f_{ст} = 0,01$ м:

$$\omega_k = \sqrt{981} \approx 31,3 \approx 10\pi \text{ с}^{-1} \quad \text{ИЛИ}$$

$$n_k = \frac{30\omega}{\pi} \approx 300 \text{ МИН}^{-1}.$$

Осадка $f_{ст}$, а также коэффициент жёсткости упругого основания c_0 определяют опытным путём – статическими методами.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учётом сопротивления (11.1) имеет вид

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_c^2 y = \frac{1}{m} F(t),$$

где ε – коэффициент затухания ($\varepsilon < \omega_c$).

Для рассматриваемой системы

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_c^2 y = f_0 \sin \omega_B t,$$

где f_0 – имеет прежнее значение, т.е.

$$f_0 = \frac{2m_1 r \omega_B^2}{m}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega_B^2}}.$$

В случае резонанса ($\omega_B = \omega_c$)

$$A_{\text{рез}} = \frac{\omega_c}{2\varepsilon\omega_c} = \frac{m_1 r \omega_c}{m\varepsilon}.$$

Коэффициент затухания ε можно определить лишь опытным путём, применяя динамические методы исследования. Обычно применяют следующие два метода:

1. Коэффициент затухания определяют из экспериментального графика затухающих колебаний по формуле (2.42 б).

2. Коэффициент ε вычисляют по формуле

$$\varepsilon = \frac{f_0}{2A_{\text{рез}}\omega_c},$$

где $A_{\text{рез}}$ – амплитуда вынужденных колебаний при $\omega_B = \omega_c$, т.е. в случае резонанса, найденная опытным путём.

В данном случае

$$\varepsilon = \frac{m_1 r \omega_c}{A_{\text{рез}} m}.$$

Если

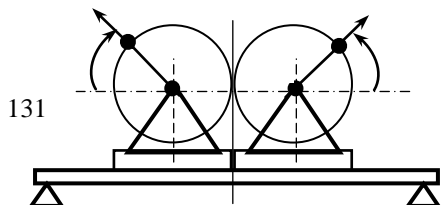
$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{50}, \quad r = 0,05 \text{ м}, \quad A_{\text{рез}} = 0,005 \text{ м},$$

то

$$\varepsilon = 0,2\omega_c; \quad \text{или} \quad \varepsilon = 0,2\omega_k \approx 2\pi \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2.12

На середине балки установлен вибратор (рис. 2П.11).



Частота вращения вала вибратора 600 мин^{-1} , вес вибратора

$W = 4500 \text{ Н}$, вес несбалансированного груза $2P = 4,5 \text{ Н}$, статический прогиб балки

$\delta_{\text{ст}} = 0,00025 \text{ м}$. Коэффициент вязкого демпфирования $h = 18 \cdot 10^3 \text{ (Н} \cdot \text{с)/м}$. Весом балки пренебречь.

Определить:

1. Амплитуду вынужденных колебаний, вызываемых вибратором, установленным посередине.

2. Амплитуду вынужденных колебаний при резонансе ($\omega_B = \omega_C$).

Решение

$$1. \omega_B = 2\pi(600/60) = 20\pi; \quad \omega_B^2 = 400\pi^2;$$

$$\omega_C^2 = g / \delta_{\text{ст}} = 39240 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon = \frac{hg}{2W} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{2 \cdot 4500} = 19,6 \frac{1}{\text{с}}; \quad 2P\omega_B^2 = 4,5\omega_B^2 = 1800\pi^2;$$

Подставляя полученные значения в (2.64 а), полу-

чим

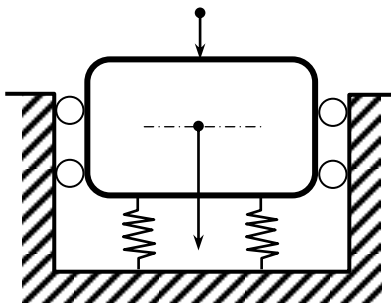
$$A = \frac{2P\omega_B^2 g}{W} \frac{1}{\sqrt{(\omega_C^2 - \omega_B^2)^2 + 4\varepsilon^2 \omega_B^2}} =$$
$$= \frac{1800\pi^2 \cdot 9,81}{4500 \sqrt{(39240 - 400\pi^2)^2 + 4 \cdot 19,6^2 \cdot 400\pi^2}} = 0,0011 \text{ м}.$$

Если $\omega_B = \omega_C$, то

$$A_{\text{рез}} = \frac{2Pg\omega_B^2}{W} \frac{1}{2\pi\omega_B} = \frac{1800\pi^2 \cdot 9,81}{4500 \cdot 2 \cdot 19,6 \cdot 20\pi} = 0,0157 \text{ м}.$$

Пример 2.13

Система, изображённая на рис. 2П.12, совершает вынужденные колебания под действием силы F . Установить коэффициент жёсткости пружин упругой подвески машин, применяемой для виброизоляции вынужденных колебаний.



Решение

Для установления коэффициента жёсткости пружин упругой подвески машин, при котором наиболее полно осуществляется виброизоляция вынужденных колебаний, воспользуемся коэффициентом динамичности (2.62).

Обозначив частоту свободных колебаний машины ω_c , частоту вынужденных колебаний ω_B и коэффициент затухания ε , получим

$$k_d = \frac{S_B}{S_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}\right)^2 + 4 \frac{\varepsilon^2 \omega_B^2}{\omega_c^4}}}.$$

При отсутствии специального амортизатора значение коэффициента затухания, учитывающего сопротивление среды, очень мало. Поэтому при $\omega_B > \omega_c$ коэффициент динамичности можно принять равным согласно (2.54):

$$k_d = \frac{S_B}{S_{ст}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_B}{\omega_c}\right)^2}.$$

В соприкосновении с основанием находятся лишь пружины с коэффициентом жёсткости s . Поэтому един-

ственной силой, которая передаётся от машины к основанию, является реакция пружины $R=cu$.

Преобразуя формулу коэффициента динамичности, получаем

$$k_d = \frac{y}{y_0} = \frac{y}{\left(\frac{F_{\max}}{c}\right)} = \frac{cu}{F_{\max}} = \frac{R}{F_{\max}},$$

где R – реакция пружины; F_{\max} – наибольшее значение возмущающей силы.

При абсолютно жёстком основании и отсутствии упругих пружин $c=\infty$, а потому частота свободных колебаний машины $\omega_c = \sqrt{c/m} \rightarrow \infty$.

В этом случае частота возмущающей силы ω_b очень мала по сравнению с частотой ω_c собственных колебаний, что соответствует $k_d=1$. Очевидно, что в этом случае сила, передаваемая основанию, равна возмущающей силе, так как масса машины, оставаясь неподвижной, полностью передаёт эту силу основанию.

Для уменьшения величины силы, передаваемой от машины к основанию через пружины, следует эти пружины выбирать такой жёсткости, при которой частота свободных колебаний машины мала по сравнению с частотой возмущающей силы, т.е. нужно устанавливать машину на очень мягких пружинах. Так, например, при $\omega_b/\omega_c = 6$ коэффициент динамичности равен:

$$k_d = \frac{1}{\left(\frac{\omega_b}{\omega_c}\right)^2 - 1} = \frac{1}{36 - 1} = \frac{1}{35}.$$

Применение упругой подвески машины для виброизоляции вынужденных колебаний целесообразно только в

случае, если частота вынужденных колебаний ω_b больше частоты колебаний ω_c , так как в этом случае $k_d < 1$.

При $\omega_b = \omega_c \sqrt{2}$ коэффициент динамичности равен единице. При $\omega_b < \omega_c \sqrt{2}$ коэффициент динамичности $k_d > 1$, т.е. применение пружин вызывает не уменьшение, а увеличение силы, передаваемой от машины через пружины основанию.

Применение резиновых, пробковых и других амортизаторов вынужденных колебаний рекомендуется лишь в области $\omega_b < \omega_c \sqrt{2}$, т.е. где применение пружинной подвески оказывается нецелесообразным. Действительно, в этом случае по формуле (2.62) применение амортизаторов способствует уменьшению коэффициента динамичности, тогда как при $\omega_b > \omega_c \sqrt{2}$ амортизатор вызывает увеличение силы, передаваемой от машины через пружины к основанию.

Тем не менее, учитывая, что при $\omega_b > \omega_c$ в пусковой период приходится проходить через резонансное состояние, при котором величина передаваемой на основание силы может быть весьма значительной, применение амортизаторов весьма желательно. Действительно, сопротивление движению, оказываемое амортизаторами, при резонансных колебаниях вызывает значительное уменьшение величины силы, передаваемой машиной на основание.

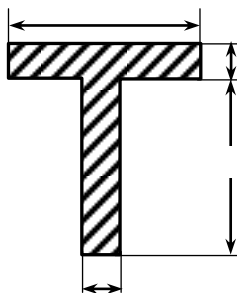
ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.1. Винтовая пружина имеет средний диаметр витка

$D = 0,025$ м, диаметр проволоки $d = 0,0025$ мм и содержит $n = 20$ витков. Модуль сдвига материала проволоки $G = 80$ ГПа, и масса подвешенного груза $m = 14$ кг. Вычислить период свободных колебаний.

Ответ: $T = 0,67$ с.

2.2. Балка имеет длину $l = 5$ м. Поперечное сечение балки – (рис. 2П.13.) Материал – алюминий, модуль упругости $E = 70$ ГПа. массой $m = 230$ кг расположен левой опоры на расстоянии $s = 1,2$

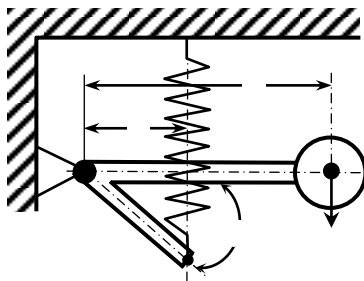


3,6
тавр
ний,
Груз
от
м.
ных
нием

Вычислить частоту свобод-
вертикальных колебаний. Влия-
собственной массы балки пренебrecь.

Ответ: $f = 6,13$ Гц.

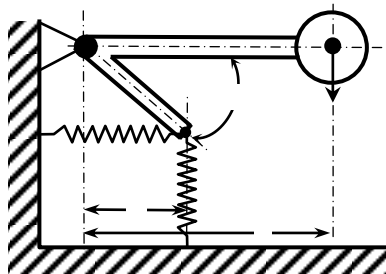
2.3. Для регистрации вертикальных колебаний применяется прибор, изображённый на рис. 2П.14, в котором жёсткий рычаг AOB , несущий груз W , может вращаться вокруг оси, проходящей через точку O , перпендикулярной к плоскости рисунка. Даны: момент инерции J рычага вместе с грузом относительно оси вращения, коэффициент жёсткости c и все размеры. Считать угол α весьма малым.



Определить частоту малых
вертикальных колебаний груза.

Ответ: $\omega_c = \sqrt{\frac{ca^2}{J}}$.

2.4. На рис. 2П.15 изображена схема прибора для записи вертикальных колебаний. Абсолютно жёсткая рамка АОВ с грузом W может поворачиваться относительно оси О. Массы

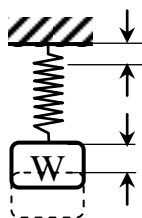


ки и пружин малы по сравнению с массой груза. Определить круговую частоту малых вертикальных колебаний груза. Ответ:

рам-
срав-
ную
за.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g[c_1 a^2 + c_2 (a \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2]}{W l^2}}$$

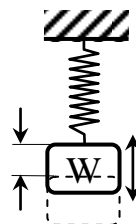
2.5. Найти амплитуду ных колебаний подвешенного к пружине грузом весом W (рис. 2П.16), если верхний конец пружины перемещается по моническому закону с амплитудой $S_a = 0,025$ м и угловой частотой $\omega_b =$ $^{-1}$. Статическое отклонение груза под действием собственного



ден-
жине
верх-
гар-
180 с
веса

$\lambda_{ст} = 0,08$ м.
Ответ: 0,000095 м.

2.6. Под действием груза весом W (рис. 2П.17) пружина растягивается на вели-



чину $\lambda_{ст} = 0,0254$ м, вес груза $W = 45,4$ Н. К грузу приложена сила, действующая по гармоническому закону $F_a \cos \omega_b t$, амплитуда силы $F_a = 9,08$ Н; частота вынуждающей силы $\omega_b = 10\pi$ с⁻¹.

Определить амплитуду вынужденных колебаний груза.

Ответ: $S_{ав} = 3,25 \cdot 10^{-3}$ м.

2.7. Во сколько раз увеличится вертикальная возмущающая сила, передаваемая фундаменту неуравновешенной машины, рассмотренной выше, в примере 2.3, если имеется восемь опорных пружин вместо четырёх? Все другие данные принять прежними.

Ответ: Приблизительно вдвое.

2.8. Электромотор вместе с опорной плитой весят 45000 Н. Вал мотора вращается с частотой 1800 мин⁻¹. Найти коэффициент жёсткости подвески $c_{под}$, которая обеспечит уменьшение передаваемой фундаменту силы до 10% центробежной силы, вызванной неуравновешенностью.

Ответ: $c_{под} = 15\,000\,000$ Н/м.

2.9. Тело весом $W = 45$ Н опёрто на пружину, для которой $c = 1,8 \cdot 10^3$ Н/м, и связано с гидравлическим амортизатором, создающим сопротивление 0,015 Н при скорости 0,01 м/с. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний после 10 циклов?

Ответ: в 1:0,595 раз.

2.10. Подвешенный на пружине груз весом $W = 9,1$ Н колеблется с периодом $T_3 = 0,5$ с. Система снабжена демпфированием. экспериментально получено, что после десяти полных циклов колебаний амплитуда уменьшается от $S_1 = 5,1 \cdot 10^{-2}$ м до $S_{11} = 2,55 \cdot 10^{-2}$ м. Определить коэффициент вязкого демпфирования h .

Ответ: $h = 2,55 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м.

2.11. Система пружин с сосредоточенной массой имеет собственную частоту колебаний при отсутствии демпфирования, равную f_c . К системе подсоединён гидравлический демпфер с коэффициентом вязкого демпфирования $h = h_{кр}/2$. Определить частоту затухающих колебаний.

Ответ: $f_3 = 3^{1/2} \cdot f_c/2 = 0,866 \cdot f_c$.

2.13. Контрольные вопросы к главе 2

1. Объясните причины возникновения малых колебаний механической системы.

2. Под действием каких сил совершаются малые колебания механической системы?

3. Что такое коэффициент жёсткости?

4. Как вычисляется эквивалентный коэффициент жёсткости при последовательном и параллельном соединении
нескольких пружин?

5. Назовите типы колебательных механических систем?
6. Какая система относится к консервативной?
7. Какие силы действуют в неконсервативной системе?
8. Что представляет собой диссипативная функция, или функция рассеивания?
9. Что такое начальные условия?
10. От каких параметров зависят частота и период свободных колебаний системы?
11. Что называется декрементом колебаний и логарифмическим декрементом колебаний?
12. Какое возбуждение колебаний относится к гармоническому типу?
13. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вынужденных колебаний консервативной системы с одной степенью свободы?
14. Что такое общее и частное решение дифференциального уравнения?
15. Что происходит с частным и общим решением дифференциального уравнения с течением времени при колебаниях консервативной системы?
16. Как определяется частота и период затухающих колебаний для неконсервативной системы?
17. Что такое коэффициент линейного вязкого демпфирования и коэффициент затухания или демпфирования и их размерности?
18. Как влияет величина коэффициента на амплитуду, фазу, частоту и период вынужденных колебаний системы?

19. Что такое резонанс и условия его возникновения?
20. Дайте определение коэффициента динамичности.
21. Как определяют коэффициент динамичности для консервативной и неконсервативной систем?
22. Дайте определение безразмерного коэффициента затухания?
23. Дайте определение коэффициента расстройки.
24. Дайте определение амплитудно-частотной характеристики.
25. Дайте определение фазо-частотной характеристики.
26. Какой вид имеет выражение коэффициента динамичности в случае инерционного возбуждения колебаний?
27. Какой вид имеет амплитудно-частотная характеристика в случае инерционного возбуждения колебаний?
28. По какой формуле определяют максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний?
29. При каком значении коэффициента затухания не существует максимума амплитуды вынужденных колебаний?
30. Дайте определение явлению биений и представьте графически колебательный процесс.
31. Назовите несколько случаев возникновения биений.
32. Дайте определение механического импеданса.

33. Дайте определение модуля механического импеданса и напишите его математическое выражение.
34. Дайте определение полного механического импеданса и его составляющих.
35. Назовите основные методы виброзащиты.
36. Что называется передаточным числом виброзащитной системы и напишите его выражение?
37. Чем характерно значение коэффициента расстройки, равное 1,41 на амплитудно-частотной характеристике виброзащитной системы.
38. Какие существуют методы измерения сопротивления колебаниям?
39. Каким методом можно определить:
- коэффициент затухания;
 - коэффициент затухания и безразмерный коэффициент затухания;
 - коэффициент линейного вязкого демпфирования?
40. Что называют интегралом Дюамеля?
41. Напишите выражение интеграла Дюамеля для консервативной и неконсервативной систем?
42. Напишите выражение интеграла Дюамеля в случае кинематического возбуждения опоры?
43. Назовите три численных метода определения динамических перемещений?
44. Представьте графически аппроксимацию непрерывной функции набором ступенчатых функций.
45. Представьте графически аппроксимацию непрерывной функции набором импульсами прямоугольной формы.

46. Представьте графически аппроксимацию непрерывной функции кусочно-линейным методом.

Глава 3. Крутильные колебания системы с одной степенью свободы

3.1. Свободные крутильные колебания вала с одной массой

Рассмотрим систему, состоящую из жёстко заделанного одним концом вала, а на другом конце вала насажен абсолютно жёсткий диск (рис. 3.1). Выведем систему из состояния покоя, повернув диск на малый угол $+\varphi_0$ относительно оси вала. В крайнем положении система будет обладать потенциальной энергией. Если мгновенно разорвать связь, то система под действием сил упругости закрученного вала начнёт двигаться. Будет совершать свободные крутильные колебания. Силы упругости создают так называемый, *восстанавливающий момент*, под действием которого система будет стремиться возвратиться в первоначальное положение.

При прохождении системы через центральное положение, её угловая скорость соответственно кинетическая энергия достигнут максимума, момент же сил упругости станет равным нулю. Под действием сил инерции массы маховика, вал будет

закручиваться в противоположном направлении на угол $-\varphi_0$. При этом восстанавливающий момент возрастает, а движение маховика замедляется. В крайнем положении движения маховика на мгновение прекратится, и соответственно кинетическая энергия станет равной нулю. В дальнейшем движения будут повторяться.

Таким образом, собственные крутильные колебания система совершает под действием только моментов сил упругости вала и моментов касательных сил инерции масс, т.е. без воздействия внешних моментов. При этом момент сил упругости вала всегда направлен в сторону его

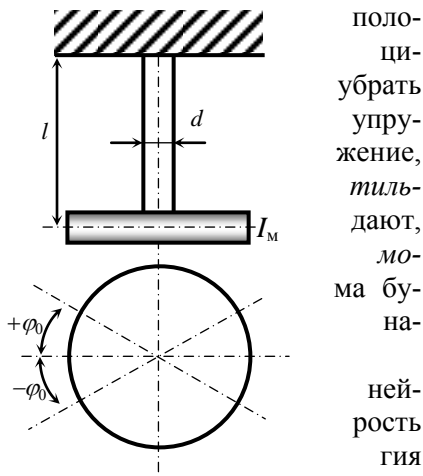


Рис. 3.1. Схема крутильной системы с одной массой

поло-
ци-
убрать
упру-
жение,
тиль-
дают,
мо-
на-
ней-
рость
гия
упру-
ствием
дет

нейтрального положения ($\varphi=0$), то есть в сторону, противоположную повороту маховика.

Введём допущения:

- массой и моментом инерции вала пренебрегаем по сравнению с массой и моментом инерции маховика;
- деформации кручения вала малы и не выходят за предел пропорциональности;
- трение в системе отсутствует.

Условие равновесия системы при повороте маховика на какой-либо угол φ по принципу д'Аламбера будет иметь вид:

$$-M_{\text{ин}} + M_{\text{уп}} = 0,$$

где $M_{\text{ин}}$ – момент касательных сил инерции маховика;

$M_{\text{уп}}$ – момент сил упругости вала.

Момент касательных сил инерции маховика определяется как

$$M_{\text{ин}} = -I_{\text{м}} \ddot{\varphi}, \text{ Н} \cdot \text{м},$$

где $I_{\text{м}}$ – момент инерции маховика, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

$\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение маховика, $\text{рад}/\text{с}^2$.

Момент сил упругости вала равен

$$M_{\text{уп}} = c_{\text{кр}} \varphi,$$

где $c_{\text{кр}}$ – *крутильная жёсткость* вала или просто жёсткость вала, $\text{Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$.

Жёсткость вала определяется как

$$c_{\text{кр}} = \frac{GI_{\text{р}}}{l}, \quad (3.1)$$

где G – модуль упругости при сдвиге материала вала, Па;

l – длина вала, м;

$I_{\text{р}}$ – полярный момент инерции сечения вала, м^4 :

$$I_{\text{р}} = \frac{\pi \cdot d^4}{4}; \quad d - \text{диаметр вала, м.}$$

Исходя из этого и по аналогии (2.31) уравнение крутильных колебаний запишется

$$I_{\text{м}} \ddot{\varphi} + c_{\text{кр}} \varphi = 0, \quad (3.2)$$

Деля уравнение (3.1) на $I_{\text{м}}$, получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = 0, \quad (3.3)$$

где $\omega_c^2 = c_{кр}/I_M$ – *круговая частота собственных крутильных колебаний*.

Поскольку это уравнение имеет вид, аналогичный уравнению (2.32), то его решение ищем в виде, аналогичном (2.35), что даёт

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_c t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_c} \sin \omega_c t, \quad (3.4)$$

где φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ – соответственно угол закрутки и угловая скорость в начальный момент времени $t = 0$ (начальные условия). Период крутильных колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{I_M}{c_{кр}}}, \quad [с] \quad (3.5)$$

а его частота

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{кр}}{I_M}}. \quad [\text{Гц}] \quad (3.6)$$

Если начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0 = 0$, то выражение (3.4) значительно упростится

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_c t. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) выражает *гармоническое колебательное движение* с амплитудой φ_0 . Поскольку в системе отсутствует затухание, то такие колебания могут продолжаться сколь угодно долго. В действительности в системе всегда присутствует сопротивление, вследствие чего свободные колебания затухают.

3.1.2. Свободные крутильные колебания неконсервативной системы (с затуханием)

Рассмотрим случай, когда *момент сил сопротивлений* $M_{сопр}$ пропорционален угловой скорости крутильных колебаний, т.е.

$$M_{сопр} = -\xi \dot{\varphi},$$

где ξ – коэффициент линейного вязкого демпфирования крутильными колебаниями.

Такая крутильная система с демпфированием показана на рис. 3.2. Уравнение затухающих крутильных колебаний с одной массой имеет вид

$$-M_{\text{ин}} - M_{\text{сопр}} + M_{\text{уп}} = 0$$

или

$$I_M \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + c_{\text{кр}} \varphi = 0. \quad (3.8)$$

Разделив обе части уравнения (3.8) на I_M , получим дифференциальное уравнение затухающих крутильных колебаний:

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon_{\text{кр}} \dot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = 0, \quad (3.9)$$

где $2\varepsilon_{\text{кр}} = \xi/I_M$, $\varepsilon_{\text{кр}}$ – коэффициент затухания или коэффициент демпфирования.

Данное уравнение решается аналогично уравнению (2.37). Вид решения (2.42) для крутильных колебаний будет иметь вид

$$\varphi = e^{-\varepsilon_{\text{кр}} t} \left(\varphi_0 \cos \omega_3 t + \frac{\dot{\varphi}_0 + \varepsilon_{\text{кр}} \varphi_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right). \quad (3.10)$$

В случае, если начальная угловая скорость $\dot{\varphi}_0 = 0$, то уравнение (3.10) будет иметь вид

$$\varphi = e^{-\varepsilon_{\text{кр}} t} \left(\varphi_0 \cos \omega_3 t + \frac{\varepsilon_{\text{кр}} \varphi_0}{\omega_3} \sin \omega_3 t \right). \quad (3.11)$$

На рис. 2.14 была представлена графическая интерпретация затухающих колебаний при начальных условиях колебательной скорости не равной нулю. На рис. 3.3 представлена та же зависимость при начальной скорости $\dot{\varphi}_0 = 0$. Анализ уравнения (3.11) показывает, что после каждого пе-

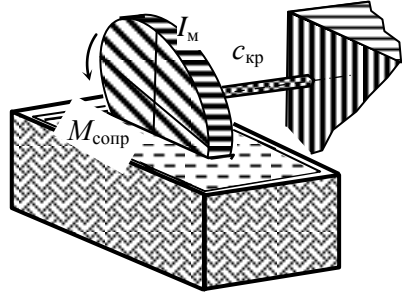


Рис. 3.2. Схема одномассовой крутильной системы с затуханием



Рис. 3.3. Графическое представление затухающих колебаний

риода амплитуда колебаний уменьшается в отношении $e^{-\delta_{кр}t}:1$ и что даже при малом сопротивлении крутильные колебания быстро затухают. Случай больших сопротивлений был рассмотрен в разделе 2.2.2 для прямолинейных колебаний. Выводы справедливы и для крутильных колебаний. При больших сопротивлениях колебания вообще не возникают и носят аperiодический характер, что показано на рис. 3.4. При больших сопротивлениях система, выведенная из состояния покоя, не переходит через нейтральное положение (рис. 3.4, *a* и *б*). В случае критического сопротивления (сопротивления колебаниям менее значительны) система может один раз перейти через нейтральное положение, что изображено на рис. 3.4, *в*.

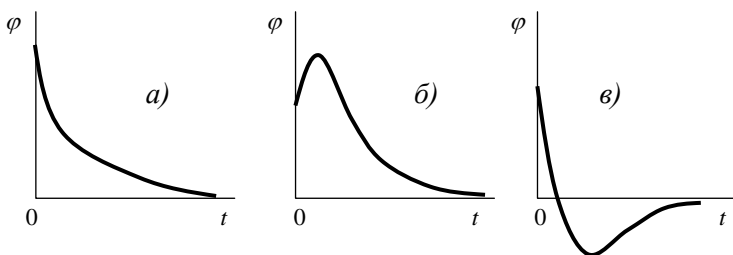


Рис. 3.4. Затухающие аperiодические колебания

3.2.1. Вынужденные крутильные колебания при отсутствии вязкого сопротивления

Дифференциальное уравнение вынужденных крутильных колебаний системы с одной степенью свободы получим из уравнения (3.1), подставляя в правую часть возбуждающий крутящий момент $M_b = M_0 \cos \omega_b t$:

$$I_M \ddot{\varphi} + c_{кр} \dot{\varphi} = M_0 \cos \omega_b t, \quad (3.12)$$

где M_0 – амплитуда гармоника возмущающего момента;

ω_b – круговая частота возмущающего момента.

Из (3.12) получим

$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = q \cos \omega_b t, \quad (3.13)$$

где $q = \frac{M_0}{I_M}$.

Решение уравнения (3.13) аналогично решению уравнения (2.46) и состоит из двух решений

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (3.14)$$

где $\varphi_1 = B_1 \cdot \cos \omega_c t = \varphi_{c0} \cdot \cos \omega_c t$ – общее решение однородного уравнения (3.13) без правой части;

$\varphi_2 = \varphi_B \cdot \cos \omega_B t$ – частное решение уравнения (3.13), взятого в целом, т.е. с правой частью.

Решение ищем относительно φ_2 , для чего определим амплитуду вынужденных колебаний φ_B . Подставим в уравнение (3.13) φ_2 и $\ddot{\varphi}_2$, получим:

$$-\varphi_B \omega_B^2 \cos \omega_B t + \varphi_B \omega_c^2 \cos \omega_B t = q \cos \omega_B t,$$

откуда

$$\varphi_B = \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_B^2} = \frac{M_0}{I_M (\omega_c^2 - \omega_B^2)}. \quad (3.15)$$

Или

$$\varphi_2 = \varphi_B \cos \omega_B t = \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \cos \omega_B t. \quad (3.16)$$

После подстановки в уравнение (3.14) окончательно получим

$$\varphi = \varphi_{c0} \cos \omega_c t + \frac{q}{\omega_c^2 - \omega_B^2} \cos \omega_B t. \quad (3.17)$$

Из (3.16) следует, что амплитуда вынужденных крутильных колебаний φ_B зависит от амплитуды возбуждающего момента M_0 , момента инерции маховика I_M и соотношения круговых частот вынужденных крутильных колебаний ω_B и свободных крутильных колебаний ω_c . Амплитуда вынужденных колебаний φ_B не зависит от начальных условий.

Исследуем три случая соотношения круговых частот ω_B/ω_c :

- частота изменения возбуждающего момента очень мала ($\omega_B \ll \omega_c$ или $\omega_B \approx 0$), это случай отсутствия резонанса;
- частота возбуждающего момента равна частоте собственных крутильных колебаний ($\omega_B = \omega_c$), т.е. случай резонанса;
- круговая частота возбуждающего момента больше угловой частоты свободных крутильных колебаний ($\omega_B > \omega_c$).

1. *Случай отсутствия резонанса.* Подставляя $\omega_b = 0$ в уравнение

(3.15) и учитывая, что $\omega_c^2 = \frac{c_{кр}}{I_M}$, получим

$$\varphi_{в0} = \frac{q}{\omega_c^2} = \frac{M_0 I_M}{I_M c_{кр}} = \frac{M_0}{c_{кр}}, \quad (3.18)$$

т.е. амплитуда вынужденных крутильных колебаний в этом случае равна статическому углу, на который закручивается вал под действием постоянного момента M_0 .

Отношение амплитуды φ_b вынужденных крутильных колебаний к статическому углу $\varphi_{в0}$, по аналогии с выражением (2.54), называется *коэффициентом динамичности*, или *коэффициентом нарастания колебаний*

$$k_{д.кр} = \frac{\varphi_b}{\varphi_{в0}} = \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega_b^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_c}\right)^2}. \quad (3.19)$$

При $\omega_b = 0$ имеем $\varphi_b = \varphi_{в0}$ и $k_{д.кр} = 1$.

2. *Случай резонанса.* При этом $\omega_b = \omega_c = \sqrt{\frac{c_{кр}}{I_M}}$. Из уравнения (3.15)

следует, что в этом случае амплитуда вынужденных крутильных колебаний равна бесконечности или адекватно коэффициент динамичности $k_{д.кр} = \infty$. Это явление называется *резонансом*. В реальных условиях работы валов эта амплитуда имеет конечное значение вследствие наличия сопротивления крутильным колебаниям.

3. *Случай зарезонансной области* ($\omega_b > \omega_c$). В этом случае с увеличением частоты ω_b амплитуда φ_b резко уменьшается без учёта знака (рис. 3.5).

При дальнейшем увеличении отношения ω_b/ω_c коэффициент динамичности уменьшается по абсолютной величине от ∞ до 0. Это означает, что при бесконечно быстром изменении возму-

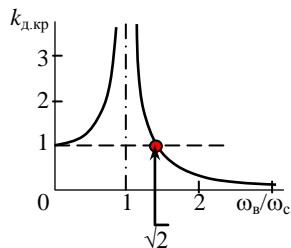


Рис. 3.5. Коэффициент динамичности при отсутствии сопротивления

щающего момента M_B система не успевает следовать за этими изменениями, и её колебания прекращаются.

3.2.2. Вынужденные крутильные колебания с затуханием

Уравнение вынужденных крутильных колебаний с учётом сил сопротивления имеет вид

$$I_M \ddot{\varphi} + \xi \dot{\varphi} + c_{кр} \varphi = M_0 \cos \omega_B t. \quad (3.20)$$

Или, деля на I_M , получим

$$\ddot{\varphi} + 2\varepsilon_{кр} \dot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = q \cos \omega_B t, \quad (3.21)$$

где $2\varepsilon_{кр} = \xi/I_M$; $\omega_c^2 = c_{кр}/I_M$; $q = M_0/I_M$.

Поясним смысл уравнения (3.21). Первый член уравнения $\ddot{\varphi}$ характеризует величину возникающих при колебаниях сил инерции, $2\varepsilon_{кр} \dot{\varphi}$ – величину сопротивлений колебаниям, вызывающих их затухание, $\omega_c^2 \varphi$ – величину момента сил упругости, и в правой части $q \cdot \cos \omega_B t$ – амплитуду и частоту изменения возбуждающего момента.

Уравнение (3.21) аналогично уравнению (2.58) для случая прямолинейных колебаний. Исходя из этого, общее решение состоит из двух решений $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Из-за наличия сопротивления колебаниям первый член φ_1 стремится к нулю, то есть собственные колебания быстро затухают и ими можно пренебречь. Общее движение будет только вынужденным движением φ_2 , что справедливо записать как $\varphi = \varphi_2$.

Частное решение уравнения (3.21) можно представить в следующем виде

$$\varphi_2 = E \cdot \sin \omega_B t + F \cdot \cos \omega_B t. \quad (3.22)$$

В этом уравнении необходимо определить коэффициенты E и F . Для этого продифференцируем дважды выражение (3.22), и подставляя их значения при начальных условиях $\omega_B t = 0$ и $\omega_B t = \pi/2$, получим два уравнения

$$\begin{aligned} -F\omega_B^2 + 2E\omega_B\varepsilon_{кр} + F\omega_c^2 &= 0, \\ -E\omega_B^2 - 2F\omega_B\varepsilon_{кр} + E\omega_c^2 &= q, \end{aligned}$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{q(\omega_c^2 - \omega_B^2)}{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2\varepsilon_{кр}^2}, \\ F &= -\frac{2q\omega_B\varepsilon_{кр}}{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2\varepsilon_{кр}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} E &= \frac{q(\omega_c^2 - \omega_B^2)}{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2\varepsilon_{кр}^2} = \varphi_B \cos\psi; \\ F &= -\frac{2q\omega_B\varepsilon_{кр}}{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2\varepsilon_{кр}^2} = -\varphi_B \sin\psi, \end{aligned}$$

где ψ – сдвиг фаз между амплитудой возбуждающего момента и амплитудой вызываемых этим моментом колебаний.

Следовательно, угол закрутки от вынужденных колебаний φ_2 определится как

$$\varphi_2 = \varphi_B (\cos\psi \cdot \sin\omega_B t - \sin\psi \cdot \cos\omega_B t) = \varphi_B \cdot \sin(\omega_B t - \psi). \quad (3.24)$$

Последнее выражение характеризует вынужденные крутильные колебания одномассовой системы с амплитудой φ_B и частотой ω_B , равной частоте возбуждающего момента M_B .

Амплитуда угла закрутки φ_B и сдвиг фаз ψ можно определить из выражений (3.23)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_B &= \frac{q}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega_B^2)^2 + 4\omega_B^2\varepsilon_{кр}^2}}, \\ \operatorname{tg}\psi &= \frac{2\omega_B\varepsilon_{кр}}{\omega_c^2 - \omega_B^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

Для анализа колебательной системы используют амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики. Данные характеристики представляют собой зависимости коэффициента динамичности $k_{д.кр}$ и

сдвига фаз ψ от коэффициента расстройки $z = \omega_b/\omega_c$. Преобразуем (3.25) к следующему виду

$$\varphi_B = \frac{q}{\omega_c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{4\omega_B^2 \varepsilon_{кр}^2}{\omega_c^2}}}$$

Вспомяная соотношения для $q = M_0/I_M$ и $\omega_c^2 = \frac{c_{кр}}{I_M}$, найдём значение для

$$\frac{1}{I_M} = \frac{q}{M_0} = \frac{\omega_c^2}{c_{кр}}.$$

Или

$$\frac{q}{\omega_c^2} = \frac{M_0}{c_{кр}} = \varphi_{ст},$$

где $\varphi_{ст}$ – угол, на который был бы закручен вал статическим моментом, равным амплитуде возбуждающего момента M_0 .

Следовательно, можно записать

$$\varphi_B = \frac{\varphi_{ст}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{4\omega_B^2 \varepsilon_{кр}^2}{\omega_c^2}}}. \quad (3.27)$$

Или

$$\frac{\varphi_B}{\varphi_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{4\omega_B^2 \varepsilon_{кр}^2}{\omega_c^2}}} = k_{д.кр}$$

и есть коэффициент динамичности. Введём безразмерные коэффициенты затухания $d=2\varepsilon_{кр}/\omega_c$ и расстройки $z = \omega_b/\omega_c$ и перепишем выражение для коэффициента динамичности

$$k_{д.кр} = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + d^2 z^2}} \quad (3.28)$$

Амплитудно-частотная характеристика крутильных колебаний ($k_{д.кр}=f(z)$) представлена на рис. 3.6, которая полностью аналогична рис. 2.21. Анализ её представлен там же в разделе 2.3.2. Необходимо ещё раз обратить внимание на очень важные положения. Величина коэффициента

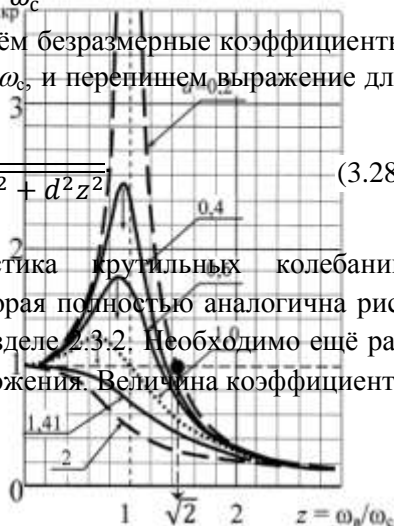


Рис. 3.6. Амплитудно-частотная характеристика

динамичности $k_{д.кр}$ зависит от двух параметров – z и d , то есть от коэффициента расстройки и безразмерного коэффициента затухания. Учёт демпфирования с практической точки зрения важен в около резонансной зоне. При $z \gg 1$ или $z \ll 1$ расчёт амплитуды вынужденных колебаний можно рассчитывать без учёта затухания.

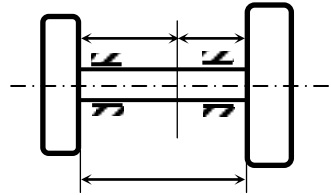
Максимальное значение $k_{д.кр}$ достигается при z несколько меньшем единицы. Такое отклонение от единицы с практической точки зрения не значительно. Поэтому при вычислениях максимальных амплитуд обычно принимают $\omega_b = \omega_c$. Тогда из соотношения (3.27) получим

$$\varphi_{max} = \frac{\varphi_{ст}\omega_c}{2\varepsilon_{кр}}$$

3.3. Примеры и задачи к главе 3

Пример 3.1

На рис. 3П.1 показана система, состоящая из невесомого вала и двух дисков. Веса дисков равны $W_1=4500$ Н и $W_2=9000$ Н, и их диаметры составляют соответственно $D_1=1,25$ м, $D_2=1,90$ м. Длина вала равна $l=3,0$ м и его диаметр $d=0,10$ м. Модуль упругости материала вала $G=8 \cdot 10^{10}$ Па.



Определить частоту крутильных колебаний вала.

Решение

Определим моменты инерции масс дисков

$$J_1 = \frac{W_1 D_1^2}{8g} = \frac{4500 \cdot (1,25)^2}{8 \cdot 9,81} = 89,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_2 = 414 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Расположение узла крутильных колебаний определяется расстоянием

$$a = \frac{J_2}{J_1 + J_2} = \frac{3 \cdot 414}{89,6 + 414} = 2,47 \text{ м}; \quad b = \frac{J_1}{J_1 + J_2} = \frac{3 \cdot 89,6}{89,6 + 414} = 0,53 \text{ м}.$$

Жёсткость вала равна

$$c_{кр1} = \frac{\pi G d^4}{32a} = \frac{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,1^4}{32 \cdot 2,47} = 317975; \quad \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Определим частоту собственных колебаний по формуле

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J_1}{c_{кр1}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{J_2}{c_{кр2}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{89,6}{317975}} = 9,48 \text{ Гц.}$$

Пример 3.2

Во сколько раз увеличится частота колебаний вала, рассмотренного в предыдущем примере, если на длине, равной 1,6 м, диаметр вала увеличивается с 100 до 200 мм.

Решение

Вал длиной $l_2 = 1,6$ м и диаметром $d_2 = 200$ мм может быть заменён эквивалентным валом диаметром 100 мм ($d_3 = 0,1$ м) и эквивалентной длины L_3 . Длину эквивалентного вала можно определить по формуле

$$L_3 = l_1 + l_2 \frac{d_3^4}{d_2^4} = (3 - 1,6) + 1,6 \frac{0,1^4}{0,2^4} = 1,4 + 0,1 = 1,5 \text{ м.}$$

Так как частота свободных колебаний обратно пропорциональна квадратному корню из длины вала (см. формулу 13), мы заключаем, что в результате усиления вала частота увеличится в отношении $\sqrt{2} : 1$.

Пример 3.3

Определить амплитуду вынужденных крутильных колебаний вала (рис. 3.1), вызванных переменным крутящим моментом $M \sin \omega_b t$, если $\omega_b = 10\pi \text{ рад/с}^{-1}$, свободные крутильные колебания этого вала имеют частоту $f = 10 \text{ Гц}$ и угол закручивания вала, вызванный статическим моментом M , равен $0,01 \text{ рад}$.

Решение

В этом случае уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = \frac{M}{J_M} \sin \omega_b t, ,$$

где φ – угол закручивания и $\omega_c^2 = c_{кр}/J_M$. Вынужденные колебания описываются выражением

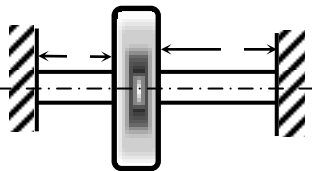
$$\varphi = \frac{M}{J_M (\omega_c^2 - \omega_b^2)} \sin \omega_b t = \frac{M}{c_{кр} \left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_c^2}\right)} \sin \omega_b t.$$

Замечая, что по условию статическое отклонение $M/c_{кр} = 0,01$ и $\omega_c = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 10$, находим, что искомая амплитуда равна

$$\varphi = \frac{0,01}{(1 - 1/4)} = 0,0133 \text{ рад.}$$

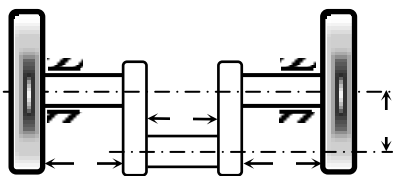
Задачи к главе 3

3.1. Определить частоту крутильных колебаний диска (рис. 3П.2), если концы вала закреплены в сечениях А и В. Обе части вала имеют одинаковый диаметр d , но различные длины l_1 и l_2 . Момент инерции диска равен J .



Ответ: $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi d^4 G (l_1 + l_2)}{32 J l_1 l_2}}$.

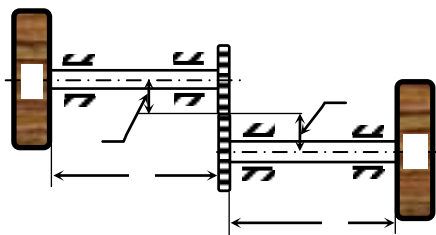
3.2. Определить эквивалентную длину l_3 прямого вала, имеющего тильную жёсткость c_1 такую что и коренные шейки коленчатого вала (рис. 3П.3). Щеки кривошипа DF имеют изгибную жёсткость тунная шейка EF имеет крутиль- жёсткость c_2 . Радиус кривошипа Коренные подшипники А и В не вают сопротивлений при кручении вала.



ную кру- же, того CE и В. Ша- ную равен r . оказы-

Ответ: $l = 2a + \frac{c_1}{c_2} b + 2 \frac{c_1}{c} r$.

3.3. Два параллельных вала АВ и CD вращаются в подшипниках. Валы соединены между собой зубчатой передачей (рис. 3П.4). На внешнем конце каждого вала закреплён диск, соответственно с моментами инерции $J_a = J_b = 116 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$. Длина вала $l_1 = l_2 = 15,2 \text{ м}$, диаметры валов $d_1 = d_2 = 7,62 \text{ м}$, радиусы шестерён $r_1/r_2 = 0,5$. Массу зубчатых колёс и валов не учитывать. Модуль упругости при сдвиге обоих валов $G = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.



Вычислить период свободных колебаний.

Ответ: $T = 0,158 \text{ с}$.

3.4. Контрольные вопросы к главе 3

1. Что называется крутильной жёсткостью вала?

2. Напишите условия равновесия крутильной системы с одной массой без затухания.

3. Напишите дифференциальное уравнение затухающих свободных крутильных колебаний с одной массой.

4. Что такое общее решение однородного уравнения и частное решение?

5. Напишите уравнение вынужденных крутильных колебаний одномассовой системы без сопротивления.

6. Что называется коэффициентом динамичности для крутильной системы с одной массой?

7. Представьте амплитудно-частотную характеристику для одномассовой крутильной системы с затуханием.

Часть III. колебания линейных систем с конечным числом степеней свободы

Глава 4. колебания системы с двумя степенями свободы

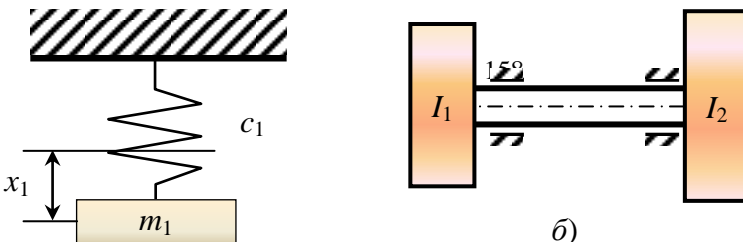
4.1. Примеры систем с двумя степенями свободы

В предыдущих примерах были рассмотрены системы, для описания которых была необходима только одна координата, то есть система имела одну степень свободы. Иногда встречаются системы, которые содержат несколько масс (дисков), связанных между собой и основанием упругими элементами. Такие системы имеют *несколько степеней свободы*, простейшими из которых являются системы с *двумя степенями свободы*. Конфигурация такой системы полностью определяется двумя координатами (или перемещениями), а для того чтобы описать её движение, требуется два дифференциальных уравнения.

На рис. 4.1 показаны несколько примеров. На рис. 4.1 *а*, две массы m_1 и m_2 вертикально подвешены на пружинах жёсткостью c_1 и c_2 . Массы совершают только вертикальные перемещения x_1 и x_2 каждая от своего положения равновесия, то есть имеются две координаты, которые полностью определяют конфигурацию системы или иначе они имеют две степени свободы.

На рис. 4.1, *б* представлен вал жёсткостью $c_{кр}$ с двумя дисками с моментами инерции I_1 и I_2 . От радиальных перемещений вал зафиксирован в двух подшипниках. Диски закручиваются вокруг горизонтальной оси на углы φ_1 и φ_2 , а вал соответственно скручивается на угол $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Данная система также имеет две степени свободы.

На рис. 4.1, *в* показан третий пример системы с двумя степенями свободы. Вал с двух сторон жёстко закреплён и вращается в подшипниках, препятствующих боковому перемещению в этих точках. Три участка вала имеют соответствующие коэффициенты крутильной жёсткости $c_{кр1}$, $c_{кр2}$, $c_{кр3}$, а два диска моменты инерции I_1 и I_2 . Диски также имеют возможность разворачиваться на углы φ_1 и φ_2 , следовательно они имеют две степени свободы.



4.2. Свободные крутильные колебания консервативной системы с двумя массами

На рис. 4.2 представлена схема двухмассовой крутильной системы. На валу находятся два маховика, обладающие моментами инерции I_{M1} и I_{M2} . Вал невесомый, обладает жёсткостью $c_{кр}$. К маховикам приложим два крутящих момента, равных по величине, но противоположных по направлению. Если мгновенно убрать приложенные моменты, то система начнёт совершать свободные крутильные колебания. Угловые колебания маховиков происходят в противоположных направлениях, но с одинаковой частотой. При таких колебаниях некоторое сечение вала будет неподвижным и называется *узлом колебаний*.

Поскольку система имеет две степени свободы, то для её описания необходима система двух уравнений:

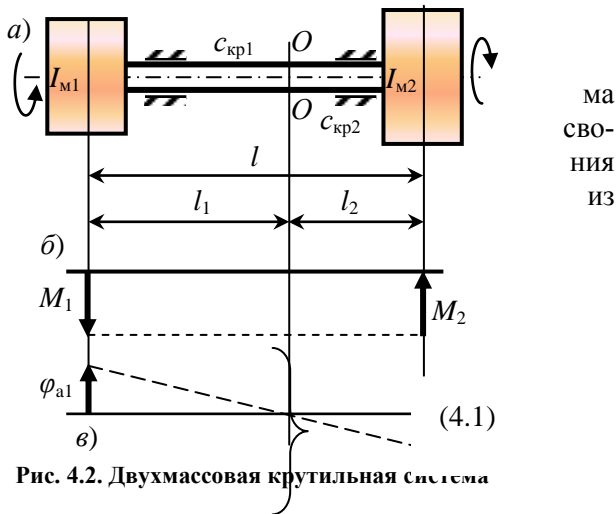


Рис. 4.2. Двухмассовая крутильная система

$$I_{M1} \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + c_{kp}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$I_{M2} \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} - c_{kp}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,$$

где I_{M1} и I_{M2} – моменты инерции колеблющихся маховиков;
 φ_1 и φ_2 – углы поворота маховиков от нейтрального положения;
 c_{kp} – крутильная жёсткость вала, $c_{kp} = \frac{GI_p}{l}$.

Противоположные знаки у моментов сил упругости вала объясняются тем, что эти моменты действуют в противоположных направлениях. Углы φ_1 и φ_2 имеют противоположные знаки, так как отсчёт этих углов производится в противоположных направлениях.

По условию приведения, момент сил упругости вала одинаков по всей его длине, поэтому

$$c_{kp}(\varphi_1 - \varphi_2) = c_{kp1}\varphi_1 = c_{kp2}\varphi_2, \quad (4.2)$$

где c_{kp1} и c_{kp2} – жёсткости участков вала длиной l_1 и l_2 .

Решение уравнений (4.1) может быть найдено в форме:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \cdot \cos(\omega_c t + \beta); \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cdot \cos(\omega_c t + \beta), \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

где φ_{a1} и φ_{a2} – угловые амплитуды свободных крутильных колебаний дисков в рад;

ω_c – собственная круговая частота колебаний масс;

t – время от начала отсчёта;

β – угловая фаза.

Решение уравнений (4.1) сводится к нахождению соотношения амплитуд колебаний дисков I_{M1} и I_{M2} . Для этого, значения из (4.3) подставляя в уравнения (4.1). После сокращения на $\cos(\omega_c + \beta)$ получим

$$\left. \begin{aligned} -I_{M1}\varphi_{a1}\omega_c^2 + c_{кр}(\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= 0; \\ -I_{M2}\varphi_{a2}\omega_c^2 - c_{кр}(\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда путём почленного сложения уравнений находим

$$\left. \begin{aligned} I_{M1}\varphi_{a1} &= -I_{M2}\varphi_{a2}; \\ \frac{\varphi_{a1}}{\varphi_{a2}} &= -\frac{I_{M2}}{I_{M1}}. \end{aligned} \right\}$$

Знак минус показывает, что диски закручены в разные стороны.

Из последнего выражения следует:

$$\varphi_{a1} = -\varphi_{a2} \frac{I_{M2}}{I_{M1}}. \quad (4.6)$$

Подставляя значение φ_{a1} в одно из уравнений (4.4), находим круговую частоту собственных колебаний двухмассовой системы

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_{кр} \cdot (I_{M1} + I_{M2})}{I_{M1} \cdot I_{M2}}}, \text{ рад/с.} \quad (4.7)$$

Период и частота колебаний обеих масс:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{M1} \cdot I_{M2}}{c_{кр} \cdot (I_{M1} + I_{M2})}}, \text{ с;} \quad (4.8)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_{кр} \cdot (I_{M1} + I_{M2})}{I_{M1} \cdot I_{M2}}}, \text{ Гц.} \quad (4.9)$$

Положение узла колебаний можно найти, исходя из того, что частота колебаний обеих масс одинакова, то есть:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c_{кр1}}{I_{M1}}} = \sqrt{\frac{c_{кр2}}{I_{M2}}},$$

откуда

$$\frac{c_{кр1}}{c_{кр2}} = \frac{I_{M1}}{I_{M2}}.$$

Подставляя в уравнение (4.10) значения $c_{кр1}$ и $c_{кр2}$, находим

$$\frac{c_{кр1}}{c_{кр2}} = \frac{\frac{GI_p}{l_1}}{\frac{GI_p}{l_2}} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{I_{M1}}{I_{M2}}.$$

Так как $l = l_1 + l_2$, то из совместного решения с уравнением (4.11), получим координаты узла крутильных колебаний

$$l_1 = \frac{l \cdot I_{M2}}{I_{M1} + I_{M2}}; \quad l_2 = \frac{l \cdot I_{M1}}{I_{M1} + I_{M2}}.$$

Таким образом, узел колебаний делит вал на участки длиной l_1 и l_2 обратно пропорционально моментам инерции масс I_{M1} и I_{M2} (рис.4.2, б).

Откладывая по длине эквивалентного вала угловые амплитуды φ_{a1} и φ_{a2} , получаем диаграмму *одноузловых крутильных колебаний* (рис. 4.2, в).

4.3. Свободные колебания консервативной системы с двумя массами

Схема системы с двумя массами, совершающая прямолинейные колебания, показана на рис. 4.3. Две массы m_1 и m_2 могут без трения скользить вдоль горизонтальной оси x и связаны пружинами жёсткостью c_1 и c_2 .

Колебание такой системы описывается двумя уравнениями:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \overset{\curvearrowright}{c_1} x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0, \quad (4.13)$$

$$m_2 \ddot{x}_2$$

Преобразуем уравнения (а) уравнение разделим на m_1 , а в

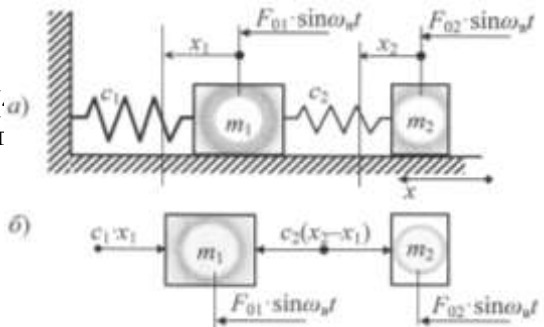


Рис. 4.3. Схема двухмассовой системы

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{c_1}{m_1}x_1 - \frac{c_2}{m_1}(x_2 - x_1) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2}(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{c_1 + c_2}{m_1}x_1 - \frac{c_2}{m_1}x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{c_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Введём обозначения:

$$a = \frac{c_1 + c_2}{m_1}; \quad b = \frac{c_2}{m_1}; \quad d = \frac{c_2}{m_2}.$$

Тогда уравнения (4.14) примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - dx_1 + dx_2 = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Частное решение уравнений (4.15) может быть найдено в виде:

$$\begin{cases} x_1 = S_{a1} \cdot \sin(\omega_c t + \gamma), \\ x_2 = S_{a2} \cdot \sin(\omega_c t + \gamma), \end{cases} \quad (4.16)$$

где S_{a1} – амплитуда колебаний первой массы;

S_{a2} – амплитуда колебаний второй массы.

Дважды дифференцируя выражения (4.16) и подставляя их значения в (4.15), получим:

$$\begin{aligned} -S_{a1}\omega_c^2 \sin(\omega_c t + \gamma) + aS_{a1} \sin(\omega_c t + \gamma) - bS_{a2} \sin(\omega_c t + \gamma) &= 0, \\ -S_{a2}\omega_c^2 \sin(\omega_c t + \gamma) - dS_{a1} \sin(\omega_c t + \gamma) + dS_{a2} \sin(\omega_c t + \gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

После сокращения на $\sin(\omega_c t + \gamma)$ получим

$$\left. \begin{aligned} S_{a1}(a - \omega_c^2) - bS_{a2} &= 0, \\ S_{a1}d - S_{a2}(d - \omega_c^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Решение этой системы возможно только в случае, если определитель системы будет равен нулю

$$(a - \omega_c^2)(d - \omega_c^2) - bd = 0,$$

или

$$\omega_c^4 - (a + d)\omega_c^2 + d(a - b) = 0. \quad (4.19)$$

Данное уравнение относительно ω_c является биквадратным и называется *частотным уравнением системы*. Корни этого уравнения ω_{c1}^2 и ω_{c2}^2 определяют частоты собственных колебаний ω_{c1} и ω_{c2} . Оба эти корня должны быть положительны, так как в противном случае ω_{c1} и ω_{c2} будут мнимыми или комплексными. Такой аргумент в решении (4.16) приводит к неограниченному возрастанию во времени x_1 и x_2 , что противоречит предположению об устойчивости положения равновесия.

Корни биквадратного уравнения

$$\omega_{c1,2}^2 = \frac{a + d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a + d}{2}\right)^2 - d(a - b)}. \quad (4.20)$$

Величины ω_{c1} и ω_{c2} являются частотами свободных колебаний системы. Соответствующие этим частотам колебания называют *главными колебаниями системы*. Меньшую из частот ω_{c1} называют *основной частотой*, а первое главное колебание с этой частотой – *основным колебанием*.

Из уравнений (4.18) следует, что определить значения амплитуд колебаний непосредственно не представляется возможным, можно определить только их отношение

$$\frac{S_{a1}}{S_{a2}} = \frac{b}{a - \omega_c^2} \quad \text{или} \quad \frac{S_{a1}}{S_{a2}} = \frac{d - \omega_c^2}{d}. \quad (4.21)$$

Обозначим отношение амплитуд колебаний через μ , или

$$S_{a2} = \mu \cdot S_{a1}, \quad (4.22)$$

то есть

$$\mu = \frac{a - \omega_c^2}{b} = \frac{d}{d - \omega_c^2}. \quad (4.23)$$

Коэффициент μ называется *коэффициентом распределения амплитуд*. Он характеризует отношение амплитуд в главных колебаниях или *форму* главных колебаний.

Подставляя в (4.23) значения ω_{c1}^2 и ω_{c2}^2 , получим два разных отношения амплитуд

$$\mu_1 = \frac{a - \omega_{c1}^2}{b} = \frac{d}{d - \omega_{c1}^2} = \frac{S_{a21}}{S_{a11}}, \quad (4.24)$$

$$\mu_2 = \frac{a - \omega_{c2}^2}{b} = \frac{d}{d - \omega_{c2}^2} = \frac{S_{a22}}{S_{a12}}. \quad (4.25)$$

Коэффициенты распределения амплитуд и, следовательно, формы главных колебаний, аналогично собственным частотам, определяются параметрами самой колебательной системы и не зависят от начальных условий.

Преобразуем выражение (4.20) к следующему виду

$$a - \omega_{c1,2}^2 = a - \frac{a+d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bd}.$$

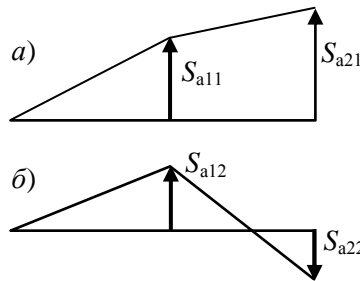
Откуда следует, что

$$a - \omega_{c1}^2 = \frac{a-d}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bd} > 0,$$

$$a - \omega_{c2}^2 = \frac{a-d}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + bd} < 0.$$

Анализируя данные выражения и формулы (4.24) и (4.25), следует, что отношение амплитуд $\mu_1 > 0$, а $\mu_2 < 0$. При положительном значении коэффициента μ система с массами совершает колебания в одной фазе, что показано на рис. Эти колебания система совершает с частотой ω_{c1} , и массы движутся в одну

сторону. Колебания с частотой ω_{c2} исходят по второй форме. В случае массы движутся всё



двумя в одной фазе, а в одну сторону. про-этом время

Рис. 4.4. Отношения амплитуд колебаний двухмассовой системы:
 а) – колебания по первой форме;
 б) – колебания по второй форме

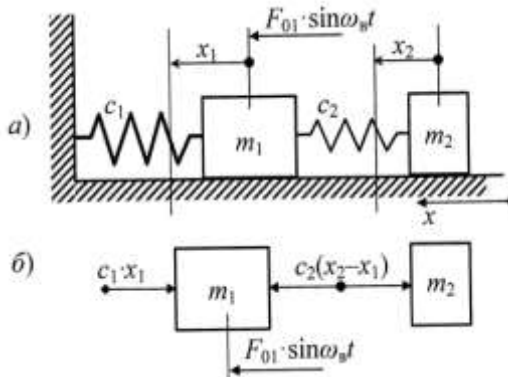


Рис. 4.5. Схема вынужденных колебаний двухмассовой системы

сдвигом

на 180° ,
рис. 4.4, б.

180° ,

как

показано

фазы

на

4.4. Вынужденные колебания консервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении

4.4.1. Вынужденные колебания при приложении силы к одной массе

На рис. 4.5 показана колеблющаяся двухмассовая система под действием гармонической возбуждающей силы и без сил вязкого сопротивления. Рассмотрим случай, когда внешняя сила $F = F_0 \cdot \sin \omega_b t$ приложена к массе m_1 .

Дифференциальные уравнения малых колебаний примут вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= F_{01} \sin \omega_b t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Вводя обозначения

$$a = \frac{c_1 + c_2}{m_1}; \quad b = \frac{c_2}{m_1}; \quad d = \frac{c_2}{m_2}; \quad f_0 = \frac{F_{01}}{m_1}, \quad (4.27)$$

Запишем уравнения (4.27) в компактной форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 &= bx_2 = f_0 \sin \omega_B t. \\ \ddot{x}_2 - dx_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Частное решение этих уравнений можно получить в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S_{a1} \sin \omega_B t. \\ x_2 &= S_{a2} \sin \omega_B t. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Продифференцируем (4.29) дважды, подставим в уравнения (4.28) и сократив на $\sin \omega_B t$, получим

$$\left. \begin{aligned} S_{a1}(a - \omega_B^2) - bS_{a2} &= 0. \\ S_{a1}d - S_{a2}(d - \omega_B^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Решая данную систему уравнений, получим:

$$S_{a2} = \frac{S_{a1}(a - \omega_B^2) - f_0}{b};$$

$$S_{a1}d - \frac{[S_{a1}(a - \omega_B^2) - f_0](d - \omega_B^2)}{b} = 0;$$

или окончательно:

$$S_{a1} = \frac{(d - \omega_B^2)f_0}{(a - \omega_B^2)(d - \omega_B^2) - db};$$

$$S_{a2} = \frac{f_0 d}{(a - \omega_B^2)(d - \omega_B^2) - db}.$$

$$\left. \begin{aligned} S_{a1} &= \frac{F_{01}(c_2 - m_2 \omega_B^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)(c_2 - m_2 \omega_B^2) - c_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$S_{a2} = \frac{F_{01}c_2}{(c_1 + c_2 - m_1\omega_b^2)(c_2 - m_2\omega_b^2) - c_2^2}.$$

Вынужденные колебания двухмассовой системы представляют простое гармоническое движение обеих масс с угловой частотой возмущающей силы ω_b , вызывающей колебания. Амплитуды колебаний S_{a1} и S_{a2} зависят от приведённой амплитуды f_0 возмущающей силы и от значения угловой частоты ω_b .

Для весьма малых значений ω_b , то есть, практически приближаясь к статическому приложению силы, можно пренебречь ω_b^2 по сравнению с a и d в выражениях (4.31) и принять

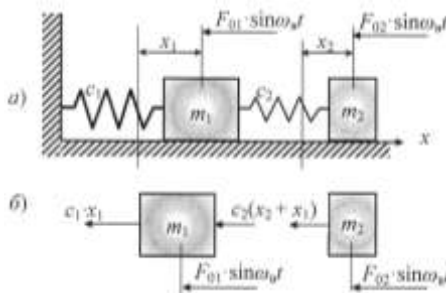
$$S_{a1} = S_{a2} \approx \frac{f_0}{a - b} = \frac{F_0}{c_1} = S_{ст}. \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что при весьма медленном приложении возмущающей силы возникает чисто статический эффект: пружина c_2 сохраняет свою длину, и обе массы перемещаются вместе. Величина перемещения равна статическому деформированию пружины под действием амплитуды F_0 возмущающей силы.

Подставляя в знаменатель значения $\omega_b = \omega_{c1}$ или $\omega_b = \omega_{c2}$ и приравнявая знаменатель при этом нулю в соответствии с частотным уравнением (4.19), получим бесконечно большие значения для S_{a1} и S_{a2} . Таким образом, для системы с двумя степенями свободы существует два условия резонанса, соответствующие каждой из двух собственных частот свободных колебаний.

4.4.2. Вынужденные колебания при приложении силы одновременно к двум массам

Примем, что на массы m_1 и m_2 действуют возмущающие силы F_1 и F_2 , изменяющиеся по гармоническому закону, имеющие одинаковую частоту ω_b и фазу (рис.



сы m_1 и m_2 действуют возмущающие силы F_1 и F_2 , изменяющиеся по гармоническому закону, имеющие одинаковую частоту ω_b и фазу (рис. 4.6):

Рис. 4.6. Схема двухмассовой системы без демпфирования при возбуждении двумя силами

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{01} \cdot \sin \omega_B t; \\ F_2 &= F_{02} \cdot \sin \omega_B t. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний этой системы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= F_{01} \sin \omega_B t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= F_{02} \sin \omega_B t. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (4.33) находим в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S_{a1} \sin \omega_B t, \\ x_2 &= S_{a2} \sin \omega_B t. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -S_{a1} \omega_B^2 \sin \omega_B t, \\ \ddot{x}_2 &= -S_{a2} \omega_B^2 \sin \omega_B t. \end{aligned}$$

Подставляя значения перемещений и ускорений из (4.34) в дифференциальные уравнения (4.33) и сокращая на $\sin \omega_B t$, получаем:

$$\begin{aligned} -m_1 S_{a1} \omega_B^2 + c_1 S_{a1} - c_2(S_{a2} - S_{a1}) &= F_{01}, \\ -m_2 S_{a2} \omega_B^2 + c_2(S_{a2} - S_{a1}) &= F_{02}. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{a1}(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2) - S_{a2} c_2 &= F_{01}, \\ S_{a2}(c_2 - m_2 \omega_B^2) - S_{a1} c_2 &= F_{02}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Из первого уравнения системы (4.35)

$$S_{a1} = \frac{F_{01} + S_{a2} c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)}. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.36) во второе уравнение системы (4.35), получим

$$S_{a2}(c_2 - m_2 \omega_B^2) - c_2 \frac{F_{01} + S_{a2} c_2}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)} = F_{02}.$$

Или окончательно

$$S_{a2} = \frac{F_{01} c_2 + F_{02}(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)(c_2 - m_2 \omega_B^2) - c_2^2}.$$

Для определения S_{a1} из первого уравнения системы (4.35) выразим S_{a2}

$$S_{a2} = \frac{S_{a1}(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2) + F_{01}}{c_2}.$$

Подставляя во второе уравнение системы (4.35), получим

$$(c_2 - m_2 \omega_B^2) \frac{S_{a1}(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2) + F_{01}}{c_2} - S_{a1} c_2 = F_{02}.$$

Приводя к общему знаменателю, окончательно имеем

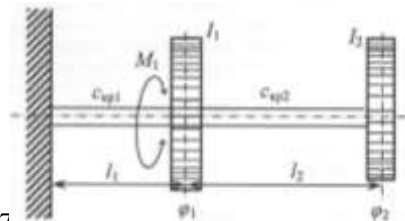
$$\left. \begin{aligned} S_{a1} &= \frac{F_{02} c_2 - F_{01} (c_2 - m_2 \omega_B^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)(c_2 - m_2 \omega_B^2) - c_2^2} \\ S_{a2} &= \frac{F_{01} c_2 + F_{02} (c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)}{(c_1 + c_2 - m_1 \omega_B^2)(c_2 - m_2 \omega_B^2) - c_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Если принять в уравнениях (4.37) F_{02} равной нулю, то получим систему уравнений (4.31).

Полученные решения для амплитуд колебаний S_{a1} и S_{a2} имеют смысл для всех значений вынужденной частоты ω_B за исключением случая резонанса по первой или второй формам. Резонанс по первой форме характеризуется равенством $\omega_B = \omega_{c1}$, по второй форме соответственно равенством $\omega_B = \omega_{c2}$. В этом случае решение ищется в особой форме, что было показано выше в 2.3.1.

4.5. Вынужденные крутильные колебания консервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении

Рассмотрим систему вала (рис. 4.7) с двумя насаженными дисками с моментами инерции I_1 и I_2 . Один конец вала жёстко закреплён. Длины участков вала l_1 и l_2 имеют соответствующие жёсткости c_1 и c_2 . К первому дис-



17

Рис. 4.7. Схема вынужденных крутильных колебаний двухмассовой системы

ку приложен возмущающий момент $M_1 = M_{01} \cdot \sin \omega_{\text{в}} t$. Массой вала пренебрегаем по сравнению с массами дисков.

Дифференциальные уравнения крутильных колебаний для данной системы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{\text{кр}1} \varphi_1 - c_{\text{кр}2} (\varphi_2 - \varphi_1) &= M_{01} \sin \omega_{\text{в}} t, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{\text{кр}2} (\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Вводя обозначения

$$\frac{c_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}2}}{I_1} = a; \quad \frac{c_{\text{кр}2}}{I_1} = b; \quad \frac{c_{\text{кр}2}}{I_2} = c; \quad \frac{M_{01}}{I_1} = q, \quad (4.39)$$

запишем уравнения (4.38) в компактной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + a\varphi_1 - b(\varphi_2 - \varphi_1) &= q \sin \omega_{\text{в}} t, \\ \ddot{\varphi}_2 - c\varphi_1 + c\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Как известно, частное решение этих уравнений можно взять в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \sin \omega_{\text{в}} t, \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \sin \omega_{\text{в}} t, \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

где φ_{a1} и φ_{a2} – амплитуды вынужденных колебаний соответственно дисков 1 и 2.

Подставим выражения (4.41) в уравнения (4.40) найдём:

$$\left. \begin{aligned} (a - \omega_{\text{в}}^2) \varphi_{a1} - b \varphi_{a2} &= q, \\ -c \varphi_{a1} + (c - \omega_{\text{в}}^2) \varphi_{a2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Частотное уравнение данной системы получим аналогично выражению (4.19)

$$\omega_{\text{с}}^4 - (a + c) \omega_{\text{с}}^2 + c(a - b) = 0$$

или, заменяя ранее введённые обозначения, получим

$$\begin{aligned} \omega_{\text{с}}^4 - \left(\frac{c_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}2}}{I_1} + \frac{c_{\text{кр}2}}{I_2} \right) \omega_{\text{с}}^2 + \\ + \frac{c_{\text{кр}2}}{I_2} \left(\frac{c_{\text{кр}1} + c_{\text{кр}2}}{I_1} - \frac{c_{\text{кр}2}}{I_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.42 \text{ а})$$

Разрешая систему уравнений (4.42) относительно φ_{a1} и φ_{a2} , получим следующие значения:

$$\varphi_{a1} = \frac{q(c - \omega_B^2)}{(a - \omega_B^2)(c - \omega_B^2) - bc}, \quad \varphi_{a2} = \frac{qc}{(a - \omega_B^2)(c - \omega_B^2) - bc}.$$

Раскрывая ранее введённые сокращения (4.39), окончательно получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a1} &= \frac{M_{01}(c_{кр2} - \omega_B^2 I_2)}{(c_{кр1} + c_{кр2} - \omega_B^2 I_1)(c_{кр2} - \omega_B^2 I_2) - c_{кр2}^2}, \\ \varphi_{a2} &= \frac{M_{01} c_{кр2}}{(c_{кр1} + c_{кр2} - \omega_B^2 I_1)(c_{кр2} - \omega_B^2 I_2) - c_{кр2}^2}. \end{aligned} \right\} (4.43)$$

Данные выражения аналогичны системе уравнений (4.31).

4.6. Свободные колебания неконсервативной системы с двумя массами

Рассмотрим двухмассовую систему с двумя демпферами колебаний. Демпфирование может быть двух вариантов. Первый случай показан на рис. 4.8. Система имеет два демпфера: демпфер отдельно для массы m_1 и второй демпфер установлен между массами m_1 и m_2 . На рис. 4.9 показан случай демпфирования каждой массы отдельно.

Коэффициенты линейного вязкого сопротивления h_1 и h_2 пропорциональны первой степени скорости колебаний масс m_1 и m_2 .

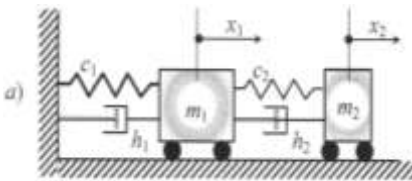


Рис. 4.8. Схема двухмассовой системы с демпфированием

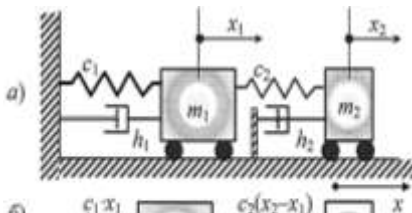


Рис. 4.9. Схема двухмассовой системы с демпфированием отдельно каждой массы

$$\left. \right\} (4.44)$$

Дифференциальные уравнения малых колебаний системы, изображённой на рис. 4.8, имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + h_1 \dot{x}_1 - h_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Для случая два (рис. 4.9), дифференциальные уравнения колебаний запишутся:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + h_1 \dot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2 \dot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} (4.45)$$

4.7. Вынужденные колебания неконсервативной системы с двумя массами при гармоническом возбуждении. Динамический демпфер колебаний

Рассмотрим вынужденные колебания двухмассовой системы с демпфированием, изображённой на рис. 4.10. Эффективного демпфирования колебаний между основной массой m_1 и дополнительной массой m_2 установлен гидравлический демпфер колебаний. К основной массе m_1 приложена возбуждающая изменяющаяся по гармоническому закону сила $F = F_0 \cdot \cos \omega t$.

Дифференциальные уравнения колебаний данной системы будут подобны уравнениям (4.44):

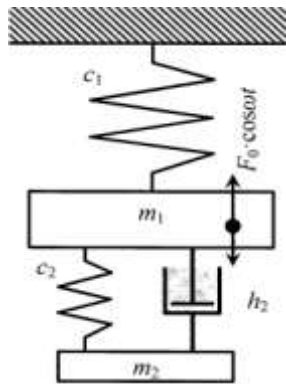


Рис. 4.10. Схема динамического демпфера

леба-
фиро-
Для
баний
ни-
равли-
ной
сила,
закон
коле-
ны

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 - h_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_1 x_1 - \\ - c_2(x_2 - x_1) = F_0 \cos \omega_b t, \\ m_2 \ddot{x}_2 + h_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2(x_2 - x_1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

где h_2 – коэффициент линейного вязкого сопротивления, пропорциональный относительной скорости масс m_1 и m_2 .

Рассматривая только установившейся процесс колебаний, то есть только вынужденные колебания, получим частное решение уравнений (4.46) в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= S_1 \cdot \cos \omega_b t + S_2 \cdot \sin \omega_b t, \\ x_2 &= S_3 \cdot \cos \omega_b t + S_4 \cdot \sin \omega_b t. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.46) и приравнивая нулю коэффициенты у $\sin \omega_b t$ и $\cos \omega_b t$, получаем четыре алгебраических уравнения, определяющие постоянные S_1, \dots, S_4 . Амплитуды колебаний масс m_1 и m_2 соответственно будут равны:

$$S_{a1} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}; \quad S_{a2} = \sqrt{S_3^2 + S_4^2}.$$

Для сокращения записей и вывода уравнений в безразмерной форме, введём следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} S_{ст1} &= F_0/c_1 - \text{статическое отклонение главной системы;} \\ \omega_{c2} &= (c_2/m_2)^{1/2} - \text{собственная частота демпфера;} \\ \omega_{c1} &= (c_1/m_1)^{1/2} - \text{собственная частота главной системы;} \\ \beta &= m_2/m_1 - \text{отношение масс демпфера и системы;} \\ \delta &= \omega_{c2}/\omega_{c1} - \text{отношение собственных частот демпфера} \\ &\text{и главной системы;} \\ z &= \omega_b/\omega_{c1} - \text{отношение частоты возмущающей силы к} \\ &\text{собственной частоте главной системы;} \\ \mu &= h_2/(2m_2 \cdot \omega_{c1}) - \text{безразмерный коэффициент вязкого} \\ &\text{сопротивления или } h_2/m_2 = 2\mu \cdot \omega_{c1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Выразим μ через m_1

$$2\mu\omega_{c1} = \frac{h_2}{m_2}; \quad 2\mu\omega_{c1} = \frac{h_2}{m_2} \frac{m_1}{m_1}; \quad \frac{h_2}{m_1} = 2\beta\mu\omega_{c1}.$$

Определению подлежит амплитуда вынужденных колебаний массы m_1 , равная $S_{a1} = (S_1^2 + S_2^2)^{1/2}$.

Разделим первое и второе уравнения системы (4.46) соответственно на m_1 и m_2 , и вводя принятые обозначения (4.47), получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 - 2\beta\mu\omega_{c1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_{c1}^2 x_1 - \\ - \frac{c_2}{m_1}(x_2 - x_1) = \frac{F_0}{m_1} \cos\omega_B t, \\ \ddot{x}_2 + 2\mu\omega_{c1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_{c2}^2(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Разделим оба уравнения (4.49) на ω_{c1}^2 , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{x}_1}{\omega_{c1}^2} - \frac{2\beta\mu}{\omega_{c1}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + x_1 - \frac{c_2}{m_1\omega_{c1}^2}(x_2 - x_1) = \frac{F_0}{m_1\omega_{c1}^2} \cos\omega_B t, \\ \frac{\ddot{x}_2}{\omega_{c1}^2} + \frac{2\mu}{\omega_{c1}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \delta^2(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Замечая, что

$$\frac{c_2}{m_1\omega_{c1}^2} = \frac{c_2}{m_1\omega_{c1}^2} \cdot \frac{m_2}{m_2} = \beta\delta^2;$$

а

$$\frac{F_0}{m_1\omega_{c1}^2} = \frac{F_0}{m_1} \cdot \frac{m_1}{c_1} = \frac{F_0}{c_1} = S_{cr1},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\ddot{x}_1}{\omega_{c1}^2} - \frac{2\beta\mu}{\omega_{c1}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + x_1 - \beta\delta^2(x_2 - x_1) \\ = S_{cr1} \cos\omega_B t, \\ \frac{\ddot{x}_2}{\omega_{c1}^2} + \frac{2\mu}{\omega_{c1}}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \delta^2(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Продифференцируем выражения (4.47)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_B \cdot S_1 \cdot \sin\omega_B t + S_2 \cdot \omega_B \cdot \cos\omega_B t; \\ \dot{x}_2 &= -\omega_B \cdot S_3 \cdot \sin\omega_B t + S_4 \cdot \omega_B \cdot \cos\omega_B t; \\ \ddot{x}_1 &= -\omega_B^2 \cdot S_1 \cdot \cos\omega_B t - S_2 \cdot \omega_B^2 \cdot \sin\omega_B t; \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_B^2 \cdot S_3 \cdot \cos\omega_B t - S_4 \cdot \omega_B^2 \cdot \sin\omega_B t, \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

и подставляя в (4.50), получим

$$\begin{aligned}
& - (\omega_B^2/\omega_{c1}^2) \cdot S_1 \cdot \cos\omega_B t - (\omega_B^2/\omega_{c1}^2) \cdot S_2 \cdot \sin\omega_B t - \\
& - (2\beta\mu\omega_B/\omega_{c1}) \cdot (-S_3 \cdot \sin\omega_B t + S_4 \cdot \cos\omega_B t + S_1 \cdot \sin\omega_B t - \\
& - S_2 \cdot \cos\omega_B t) + S_1 \cdot \cos\omega_B t + S_2 \cdot \sin\omega_B t - \\
& - \beta\delta^2 \cdot (S_3 \cdot \cos\omega_B t + S_4 \cdot \sin\omega_B t - S_1 \cdot \cos\omega_B t - S_2 \cdot \sin\omega_B t) = \\
& = S_{\text{ср1}} \cdot \cos\omega_B t;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\omega_B^2/\omega_{c1}^2) \cdot S_3 \cdot \cos\omega_B t - (\omega_B^2/\omega_{c1}^2) \cdot S_4 \cdot \sin\omega_B t + (2\beta\mu\omega_B/\omega_{c1}) \times \\
& \times (-S_3 \cdot \sin\omega_B t + S_4 \cdot \cos\omega_B t + S_1 \cdot \sin\omega_B t - S_2 \cdot \cos\omega_B t) + \\
& + \delta^2 \cdot (S_3 \cdot \cos\omega_B t + S_4 \cdot \sin\omega_B t - S_1 \cdot \cos\omega_B t - S_2 \cdot \sin\omega_B t) = 0
\end{aligned}$$

Добавим сокращения

$$\left. \begin{aligned}
& - z^2 \cdot S_1 \cdot \cos\omega_B t - z^2 \cdot S_2 \cdot \sin\omega_B t - \\
& - 2\beta\mu z \cdot (-S_3 \cdot \sin\omega_B t + S_4 \cdot \cos\omega_B t + S_1 \cdot \sin\omega_B t - S_2 \cdot \cos\omega_B t) + \\
& + S_1 \cdot \cos\omega_B t + S_2 \cdot \sin\omega_B t - \\
& - \beta\delta^2 \cdot (S_3 \cdot \cos\omega_B t + S_4 \cdot \sin\omega_B t - S_1 \cdot \cos\omega_B t - S_2 \cdot \sin\omega_B t) = \\
& = S_{\text{ср1}} \cdot \cos\omega_B t;
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - z^2 \cdot S_3 \cdot \cos\omega_B t - z^2 \cdot S_4 \cdot \sin\omega_B t + \\
& + 2\beta\mu z \cdot (-S_3 \cdot \sin\omega_B t + S_4 \cdot \cos\omega_B t + S_1 \cdot \sin\omega_B t - S_2 \cdot \cos\omega_B t) + \\
& + \delta^2 \cdot (S_3 \cdot \cos\omega_B t + S_4 \cdot \sin\omega_B t - S_1 \cdot \cos\omega_B t - S_2 \cdot \sin\omega_B t) = 0.
\end{aligned}$$

Приравняем нулю коэффициенты у $\sin\omega_B t$ и $\cos\omega_B t$

$$\left. \begin{aligned}
& - S_2 \cdot z^2 \cdot \sin\omega_B t + 2\beta\mu z \cdot S_3 \cdot \sin\omega_B t - 2\beta\mu z \cdot S_1 \cdot \sin\omega_B t + \\
& + S_2 \cdot \sin\omega_B t - \beta\delta^2 \cdot S_4 \cdot \sin\omega_B t + \beta\delta^2 \cdot S_2 \cdot \sin\omega_B t = 0; \\
& - z^2 \cdot S_1 \cdot \cos\omega_B t - 2\beta\mu z \cdot S_4 \cdot \cos\omega_B t + 2\beta\mu z \cdot S_2 \cdot \cos\omega_B t + \\
& + S_1 \cdot \cos\omega_B t - \beta\delta^2 \cdot S_3 \cdot \cos\omega_B t + \beta\delta^2 \cdot S_1 \cdot \cos\omega_B t = S_{\text{ср1}} \cdot \cos\omega_B t;
\end{aligned} \right\}$$

$$-S_4 \cdot z^2 \cdot \sin \omega_B t - 2\beta\mu z \cdot S_3 \cdot \sin \omega_B t - 2\beta\mu z \cdot S_1 \cdot \sin \omega_B t + \\ + \delta^2 \cdot S_4 \cdot \sin \omega_B t - \delta^2 \cdot S_2 \cdot \sin \omega_B t = 0;$$

$$-z^2 \cdot S_3 \cdot \cos \omega_B t + 2\beta\mu z \cdot S_4 \cdot \cos \omega_B t - 2\beta\mu z \cdot S_2 \cdot \cos \omega_B t + \\ + \delta^2 \cdot S_3 \cdot \cos \omega_B t - \delta^2 \cdot S_1 \cdot \cos \omega_B t = 0,$$

или

$$\left. \begin{aligned} -2\beta\mu z \cdot S_1 + (1 + \beta\delta^2 - z^2) \cdot S_2 + 2\beta\mu z \cdot S_3 - \beta\delta^2 \cdot S_4 &= 0; \\ (1 + \beta\delta^2 - z^2) \cdot S_1 + 2\beta\mu z \cdot S_2 - \beta\delta^2 \cdot S_3 - 2\beta\mu z \cdot S_4 &= S_{\text{ср1}}; \\ -2\beta\mu z \cdot S_1 - \delta^2 \cdot S_2 - 2\beta\mu z \cdot S_3 + (\delta^2 - z^2) \cdot S_4 &= 0; \\ -\delta^2 \cdot S_1 - 2\beta\mu z \cdot S_2 + (\delta^2 - z^2) \cdot S_3 + 2\beta\mu z \cdot S_4 &= 0. \end{aligned} \right\} (4.52)$$

Данная система уравнений, состоящая из четырёх уравнений, решается по методу Крамера, согласно которому

$$S_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad S_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.53)$$

где Δ – определитель системы без правой части;

Δ_i – определитель системы с правой частью,

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\beta\mu z & (1 + \beta\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z & -\beta\delta^2 \\ (1 + \beta\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z & -\beta\delta^2 & -2\beta\mu z \\ -2\beta\mu z & -\delta^2 & -2\beta\mu z & (\delta^2 - z^2) \\ -\delta^2 & -2\beta\mu z & (\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & (1 + \beta\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z & -\beta\delta^2 \\ S_{\text{ср1}} & 2\beta\mu z & -\beta\delta^2 & -2\beta\mu z \\ 0 & -\delta^2 & -2\beta\mu z & (\delta^2 - z^2) \\ 0 & -2\beta\mu z & (\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2\beta\mu z & 0 & 2\beta\mu z & -\beta\delta^2 \\ (1 + \beta\delta^2 - z^2) & S_{\text{ср1}} & -\beta\delta^2 & -2\beta\mu z \\ -2\beta\mu z & 0 & -2\beta\mu z & (\delta^2 - z^2) \\ -\delta^2 & 0 & (\delta^2 - z^2) & 2\beta\mu z \end{vmatrix}$$

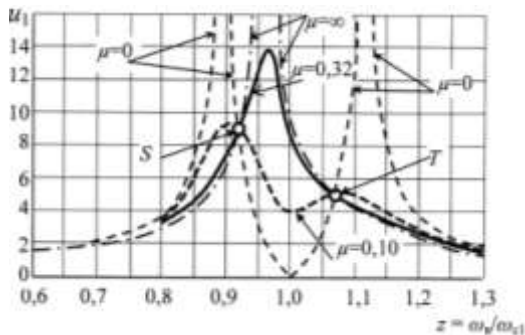


Рис. 4.11. Амплитудно-частотные характеристики двухмассовой системы с демпфированием: $\beta = 0,05$; $\delta = 1$

$$\Delta_2 =$$

Ввиду громоздких вычислений, воспользуемся окончательным решением, приведённым в [14], и введём понятие безразмерной амплитуды колебаний объекта или коэффициента динамичности для массы m_1 :

$u_1 = \left| \frac{S_{a1}}{S_{ст1}} \right|$. Исходя из этого, получим

$$u_1 = \sqrt{\frac{4\mu^2 z^2 + (z^2 - \delta^2)}{4\mu^2 z^2 (z^2 - 1 + \beta z^2)^2 + [\beta \delta^2 z^2 - (z^2 - 1)(z^2 - \delta^2)]^2}}. \quad (4.54)$$

Рассмотрим два крайних случая:

– демпфер отсутствует, $\mu = 0$;

– вязкое сопротивление бесконечно велико, $\mu = \infty$.

Для первого случая $\mu = 0$, из выражения (4.54) получим

$$u_1 = \frac{(z^2 - \delta^2)}{\beta \delta^2 z^2 - (z^2 - 1)(z^2 - \delta^2)}. \quad (4.55)$$

На рис. 4.11 представлены амплитудно-частотные характеристики при $\beta = 0,05$, $\delta = 1$. При $\mu = 0$ отмечаются два резонанса на частотах $\omega'_1 = 0,895\omega_1$ и $\omega'_2 = 1,12\omega_1$, соответствующих собственным частотам двухмассовой системы объект – гаситель. При $\mu = \infty$ относительное движение гасителя становится невозможным и система как бы трансформируется в одномассовую систему: с грузом массой $(m_1 + m_2)$ и упругой связью жёсткостью c_1 . Резонансную частоту получим из выражения

$$\omega = \sqrt{\frac{c_1}{m_1 + m_2}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 + \beta}} = 0,976\omega_1.$$

Коэффициент динамичности из (4.54) для $\mu = \infty$ будет

$$u_1 = \frac{1}{(z^2 - 1 + \beta z^2)^2}. \quad (4.56)$$

Для других значений $\mu = 0,10$ и $0,32$ также приведены амплитудно-частотные характеристики. Важно отметить, что все кривые пересекаются в двух характерных точках S и T . Это значит, что имеются два значения z , в которых амплитуды вынужденных колебаний не зависят от вязкого демпфирования. Значения этих ординат зависят от величин β и δ , определяющих массу и жёсткость гасителя.

Оптимальная настройка демпфера предусматривает подбор соответствующих значений m_2 , c_2 и μ , исходя из того, что точки S и T должны находиться на одной высоте. А максимум амплитудно-частотной характеристики должен находиться в одной из точек S или T . Параметры m_2 и c_2 подбираются из соблюдения условия $\delta = 1/(1 + \beta)$. При этом ординаты точек S и T будут равны $u_1 = \sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}}$.

На рис. 4.12 показаны амплитудно-частотные характеристики двух-массовой системы с оптимально подобранным демпфером для случая $\beta = 0,05$. Одна кривая имеет максимум в S , другая максимум в T , откуда видно, что максимальные значения этих ординат лишь незначительно отличаются от ординаты точек S и T .

Определение оптимального значения μ требует применения ЭВМ. Последовательность расчёта гасителя можно найти в [14, § 34].

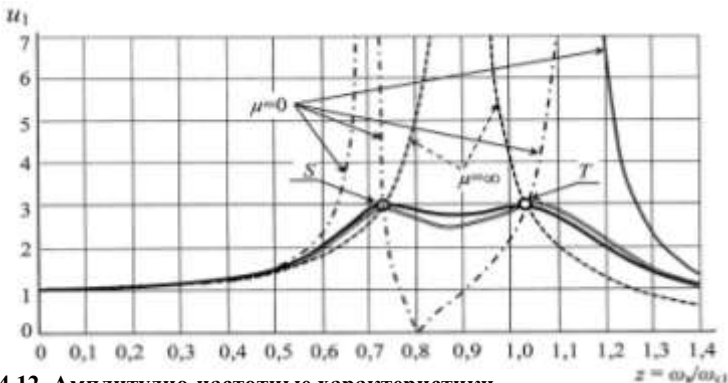
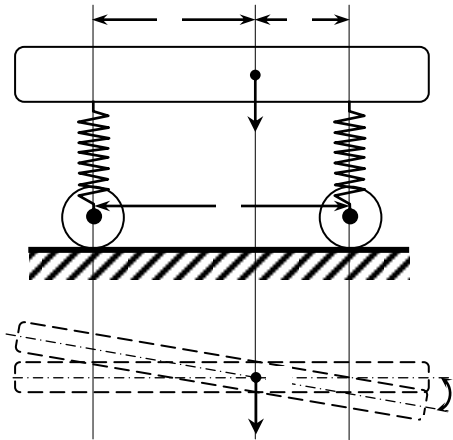


Рис. 4.12. Амплитудно-частотные характеристики оптимально подобранным демпфера: $\beta = 0,05$; $\delta = 1$

4.8. Примеры к главе 4

Пример 4.1

Рассмотрим упрощённую схему колебаний автомобиля на подвеске (рис. 4П.1). В соответствии со схемой система имеет только две степени свободы и ее положение при колебаниях можно определить двумя координатами: вертикальным перемещением z центра тяжести C и углом поворота θ . Обе эти координаты будут измеряться от положения равновесия.



Решение

Пусть W – вес наддрессорной части автомобиля; $J = (W/g)i^2$ – момент инерции наддрессорной массы относительно оси, проходящей через центр тяжести C перпендикулярно к плоскости чертежа; i – радиус инерции относительно той же оси; k_1, k_2 – коэффициенты жёсткости осей; l_1, l_2 – расстояния центра тяжести от тех же осей. При этих обозначениях уравнения движения принимают вид:

$$\frac{W}{g} \ddot{z} = -k_1(z - l_1\theta) - k_2(z + l_2\theta),$$

$$\frac{W}{g} i^2 \ddot{\theta} = l_1 k_1(z - l_1\theta) - l_2 k_2(z + l_2\theta).$$

Полагая

$$\frac{(k_1 + k_2)g}{W} = a, \quad \frac{(-k_1 l_1 + k_2 l_2)g}{W} = b, \quad \frac{(l_1^2 k_1 + l_2^2 k_2)g}{W} = c, \quad (4П.1)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + az + b\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{b}{i^2} z + \frac{c}{i^2} \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4П.2)$$

Эта система из двух дифференциальных уравнений показывает, что в общем случае координаты z и θ связаны друг с другом, и если, например, для того чтобы вызвать колебания, кузов смещен параллельно самому себе в направлении оси z и затем внезапно отпущен, то при последующих колебаниях будут иметь место не только вертикальные перемещения z , но также и углы поворота θ . Координаты z и θ становятся независимыми только в случае когда $b=0$. Это может быть, когда $k_1 l_1 = k_2 l_2$, т.е. когда коэффициенты жесткости обратно пропорциональны расстояниям рессор от центра тяжести. В этом случае приложенная к центру тяжести нагрузка вызовет только вертикальное смещение кузова без поворота. Такие условия выполняются в железнодорожных вагонах, где обычно $l_1 = l_2$ и $k_1 = k_2$.

Возвращаясь теперь к общему случаю, примем решение уравнений (4П.2) в форме

$$z = A \cdot \cos(pt + \alpha), \quad \theta = B \cdot \cos(pt + \alpha).$$

Подставляя в уравнения (4П.1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} A(a-p^2)+bB=0, \\ \frac{b}{i^2}A+\left(\frac{c}{i^2}-p^2\right)B=0. \end{aligned} \right\} \quad (4П.3)$$

Исключая А и В из уравнений (4П.3), получим следующее частотное уравнение:

$$(a-p^2)\left(\frac{c}{i^2}-p^2\right)-\frac{b^2}{i^2}=0 \quad (4П.4)$$

Два корня уравнения (4П.4), рассматриваемого как квадратное относительно p^2 , равны

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2}+a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2}+a\right)^2 - \frac{ac}{i^2} + \frac{b^2}{i^2}} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2}+a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2}-a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}. \end{aligned} \quad (4П.5)$$

Замечая из выражений (4П.5), что

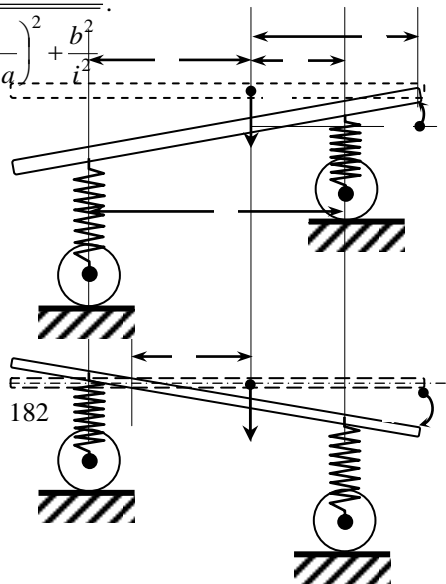
$$ac-b^2 = \frac{g^2}{W^2} k_1 k_2 (l_1 + l_2)^2,$$

можно заключить, что оба корня уравнения (4П.4) действительны и положительны.

Подставляя (4П.5) в первое уравнение (4П.3), получаем следующее отношение амплитуд А/В:

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{p^2 - a} = \frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} - a\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}}.$$

Знак плюс соответствует форме колебаний с высшей частотой, знак минус – колебаниям с низшей частотой. В дальнейшем предположим, что $b > 0$ или



$k_2 l_2 > k_1 l_1$. Это значит, что под действием собственного веса смещение кузова противоположно показанному на рис. 4П.1; смещению вниз соответствует отрицательный угол поворота θ . В таком предположении амплитуды A и B будут иметь противоположные знаки, если принять минус перед корнем в знаменателе (4П.6), и будут одного знака, если принять перед корнем плюс. Соответствующие два типа колебаний показаны на рис. 4П.2. Тип а) имеет низшую частоту; его можно рассматривать как вращение относительно некоторой точки Q , расположенной справа от центра тяжести S . Тип б), имеющий высшую частоту, представляет вращение относительно определенной точки P , расположенной слева от S . Расстояния t и p этих точек от центра тяжести определяются абсолютным значением правой части уравнения (4П.6), и мы получаем очень простое соотношение:

$$\begin{aligned}
 mn = & - \frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} - a\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}} \times \\
 & \times \frac{b}{\frac{1}{2}\left(\frac{c}{i^2} - a\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c}{i^2} - a\right)^2 + \frac{b^2}{i^2}}}, \tag{4П.7}
 \end{aligned}$$

которое сводится к равенству $tp = i^2$.

В частном случае, если $b = 0$, т.е. $k_1 l_1 = k_2 l_2$, расстояние p обращается в нуль и t становится бесконечно большим. Это значит, что в данном случае одна из главных форм колебаний представляет повороты вокруг центра тяжести, а другая – поступательное движение без вращения. Приложенная в центре тяжести вертикальная

нагрузка в этом случае вызывает только вертикальное смещение, и обе пружины сжимаются одинаково.

Если, кроме $b=0$, также равна нулю разность $c/i^2 - a$, то обе частоты, определяемые формулой (4П.5), становятся равными, и оба типа колебаний будут иметь одинаковый период.

Рассмотрим теперь числовой пример. Принимая следующие значения: $W = 4370$ Н, $i^2 = 1,21$ м², $l_1 = 1,22$ м, $l_2 = 1,52$ м, $k_1 = 23800$ Н/м, $k_2 = 35700$ Н/м, получим соответствующие статические смещения:

$$\delta_a = \frac{Wl_2}{k_1 l} = 0,102 \text{ м}, \quad \delta_b = \frac{Wl_1}{k_2 l} = 0,0545 \text{ м}$$

и по формулам (4П.1): $a = 133,3$, $b = 5670$, $c = 2\,640\,000$. Подставляя в (4П.5), найдём следующие два корня: $p_1^2 = 109$, $p_2^2 = 243$. Соответствующие частоты равны:

$$p_1 = 10,5 \text{ рад/с и } p_2 = 15,6 \text{ рад/с.}$$

Из формулы (4П.6) имеем:

$$\frac{A}{B} = -2,34 \text{ м и } \frac{A}{B} = 0,51 \text{ м.}$$

Это значит, что при низшей форме колебания кузова составляют 2,34 м/рад, или 0,041 м/градус. При высшей форме колебания кузова составляют 0,51 м/рад, или 0,009 м/градус.

Грубо говоря, медленные колебания кузова состоят в его подпрыгиваниях, осадки обеих пружин имеют одинаковый знак и находятся в отношении

$$\frac{\delta'_b}{\delta'_a} = \frac{2,34 - 1,52}{2,34 + 1,22} = 0,24.$$

Быстрые колебания состоят главным образом в «галопировании» кузова.

Интересно отметить, что хорошее приближение для частот главных форм колебаний может быть получено на основе теории систем с одной степенью свободы. Предполагая сначала, что рессора В закреплена так, что кузов может качаться на рессоре А вокруг оси В как вокруг шарнира, получим уравнение движения

$$\left(J + \frac{W}{g} l_2^2 \right) \ddot{\theta} + k_1 l^2 \theta = 0,$$

так что частота закреплённой системы равна

$$p'_1 = l \sqrt{\frac{k_1}{J + \frac{W}{g} l_2^2}},$$

или, подставляя данные выше значения,

$$p'_1 = 274 \sqrt{\frac{23,8}{\frac{437}{981} (12100 + 152^2)}} = 10,8 \text{ рад/с.}$$

Этот результат близок к частоте 10,5, найденной ранее для низшей формы колебаний кузова. Таким же образом, рассматривая качания кузова на пружине В вокруг оси А как вокруг шарнира, получим $p'_2 = 15,0$, что близко к частоте $p_2 = 15,6$, ранее найденной для высшей формы колебаний. На этом основан опытный метод определения частот главных форм колебаний путем качаний кузова сначала при закреплённых передних рессорах, а затем при закреплении задних рессор. Частоты, найденные при таких испытаниях, достаточно близки к истинным значениям. Возвращаясь теперь к общему решению уравнений

(4П.2) и обозначая через p_1 и p_2 два корня, определяемых из (4П.5), имеем:

$$\left. \begin{aligned} z &= A_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \\ \theta &= B_1 \cos(p_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(p_2 t + \alpha_2), \end{aligned} \right\} \quad (4П.8)$$

где

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{b}{p_1^2 - a}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{b}{p_2^2 - a}.$$

Общее решение (4П.8) содержит четыре произвольные постоянные A_1, A_2, α_1 и α_2 , которые в каждом частном случае должны быть так определены, чтобы удовлетворить начальным условиям. Примем, например, что в начальный момент создано перемещение вниз λ без поворота кузова и затем кузов внезапно отпущен. В этом случае начальные условия имеют вид:

$$(z)_{t=0} = \lambda, \quad (\dot{z})_{t=0} = 0, \quad (\theta)_{t=0} = 0, \quad (\dot{\theta})_{t=0} = 0$$

Эти условия будут удовлетворены, если в уравнениях (4П.8) принять:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 0, \\ A_1 &= \lambda \frac{a - p_2^2}{p_1^2 - p_2^2}, \quad A_2 = \lambda \frac{p_1^2 - a}{p_1^2 - p_2^2} \\ B_1 &= A_1 \frac{(p_1^2 - a)}{b}, \quad B_2 = A_2 \frac{(p_2^2 - a)}{b} \end{aligned} \right\} \quad (4П.9)$$

Мы видим, что при принятых условиях будут вызваны обе формы колебаний, находящиеся вначале в одной фазе; однако вследствие различия частот с течением времени они сдвинутся по отношению друг к другу, и будет иметь место сложное комбинированное движение. Если разность частот весьма мала, возникает явление биений, т.е. будут иметь место колебания с периодически

меняющейся амплитудой. Предполагая этот частный случай, примем в формуле (4П.5), что

$$\frac{c}{i^2} - a = 0 \quad \text{и} \quad \frac{b}{i} = \delta,$$

где δ – малая величина.

Тогда $p_1^2 = a - \delta$, $p_2^2 = a + \delta$ и из (4П.9) получим:

$$A_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad A_2 = \frac{\lambda}{2}, \quad B_1 = -\frac{\lambda}{2i}, \quad B_2 = \frac{\lambda}{2i}$$

Решения (4П.8) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\lambda}{2} (\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \lambda \cos \frac{p_1 + p_2}{2} t \cos \frac{p_1 - p_2}{2} t, \\ \theta &= \frac{\lambda}{2i} (-\cos p_1 t + \cos p_2 t) = \frac{\lambda}{i} \sin \frac{p_1 + p_2}{2} t \sin \frac{p_1 - p_2}{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (4П.10)$$

Вследствие того, что разность $p_1 - p_2$ мала, функции $\cos \frac{p_1 + p_2}{2} t$ и $\sin \frac{p_1 + p_2}{2} t$ будут относительно быстро меняющимися функциями, совершающими несколько циклов изменения за то время, пока смогут заметно измениться медленно меняющиеся функции $\cos \frac{p_1 - p_2}{2} t$ и $\sin \frac{p_1 - p_2}{2} t$. В результате получаются колебания с периодически изменяющимися амплитудами.

Пример 4.2

На цилиндрическом валу постоянного поперечного сечения (рис. 4П.3) длиной $2l = 0,5$ м, который закреплён одним концом, насажены два одинаковых диска с моментами инерции $J_1 = J_2 = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Один из дисков насажен посередине вала, а другой – на его свободном конце. Полярный момент инерции сечения вала $I_p = 602 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$, модуль сдвига материала вала $G = 83 \text{ ГПа}$.

Определить, пренебрегая массой вала, частоты ω_1 и ω_2 и формы свободных колебаний дисков.

Решение

Примем за обобщённые координаты рассматриваемой двухмассовой крутильной системы, углы поворота среднего и крайнего дисков φ_1 и φ_2 .

Определим крутильные жёсткости участков вала:

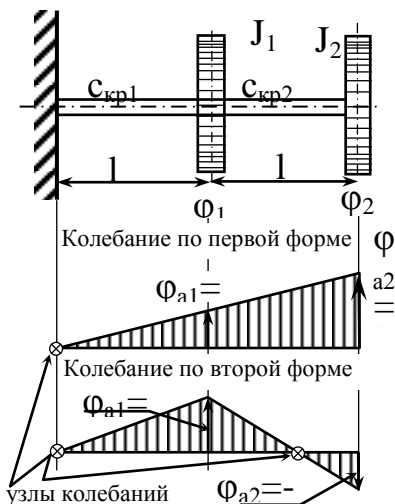


Рис. 4П.3

$$c_{kp1} = c_{kp2} = \frac{GI_p}{l} = \frac{83 \cdot 10^9 \cdot 602 \cdot 10^{-8}}{0,25} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2}{2}.$$

Потенциальная энергия равна

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{c_{kp1} \varphi_1^2 + c_{kp2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2}{2} \\ &= \frac{(c_{kp1} + c_{kp2}) \varphi_1^2 - 2c_{kp2} \varphi_1 \varphi_2 + c_{kp2} \varphi_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Приведём частотное уравнение (4.19) к следующему виду, подставив значения а, b и d:

$$\omega_c^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega_c^2 + \frac{c_2}{m_2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} - \frac{c_2}{m_1} \right) = 0.$$

Из выражений Г и П определяем коэффициенты инерции и жёсткости для данной системы:

$$m_1 = J_1; \quad m_2 = J_2; \quad c_1 = c_{кр1}; \quad c_2 = c_{кр2}.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в уравнение частот, получим

$$\omega_c^4 - \left(\frac{c_{кр1} + c_{кр2}}{J_1} + \frac{c_{кр2}}{J_2} \right) \omega_c^2 + \frac{c_{кр2}}{J_2} \left(\frac{c_{кр1} + c_{кр2}}{J_1} - \frac{c_{кр2}}{J_1} \right) = 0.$$

Учитывая, что $J_1 = J_2 = J$ и $c_{кр1} = c_{кр2} = c_{кр}$, окончательно получим

$$\omega_c^4 - \frac{3c_{кр}}{J} \omega_c^2 + \frac{c_{кр}}{J} \left(\frac{2c_{кр}}{J} - \frac{c_{кр}}{J} \right) = 0,$$

или

$$\omega_c^4 - \frac{3c_{кр}}{J} \omega_c^2 + \frac{c_{кр}^2}{J^2} = 0.$$

Откуда

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5} c_{кр}}{2} \frac{c_{кр}}{J}} = 0,62 \sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} = 124 \text{ Гц};$$

$$\omega_{c2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5} c_{кр}}{2} \frac{c_{кр}}{J}} = 1,62 \sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} = 324 \text{ Гц}.$$

Вычисляем коэффициенты распределения амплитуд в соответствии с выражением (4.23):

$$\mu_1 = \frac{\frac{c_{кр}}{J}}{\frac{c_{кр}}{J} - \omega_{с1}^2} = \frac{2 \cdot \frac{10^6}{50}}{\left(2 \cdot \frac{10^6}{50}\right) - 124^2} = 1,62;$$

$$\mu_2 = \frac{\frac{c_{кр}}{J}}{\frac{c_{кр}}{J} - \omega_{с2}^2} = \frac{2 \cdot \frac{10^6}{50}}{\left(2 \cdot \frac{10^6}{50}\right) - 324^2} = -0,62.$$

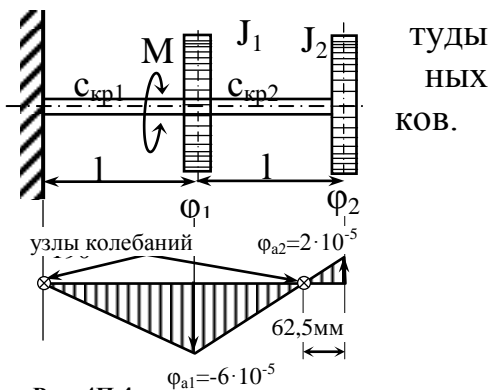
Зная коэффициенты распределения, графически построим формы главных колебаний (рис. 4П.3). Амплитуду колебаний первого диска φ_{a1} принимает за единицу и условно откладываем полученные соотношения для амплитуд φ_{a1} и φ_{a2} с учётом знаков. Значения φ_{a2} получим исходя из выражений (4.24) и (4.25) $\varphi_{a2} = \mu_1 \cdot \varphi_{a1}$ или для второй формы колебаний $\varphi_{a2} = \mu_2 \cdot \varphi_{a1}$. Соединяя концы отрезков прямыми линиями, получаем эпюры колебаний по первой (одноузловые) и второй (двухузловые) формам.

Пример 4.3

На рис. 4П.4 представлена крутильная система аналогичная примеру 4.2. На средний диск действует возмущающий момент $M_1 = 200 \cdot \sin 400t$ Н·м.

Определить амплитуды вынужденных крутильных колебаний системы дисков.

Решение



Исходя из заданных значений вынуждающего момента, имеем:

– амплитуда вынуждающего момента $M_{01} = 200 \text{ Н}\cdot\text{м}$;

– круговая частота вынуждающего момента $\omega_b = 400 \text{ рад/с}$.

Амплитуды вынужденных колебаний определяем по формулам (4.43)

$$\varphi_{a1} = \frac{M_{01}(c_{кр2} - \omega_b^2 I_2)}{(c_{кр1} + c_{кр2} - \omega_b^2 I_1)(c_{кр2} - \omega_b^2 I_2) - c_{кр2}^2},$$

$$\varphi_{a2} = \frac{M_{01} c_{кр2}}{(c_{кр1} + c_{кр2} - \omega_b^2 I_1)(c_{кр2} - \omega_b^2 I_2) - c_{кр2}^2}.$$

Подставляя сюда значения всех величин, получаем

$$\varphi_{a1} = -6 \cdot 10^{-5}; \quad \varphi_{a2} = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Уравнения вынужденных колебаний этих дисков имеют вид

$$\varphi_1 = \varphi_{a1} \cdot \sin \omega_b t = -6 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 400t;$$

$$\varphi_2 = \varphi_{a2} \cdot \sin \omega_b t = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 400t.$$

Зависимость амплитуд вынужденных колебаний показана

на рис. 4П.4, откуда видно, что рассмотренные колебания имеют два узловых сечения. Первый узел находится в месте заделки вала, второй расположен на расстоянии 62,5 мм от крайнего диска.

Пример 4.4

На валу, закреплённом на одном конце, насажены два диска (рис. 4П.5). Диск, насаженный посередине, момент инерции относи-

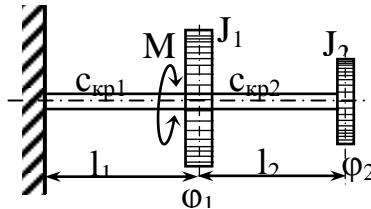


Рис. 4П.5

лён-
саже-
Диск,
имеет
тель-

но оси вала $J_1 = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. К первому диску приложен возмущающий момент $M_1 = 320 \cdot \sin 200t \text{ Н}\cdot\text{м}$. Жёсткость на кручение первого участка вала $c_{\text{кр}1} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}$, а второго участка – $c_{\text{кр}2} = 8 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Масса вала незначительна по сравнению с массами дисков. Второй диск выполняет функции гасителя вынужденных крутильных колебаний первого диска.

Определить: потребный момент инерции диска гасителя J_2 ; амплитуду крутильных колебаний диска гасителя; частоты главных колебаний системы с виброгасителем.

Решение

Определим кинетическую и потенциальную энергии системы без виброгасителя:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2; \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{\text{кр}1} \varphi_1^2.$$

Круговая частота свободных колебаний системы с одним диском

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{\text{кр}1}}{J_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6}{50}} = 200 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Исходя из условий задачи амплитуда и круговая частота возмущающего момента, соответственно, равны:

$$M_{01} = 320 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad \omega_{\text{в}} = 200 \text{ рад/с}.$$

Получено, что частоты свободных и вынужденных колебаний ($\omega_1 = \omega_{\text{в}} = 200$) совпали, что является причиной возникновения резонансных крутильных колебаний.

Момент инерции диска гасителя определяем из условия того, чтобы парциальная собственная круговая частота условной системы диска с моментом инерции J_2 и

жёсткостью вала c_2 равнялась круговой частоте вынужденных колебаний, то есть

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{кр2}}{J_2}} = \omega_B.$$

Откуда

$$J_2 = \frac{c_{кр2}}{\omega_2^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{200^2} = 20 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний диска гасителя

$$\varphi_{a2} = -\frac{M_{01}}{c_{кр2}} = \frac{320}{8 \cdot 10^5} = -0,0004 \text{ рад}.$$

Частоты главных колебаний определяем из уравнения частот (4.42 а)

$$\omega_c^4 - \left(\frac{c_{кр1} + c_{кр2}}{I_1} + \frac{c_{кр2}}{I_2} \right) \omega_c^2 + \frac{c_{кр2}}{I_2} \left(\frac{c_{кр1} + c_{кр2}}{I_1} - \frac{c_{кр2}}{I_1} \right) = 0.$$

Подставляя в это уравнение значения всех коэффициентов, получим:

$$\omega_{c1} = 146 \text{ рад/с}; \quad \omega_{c2} = 273 \text{ рад/с}.$$

Таким образом, у системы с виброгасителем появляются две новые критические частоты вынужденных колебаний, соответствующие частотам главных колебаний ω_{c1} и ω_{c2} . Исходя из этого, заключаем, что применение виброгасителя приводит к остро настроенной системе с одной данной вынужденной частотой.

Пример 4.5

На рис. 4П.6 показана крутильная система, состоящая из вала и двух дисков. Параметры системы аналогичны примеру 4.2. На средний диск действует возмущающий момент $M_1 = 300 \cdot \sin 200t + 100 \cdot \sin 600t$ Н·м, а на крайний диск момент $M_2 = 200 \cdot \sin 600t$.

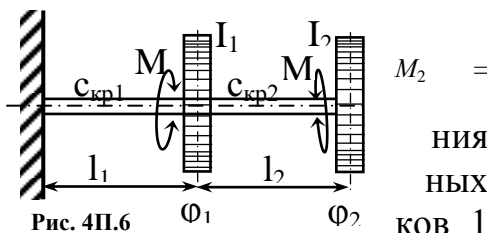


Рис. 4П.6

Определить уравнения вынужденных крутильных колебаний системы дисков и 2.

Решение

Исходя из условий примера 4.2, коэффициенты инерции и жёсткости имеют следующие значения:

$$I_1 = I_2 = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; c_{кр1} = c_{кр2} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из выражений возмущающих моментов находим амплитуды и круговые частоты:

$$M_{01'} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}; M_{01''} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}; M_{02'} = 0 \text{ Н} \cdot \text{м}; M_{02''} = 200 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$\omega_B = \omega_{B1'} = 200 \text{ рад/с}; \omega_{B1''} = 600 \text{ рад/с}; \omega_{B2'} = 0; \omega_{B2''} = 600 \text{ рад/с}.$$

Дифференциальные уравнения крутильных колебаний для данной системы имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1} \varphi_1 - c_{кр2} (\varphi_2 - \varphi_1) &= \sum_{j=1}^n M_{02j} \sin j \omega_B t \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{кр2} (\varphi_2 - \varphi_1) &= \sum_{j=1}^n M_{02j} \sin j \omega_B t. \end{aligned} \right\}$$

Вследствие линейности этих дифференциальных уравнений, вынужденные колебания можно представить в виде суммы членов, соответствующих отдельным гармоникам

$$\varphi_{a12} = \frac{M_{02}''c_{кр2} - M_{01}''(c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_2)}{(c_{кр1} + c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_1)(c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_2) - c_{кр2}^2} = -5,45 \cdot 10^{-6};$$

$$\varphi_{a21} = \frac{M_{01}'c_{кр2} - M_{02}'(c_{кр1} + c_{кр2} - 1^2\omega_B^2 I_1)}{(c_{кр1} + c_{кр2} - 1^2\omega_B^2 I_1)(c_{кр2} - 1^2\omega_B^2 I_2) - c_{кр2}^2} = -1,5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varphi_{a22} = \frac{M_{01}''c_{кр2} - M_{02}''(c_{кр1} + c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_2)}{(c_{кр1} + c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_1)(c_{кр2} - 3^2\omega_B^2 I_2) - c_{кр2}^2} = -1,18 \cdot 10^{-5};$$

Уравнения вынужденных крутильных колебаний дисков имеют вид:

$$\varphi_1 = -5,45 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 600t;$$

$$\varphi_2 = -1,5 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 200t - 1,18 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 600t.$$

Пример 4.6

На рис. 4П.7 изображена схема гидравлической дисковой муфты.

На концах двух одинаковых валов, жёсткость которых $c_{кр}$, насажены диски А и В с равными моментами инерции $J_A = J_B$. Передача крутящего момента осуществляется от левого вала к правому посредством работы гидравлической

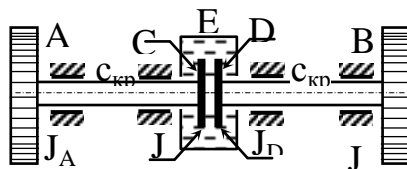


Рис. 4П.7

работы гидравлической

муфты Е. В муфте, заполненной жидкостью, вращаются диски С и D, между поверхностью которых и жидкостью возникает гидравлическое трение. Моменты инерции дисков

$J_C = J_D = J$. Валы с дисками А и В вращаются с постоянной угловой скоростью ω . Моменты инерции дисков А и В велики по сравнению с моментами инерции дисков С и D.

Определить свободные крутильные колебания дисков С и D.

Решение

Силы сопротивления жидкости считаем пропорциональными относительной угловой скорости между дисками С и D:

$$F_{1\text{сопр}} = \xi (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2); \quad F_{2\text{сопр}} = -\xi (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1).$$

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии всех дисков

$$T = \frac{1}{2} [J_A \omega^2 + J_C (\omega + \dot{\varphi}_1)^2 + J_D (\omega + \dot{\varphi}_2)^2 + J_B \omega^2].$$

Потенциальную энергию этой системы определяем по формуле

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{\text{кр}} \varphi_1^2 + c_{\text{кр}} \varphi_2^2).$$

На основании уравнений Лагранжа с учётом полученных значений кинетической и потенциальной энергий и сил сопротивления при условии $\omega = \text{const}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} J_C \ddot{\varphi}_1 + \xi (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_{\text{кр}} \varphi_1 &= 0, \\ J_D \ddot{\varphi}_2 + \xi (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + c_{\text{кр}} \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Из условий задачи, так как $J_C = J_D = J$, складывая, а затем, вычитая предыдущие уравнения, получаем

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_1 + c_{кр}(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0, \\ J(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + 2\xi(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_{кр}(\varphi_1 &- \varphi_2) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Из последней системы уравнений устанавливаем следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi_{a1} \\ \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} + \alpha_1\right); & \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cdot e^{-\frac{\xi}{J}t} \\ \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t + \alpha_2\right). & \end{aligned} \right\}$$

Из этих уравнений находим φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \left[\varphi_{a1} \left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} \cdot t + \alpha_1 \right) + \varphi_{a2} \cdot e^{-\frac{\xi}{J}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t + \alpha_2\right) \right];$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left[\varphi_{a1} \left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} \cdot t + \alpha_1 \right) - \varphi_{a2} \cdot e^{-\frac{\xi}{J}t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t + \alpha_2\right) \right].$$

Учитывая начальные условия при $t = 0$ значения величин

$\varphi_1 = \varphi_2 = \dot{\varphi}_2 = 0$, а $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_{10}$, получаем:

$$\varphi_1 = \frac{\dot{\varphi}_{10}}{2} \left[\frac{\sin \sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} \cdot t}{\sqrt{\frac{c_{кр}}{J}}} + \frac{e^{-\frac{\xi}{2J}t} \cdot \sin \sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t}{\sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t} \right];$$

$$\varphi_2 = \frac{\dot{\varphi}_{10}}{2} \left[\frac{\sin \sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} \cdot t}{\sqrt{\frac{c_{кр}}{J}}} - \frac{e^{-\frac{\xi}{2J}t} \sin \sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t}{\sqrt{\frac{c_{кр}}{J} - \frac{\xi^2}{J^2}} \cdot t} \right];$$

Так как при равномерном вращении, что соответствует случаю, установившемуся движению при $t \rightarrow \infty$ последние члены стремятся к нулю и их можно не учитывать, то

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\dot{\varphi}_{10}}{2} \cdot \sqrt{\frac{J}{c_{кр}}} \cdot \sin \sqrt{\frac{c_{кр}}{J}} \cdot t.$$

Исходя из последнего выражения, следует, что при наличии демпфера, которым в данном случае является гидравлическая муфта, разность угловых скоростей между дисками С и D исчезает, и оба диска вращаются одинаково.

4.9. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Приведите систему уравнений свободных колебаний консервативной системы для случая крутильных и прямолинейных колебаний.

2. Что называется частотным уравнением?

3. Что называется главными частотами свободных колебаний двухмассовой системы?

4. Как определяются формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы?

5. Как влияет сопротивление на свободные колебания системы с двумя степенями свободы?

6. Как определяют амплитуды вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы?

7. Каковы частоты вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы?

8. Какая частота называется основной частотой?

9. Дайте определение узла крутильных колебаний?

10. Чем отличаются вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы при приложении нагрузки к одной массе и к двум массам?

11. Дайте определение динамического демпфера вынужденных колебаний и представьте принципиальную схему системы с демпфером?

12. Что понимается под оптимальной настройкой демпфера?

13. Представьте амплитудно-частотную характеристику двухмассовой системы с демпфированием.

14. Представьте амплитудно-частотную характеристику системы с оптимально подобранным демпфером.

15. Чем отличается гаситель колебаний от демпфера колебаний?

Глава 5. Колебания системы с конечным числом степеней свободы

5.1. Свободные крутильные колебания консервативной системы с тремя массами

Система с тремя массами показана на рис. 5.1. Такая система в отличие от двухмассовой системы может совершать два вида колебаний:

- 1) одноузловые колебания, или колебания первой формы (рис. 5.1, а);
- 2) двухузловые колебания, или колебания второй формы (рис. 5.1, б).

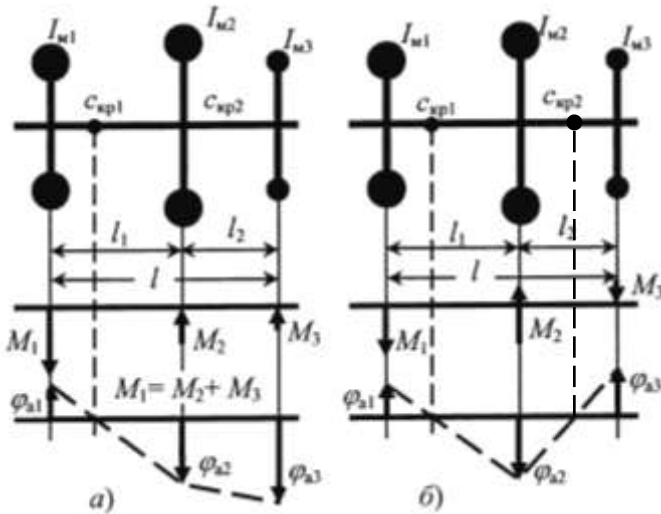


Рис. 5.1. Схема трёхмассовой крутильной системы:
а) – схема одноузловых крутильных колебаний;
б) – схема двухузловых крутильных колебаний

Исследованию в трёхмассовой системе подлежат форма и частота крутильных колебаний. Обозначим углы поворота маховиков от нейтрального положения через φ_1 , φ_2 и φ_3 . Для упрощения выводов предположим, что все три угла положительны, то есть маховики повернуты в одну сторону. В результате решения получим для некоторых масс отрицательные значения амплитуд угла закрутки. Это будет означать, что данные маховики будут повернуты в противоположном направлении.

Составим дифференциальные уравнения движения каждой массы. При этом будем считать момент сил упругости участка, расположенного справа от колеблющейся массы, положительным и, соответственно, отрицательным, если он расположен слева. Крутильная система из трёх масс описывается системой из трёх уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_{M1}\ddot{\varphi}_1 + c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ I_{M2}\ddot{\varphi}_2 - c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ I_{M3}\ddot{\varphi}_3 - c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где $c_{кр1}$ и $c_{кр2}$ – соответственно крутильные жёсткости левого и правого участков вала.

Решение уравнений (5.1) ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \cdot \cos(\omega_c t + \eta); \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cdot \cos(\omega_c t + \eta); \\ \varphi_3 &= \varphi_{a3} \cdot \cos(\omega_c t + \eta), \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

где φ_{a1} , φ_{a2} и φ_{a3} – амплитуды крутильных колебаний маховиков, рад;

ω_c – круговая частота собственных крутильных колебаний маховиков, 1/с;

η – начальная фаза колебаний, рад.

Продифференцируем дважды выражения (5.2), получим угловые ускорения крутильных колебаний маховиков

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} &= -\varphi_{a1}\omega_c^2 \cos(\omega_c t + \eta); \\ \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} &= -\varphi_{a2}\omega_c^2 \cos(\omega_c t + \eta); \\ \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} &= -\varphi_{a3}\omega_c^2 \cos(\omega_c t + \eta). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя в уравнения (5.1) значения углов закрутки и угловых ускорений соответственно из (5.2) и (5.3) после сокращений на $\cos(\omega_c t + \eta)$ получим:

$$\left. \begin{aligned} -I_{M1} \varphi_{a1} \omega_c^2 + c_{кр1} (\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= 0; \\ -I_{M2} \varphi_{a2} \omega_c^2 - c_{кр1} (\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) + c_{кр2} (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= 0; \\ -I_{M3} \varphi_{a3} \omega_c^2 - c_{кр2} (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В полученных трёх уравнениях содержатся четыре неизвестных: собственная частота ω_c и амплитуды углов закрутки φ_{a1} , φ_{a2} , φ_{a3} . В начале определим ω_c , для чего из уравнений (5.4) исключим неизвестные φ_{a1} , φ_{a2} , φ_{a3} .

Из первого и третьего уравнений системы (5.4) находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{a1} &= \frac{c_{кр1} \varphi_{a2}}{c_{кр1} - I_{M1} \omega_c^2}; \\ \varphi_{a3} &= \frac{c_{кр2} \varphi_{a2}}{c_{кр2} - I_{M3} \omega_c^2}. \end{aligned} \right\}$$

Складывая уравнения системы (5.4), после преобразований получим

$$I_{M1} \cdot \varphi_{a1} + I_{M2} \cdot \varphi_{a2} + I_{M3} \cdot \varphi_{a3} = 0. \quad (5.6)$$

Подставляя в полученное уравнение значения φ_{a1} и φ_{a3} из (5.5), после преобразований окончательно получим

$$\begin{aligned} & \frac{I_{M1} \cdot I_{M2} \cdot I_{M3}}{c_{кр1} c_{кр2}} \omega_c^4 - \\ & - \left(\frac{I_{M1} \cdot I_{M2} + I_{M1} \cdot I_{M3}}{c_{кр1}} + \frac{I_{M2} \cdot I_{M3} + I_{M3}}{c_{кр2}} \right) \omega_c^2 + \\ & + (I_{M1} + I_{M2} + I_{M3}) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Полученное биквадратное уравнение, не содержащее величин φ_{a1} , φ_{a2} , φ_{a3} , называется *уравнением частот*. Решая его находим корни ω_{c1}^2 и ω_{cII}^2 , каждому из которых соответствует своя форма колебаний (одно- и двухузловая). Меньшему положительному значению ω_{c1} соответствует

одноузловая (низшая) форма, большому положительному значению $\omega_{сП}$ – двухузловая (высшая) форма крутильных колебаний.

Для нахождения относительных амплитуд колебаний маховиков используется следующий способ. Задаваясь одной из амплитуд (например, $\varphi_{a1}=1$) и подставляя значения $\omega_{сП}^2$ и $\omega_{сП}^2$ в уравнения (5.5), находим относительные амплитуды колебаний φ_{a2} и φ_{a3} и, следовательно, положения масс для рассматриваемого момента времени.

Откладывая в виде ординат относительные амплитуды колебаний φ_{a1} , φ_{a2} и φ_{a3} , соответствующие данной частоте $\omega_{сП}$ и $\omega_{сП}$, и соединяя концы их ломаной линией, получаем одно- и двухузловую форму крутильных колебаний системы (рис. 5.1).

5.2. Свободные крутильные колебания консервативной системы со многими массами

Рассмотрим свободные крутильные колебания цилиндрического вала постоянного поперечного сечения с закреплёнными на нем n дисками. Данная система имеет n степеней свободы (рис. 5.2).

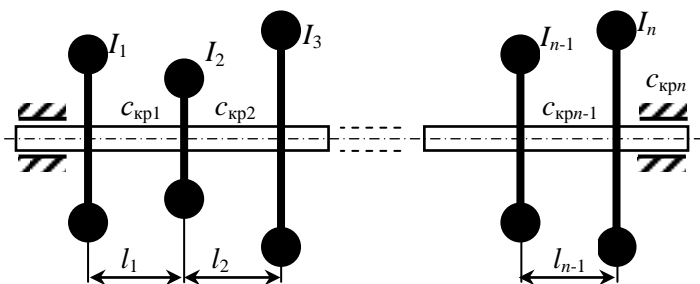


Рис. 5.2. Схема системы вала со многими массами

Пренебрегаем массой вала по сравнению с массами дисков. Определим частоты и формы главных колебаний этой системы. Поступим также, как при составлении дифференциальных уравнений для трехмассовой системы. При этом будем считать, что момент сил упругости участка расположенного справа от колеблющейся массы положительным и, соответ-

венно, отрицательным, если расположен он слева. Крутильная система из n масс описывается системой из n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ I_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} - c_{крn-2}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) + \\ &+ c_{крn-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0; \\ I_n \ddot{\varphi}_n - c_{крn-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Рассмотрим только колебательные движения, вызываемые скручиванием вала. Для определения главных колебаний вала принимаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \cdot \cos(\omega_c t + \eta); \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cdot \cos(\omega_c t + \eta); \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n &= \varphi_{an} \cdot \cos(\omega_c t + \eta). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Подставляя эти значения углов в дифференциальные уравнения и сокращая на $\cos(\omega_c t + \eta)$, получаем уравнения для определения ω_c и амплитуд $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \dots, \varphi_{an}$.

$$\left. \begin{aligned} (c_{кр1} - I_1 \omega_c^2) \varphi_{a1} - c_{кр1} \varphi_{a2} &= 0; \\ -c_{кр1} \varphi_{a1} + (c_{кр1} + c_{кр2} - I_2 \omega_c^2) \varphi_{a2} - c_{кр2} \varphi_{a3} &= 0; \\ -c_{кр2} \varphi_{a2} + (c_{кр2} + c_{кр3} - I_3 \omega_c^2) \varphi_{a3} - c_{кр3} \varphi_{a4} &= 0; \\ \dots\dots\dots \\ -c_{крn-1} \varphi_{n-1} + (c_{крn-1} - I_n \omega_c^2) \varphi_n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для решения этой системы относительно $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \dots, \varphi_{an}$ необходимо определитель системы (5.10) приравнять нулю:

$$\Delta =$$

$$= \begin{vmatrix} (c_{кр1} - I_1 \omega_c^2), & -c_{кр1}, & 0, & 0, \dots, 0, & 0 \\ -c_{кр1}, & (c_{кр1} + c_{кр2} - I_2 \omega_c^2), & -c_{кр2}, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -c_{кр2}, & (c_{кр2} + c_{кр3} - I_3 \omega_c^2), & -c_{кр3}, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, \dots, -c_{крn-1}, & (c_{крn-1} - I_1 \omega_c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Прибавляя к первой строке все остальные строки, получаем:

$$= \begin{vmatrix} -I_1 \omega_c^2, & -I_2 \omega_c^2, & -I_3 \omega_c^2, & -I_4 \omega_c^2, \dots, -I_{n-1} \omega_c^2, & -I_n \omega_c^2 \\ -c_{кр1}, & (c_{кр1} + c_{кр2} - I_2 \omega_c^2), & -c_{кр2}, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -c_{кр2}, & (c_{кр2} + c_{кр3} - I_3 \omega_c^2), & -c_{кр3}, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, \dots, -c_{крn-1}, & (c_{крn-1} - I_1 \omega_c^2) \end{vmatrix} =$$

$$= -\omega_c^2 \begin{vmatrix} -I_1, & -I_2, & -I_3, & -I_4, \dots, -I_{n-1}, & -I_n \\ -c_{кр1}, & (c_{кр1} + c_{кр2} - I_2 \omega_c^2), & -c_{кр2}, & 0, \dots, 0, & 0 \\ 0, & -c_{кр2}, & (c_{кр2} + c_{кр3} - I_3 \omega_c^2), & -c_{кр3}, \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & 0, \dots, \dots, -c_{крn-1}, & (c_{крn-1} - I_1 \omega_c^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Р
азвер-
нув
этот
опре-
дели-
тель и
при-
равняв
его
нулю,
полу-
чаем

уравнение n -ой степени относительно ω_c^2 , называемое *уравнением частот*.

Пользуясь определителем (5.11), получаем уравнения частот для случая двух, трёх и четырёх дисков.

При $n = 2$

$$\omega_c^2 - \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_{кр1} = 0. \quad (5.12)$$

При $n = 3$

$$\omega_c^4 - \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_{кр1} + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} c_{кр2} \right) \omega_c^2 +$$

$$+ \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} c_{кр1} c_{кр2} = 0. \quad (5.13)$$

При $n = 4$

$$\begin{aligned} \omega_c^6 - \left(\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} c_{кр1} + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} c_{кр2} + \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} c_{кр3} \right) \omega_c^4 + \\ + \left(\frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 I_2 I_3} c_{кр1} c_{кр2} + \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \cdot \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} c_{кр1} c_{кр3} + \right. \\ \left. + \frac{I_2 + I_3 + I_4}{I_2 I_3 I_4} c_{кр2} c_{кр3} \right) \omega_c^2 - \\ - \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4} c_{кр1} c_{кр2} c_{кр3} = 0. \quad (5.14) \end{aligned}$$

При большом числе дисков получение уравнения частот путём развёртывания определителя требует больших вычислений. Поэтому для расчёта крутильных колебаний в этих случаях применяют другие способы.

Определив из частотного уравнения величины частот главных крутильных колебаний системы и подставляя их в уравнения (5.10), получаем соотношения между амплитудами колебаний дисков в каждом из главных колебаний. Строим графики эпюр амплитуд колебаний дисков, аналогично рис. 5.1, и находим графически положение узлов крутильных колебаний.

5.3. Вынужденные крутильные колебания консервативной системы с несколькими дисками

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний любой системы дисков отличаются от дифференциальных уравнений их свободных крутильных колебаний наличием в правой части уравнений возмущающих моментов.

Рассмотрим вал с четырьмя дисками (5.3) и приложим переменный возбуждающий

$M_1 = M_{a1} \cdot \sin \omega_b t$ к диску один. Необходимо найти амплитуды колебаний всех дисков для вынужденной частоты ω_b .

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M_{a1} \sin \omega_b t; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) &+ c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) + c_{кр3}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0; \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - c_{кр3}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0; \end{aligned}$$

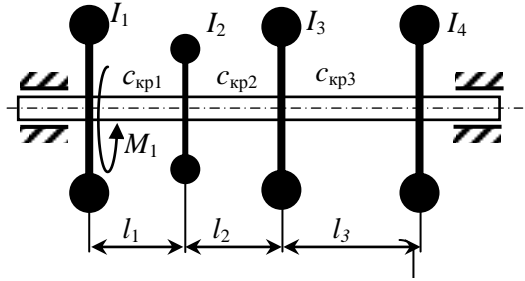


Рис. 5.3. Схема системы вала с четырьмя дисками

Для определения вынужденных колебаний системы дисков находим частные решения уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \cdot \sin \omega_b t; \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cdot \sin \omega_b t; \\ \varphi_3 &= \varphi_{a3} \cdot \sin \omega_b t; \\ \varphi_4 &= \varphi_{a4} \cdot \sin \omega_b t, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где $\varphi_{a1}, \varphi_{a2}, \dots, \varphi_{a4}$ – искомые амплитуды вынужденных колебаний дисков.

Подставляя значения (5.16) в дифференциальные уравнения вынужденных колебаний (5.15) и сокращая их на $\sin \omega_b t$, получаем уравнения для определения амплитуд вынужденных колебаний отдельных дисков:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \varphi_{a1} \omega_B^2 - c_{кр1} (\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= -M_{a1}; \\ I_2 \varphi_{a2} \omega_B^2 + c_{кр1} (\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) - c_{кр2} (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= 0; \\ I_3 \varphi_{a3} \omega_B^2 + c_{кр2} (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) - c_{кр3} (\varphi_{a3} - \varphi_{a4}) &= 0; \\ I_4 \varphi_{a4} \omega_B^2 + c_{кр3} (\varphi_{a3} - \varphi_{a4}) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Сложив эти уравнения, найдём:

$$\omega_B^2 (I_1 \varphi_{a1} + I_2 \varphi_{a2} + I_3 \varphi_{a3} + I_4 \varphi_{a4}) = -M_{a1}. \quad (5.18)$$

Из первого уравнения системы (5.17) выразим амплитуду колебаний второго диска φ_{a2} через амплитуду колебаний первого диска φ_{a1}

$$\varphi_{a2} = \varphi_{a1} - \frac{I_1 \varphi_{a1}}{c_{кр1}} \omega_B^2 - \frac{M_{a1}}{c_{кр1}}. \quad (5.19)$$

Подставляя выражение (5.19) во второе уравнение системы (5.1), найдём φ_{a3} и из третьего уравнения этой же системы определим φ_{a4} . Таким образом, все амплитуды будут выражены через φ_{a1} . Подставив их в выражение (5.18), получим линейное уравнение относительно φ_{a1} .

Данные вычисления удобнее выполнять в числовом выражении.

Зная амплитуды вынужденных крутильных колебаний отдельных дисков, определяем значения крутящих моментов для отдельных участков вала:

$$\begin{aligned} M_{кр1} &= c_{кр1} (\varphi_{a2} - \varphi_{a1}); \\ M_{кр2} &= c_{кр2} (\varphi_{a3} - \varphi_{a2}); \\ M_{кр3} &= c_{кр3} (\varphi_{a4} - \varphi_{a3}). \end{aligned}$$

Наибольшее касательное напряжение τ в опасном сечении вала определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_{крmax}}{W_p}, \quad (5.20)$$

где $M_{крmax}$ – максимальный крутящий момент;

W_p – момент сопротивления при кручении.

Периодически изменяющиеся вращающиеся моменты обычно бывают сложного характера и их можно представить как совокупность гармонических составляющих ($\omega_{в1}$, $\omega_{в2}$, $\omega_{в3}$, $\omega_{в4}$) с помощью разложения в ряд Фурье. Если частота какой-либо гармонической составляющей вращающегося момента совпадает с одной из собственных частот ω_{ci} крутильной системы, то наступает резонанс. Причём при совпадении ω_{vi} с ω_{ci} , наступает *резонанс по первой форме*, который является наиболее

опасным. Если же частота ω_{bi} совпадает с частотой ω_{c2} , ω_{c3} , ω_{c4} , то резонанс имеет соответственно второй, третий, ... n -ый порядок.

В реальных условиях вынужденные крутильные колебания вала происходят при наличии сопротивлений. Сопротивления колебаниям оказывают значительное влияние на амплитуду вынужденных колебаний при резонансе и близкой к нему зоне. Поэтому расчёт действительных амплитуд резонансных колебаний необходимо проводить с учётом влияния сопротивлений.

Влияние демпфирования на крутильные колебания при резонансе.

Примем, что момент сопротивления пропорционален первой степени угловой скорости угла поворота диска

$$M_{\text{сопр}} = -\xi \frac{d\varphi_m}{dt} = -\xi \varphi_{am} \omega_B \cos \omega_B t, \quad (5.21)$$

где φ_m – угол поворота m -го диска, к которому приложен момент сопротивления, $\varphi_m = \varphi_{am} \cdot \cos \omega_B t$;

ξ – коэффициент линейного демпфирования крутильным колебаниям;

ω_B – круговая частота вынужденных крутильных колебаний;

φ_{am} – амплитуда угла поворота m -го диска.

Полагаем, что на диск действует крутящий момент в виде

$$M_{\text{кр}} = M_{0n} \cdot \cos \omega_B t.$$

Известно, что в случае резонанса фаза вынужденных колебаний (угла закрутки) отстаёт от фазы изменения крутящего момента на угол 90° , получаем угол вращения диска, к которому приложен крутящий момент

$$\varphi_n = \varphi_{an} \cdot \sin \omega_B t.$$

Амплитуда вынужденных крутильных колебаний находится из следующего условия. При установившихся вынужденных колебаниях *сумма работ крутящего момента $M_{\text{кр}}$ и момента сопротивления $M_{\text{сопр}}$ за одно колебание должна быть равна нулю*, или

$$\int_0^{2\pi/\omega_B} M_n \cos \omega_B t \frac{d\varphi_n}{dt} dt - \int_0^{2\pi/\omega_B} \xi \varphi_{am} \omega_B \cos \omega_B t \frac{d\varphi_m}{dt} dt = 0.$$

Или, подставляя $\varphi_m = \varphi_{am} \cdot \cos \omega_B t$ и $\varphi_n = \varphi_{an} \cdot \sin \omega_B t$, получим

$$M_n \cdot \varphi_{an} \cdot \omega_B \cdot \cos \omega_B t \cdot \cos \omega_B t = \xi \varphi_{am}^2 \cdot \omega_B^2 \cdot \cos^2 \omega_B t.$$

Откуда

$$\varphi_{am}^2 = \frac{M_n}{\xi \omega_B} \varphi_{an},$$

или

$$\varphi_{am} = \frac{M_n}{\xi \omega_B} \frac{\varphi_{an}}{\varphi_{am}}. \quad (5.22)$$

В этом случае амплитуда крутильных колебаний i -го диска определяется по следующей формуле:

$$\varphi_{ai} = \frac{M_n}{\xi \omega_B} \frac{\varphi_{an}}{\varphi_{am}} \frac{\varphi_{ai}}{\varphi_{am}}. \quad (5.23)$$

Зная величину коэффициента линейного демпфирования ξ и беря соотношения $\varphi_{an}/\varphi_{am}$ и $\varphi_{ai}/\varphi_{am}$ из рисунка, изображающего форму главных колебаний (полученной при решении частотного уравнения) вала, можно вычислить амплитуды вынужденных колебаний для каждого из дисков по формуле (5.23).

Если на вал действует несколько гармонических крутящих моментов, то результирующую амплитуду φ_{ai} любого диска можно получить путём применения принципа наложения:

$$\varphi_{ai} = \frac{1}{\xi \omega_B} \frac{\varphi_{ai}}{\varphi_{am}^2} \sum \bar{M}_n \varphi_{an}. \quad (5.24)$$

Здесь знак суммы обозначает векторную сумму, а каждый крутящий момент берётся соответственно его фазе.

5.4. Примеры к главе 5

Пример 5.1

Для крутильной системы, изображённой на рис. 5П.1, введём следующие данные:

$$J_1 = 894 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_2 = 595 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$J_3 = J_4 = 150 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

жёсткости участков составляют:

$$c_{кр1} = 28 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$c_{кр2} = c_{кр3} = 42,3 \cdot 10^5$$

На первый диск действует переменный крутящий момент с круговой час-

$$\omega_b = \sqrt{31150} \text{ с}^{-1};$$

$$M_{01} \cdot \sin \omega_b t.$$

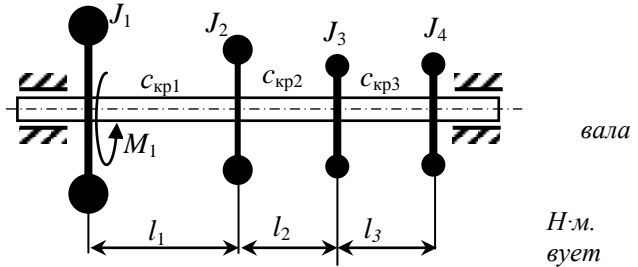


Рис. 5П.1. Схема системы вала с четырьмя дисками

Н.м.
вует
мо-
тотой
 $M_1 =$

Определить амплитуды вынужденных колебаний всех дисков для заданной частоты вынужденных колебаний.

Решение

Для аналитического решения поставленной задачи удобнее воспользоваться в виде таблицы расположением промежуточных данных. Пользуясь данными численными значениями $J_1 \omega_b^2$ и $c_{кр1}$, вычисляем $J_1 \omega_b^2$ и $J_1 \omega_b^2 / c_{кр1}$. Во вторую строку помещаем результаты вычислений φ_{a2} в соответствии с формулой (5.19). Последний член уравнения (5.19) берётся из столбца 5 таблицы первой строки, что соответствует выражению второго столбца второй строки. Умножая последнее значение на $J_2 \omega_b^2$, получим выражение, стоящее в третьем столбце второй строки. Складывая его с выражением, стоящим в четвёртом столбце первой строки, и деля затем на $c_{кр2}$, найдём последние два члена второй строки. Имея эти величины и используя второе уравнение (5.17) для вычисления φ_{a3} , начинаем третью строку и затем продолжаем вычисления, как и выше. Окончательно получаем выражение, стоящее в четвёртом столбце четвёртой строки. Данное выражение соответствует левой части формулы (5.18). Подставляя это выражение в уравнение (5.18), находим уравнение для вычисления φ_{a1} :

$$19,3 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 1,077 M_{01} = -M_{01}.$$

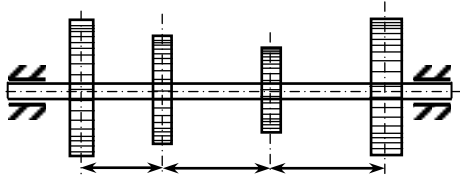
1	2	3	4	5
J	φ_a	$J \omega_b^2 \varphi_a$	$\Sigma J \omega_b \varphi_a$	$\frac{1}{c_{кр}} \Sigma J \omega_b \varphi_a$
$894 \cdot 10^{-4}$	φ_{a1}	$27,84 \cdot 10^2 \cdot \varphi_{a1}$	$27,84 \cdot 10^2 \cdot \varphi_{a1}$	$0,984 \cdot 10^{-3} \cdot \varphi_{a1}$

$595 \cdot 10^{-4}$	$0,016 \varphi_{a1} - 3,54 \cdot 10^{-8} M_{01}$	$0,296 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 0,655 M_{01}$	$28,1 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 0,655 M_{01}$	$0,666 \cdot \varphi_{a1} - 1,55 \cdot 10^{-8} M_{01}$
$150 \cdot 10^{-4}$	$-0,650 \varphi_{a1} - 4,35 \cdot 10^{-8} M_{01}$	$-3,03 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 0,203 M_{01}$	$25,1 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 0,858 M_{01}$	$0,595 \cdot \varphi_{a1} - 2,03 \cdot 10^{-8} M_{01}$
$150 \cdot 10^{-4}$	$-1,24 \varphi_{a1} - 4,69 \cdot 10^{-8} M_{01}$	$-5,80 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 0,219 M_{01}$	$19,3 \cdot 10^6 \cdot \varphi_{a1} - 1,077 M_{01}$	

Откуда

$$\varphi_{a1} = \frac{0,077 M_{01}}{19,3 \cdot 10^6}$$

Если это значение подставить в выражения, содержащиеся в столбце, то получатся величины вынужденных колебаний всех дисков. Имея эти амплитуды, можно вычислить углы закрутки вала между последовательными дисками, так как



равны $\varphi_{a1} - \varphi_{a2}$, $\varphi_{a2} - \varphi_{a3}$ и $\varphi_{a3} - \varphi_{a4}$. По этим данным и формуле (5.20) можно найти касательные напряжения от крутильных колебаний в узлах закрутки.

По этим данным и формуле (5.20) можно найти касательные напряжения от крутильных колебаний в узлах закрутки.

Пример 5.2

На рис. 5П.2 представлена схема крутильных колебаний вала с четырьмя насаженными дисками. Вал имеет три участка жёсткостью $c_{кр1}$, $c_{кр2}$ и $c_{кр4}$. Массой вала по сравнению с массами дисков пренебрегаем. Параметры крутильной системы представлены ниже.

$$J_1 = 200 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_1 = 0,25 \text{ м}; \quad J_p = 0,602 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_2 = 80 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_2 = 0,30 \text{ м}; \quad G = 8,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$J_3 = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_3 = 0,25 \text{ м}; \quad G \cdot J_p = 5 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_4 = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Решение

Определим жёсткости участков вала 1, 2 и 3

$$c_{кр1} = \frac{G J_p}{l_1} = \frac{5 \cdot 10^5}{0,25} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$c_{кр2} = \frac{G J_p}{l_2} = \frac{5 \cdot 10^5}{0,3} = 1,67 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$c_{кр3} = \frac{G J_p}{l_3} = \frac{5 \cdot 10^5}{0,25} = 2 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Подставив в формулу (5.14) заданные значения всех величин, получим частотное уравнение для определения частот главных крутильных колебаний системы

$$\omega_c^6 - 1,49166 \cdot 10^5 \cdot \omega_c^4 + 5,3917 \cdot 10^9 \cdot \omega_c^2 - 3,5833 \cdot 10^{13} = 0.$$

Введём обозначение $\omega_c^2 = x \cdot 10^5$. Подставляя это значение ω_c^2 в уравнение частот, получаем уравнение третьей степени:

$$x^3 - 1,49166 \cdot x^2 + 0,53917 \cdot x - 0,03583 = 0. \quad (5П.1)$$

Подставляя значение x , равное

$$x = z + \frac{1}{3} \cdot 1,49166 \cdot x^2 + 0,53917 \cdot x - 0,03583 = 0 \quad (5П.2)$$

в последнее уравнение, получим трёхчленное кубическое уравнение

$$z^3 - az - b = 0;$$

$$z^3 - 0,20252 \cdot z - 0,01359 = 0.$$

Корни этого уравнения находим по формулам:

$$z_1 = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\theta}{3} - 240^\circ \right);$$

$$z_2 = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \left(\frac{\theta}{3} - 120^\circ \right);$$

$$z_3 = 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \cos \frac{\theta}{3},$$

где $0 < \theta < 90^\circ$.

Угол θ определяем по формуле

$$\cos \theta = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{27}{a^3}},$$

Применительно к исходным данным, имеем

$$\cos \theta = 0,38712; \quad \theta = 22^\circ 13';$$

тогда

$$z_1 = -0,41172; \quad z_2 = -0,06878; \quad z_3 = -0,48042.$$

По формуле (5П.2) находим значения корней уравнения (5П.1):

$$x_1 = -0,41172; \quad x_2 = 0,42844; \quad x_3 = 0,97764.$$

Частоты главных крутильных колебаний системы имеют следующие величины:

$$\omega_{c1} = \sqrt{10^5 x_1} = 92,5 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{c2} = \sqrt{10^5 x_2} = 207 \text{ рад/с};$$

$$\omega_{c3} = \sqrt{10^5 x_3} = 312,7 \text{ рад/с.}$$

Для вычисления форм главных колебаний вала вычисляем отношения амплитуд колебаний дисков в каждом из главных колебаний. Для этого воспользуемся системой уравнений (5.10).

Для первого главного колебания при $\omega_{c1} = 92,5 \text{ рад/с}$

$$\frac{\varphi_{a2}^1}{\varphi_{a1}^1} = 0,144; \quad \frac{\varphi_{a3}^1}{\varphi_{a1}^1} = -0,940; \quad \frac{\varphi_{a4}^1}{\varphi_{a1}^1} = -1,643.$$

Для второго главного колебания при $\omega_{c2} = 207 \text{ рад/с}$

$$\frac{\varphi_{a2}^2}{\varphi_{a1}^2} = -3,284; \quad \frac{\varphi_{a3}^2}{\varphi_{a1}^2} = -1,671; \quad \frac{\varphi_{a4}^2}{\varphi_{a1}^2} = 1,463.$$

Для третьего главного колебания при $\omega_{c3} = 312,7 \text{ рад/с}$

$$\frac{\varphi_{a2}^3}{\varphi_{a1}^3} = -8,776; \quad \frac{\varphi_{a3}^3}{\varphi_{a1}^3} = 20,676; \quad \frac{\varphi_{a4}^3}{\varphi_{a1}^3} = -5,314.$$

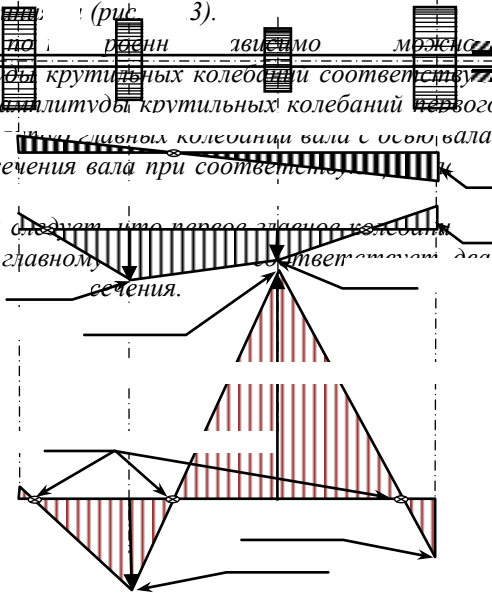
Принимаем амплитуду колебаний первого диска за единицу, т.е. полагаем, что

$$\varphi_{a1}^1 = \varphi_{a1}^2 = \varphi_{a1}^3 = 1.$$

Построим эпюры амплитуд главных колебаний вала, соединяя концы отрезков прямыми линиями (рис. 5.11.3).

Графики зависимости амплитуды крутильных колебаний от амплитуды крутильных колебаний первого диска. Точки пересечения эпюр главных колебаний вала с осью вала называются узлами колебаний. Эти сечения вала при соответствующих частотах являются узлами колебаний ос

Из рис. 5.11.3 следует, что первое главное колебание имеет один узел колебаний. Второму главному колебанию соответствуют два главных сечения, а третьему



Пример 5.3

На рис. 5П.4 представлена крутильная система, состоящая из двух валов с дисками, имеющих моменты инерции J_1 и J_4 . Валы соединены между собой посредством зубчатой передачи с моментами инерции шестерён соответственно J_2 и J_3 . Жёсткости валов на кручение соответственно равны $c_{кр1}$ и $c_{кр2}$, передаточное отношение зубчатой передачи $i = \frac{z_2}{z_3}$.

Определить частоты свободных крутильных колебаний представленной системы.

Решение

Определим частоты собственных крутильных колебаний системы ω_c .

Кинетическая энергия крутильной системы определяется по следующей формуле

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \dot{\varphi}_1^2 + J_2 \dot{\varphi}_2^2 + i^2 J_3 \dot{\varphi}_2^2 + J_4 \dot{\varphi}_4^2).$$

Потенциальная энергия

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c_{кр1} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c_{кр2} (\varphi_3 - \varphi_4)^2 \\ &= \frac{1}{2} c_{кр1} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c_{кр2} (i\varphi_2 - \varphi_4)^2. \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода, получаем

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ (J_2 + i^2 J_3) \ddot{\varphi}_2 + c_{кр1} (\varphi_2 - \varphi_1) + i c_{кр2} (\varphi_2 - \varphi_4) &= 0; \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{кр2} (\varphi_4 - i\varphi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$J_2 + i^2 J_3 = J; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \beta; \quad \varphi_4 - i\varphi_2 = \alpha,$$

Получаем

$$\ddot{\varphi}_1 = -\omega_c^2 \varphi_1 = \frac{c_{кр1}}{J_1} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{c_{кр1}}{J_1} \beta;$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -\omega_c^2 \varphi_2 = -\frac{c_{кр1}}{J} (\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{ic_{кр2}}{J} (\varphi_4 - i\varphi_2) = -\frac{c_{кр1}}{J} \beta + \frac{ic_{кр2}}{J} \gamma;$$

$$\ddot{\varphi}_4 = -\omega_c^2 \varphi_4 = -\frac{c_{кр2}}{J_4} (\varphi_4 - i\varphi_2) = -\frac{c_{кр2}}{J_4} \gamma;$$

Вычитая из второго уравнения первое, а также из третьего – второе, получим:

$$\omega_c^2 \varphi_2 - \omega_c^2 \varphi_1 - \frac{c_{кр1}}{J_1} \beta - \frac{c_{кр1}}{J} \beta + \frac{ic_{кр2}}{J} \gamma = 0;$$

$$\omega_c^2 \varphi_4 + \omega_c^2 \varphi_2 - \frac{c_{кр2}}{J_4} \gamma - \frac{c_{кр1}}{J} \beta + \frac{ic_{кр2}}{J} \gamma = 0.$$

После преобразований имеем

$$\left[\frac{\omega_c^2}{c_{кр1}} - \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J} \right) \right] c_{кр1} \beta + \frac{ic_{кр2}}{J} \gamma = 0;$$

$$\frac{ic_{кр1}}{J} \beta + \left[\frac{\omega_c^2}{c_{кр2}} - \left(\frac{i^2}{J} + \frac{1}{J_4} \right) \right] c_{кр2} \gamma = 0.$$

Исключая из этих уравнений $c_1\beta$ и $c_2\gamma$, получаем уравнение для определения ω_c^2 :

$$\left[\frac{\omega_c^2}{c_{кр1}} - \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J} \right) \right] \left[\frac{\omega_c^2}{c_{кр2}} - \left(\frac{i^2}{J} + \frac{1}{J_4} \right) \right] - \frac{i^2}{J^2} = 0.$$

Корни этого уравнения ω_{c1}^2 и ω_{c2}^2 дают значения двух частот основных колебаний системы.

Пример 5.4

Определить частоту свободных крутильных колебаний системы, описанной в примере 5.3, пренебрегая массой зубчатых колёс.

Решение

Дифференциальные уравнения свободных крутильных колебаний, полученные в примере 5.3, в этом случае примут вид:

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1} (\varphi_1 - \varphi_2) = 0;$$

$$c_{кр1} (\varphi_2 - \varphi_1) + ic_{кр2} (\varphi_2 - \varphi_4) = 0;$$

$$J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{кр2} (\varphi_4 - i\varphi_2) = 0.$$

Из второго уравнения

$$c_{кр1} (\varphi_1 - \varphi_2) = ic_{кр2} (\varphi_4 - i\varphi_2).$$

Из первого и второго уравнений

$$i\ddot{\varphi}_1 = \frac{i c_{\text{кр}1}}{J_1} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{i c_{\text{кр}2}}{J_1} (\varphi_1 - i\varphi_2); \quad (5П.3)$$
$$(\varphi_2 - \varphi_1) = i \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1} (\varphi_4 - i\varphi_2).$$

Дифференцируем последнее уравнение дважды:

$$i(\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1) = i^2 \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1} (\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2). \quad (5П.4)$$

Из третьего дифференциального уравнения

$$\ddot{\varphi}_4 = -\frac{c_{\text{кр}2}}{J_4} (\varphi_4 - i\varphi_2) = 0. \quad (5П.5)$$

Из уравнений (5П.3) и (5П.4) находим

$$i\ddot{\varphi}_2 = \frac{i^2 c_{\text{кр}2}}{J_1} (\varphi_4 - i\varphi_2) + i^2 \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1} (\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2).$$

Учитывая равенство (5П.5), получим

$$(\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2) = -\frac{c_{\text{кр}2}}{J_4} (\varphi_4 - i\varphi_2) - i^2 \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1} (\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2) - \frac{i^2 c_{\text{кр}2}}{J_1} (\varphi_4 - i\varphi_2)$$

или

$$\left(1 + i^2 \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1}\right) (\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2) + \left(\frac{c_{\text{кр}2}}{J_4} + \frac{i^2 c_{\text{кр}2}}{J_1}\right) (\varphi_4 - i\varphi_2) = 0.$$

Обозначим $(\varphi_4 - i\varphi_2) = \theta$, тогда

$$(\ddot{\varphi}_4 - i\ddot{\varphi}_2) = \ddot{\theta}.$$

Подставляя эти значения в последнее уравнение, получаем

$$\left(1 + i^2 \frac{c_{\text{кр}2}}{c_1}\right) \ddot{\theta} + \left(\frac{c_{\text{кр}2}}{J_4} + \frac{i^2 c_{\text{кр}2}}{J_1}\right) \theta = 0.$$

Разделив это уравнение на $i^2 c_{\text{кр}2}$, имеем

$$\left(\frac{1}{i^2 c_{\text{кр}2}} + \frac{1}{c_1}\right) \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{i^2 J_4} + \frac{1}{J_1}\right) \theta = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением гармонического колебательного движения, из которого определяем частоту колебания

$$\omega_c^2 = \frac{\frac{1}{i^2 J_4} + \frac{1}{J_1}}{\frac{1}{i^2 c_{кр2}} + \frac{1}{c_1}}$$

Пример 5.5

На крутильную систему, состоящую из невесомого вала и четырёх дисков, прикладывается последовательно возмущающий момент к каждому из дисков. Возмущающий момент равен $M = \cos 200t$ Н·м.

Параметры крутильной системы представлены ниже.

$$J_1 = 200 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_1 = 0,25 \text{ м}; \quad J_p = 0,602 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$J_2 = 80 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_2 = 0,30 \text{ м}; \quad G = 8,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$J_3 = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad l_3 = 0,25 \text{ м}; \quad G \cdot J_p = 5 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_4 = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Решение

1. Возмущающий момент приложен к диску №1. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний получают вид:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{кр1}(\varphi_1 - \varphi_2) &= M; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{кр1}(\varphi_2 - \varphi_1) + c_{кр2}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + c_{кр2}(\varphi_3 - \varphi_2) + c_{кр3}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0; \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 + c_{кр3}(\varphi_4 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5П.6)$$

Частные решения этих уравнений ищем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{a1} \cos \omega_B t; \\ \varphi_2 &= \varphi_{a2} \cos \omega_B t; \\ \varphi_3 &= \varphi_{a3} \cos \omega_B t; \\ \varphi_4 &= \varphi_{a4} \cos \omega_B t; \end{aligned} \right\} \quad (5П.7)$$

Подставляя значения (5П.7) в дифференциальные уравнения (5П.6), получаем

$$\left. \begin{aligned} -\omega_B^2 J_1 \varphi_{a1} + c_{кр1}(\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= M; \\ -\omega_B^2 J_2 \varphi_{a2} + c_{кр1}(\varphi_{a2} - \varphi_{a1}) + c_{кр2}(\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= 0; \\ -\omega_B^2 J_3 \varphi_{a3} + c_{кр2}(\varphi_{a3} - \varphi_{a2}) + c_{кр3}(\varphi_{a3} - \varphi_{a4}) &= 0; \\ -\omega_B^2 J_4 \varphi_{a4} + c_{кр3}(\varphi_{a4} - \varphi_{a3}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5П.8)$$

Подставляя в уравнения (5П.8) заданные числовые значения (крутильные жёсткости участков определены в примере 5.2), имеем

$$\left. \begin{aligned} -8\varphi_{a1} + 2(\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= 5 \cdot 10^{-5}; \\ -3,2\varphi_{a2} + 2(\varphi_{a2} - \varphi_{a1}) + \frac{5}{3} \cdot (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= 0; \\ -2\varphi_{a3} + \frac{5}{3} \cdot (\varphi_{a3} - \varphi_{a2}) + 2(\varphi_{a3} - \varphi_{a4}) &= 0; \\ -4\varphi_{a4} + 2(\varphi_{a4} - \varphi_{a3}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5П.9)$$

Из последних трёх уравнений находим:

$$\begin{aligned} 2(\varphi_{a3} - \varphi_{a4}) &= -4\varphi_{a4} \\ \frac{5}{3} \cdot (\varphi_{a2} - \varphi_{a3}) &= -2\varphi_{a3} - 4\varphi_{a4}; \\ 2(\varphi_{a1} - \varphi_{a2}) &= 3,2\varphi_{a2} - 2\varphi_{a3} - 4\varphi_{a4}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\varphi_{a3} = -\varphi_{a4}; \quad \varphi_{a2} = -2,2 \varphi_{a4}; \quad \varphi_{a1} = -0,32 \varphi_{a4}.$$

Подставляя эти значения в первое из уравнений (5П.8), находим

$$2,48\varphi_{a4} = 5 \cdot 10^{-5}; \quad \varphi_{a4} = 2,0161 \cdot 10^{-5},$$

откуда

$$\varphi_{a1} = 0,6452 \cdot 10^{-5}; \quad \varphi_{a2} = -4,4354 \cdot 10^{-5}; \quad \varphi_{a3} = -2,0161 \cdot 10^{-5}.$$

Прилагая последовательно данный возмущающий момент ко всем дискам, вычисляем амплитуды вынужденных колебаний каждого из дисков. Данные вычислений сводим в табл. 5П.1.

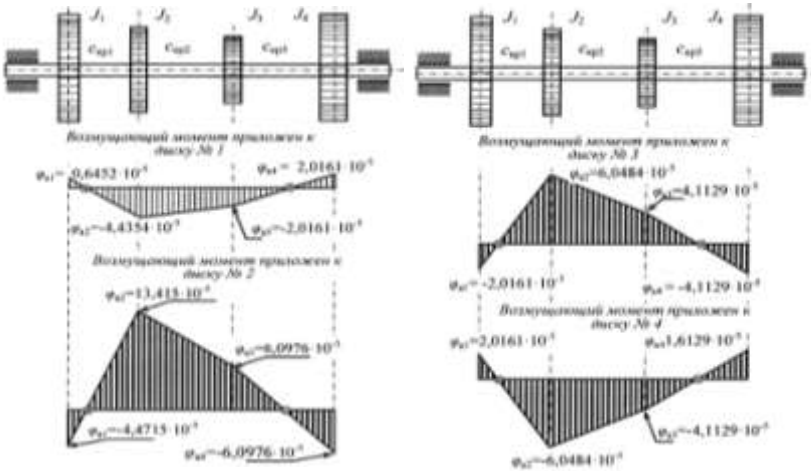
Т а б л и ц а 5П.1

Место при- ложения M	Амплитуды вынужденных колебаний			
	φ_{a1}	φ_{a2}	φ_{a3}	φ_{a4}
Диск № 1	$0,6452 \cdot 10^{-5}$	$-4,4354 \cdot 10^{-5}$	$-2,0161 \cdot 10^{-5}$	$2,0161 \cdot 10^{-5}$
Диск № 2	$-4,4715 \cdot 10^{-5}$	$13,4150 \cdot 10^{-5}$	$6,0976 \cdot 10^{-5}$	$-6,0976 \cdot 10^{-5}$
Диск № 3	$-2,0161 \cdot 10^{-5}$	$6,0484 \cdot 10^{-5}$	$4,1129 \cdot 10^{-5}$	$-4,1129 \cdot 10^{-5}$
Диск № 4	$2,0161 \cdot 10^{-5}$	$-6,0484 \cdot 10^{-5}$	$-4,1129 \cdot 10^{-5}$	$1,6129 \cdot 10^{-5}$

По данным табл. 5П.1 построим эюры углов закрутки вынужденных колебаний дисков четырёхмассовой системы (рис. 5П.5). Откуда легко определить положение узлов вынужденных колебаний в каждом случае.

.5.
Контроль
ные
вопросы
к главе 5

1.
Приведите
дифференциальное
уравнение



ние свободных крутильных колебаний системы с тремя массами.

2. Приведите схему одноузловых и двухузловых крутильных колебаний.
3. Что называется узлом крутильных колебаний? Приведите его свойства.
4. Что называется нижней и верхней формой колебаний?
5. Приведите дифференциальную систему уравнений для свободных крутильных колебаний многомассовой крутильной системы.
6. Приведите дифференциальную систему уравнений для вынужденных крутильных колебаний многомассовой крутильной системы.
7. Приведите выражение для наибольших касательных напряжений в опасном сечении вала.
8. Как определяют частоты и формы главных крутильных колебаний?
9. Как определяют амплитуды свободных и вынужденных колебаний дисков?
10. В каких случаях необходим учёт сопротивления при исследовании вынужденных крутильных колебаний вала?

Литература

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.

2. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – 13-е изд. исправленное. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. – 544 с.
4. Вибрация в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978 – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. 1978. – 352 с.
5. Вибрация в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.В.Фролова. 1981. – 456 с.
6. Вихерт М.М., Доброгаев М.И. и др. Конструкция и расчёт авто-тракторных двигателей / Под редакцией Ю.А. Степанова. Изд. 2-е, перераб. и исправ. – М.: Машиностроение, 1964. – 552 с.
7. Гусев А.С., Карунин А.Л., Крамской Н.А. и др. Теория колебаний в автомобиле- и тракторостроении: Учебное пособие. – М.: МГТУ «МАМИ», 2007. – 336 с.
8. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. Учебник для вузов. – М.: Высшая школа, 1974. – 528 с.
9. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука. Шл. Ред. физ.-мат. лит., 1987. – 240 с.
10. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. – 592 с.
11. Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С. Теория колебаний: Учеб. для вузов / Под общ. ред. К.С. Колесникова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 272 с.
12. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
13. Маслов Г.С. Расчёты колебаний валов: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.
14. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний / Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
15. Никишин В.Н. Формирование и обеспечение качества автомобильного дизеля. Часть II / Набережные Челны: Изд-во Камской госуд. инж.-экон. акад., 2008. – 175 с.

16. Пановко Я.Г. Основы теории колебаний и удара. 4-е изд., перераб. и доп. – Л.: Политехника, 1990. – 272 с.
17. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
18. Попык К.Г. Динамика автомобильных и тракторных двигателей. Изд. 2-е, переработ. и доп.: Учебник для вузов по специальности «Двигатели внутреннего сгорания». – М.: «Высш. школа», 1970. – 328 с.
19. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григорюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
20. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. Я.Г. Пановко. Изд. 3-е, стереотипное. – М.: КомКнига, 2007. – 440 с.
21. Тольский В.Е., Корчемный Л.В., Латышев Г.В., Минкин Л.М. Колебания силового агрегата автомобиля. – М.: «Машиностроение», 1976. – 266 с.
22. Тольский В.Е. Виброакустика автомобиля. – М.: Машиностроение, 1988. – 144 с.
23. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. Учеб. пособие для студентов вузов. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.

Никишин В.Н.
Басыров Р.Р.
Павленко А.П.

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ В АВТОМОБИЛЕ -
И ДВИГАТЕЛЕСТРОЕНИИ

Учебное пособие

Подписано в печать . . . 2019.
Формат 60x84/16. Печать ризографическая.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman».
Усл.п.л. 14 экз. Заказ №

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Набережночелнинского института
Казанского (Приволжского) федерального университета

423810, г. Набережные Челны, Новый город, пр.Мира, 68/19
тел./факс (8552) 39-65-99 e-mail: ic-nchi-kpfu@mail.ru