А. М. Бикчентаев, О. Е. Тихонов, Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере, *Труды МИАН*, 2024, том 324, 51–59

DOI: 10.4213/tm4378

Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере*

А. М. Бикчентаев[a], **О. Е. Тихонов**[a]

Поступило 20.06.2023; после доработки 05.10.2023; принято к публикации 06.10.2023

К 80-летию академика А.С. Холево

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $t_{\tau l}$ — топология τ-локальной сходимости по мере на *-алгебре всех τ-измеримых операторов $S(\mathcal{M},\tau)$. Доказана $t_{\tau l}$-непрерывность инволюции на подмножестве всех нормальных операторов из $S(\mathcal{M},\tau)$. Исследована $t_{\tau l}$-непрерывность операторных функций на $S(\mathcal{M},\tau)$. Показано, что отображение $A\mapsto |A|$ является $t_{\tau l}$-непрерывным на подмножестве всех частичных изометрий из алгебры $\mathcal{M}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, локальная сходимость по мере, непрерывность операторных функций.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4378

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Настоящая работа продолжает начатые в [1, 3–8, 10, 11, 15, 16] исследования свойств топологий $t_{\tau l}$ и $t_{\mathrm{w}\tau l}$ соответственно τ-локальной и слабо τ-локальной сходимости по мере на *-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов. В работе доказана $t_{\tau l}$-непрерывность инволюции на подмножестве всех нормальных операторов из $S(\mathcal{M},\tau)$ (теорема 4.8). Исследована $t_{\tau l}$-непрерывность операторных функций на $S(\mathcal{M},\tau)$ (теорема 4.18); здесь мы воспользовались идеями и методами из работ [9, 13]. Показано, что отображение $A\mapsto |A|$ является $t_{\tau l}$-непрерывным на подмножестве всех частичных изометрий из алгебры $\mathcal{M}$ (следствие 4.3).

Отметим, что непрерывность операторных функций в топологии t_τ сходимости по мере на $S(\mathcal{M},\tau)$ была исследована вторым автором в [19], а на алгебрах локально измеримых операторов — М.А. Муратовым и В.И. Чилиным в [14]. Часть наших результатов являются новыми и для *-алгебры $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$, снабженной каноническим следом $\tau=\mathrm{tr}$.

*Работа выполнена за счет средств программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“Приоритет-2030”).

[a] Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, Россия.

✉ Airat.Bikchentaev@kpfu.ru (А.М. Бикчентаев), Oleg.Tikhonov@kpfu.ru (О.Е. Тихонов).

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка ортопроекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I — единица в $\mathcal{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^{+}$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$.

Отображение $\varphi\colon \mathcal{M}^{+} \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$ и $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^{+}$ и $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^{+}$, $X \neq 0$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y)\colon Y \in \mathcal{M}^{+},\ Y \leq X,\ \varphi(Y) < +\infty\}$ для любого $X \in \mathcal{M}^{+}$;
- *нормальным*, если из соотношения $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^{+}$) следует, что $\varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$

(см. [17, Ch. V, § 2]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}_{\tau} = \{P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\colon \tau(P) < \infty\}$.

Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [18, Ch. IX]. Пусть $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{nor}}$ — множество всех нормальных ($A^*A = AA^*$) операторов в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^{+}$ и $\mathcal{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^{+}$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение оператора X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^{+}$. Для оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ будем далее использовать обозначения

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Im} A = \frac{1}{2\mathrm{i}}(A - A^*).$$

В *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ вводится топология t_{τ} сходимости по мере [18, Ch. IX, § 2], фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$\mathcal{U}(\varepsilon, \delta) = \bigl\{X \in S(\mathcal{M}, \tau)\colon\ \exists Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\ (\|XQ\| \leq \varepsilon\ \text{ и }\ \tau(Q^{\perp}) \leq \delta)\bigr\}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0.$$

Известно, что $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_{\tau}\rangle$ является полной метризуемой топологической *-алгеброй, причем алгебра $\mathcal{M}$ плотна в $\langle S(\mathcal{M}, \tau), t_{\tau}\rangle$. Для обозначения сходимости сети $\{X_j\}_{j \in J} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ к оператору $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в топологии t_{τ} используется запись $X_j \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что $\{X_j\}_{j \in J}$ сходится к X по мере τ.

Через $\mu(X; t)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т.е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(X; \cdot)\colon (0, \infty) \to [0, \infty)$, заданную формулой

$$\mu(X; t) = \inf\bigl\{\|XP\|\colon\ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P^{\perp}) \leq t\bigr\}, \qquad t > 0.$$

Множество τ-компактных операторов $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau)\colon \lim_{t \to \infty} \mu(X; t) = 0\}$ является идеалом в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Топология t_{τ} определяется и F-нормой $\rho_{\tau}(X) = \inf_{t > 0} \max\{t, \mu(X; t)\}$, $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 2.1 [12]. *Пусть $X, Y, X_j \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $j \in J$. Тогда*

(i) $\mu(X; t) = \mu(|X|; t) = \mu(X^*; t)$ *для всех* $t > 0$;

(ii) $\mu(X^*X; t) = \mu(XX^*; t)$ *для всех* $t > 0$;

(iii) *если* $|X| \le |Y|$, *то* $\mu(X;t) \le \mu(Y;t)$ *для всех* $t > 0$;

(iv) *если* $X \in \mathcal{M}$, *то* $\lim_{t\to+0}\mu(X;t) = \sup_{t>0}\mu(X;t) = \|X\|$;

(v) $\mu(XY;t+s) \le \mu(X;t)\mu(Y;s)$ *для всех* $t,s > 0$;

(vi) $\mu(X+Y;t+s) \le \mu(X;t)+\mu(Y;s)$ *для всех* $t,s > 0$;

(vii) $\mu(|X|^\alpha;t) = \mu(X;t)^\alpha$ *для всех* $\alpha > 0$ *и* $t > 0$;

(viii) $X_j \xrightarrow{\tau} X$ *тогда и только тогда, когда* $\mu(X_j - X;t) \to 0$ *для каждого* $t > 0$;

(ix) *если* $A,Z \in \mathcal{M}$, *то* $\mu(AYZ;t) \le \|A\|\mu(Y;t)\|Z\|$ *для всех* $t > 0$.

3. ТОПОЛОГИИ ЛОКАЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПО МЕРЕ НА $S(\mathcal{M},\tau)$

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon,\delta > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ определим множества

$$\mathcal{V}(\varepsilon,\delta,P) = \bigl\{X \in S(\mathcal{M},\tau)\colon\ \exists Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\ \bigl(Q \le P,\ \|XQ\| \le \varepsilon,\ \tau(P-Q) \le \delta\bigr)\bigr\},$$
$$\mathcal{W}(\varepsilon,\delta,P) = \bigl\{X \in S(\mathcal{M},\tau)\colon\ \exists Q \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\ \bigl(Q \le P,\ \|QXQ\| \le \varepsilon,\ \tau(P-Q) \le \delta\bigr)\bigr\}.$$

Пространство $S(\mathcal{M},\tau)$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии *τ-локальной сходимости по мере* $t_{\tau\mathrm{l}}$, базис окрестностей нуля которой образован семейством $\Theta = \{\mathcal{V}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0,\ P\in\mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$, а также относительно топологии $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$ *слабо τ-локальной сходимости по мере*, базис окрестностей нуля которой образован семейством $\Theta = \{\mathcal{W}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0,\ P\in\mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$. Будем писать $X_i \xrightarrow{\tau\mathrm{l}} X$ и $X_i \xrightarrow{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}} X$ для обозначения $t_{\tau\mathrm{l}}$- и $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$-сходимостей соответственно. С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [11, 16]), что $X_i \xrightarrow{\tau\mathrm{l}} X$ тогда и только тогда, когда $X_iP \xrightarrow{\tau} XP$ для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ (ср. [8, p. 114]), и что $X_i \xrightarrow{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}} X$ тогда и только тогда, когда $PX_iP \xrightarrow{\tau} PXP$ для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ (ср. [8, p. 114] и [10, p. 746]). Ясно, что $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}} \le t_{\tau\mathrm{l}} \le t_\tau$ и $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$-сходимость совпадает со сходимостью по мере относительно $\langle S(P\mathcal{M}P) = PS(\mathcal{M},\tau)P, t_{\tau_P}\rangle$ для всех $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$, где $\tau_P(X) = \tau(PXP)$. Топологии $t_{\tau\mathrm{l}}$ и $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$ можно определить и в терминах невозрастающих перестановок. Семейство $\widetilde{\Theta} = \{\widetilde{\mathcal{V}}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0,\ P\in\mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$, где $\widetilde{\mathcal{V}}(\varepsilon,\delta,P) = \{X \in S(\mathcal{M},\tau)\colon \mu(XP;\delta) < \varepsilon\}$, также задает базис окрестностей нуля для $t_{\tau\mathrm{l}}$. Если $\tau(I) < \infty$, то $t_\tau = t_{\tau\mathrm{l}} = t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$; t_τ является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в $S(\mathcal{M},\tau)$ (см. [2]).

Если $\mathcal{M}$ — это *-алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$ и $\tau = \mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathcal{M},\tau)$ и $S_0(\mathcal{M},\tau)$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и с идеалом $\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ компактных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$, а $t_{\tau\mathrm{l}}$ и $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$ совпадают с топологиями сильной и слабой операторной сходимости соответственно. Имеем $\mu(X;t) = \sum_{n=1}^\infty s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t)$, $t > 0$, где $\{s_n(X)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность s-чисел вполне непрерывного оператора X, а χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т.е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega,\Sigma,\nu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\nu$, где (Ω,Σ,ν) — локализуемое пространство с мерой, а алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. При этом топология t_τ является обычной топологией сходимости по мере, а $t_{\tau\mathrm{l}} = t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$ совпадают с известной топологией сходимости по мере на множествах конечной меры.

4. О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 4.1 [1, Theorem 1, part 1]. *Пусть сеть $\{A_\alpha\} \subset S(\mathcal{M},\tau)$ сходится в топологии $t_{\tau\mathrm{l}}$ к оператору $A \in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда $A_\alpha B \xrightarrow{\tau\mathrm{l}} AB$ для любого $B \in S(\mathcal{M},\tau)$.*

Из определений $t_{\tau\mathrm{l}}$- и $t_{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}}$-сходимостей и t_τ-непрерывности инволюции и произведения в алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ легко следует

Предложение 4.2. *Если $A, A_\alpha \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $A_\alpha \xrightarrow{\tau\mathrm{l}} A$, то $|A_\alpha|^2 \xrightarrow{\mathrm{w}\tau\mathrm{l}} |A|^2$.*

Заметим, что из утверждения 1) леммы 3.1 в [3] следует, что отображение $A \mapsto |A|$ ($A \in \in S(\mathcal{M}, \tau)$) является $t_{\tau l}$-непрерывным в точке $A = 0$.

Следствие 4.3. *Если операторы $A, A_\alpha \in \mathcal{M}$ являются частичными изометриями и $A_\alpha \xrightarrow{\tau l} A$, то $|A_\alpha| \xrightarrow{\tau l} |A|$.*

Доказательство. Поскольку $|A_\alpha|, |A| \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, имеем $|A_\alpha| = |A_\alpha|^2 \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} |A|^2 = |A|$, т.е. $|A_\alpha| \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} |A|$. Теперь в силу утверждения 1) леммы 3.7 из [3] получаем $|A_\alpha| \xrightarrow{\tau l} |A|$. $\square$

Следствие 4.4. *Если $A_\alpha \in \mathcal{M}_r := \{X \in \mathcal{M} \colon \|X\| \le r\}$, $r > 0$, и $A_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in \mathcal{M}_r$.*

Доказательство. Предположим, что $A \notin \mathcal{M}_r$, т.е. $r < \|A\| \le +\infty$. Так как $\|A^*A\| = \|A\|^2$, имеем $r^2 < \|A^*A\| \le +\infty$. Существуют спектральный ортопроектор Q оператора A^*A и число $a > r^2$ такие, что

$$A^*A \ge aQ. \tag{4.1}$$

В силу полуконечности следа τ найдется ненулевой ортопроектор $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ такой, что $P \le Q$. Тогда из (4.1) получаем $PA^*AP \ge aP$. Поскольку $\|A_\alpha^* A_\alpha\| \le r^2$, имеем $PA_\alpha^* A_\alpha P \le r^2 P$ и

$$PA^*AP - PA_\alpha^* A_\alpha P \ge (a - r^2)P.$$

Поэтому в силу утверждения (ii) леммы 2.1 получаем

$$\mu\bigl(PA^*AP - PA_\alpha^* A_\alpha P; t\bigr) \ge (a - r^2)\mu(P; t) = (a - r^2)\chi_{(0, \tau(P)]}(t).$$

Следовательно, из утверждения (viii) леммы 2.1 имеем $PA_\alpha^* A_\alpha P \not\xrightarrow{\tau} PA^*AP$. Получили противоречие. $\square$

Теорема 4.5. *Пусть $A, A_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $A_n \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} A$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{A_n\}$ является t_τ-ограниченной. Тогда $BA_n \xrightarrow{\tau l} BA$ при $n \to \infty$ для каждого оператора $B \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и $BA_nC \xrightarrow{\tau} BAC$ при $n \to \infty$ для каждой пары операторов $B, C \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. Пусть $X, X_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} X \quad \text{при } n \to \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad PX_nQ \xrightarrow{\tau} PXQ \quad \text{при } n \to \infty \quad \forall P, Q \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$$

(см. [1, p. 20]). Поскольку $X_n \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} X$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $X_n^* \xrightarrow{\mathrm{w}\tau l} X^*$ при $n \to \infty$, имеем $PA_n^* \xrightarrow{\tau l} PA^*$ при $n \to \infty$ для каждого $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Теперь в силу [1, Theorem 2] получаем

$$PA_n^*B^* \xrightarrow{\tau} PA^*B^* \qquad \text{при } n \to \infty \qquad \forall P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}, \quad \forall B \in S_0(\mathcal{M}, \tau) \tag{4.2}$$

(напомним, что $B^* \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$). Переходя в (4.2) к сопряженным операторам, с учетом t_τ-непрерывности инволюции в $S(\mathcal{M}, \tau)$ имеем $BA_nP \xrightarrow{\tau} BAP$ при $n \to \infty$. В силу произвольности проектора $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ получаем $BA_n \xrightarrow{\tau l} BA$ при $n \to \infty$. Еще раз применив [1, Theorem 2], имеем $BA_nC \xrightarrow{\tau} BAC$ при $n \to \infty$ для каждой пары операторов $B, C \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. $\square$

Следствие 4.6. *Пусть $A, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A_n \to A$ при $n \to \infty$ в слабой операторной топологии и последовательность $\{A_n\}$ является $\|\cdot\|$-ограниченной. Тогда $BA_n \to BA$ при $n \to \infty$ в сильной операторной топологии для каждого оператора $B \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а также $\|B(A_n - A)C\| \to 0$ при $n \to \infty$ для каждой пары операторов $B, C \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$.*

Пример 4.7. Условие t_τ-ограниченности последовательности $\{A_n\}$ существенно в теореме 4.5. В абелевой алгебре фон Неймана $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathrm{d}\nu)$ с линейной мерой Лебега ν рассмотрим точный нормальный полуконечный след $\tau(f) = \int_{\mathbb{R}^+} f \, \mathrm{d}\nu$ и положим

$$f_n = n\chi_{[n, 2n]}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $f_n \xrightarrow{\tau l} 0$ при $n \to \infty$ и для τ-компактных g, h, $g = h$, заданных функцией $\min\{1, x^{-1/2}\}$, $x \in \mathbb{R}^+$, имеем $\mu(gf_nh; t) \geq \chi_{(0,n]}(t)/2 \not\to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $t > 0$. Поэтому $gf_nh \not\xrightarrow{\tau} 0$ при $n \to \infty$ в силу утверждения (viii) леммы 2.1.

Теорема 4.8. *Если $A, A_\alpha \in S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{nor}}$ и $A_\alpha \xrightarrow{\tau l} A$, то $A_\alpha^* \xrightarrow{\tau l} A^*$.*

Доказательство. *Шаг* 1. Имеем $PA_\alpha^* \xrightarrow{\tau} PA^*$ для каждого $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ в силу t_τ-непрерывности инволюции в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Поэтому в силу t_τ-непрерывности произведения в $S(\mathcal{M}, \tau)$ получаем

$$PA_\alpha \cdot A_\alpha^* P = PA_\alpha^* \cdot A_\alpha P \xrightarrow{\tau} PA^* \cdot AP = PA \cdot A^* P$$

для каждого $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Таким образом, $\mu(PA_\alpha A_\alpha^* P - PAA^*P; t) \to 0$ для каждого $t > 0$ в силу утверждения (viii) леммы 2.1.

Шаг 2. Для каждого $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ и $t > 0$ оценим

$$\begin{aligned}
\mu(A_\alpha^* P - A^* P; t)^2 &= \mu(|A_\alpha^* P - A^* P|; t)^2 = \mu(|A_\alpha^* P - A^* P|^2; t) = \\
&= \mu\big((PA_\alpha - PA)(A_\alpha^* P - A^* P); t\big) = \\
&= \mu\big(PA_\alpha A_\alpha^* P + PAA^* P - PA_\alpha A^* P - PAA_\alpha^* P; t\big) = \\
&= \mu\big(PA_\alpha^* A_\alpha P + PA^* AP - 2\operatorname{Re}(PA_\alpha A^* P); t\big) = \\
&= \mu\big(PA_\alpha^* A_\alpha P + PA^* AP - 2\operatorname{Re}(PA^* AP) - 2\operatorname{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); t\big) = \\
&= \mu\big(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP - 2\operatorname{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); t\big) \leq \\
&\leq \mu\Big(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP; \frac{t}{2}\Big) + 2\mu\Big(\operatorname{Re}(PA_\alpha A^* P - PA^* AP); \frac{t}{2}\Big)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

в силу утверждений (vi) и (vii) леммы 2.1. В силу шага 1 имеем

$$\mu\Big(PA_\alpha^* A_\alpha P - PA^* AP; \frac{t}{2}\Big) \to 0$$

для каждого $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ и $t > 0$. Оценим второе слагаемое в последнем неравенстве в цепочке (4.3):

$$\begin{aligned}
2\mu\Big(\operatorname{Re}\big(PA_\alpha A^* P - PA^* AP\big); \frac{t}{2}\Big) &= 2\mu\Big(P\big(\operatorname{Re}(A_\alpha A^* - A^* A)P\big); \frac{t}{2}\Big) = \\
&= \mu\Big(P(A_\alpha - A)A^* P + PA(A_\alpha^* - A^*)P; \frac{t}{2}\Big) \leq \\
&\leq \mu\Big(P(A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\Big) + \mu\Big(PA(A_\alpha^* - A^*)P; \frac{t}{4}\Big) \leq \\
&\leq \|P\|\,\mu\Big((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\Big) + \|P\|\,\mu\Big(PA(A_\alpha^* - A^*); \frac{t}{4}\Big) = \\
&= \mu\Big((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\Big) + \mu\Big((PA(A_\alpha^* - A^*))^*; \frac{t}{4}\Big) = \\
&= 2\mu\Big((A_\alpha - A)A^* P; \frac{t}{4}\Big) \to 0
\end{aligned}$$

в силу утверждений (vi), (ix) и (viii) леммы 2.1 и t_τ-непрерывности операции умножения на оператор A^* слева (см. лемму 4.1). Таким образом, $\mu(A_\alpha^* P - A^* P; t) \to 0$ для любых $t > 0$ и $P \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Теорема доказана. $\square$

Для оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ через $R_\lambda(A)$ обозначим его резольвенту.

Лемма 4.9. *Если в $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$ сеть $\{A_\alpha\}$ сходится к A в топологии $t_{\tau l}$, то $R_\lambda(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l}$ $\xrightarrow{\tau l} R_\lambda(A)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Доказательство. Как известно,

$$R_\lambda(A) - R_\lambda(A_\alpha) = R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A).$$

Возьмем $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Так как $A_\alpha - A \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$, то $(A_\alpha - A)R_\lambda(A) \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$ по лемме 4.1. Следовательно, $(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q \xrightarrow{\tau} 0$, т.е. $\mu((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) \to 0$ для любого $s > 0$. Так как

$$\mu\big(R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s\big) \le \|R_\lambda(A_\alpha)\|\, \mu\big((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s\big) \le$$
$$\le |\operatorname{Im}\lambda|^{-1}\mu\big((A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s\big),$$

то $\mu(R_\lambda(A_\alpha)(A_\alpha - A)R_\lambda(A)Q; s) \to 0$.

Таким образом, $(R_\lambda(A) - R_\lambda(A_\alpha))Q \xrightarrow{\tau} 0$ для любого $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$, т.е. $R_\lambda(A_\alpha) \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} R_\lambda(A)$. $\square$

Лемма 4.10. *Пусть f и g — две непрерывные функции из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) в $\mathbb{C}$, причем g ограничена. Если операторные функции f и g являются $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывными на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ (на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$), то операторная функция fg также $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывна на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ (соответственно на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$).*

Доказательство. Пусть $A_\alpha \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} A$. Запишем

$$(gf)(A) - (gf)(A_\alpha) = (g(A) - g(A_\alpha))f(A) + g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha)).$$

Из леммы 4.1 следует, что $(g(A) - g(A_\alpha))f(A) \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$. Из оценки

$$\mu\big(g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha))Q; s\big) \le |g|\, \mu\big((f(A) - f(A_\alpha))Q; s\big),$$

где $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$, следует, что $g(A_\alpha)(f(A) - f(A_\alpha)) \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$. Таким образом, операторная функция gf является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной. $\square$

Лемма 4.11. *Пусть последовательность (f_n) непрерывных функций, действующих из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) в $\mathbb{C}$, равномерно на $\mathbb{R}$ (соответственно на $\mathbb{C}$) сходится к функции f. Если операторные функции f_n являются $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывными на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ (на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$), то операторная функция f также $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывна на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ (соответственно на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$).*

Доказательство. Приведем доказательство для функций на $\mathbb{C}$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем n_0 так, что $\sup_{x\in\mathbb{C}}|f(x) - f_{n_0}(x)| \le \varepsilon/3$. Пусть $A_\alpha \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} A$ и $Q \in \mathcal{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$. Для $s > 0$ в силу утверждений (iv)–(vi) и (ix) леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned}
&\mu\big((f(A) - f(A_\alpha))Q; s\big) = \\
&\quad = \mu\Big(\big(f(A) - f_{n_0}(A)\big)Q + \big(f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha)\big)Q + \big(f_{n_0}(A_\alpha) - f(A_\alpha)\big)Q; s\Big) \le \\
&\quad \le \mu\Big((f - f_{n_0})(A)Q; \frac{s}{3}\Big) + \mu\Big(\big(f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha)\big)Q; \frac{s}{3}\Big) + \mu\Big((f - f_{n_0})(A_\alpha)Q; \frac{s}{3}\Big) \le \\
&\quad \le \|(f - f_{n_0})(A)Q\| + \mu\Big(\big(f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha)\big)Q; \frac{s}{3}\Big) + \|(f - f_{n_0})(A_\alpha)Q\| \le \\
&\quad \le \frac{2\varepsilon}{3} + \mu\Big(\big(f_{n_0}(A) - f_{n_0}(A_\alpha)\big)Q; \frac{s}{3}\Big).
\end{aligned}$$

Так как операторная функция f_{n_0} является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной, второе слагаемое в последнем выражении не превосходит $\varepsilon/3$ при достаточно больших значениях индекса α. $\square$

Предложение 4.12. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$. Тогда операторная функция f является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Если $p(x)$ и $q(x)$ — действительные многочлены такие, что степень $p(x)$ меньше степени $q(x)$ и $q(x)$ не имеет действительных корней, то рациональную функцию $r(x) = p(x)/q(x)$ можно представить как конечную линейную комбинацию функций вида $(x-\lambda)^{-n}$ ($\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$). Воспользовавшись леммами 4.9 и 4.10, получаем $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывность операторной функции r. По теореме Стоуна $f(x)$ можно равномерно на $\mathbb{R}$ аппроксимировать последовательностью рациональных функций $r(x)$ рассмотренного выше вида, и из леммы 4.11 следует $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывность операторной функции f.

Перейдем к общему случаю. Представим f в виде

$$f(x)=f(x)\frac{1}{1+x^2}+f(x)\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Обозначим первое слагаемое через $f_1(x)$, а второе через $f_2(x)$. Тогда $f_1(x) \to 0$ при $x \to \infty$; следовательно, операторная функция f_1 является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$. Последовательное применение леммы 4.10 к функциям $xf_1(x)$ и $x(xf_1(x))$ показывает $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывность на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ операторной функции f_2. □

Лемма 4.13. *Отображения $A \mapsto \operatorname{Re} A$ и $A \mapsto \operatorname{Im} A$ являются $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывными на множестве $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$.*

Доказательство следует из теоремы 4.8. □

Лемма 4.14. *Отображение $A \mapsto I + |\operatorname{Re} A| + |\operatorname{Im} A|$ является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывным на множестве $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$.*

Доказательство. Применяем лемму 4.13 и предложение 4.12. □

Предложение 4.15. *Пусть непрерывная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ есть $O(|z|)$ при $z \to \infty$. Тогда соответствующая операторная функция f будет $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра функций из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$, порожденная функциями вида $f(\operatorname{Re} z)$ и $g(\operatorname{Im} z)$, где непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ стремятся к нулю при $x \to \infty$. По теореме Стоуна алгебра $\mathcal{A}$ равномерно плотна в алгебре $\overline{\mathcal{A}}$ всех непрерывных функций из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$, стремящихся к нулю на бесконечности. Из леммы 4.13, предложения 4.12 и леммы 4.10 следует, что операторные функции, соответствующие функциям из $\mathcal{A}$, $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывны, и из леммы 4.11 следует, что то же самое выполнено и для функций из $\overline{\mathcal{A}}$.

Пусть теперь непрерывная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ есть $O(|z|)$ при $z \to \infty$. Запишем

$$f(z)=(1+|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|)^2\frac{f(z)}{(1+|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|)^2}$$

и дважды применим леммы 4.14 и 4.10.

Пусть, наконец, непрерывная функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ есть $O(|z|)$ при $z \to \infty$. Тогда функции $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ непрерывно действуют из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$ и суть $O(|z|)$ при $z \to \infty$. Соответствующие операторные функции $\operatorname{Re} f(A)$ и $\operatorname{Im} f(A)$ будут $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывными на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$, и, значит, операторная функция $f(A)=\operatorname{Re} f(A)+\mathrm{i}\operatorname{Im} f(A)$ будет $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывной на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$. □

Следствие 4.16. *Отображение $A \mapsto |A|$ является $t_{\tau \mathrm{l}}$-непрерывным на $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}$.*

Из [3, лемма 3.4] вытекает

Лемма 4.17. *Пусть $\{A_\alpha\}$ и $\{B_\alpha\}$ — две сети в $\mathcal{M}^+$ такие, что $\{A_\alpha\}$ равномерно ограничена, $A_\alpha \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$ и $B_\alpha \le A_\alpha$ для всех α. Тогда $B_\alpha \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} 0$.*

Далее, для $\Omega \subset \mathbb{C}$ положим $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}_{\Omega}=\{A \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}\colon \operatorname{Sp}(A) \subset \Omega\}$, где $\operatorname{Sp}(A)$ — спектр оператора A.

Теорема 4.18. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, $A \in S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}_{\Omega}$. Пусть функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ такова, что ее ограничение на любое ограниченное замкнутое в $\mathbb{C}$ подмножество множества Ω измеримо по Борелю, $\sup\{|f(z)|/(1+|z|)\colon z \in \Omega\} < \infty$ и f непрерывна в каждой точке из $\operatorname{Sp}(A)$. Тогда если сеть $\{A_\alpha\}$ операторов из $S(\mathcal{M},\tau)^{\mathrm{nor}}_{\Omega}$ сходится к A в топологии $t_{\tau \mathrm{l}}$, то $f(A_\alpha) \xrightarrow{\tau \mathrm{l}} f(A)$.*

Доказательство. Теорему достаточно доказать для вещественнозначной функции f, что мы и проделаем ниже в два этапа.

1. Предположим, что f ограничена на Ω, пусть $|f| \leq 1$, и непрерывна во всех точках из $\mathrm{Sp}(A)$. По теореме Титце–Урысона существует непрерывная функция $g\colon \mathbb{C} \to [-1,1]$, совпадающая с f на $\mathrm{Sp}(A)$. По предложению 4.15

$$g(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l} g(A) = f(A).$$

Согласно [20, лемма 2] существует ограниченная непрерывная функция h на Ω такая, что $h = 0$ на $\mathrm{Sp}(A)$ и $|f - g| \leq h$ на Ω.

1а. Теперь предположим дополнительно, что $\Omega = \mathbb{C}$. Тогда $h(A_\alpha) \xrightarrow{\tau} h(A) = 0$ по предложению 4.15. Так как $0 \leq (f - g + h)(A_\alpha) \leq 2h(A_\alpha)$, то $(f - g + h)(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l} 0$ по лемме 4.17. Следовательно,

$$f(A_\alpha) = (f - g + h)(A_\alpha) + g(A_\alpha) - h(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l} f(A).$$

1б. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$, то согласно [20, лемма 1] построим ограниченную функцию $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, которая продолжает h, непрерывна во всех точках из Ω и полунепрерывна сверху на $\mathbb{C}$, а следовательно, измерима по Борелю. Воспользовавшись случаем 1а, получаем

$$h(A_\alpha) = k(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l} k(A) = h(A) = 0,$$

и остается дословно повторить два последних предложения предыдущего абзаца.

2. В общем случае положим $g(z) = f(z)/(1 + |z|)$. Тогда $g(A_\alpha) \xrightarrow{\tau l} g(A)$ по предыдущему, $I + |A_\alpha| \xrightarrow{\tau l} I + |A|$ по предложению 4.15, откуда по теореме 3 из [1] получаем

$$f(A_\alpha) = g(A_\alpha)(I + |A_\alpha|) \xrightarrow{\tau l} g(A)(I + |A|) = f(A). \qquad \square$$

Следствие 4.19. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ и функция $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна на Ω и такова, что* $\sup\{|f(z)|/(1 + |z|)\colon z \in \Omega\} < \infty$. *Тогда соответствующая операторная функция непрерывна на $S(\mathcal{M}, \tau)^{\mathrm{nor}}_{\Omega}$ в топологии $t_{\tau l}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bikchentaev A.M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.
2. *Бикчентаев А.М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, №3. С. 342–349.
3. *Бикчентаев А.М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 41–54. MathNet
4. *Бикчентаев А.М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, №5. С. 783–786.
5. *Bikchentaev A., Sukochev F.* When weak and local measure convergence implies norm convergence // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1414–1431.
6. *Бикчентаев А.М.* Сходимость по мере и τ-компактность τ-измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана // Изв. вузов. Математика. 2020. №5. С. 89–93.
7. *Бикчентаев А.М.* Топологии локальной сходимости по мере в алгебрах измеримых операторов // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, №1. С. 17–27.
8. *Ciach L.J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.
9. *Davies E.B.* A generalisation of Kaplansky's theorem // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1972. V. 4, N 3. P. 435–436.
10. *Dodds P.G., Dodds T.K.-Y., de Pagter B.* Noncommutative Köthe duality // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.

11. *Dodds P.G., Dodds T.K., Sukochev F.A., Tikhonov O.Ye.* A non-commutative Yosida–Hewitt theorem and convex sets of measurable operators closed locally in measure // Positivity. 2005. V. 9, N 3. P. 457–484.
12. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pac. J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
13. *Kadison R.V.* Strong continuity of operator functions // Pac. J. Math. 1968. V. 26, N 1. P. 121–129.
14. *Муратов М.А., Чилин В.И.* Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Совр. математика. Фунд. напр. 2016. Т. 61. С. 115–163.
15. *Скворцова Г.Ш.* О слабой секвенциальной полноте факторпространств пространства интегрируемых операторов // Изв. вузов. Математика. 2002. №9. С. 71–74.
16. *Скворцова Г.Ш., Тихонов О.Е.* Выпуклые множества в некоммутативных L_1-пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере // Изв. вузов. Математика. 1998. №8. С. 48–55.
17. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Berlin: Springer, 2002. (Encycl. Math. Sci.; V. 124. Operator Algebras and Non-commutative Geometry; V. 5).
18. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Berlin: Springer, 2003. (Encycl. Math. Sci.; V. 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry; V. 6).
19. *Тихонов О.Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана // Изв. вузов. Математика. 1987. №1. С. 77–79.
20. *Тихонов О.Е.* О сходимости функций нормальных операторов в сильной операторной топологии // Функц. анализ и его прил. 2007. Т. 41, №3. С. 93–95.