

Казанский государственный университет  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**В.М. Колюхов**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**

**по дисциплине**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

2016

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ТЕМА 1. ЧИСЛЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ</b>	<b>5</b>
1.1. Общие этапы построения математической модели и ее численной реализации	5
1.2. Основные уравнения МСС в интегральной и дифференциальной формах	6
1.3. Конкретизация модели СС. Уравнения состояния. Граничные условия	8
1.4. Классификация физических процессов. Примеры замкнутых моделей	9
<b>ТЕМА 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ</b>	<b>10</b>
2.1. Равномерные и неравномерные сетки. Сеточные функции и нормы	10
2.2. Аппроксимация дифференциальных и интегральных операторов	11
2.3. Погрешность аппроксимации в точке (локальная аппроксимация)	12
2.4. Построение разностных аппроксимаций линейных дифференциальных уравнений параболического типа	12
2.5. Явные и неявные РС	13
2.6. Невязка РС. Построение РС повышенной точности	14
2.7. Разностные схемы с весами	15
2.8. Погрешность аппроксимации на сетке	15
2.9. Сходимость и устойчивость РС	16
2.10. Методы аппроксимации краевых и начальных условий	18
2.11. Формулы разностного дифференцирования	19
2.12. Формулы перехода от одного веса к другому	19
<b>ТЕМА 3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ РС</b>	<b>20</b>
3.1. Неизотермические задачи с подвижными границами в газовой динамике	20
3.1.1. Постановка неизотермической задачи в Эйлеровых координатах	20
3.1.2. Постановка неизотермической задачи в Лагранжевых координатах	21
3.2. Построение разностных схем. Шахматные сетки	22
3.3. Анализ построенных схем. Примеры нарушения консервативности РС	23
3.4. Интегральные методы построения консервативных разностных схем	24
3.4.1. Интегро-интерполяционный метод	24
3.4.2. Особенности аппроксимации коэффициента теплопроводности в схеме для неизотермической задачи газовой динамики	26

3.4.3. Метод сумматорных тождеств	27
<b>3.5. Принципы построения полностью консервативных разностных схем</b>	<b>29</b>
3.5.1. Анализ законов сохранения энергии	30
3.5.2. Анализ уравнения неразрывности	30
<b>3.6. Методы решения разностных схем для изотермических задач газовой динамики</b>	<b>31</b>
3.6.1. Алгоритм явного решения неявной схемы ( $\alpha = \sigma = 0$ )	31
3.6.2. Метод простой итерации при решении неявной схемы ( $\alpha = \sigma = 1$ )	32
3.6.3. Метод прогонки	32
3.6.4. Метод Ньютона линеаризации нелинейных систем алгебраических уравнений	33
3.6.5. Решение динамических уравнений методом Ньютона	34
3.6.6. Метод разделения процессов ("динамические" и "тепловые" уравнения). Внутренний и внешний итерационный процессы	35
<b>ТЕМА 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b>	<b>38</b>
<b>ТЕМА 5. ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА</b>	<b>41</b>
5.1. Продольно-поперечная схема (метод переменных направлений)	42
5.2. Локально-одномерная схема	44
5.3. Стационарные многомерные уравнения эллиптического типа. Счет на установление	47
<b>ТЕМА 6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ</b>	<b>49</b>
6.1. Слабая формулировка задачи. Задача минимизации функционала	49
6.2. Метод Бубнова-Галеркина. Метод Ритца	50
6.3. Метод конечных элементов (МКЭ)	51
6.3.1. Примеры конечных элементов. Линейные преобразования элементов произвольной формы в базисные	51
6.3.2. Примеры построения базисных функций	52
6.3.3. Вычисление "вектора сил" на базисном элементе	53
6.3.4. Вычисление матрицы жесткости на базисном элементе	54
6.3.5. Построение расширенных векторов и глобальной матрицы жесткости и вектора сил	55
<b>ТЕМА 7. ДВУМЕРНАЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В РАЗРЕЗЕ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТА</b>	<b>57</b>
7.1. Разностная схема	58
7.2. Итерационный метод расчета давления	59
7.2.1. Построение системы уравнений с пятидиагональной матрицей	59
7.2.2. Метод пятидиагональной прогонки	61
7.2.3. Уточнение итераций по давлению	62
<b>ТЕМА 8. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА</b>	<b>63</b>
8.1. Формулировка задач переноса	63

8.1. Разностные схемы	64
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>67</b>
<b>ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАДАНИЯ</b>	<b>68</b>
1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)	68
Варианты заданий	69
2. Решение уравнений параболического типа (УПТ)	70
Варианты заданий	71
3. Решение уравнения переноса (УП)	72
Варианты заданий	74

## Тема 1. ЧИСЛЕННОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

### 1.1. Общие этапы построения математической модели и ее численной реализации

**Модель среды.** Будем рассматривать процессы в т.н. **сплошных средах (СС)**, т.е. средах, заполняющих пространство непрерывным образом. Критерий применимости такой модели среды

$$l/L \ll 1,$$

где  $l$  и  $L$  – соответственно длина свободного пробега частицы среды и характерный размер задачи.

В СС взаимодействие частиц сказывается усредненно, так что для описания процессов в СС можно ввести некоторые **средние характеристики**, не рассматривая поведение отдельных частиц, такие как, например,

$T$  – температура (мера кинетической энергии частиц),  $\rho$  – плотность и т.д.

**I. Математическое моделирование.** Реальные физические процессы в СС взаимосвязаны и их описание достаточно сложно. Одним из методов анализа явлений в СС является **математическое моделирование**, когда вместо реального процесса рассматривается некоторый упрощенный, идеализированный процесс – **модель явления**. При этом часть связей, имеющих место между различными его характеристиками и внешними параметрами, намеренно игнорируется (например, изучение температурного процесса без учета деформируемости СС, влияния электромагнитных волн и т.д.).

**Математическая модель процесса** – это уравнения, связывающие его известные и искомые параметры. В МСС основные уравнения выражают общие законы сохранения массы, импульса и энергии. Эти уравнения универсальны и могут быть использованы для описания различных физических и технологических процессов.

**Моделирование** – это упрощение исследуемого процесса, которое сводится к конкретизации и анализу общих уравнений СС, и их замыкание.

**Замкнутая математическая модель** – это система уравнений, связывающих различные параметры процесса, дополненная граничными и начальными условиями.

**Граничные условия** – модель взаимодействия внешних (по отношению к исследуемой области) процессов и процессов внутри области.

**Начальные условия** – модель начального состояния исследуемого процесса.

**II. Численное моделирование.** Математические модели реального физического процесса, даже упрощенные, могут оказаться весьма сложными для применения аналитических методов. В этом случае для отыскания решения задач используются **численные методы**. В них непрерывная среда заменяется дискретной, а исходные уравнения – системой алгебраических соотношений (например, **разностной схемой**). Для ее решения необходимы свои методы, которые ориентированы на применение вычислительной техники (например, ПЭВМ). Эти методы весьма разнообразны (прямые, итерационные). Возникает и проблема выбора наиболее рационального метода решения, экономичного по времени счета и объему памяти ЭВМ, и обеспечивающего сходимость и устойчивость.

В дальнейшем выполняется разработка алгоритмической модели для ее реализации на ЭВМ, составление программы, отладка и тестирование, получение численного решения, проверка достоверности – апробация численной модели на экспериментах и (или) известных аналитических решениях, и, наконец, анализ результатов расчетов и их использование для прогноза или оптимизации процессов.

Вместе этапы I и II называют **численным математическим моделированием**.

## 1.2. Основные уравнения МСС в интегральной и дифференциальной формах

**1.1) Закон сохранения массы СС в интегральной форме.** Пусть  $V$  - некоторый объем СС, заполненные сплошной средой,  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  - радиус-вектор элемента объема  $dV$  относительно начала  $O$  декартовой системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Частицы СС движутся со скоростью  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , входят и выходят из объема  $V$  через его граничную поверхность  $\Sigma$ . Баланс массы СС в объеме  $V$  за время  $\Delta t = t - t'$  выражается интегральным соотношением

$$\int_V \{\rho(\mathbf{r}, t') - \rho(\mathbf{r}, t)\} dV = - \int_t^{t'} \int_{\Sigma} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma dt, \quad (1.1)$$

где  $\rho(\mathbf{r}, t)$  - плотность СС,  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль к поверхности  $\Sigma$ , правая часть (1.1) характеризует количество СС, покинувшей СС через границу  $\Sigma$  за промежуток времени  $\Delta t$ . Уравнения состояния. Разделение явления по физическим процессам. Примеры описание динамических и тепловых процессов (уравнение теплопереноса, гидродинамические уравнения).

**1.2) Закон сохранения массы СС в дифференциальной форме.** С помощью формулы Остроградского-Гаусса преобразуем интеграл по поверхности  $\Sigma$  в интеграл по объему  $V$  и применим теорему о среднем к интегралу по времени

$$\int_V \{\rho(\mathbf{r}, t') - \rho(\mathbf{r}, t)\} dV + \Delta t \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})|_{\bar{t}} dV = 0$$

где  $\bar{t} \in [t, t']$ . Поделим полученное соотношение на  $\Delta t$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2)$$

- уравнение неразрывности СС.

**2.1) Закон сохранения количества движения СС в интегральной форме.** Пусть на сплошную среду действуют внешняя сила с объемной плотностью  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ , например, сила тяжести. Изменение количества движения СС в объеме  $V$  за время  $\Delta t = t - t'$  происходит за счет действия силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ , потери (приобретения) импульса вследствие прихода (ухода) СС через границу  $\Sigma$ , а также вследствие взаимодействия среды внутри объема  $V$  со средой вне  $V$ . Это взаимодействие носит поверхностный характер. Соответствующая сила  $\mathbf{P}$  может быть разложена на две составляющие, направленные вдоль нормального и касательного единичных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  в точке поверхности  $\Sigma$ :  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_\tau$ . Составляющая  $\mathbf{P}_\tau$  обусловлена наличием вязких сил, возникающих из-за относительного движения слоев среды, соприкасающихся по поверхности  $\Sigma$ , а  $\mathbf{P}_n = p\mathbf{n}$ , где  $p$  - давление. В пренебрежении составляющей  $\mathbf{P}_\tau$  изменение количества движения (импульса) СС в объеме  $V$  за промежуток времени  $\Delta t = t - t'$  выражается интегральным соотношением

$$\int_V \{\rho \mathbf{v}(\mathbf{r}, t') - \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\} dV = - \int_t^{t'} \int_{\Sigma} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma dt - \int_t^{t'} \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\Sigma dt + \int_t^{t'} \int_V \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) dV dt. \quad (1.3)$$

В отличие от уравнения (1.1) соотношение (1.3) является векторным, т.е. включает в себя три скалярных уравнения в проекциях на координатные оси  $x_1, x_2, x_3$ .

**2.2) Закон сохранения количества движения СС в дифференциальной форме.** Разложим вектор  $\mathbf{v}$  на составляющие по направлениям осей  $x_1, x_2, x_3$ :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$  и возьмем проекции уравнения (1.3) на эти оси. В каждом из трех уравнений преобразуем поверх-

ностные интегралы в объемные, применим теорему о среднем к интегралу по времени, поделим полученные соотношения на  $\Delta t$  и, устремив  $\Delta t$  к нулю, получим:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

С учетом уравнения неразрывности (1.2) преобразуем левые части этих соотношений

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \nabla) v_i = \rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_i \right\},$$

где  $\nabla = \operatorname{grad} = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ . Тогда **скалярная дифференциальная форма закона сохранения количества движения**

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_i \right] = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.4_1)$$

может быть представлена также в **векторном виде**:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{F}. \quad (1.4_2)$$

**3.1) Закон сохранения полной энергии СС в интегральной форме.** Пусть  $e = \rho(\varepsilon + v^2/2)$ , где  $\varepsilon$  и  $v^2/2$  – объемная плотность соответственно внутренней и кинетической энергии СС, а полная энергия  $E = \int_V e dV$ . В дальнейшем ограничимся случаем, когда внутренняя энергия  $\varepsilon$  обусловлена только тепловыми процессами в СС. Интегральный баланс полной энергии за промежуток времени  $\Delta t = t - t'$  может быть представлен в виде:

$$\int_V \{e(\mathbf{r}, t') - e(\mathbf{r}, t)\} dV = - \int_{t'}^t \int_{\Sigma} e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma dt - \int_{t'}^t \int_{\Sigma} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma dt + \int_{t'}^t \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dV dt + \int_{t'}^t \int_V Q(\mathbf{r}, t) dV dt - \int_{t'}^t \int_{\Sigma} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}) d\Sigma dt. \quad (1.5)$$

Слагаемые правой части описывают изменение полной энергии за счет следующих факторов:

- потери (приобретения) энергии вследствие прихода (ухода) СС через границу  $\Sigma$ ,
- работы поверхностных сил (давления  $p$ ),
- работы объемной силы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ ,
- объемных источников тепла плотностью  $Q(\mathbf{r}, t)$ , распределенных по объему  $V$ ,
- притока (ухода) тепловой энергии через поверхность  $\Sigma$  за счет процесса теплопроводности:  $\mathbf{W}$  – вектор плотности теплового потока.

**3.2) Закон сохранения полной энергии СС в дифференциальной форме:**

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) + Q - \operatorname{div}\mathbf{W}. \quad (1.6_1)$$

С учетом уравнения неразрывности преобразуем левую часть этих соотношения (1.6):

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \nabla) \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) = \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + (\mathbf{v} \nabla) \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \right\}.$$

Тогда **вторая дифференциальная форма закона сохранения полной энергии**

$$\rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + (\mathbf{v} \nabla) \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) \right\} = -\operatorname{div}(p\mathbf{v}) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) + Q - \operatorname{div} \mathbf{W}. \quad (1.6_2)$$

Вычитая из уравнения (1.6<sub>2</sub>) уравнение (1.4<sub>2</sub>), скалярно умноженное на скорость  $\mathbf{v}$ , получим **закон сохранения внутренней энергии**:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \varepsilon \right\} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + Q - \operatorname{div} \mathbf{W}. \quad (1.7)$$

### 1.3. Конкретизация модели СС. Уравнения состояния. Граничные условия

Вектор  $\mathbf{W}$  плотности теплового потока может быть задан по закону Фурье:

$$\mathbf{W} = -K \nabla T, \quad (1.8)$$

где  $K = K(\rho, T)$  – коэффициент теплопроводности СС,  $T$  – температура.

Для замыкания уравнений СС вводятся уравнения состояния вида

$$\rho = \rho(p, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(p, T). \quad (1.9)$$

*Примеры.*  $\rho = \frac{\rho_{am}}{p_{am}} p$  – идеальный газ,  $\rho = \frac{p}{RT}$  – реальный газ,  $\rho = const$  – несжимаемая СС,  $\rho = \rho_* \left[ 1 - \alpha_p (T - T_*) + \alpha_T (p - p_*) \right]$  – сжимаемая жидкость. Здесь  $\rho_{am}$  – плотность газа при атмосферном давлении  $p_{am}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\rho_*$  – плотность жидкости при некоторых характерных значениях температуры  $T_*$  и давления  $p_*$ ,  $\alpha_p$  и  $\alpha_T$  – коэффициенты теплового расширения и объемной упругости.

Внутренняя энергия СС (газа, жидкости, твердого тела) часто определяется уравнением состояния

$$\varepsilon = C_V T \quad (1.10)$$

Здесь  $C_V$  – коэффициент теплоемкости среды.

После подстановки (1.8) в (1.7) система из семи уравнений (1.2), (1.4<sub>1</sub>), (1.6<sub>2</sub>) или (1.7), (1.9) позволяет найти семь искомым функций  $\rho$ ,  $p$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$ . Система является полной. Для ее замыкания должны быть заданы граничные и начальные условия.

➤ *Граничные условия I-го рода* (условия Дирихле), например:

$$T|_{\Sigma} = T_{\Gamma}, \quad p|_{\Sigma} = p_{\Gamma}, \quad \text{где } T_{\Gamma} \text{ и } p_{\Gamma} \text{ - заданные на границе } \Sigma \text{ функции.}$$

➤ *Граничные условия II-го рода*, например:

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = q, \quad \text{где } q \text{ - заданный на границе } \Sigma \text{ тепловой поток (функция } T|_{\Sigma} \text{ не известна).}$$

В частном случае, если  $q=0$ , условие  $\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = 0$  называется условием Неймана.

➤ *Граничные условия III-го рода*, например:

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \alpha (T|_{\Sigma} - T_{\Gamma}).$$



Граничные условия могут быть нелинейными, например, когда  $q = q(T)$ . Так, при излучении на границе поток тепла по закону Стефана-Больцмана пропорционален 4-ой степени температуры:

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \sigma (T^4 \Big|_{\Sigma} - T_{\Gamma}^4).$$

► *Условия сопряжения решения на границах разрыва среды (их иногда называют граничными условиями IV-го рода), например, когда в задачах теплопроводности  $K|_{\Sigma+0} \neq K|_{\Sigma-0}$ :*

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma+0} = K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma-0}, \quad T|_{\Sigma+0} = T|_{\Sigma-0}.$$

Более сложные условия ставятся на таких границах в задачах с фазовыми переходами (плавление, кристаллизация и т.д.). В этом случае превращение вещества из одной фазы в другую требует некоторого количества тепла  $L$  – скрытой теплоты фазового перехода, а сама граница может быть подвижной. Например, условие Стефана

$$K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma+0} - K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma-0} = \rho \nu L, \quad T|_{\Sigma} = T_{\Phi},$$

где  $T_{\Phi}$  – известная температура фазового перехода,  $\nu = \partial \Sigma / \partial t$  – скорость движения границы. Положение подвижной границы должно быть найдено с использованием этих условий.

Начальные условия в нестационарных задачах моделируют исходное состояние СС в некоторый начальный момент времени  $t = t_0$ , например,

$$T(x, y, z, t_0) = T_0(x, y, z), \quad p(x, y, z, t_0) = p_0(x, y, z), \quad v_i(x, y, z, t_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

#### 1.4. Классификация физических процессов. Примеры замкнутых моделей

1. *Нестационарные процессы* – изменение во времени некоторой характеристики процесса является определяющим и ее производная по переменной  $t$  не равна 0.

2. *Стационарные (установившиеся) процессы* имеют место, когда некоторые характеристики процесса не зависят от времени. Например, если  $\partial \varepsilon / \partial t = 0$  в уравнении сохранения внутренней энергии (1.2), среда неподвижна ( $v_i = 0$ ), источник  $Q = Q(x, y, z)$ , коэффициент теплопроводности  $K = K(x, y, z)$  то оно примет вид:  $-\text{div}(K \text{grad})T = Q$  – уравнение стационарной теплопроводности, в которое не входит переменная  $t$ .

3. *Квазистационарные процессы* имеют место, когда можно пренебречь изменением во времени некоторой характеристики, например,  $\partial \rho / \partial t = 0$  в уравнении неразрывности (1.2), но другие характеристики остаются зависящими от времени. В частности, для несжимаемой среды оно примет вид:  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , но  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ . В это уравнение время  $t$  входит как параметр.

Разделение явления по физическим процессам. Примеры описания динамических и тепловых процессов (уравнение теплопереноса, гидродинамические уравнения).

## Тема 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Пусть имеется некоторая краевая задача в области  $D$  :

$$Au = f, \quad \mathbf{r} \in D, \quad Ru|_{\Sigma} = \mu(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

При решении задач сеточными методами выполняются следующие этапы.

1. Проводится дискретизация области  $D$  непрерывного определения функции  $u$  : эта область покрывается сеткой  $\omega_h$  – конечным множеством узлов. Например, если в одномерном случае  $D = \{x \in [0, a]\}$ , то  $\omega_h = \{x_i, i = \overline{0, N}\}$ .

2. Исходные дифференциальные уравнения и граничные условия (2.1) заменяются (аппроксимируются) системой алгебраических уравнений

$$A_h y = \varphi_h, \quad \mathbf{r} \in D, \quad R_h y|_{\Sigma_h} = v_h, \quad (2.2)$$

в которой неизвестными являются значения вектора сеточной функции  $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_N)$  в узлах сетки  $\omega_h$ .

3. Решается система алгебраических уравнений, и находятся значения  $(y_0, y_1, \dots, y_N)$ .

4. На основе значений  $(y_0, y_1, \dots, y_N)$  осуществляется восполнение функции  $u$  в области  $D$  (например, линейное восполнение, когда узловые значения  $y_i$  соединяются отрезками прямых, или сплайновое, при котором выполняется интерполяция между соседними узлами с помощью кубических сплайнов).

### 2.1. Равномерные и неравномерные сетки. Сеточные функции и нормы

Разностная сетка  $\omega_h$ , представляющая собой конечное множество узлов, есть область определения функций дискретного изменения аргументов. В одномерных задачах часто используются *равномерные сетки* с постоянным шагом  $h_x = x_{i+1} - x_i = \text{const}$ , равным расстоянию между соседними узлами сетки. Разностная сетка  $\omega_h$  есть конечное множество узлов  $\omega_h = \{x_i = ih_x, h_x = a/N, i = \overline{0, N}\}$ . *Неравномерные сетки* целесообразно использовать при наличии априорной информации об особенностях поведения решения в особых точках, в окрестности которых для повышения точности расчетов следует сгущать узлы сетки, а в областях гладкости решения – разредить узлы. В этом случае шаг сетки не является постоянным  $h_{i+1} \neq h_i$  :  $\omega_h = \left\{ x_{i+1} = x_i + h_i, \sum_{i=0}^{N-1} h_i = a, i = \overline{0, N-1} \right\}$ .

Аналогично вводится сетка по временной переменной, например, равномерная:

$$\omega_\tau = \{t_j = jh_\tau, h_\tau = T/N_\tau, j = \overline{0, 1, 2, \dots}\},$$

у которой каждое фиксированное значение  $t_j$  называется временным слоем. При этом будем говорить о *предыдущем (нижнем)* и *следующем (верхнем)* слоях соответственно при  $t = t_j$  и  $t = t_{j+1}$ .

Наряду с рассмотренными выше сетками с «целыми» узлами вводятся «дробные» или «полуцелые» узлы, например,  $x_{i+0.5} = x_i + 0.5h_x$ ,  $t_{j+0.5} = t_j + 0.5h_\tau$ . Множество полуцелых узлов также можно использовать в качестве области определения сеточных функций.

Для одномерной нестационарной задачи теплопроводности пространственно-временная сетка представляет собой произведение сеток  $\omega_h$  и  $\omega_\tau$ :

$$\omega_{th} = \omega_h \times \omega_\tau = \left\{ (x_i, t_j), i = \overline{0, N}, j = 0, 1, 2, \dots \right\}.$$

Разностные уравнения строятся для нахождения приближенного решения – сеточной функции  $y$ , определенной в узлах сетки и близкой к решению  $u$  исходной задачи. Значения сеточных функций в целых и дробных узлах будем обозначать

$$y(x_i, t_j) = y_i^j = y, \quad y(x_i, t_{j+1}) = y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y(x_{i\pm 1}, t_j) = y_{i\pm 1}^j = y(\pm 1),$$

$$y(x_{i+0.5}, t_{j+0.5}) = y_{i+1/2}^{j+1/2} = \bar{y}_i^j = \bar{y}, \quad y(x_{i+0.5}, t_{j+1.5}) = y_{i+1/2}^{j+3/2} = \bar{y}_i^{j+1} = \hat{\bar{y}}.$$

Сеточная функция  $y$  – функция дискретного аргумента, функция  $u$  – функция непрерывного аргумента. Они принадлежат различным функциональным пространствам. Поэтому для сравнения близости этих функций рассматривают  $u_h$  – конечный набор значений функции  $u$  в узлах сетки. Близость функций часто оценивается с помощью некоторой сеточной нормы  $\|y - u_h\|_{(c)}$  в разностных аналогах  $H_C$  и  $H_L$  пространства  $C$  непрерывных функций и пространства  $L_2$ :

$$\|y^j - u_h^j\|_{H_C} = \max_{0 \leq i \leq N} |y_i^j - u_{h,i}^j| \quad \text{и} \quad \|y_i^j - u_h^j\|_{H_L} = \left( \sum_{i=1}^{N-1} h (y_i^j - u_{h,i}^j)^2 \right)^{1/2}.$$

Если  $\|y - u_h\|_{(c)} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то решение  $y$  стремится к  $u$ .

## 2.2. Аппроксимация дифференциальных и интегральных операторов

При построении разностных аналогов первой производной  $\partial u / \partial x$  по пространственной переменной  $x$  вместо используемого в классическом анализе отношения бесконечно малых

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

вводится отношение конечных разностей. Для аппроксимации производной  $\partial u / \partial x$  в узле сетки  $x_i$  можно использовать:

*правостороннюю разностную производную (разность вперед)*

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} = \frac{u(+1) - u}{h_x}, \quad (2.2.1)$$

*левостороннюю разностную производную (разность назад)*

$$u_{\bar{x},i} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_x} = \frac{u - u(-1)}{h_x}, \quad (2.2.2)$$

*двустороннюю разностную производную (центральная разность)*

$$u_{x,i} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_x} = \frac{u(+1) - u(-1)}{h_x} = \frac{1}{2} (u_{x,i} + u_{\bar{x},i}). \quad (2.2.3)$$

Аналогично определяется разностная производная по времени в узле  $t_j$

$$u_t^j = \frac{u^{j+1} - u^j}{h_\tau} = \frac{\hat{u} - u}{h_\tau}. \quad (2.2.4)$$

Для аппроксимации второй производной  $\partial^2 u / \partial x^2$  в узле сетки  $x_i$  используется вторая разностная производная

$$u_{\bar{x},i} = (u_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h_x} \left[ \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_x} \right] = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} = \frac{u(+1) - 2u + u(-1)}{h_x^2}. \quad (2.2.5)$$

Интегральные операторы аппроксимируются с использованием квадратурных формул, например формулы трапеций:

$$\int_0^a u(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} (y_i + y_{i+1}) h = \sum_{i=0}^N y_i \bar{h}_i, \quad (2.2.6)$$

$$\text{где } \bar{h}_i = \begin{cases} 0.5h, & i = 0 \\ h, & i = 1, N-1 \\ 0.5h, & i = N \end{cases}.$$

### 2.3. Погрешность аппроксимации в точке (локальная аппроксимация)

Погрешность (ошибка) аппроксимации возникает при замене задачи (2.1) на задачу (2.2). От ее величины  $[A_h u - (Au)_h]$  зависит точность приближенного решения  $u$ . Обозначим  $\psi_i = A_h u - (Au)_h$ . Для оценки погрешности аппроксимации в произвольном узле сетки рассмотрим разность  $\psi_i = A_h u_h - (Au)_h$  - погрешность аппроксимации.

*Определение.* Разностный оператор  $A_h$  аппроксимирует в точке  $x_i$  дифференциальный оператор  $A$  с порядком аппроксимации  $n > 0$ , если  $\psi_i = A_h u_h - (Au)_h = O(h^n)$ .

Пусть, например,  $A = \partial/\partial x$ . Тогда для разности вперед с использованием разложения в ряд Тейлора функции  $u_{i+1}$  получим:

$$\psi_i^{(+)} = u_{x,i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{h_x} \left[ u_i + h_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h_x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(h_x^3) - u_i \right] - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = O(h_x).$$

Аналогично для разности назад

$$\psi_i^{(-)} = u_{\bar{x},i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{h_x} \left[ u_i - u_i + h_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i - \frac{h_x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(h_x^3) \right] - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = O(h_x),$$

а для центральной разности

$$\psi_i^{(o)} = u_{o,x,i} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = O(h_x^2).$$

Для второй разностной производной справедлива оценка:

$$\psi_i = u_{\bar{x},i} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{h_x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i + O(h_x^4) = O(h_x^2).$$

### 2.4. Построение разностных аппроксимаций линейных дифференциальных уравнений параболического типа

Рассмотрим одномерную линейную ( $K = const$ ) задачу теплопроводности на отрезке  $D = \{x \in [0, a]\}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < t < T, \quad (2.4.1)$$

с граничными условиями I-го рода

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(a, t) = \mu_2(t) \quad (2.4.2)$$

и начальным условием

$$U(x, 0) = \mu_0(x). \quad (2.4.3)$$

Здесь  $f(x, t)$  – правая часть уравнения,  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$ ,  $\mu_0(x)$  – заданные функции. Введем равномерную сетку  $\omega_{ht} = \{(x_i, t_j), i = \overline{0, N_x}; j = \overline{0, N_t}; h_x = a/N_x; h_t = T/N_t\}$ , где  $x_i = ih_x$ ,  $t_j = jh_t$  и  $h_x, h_t$  – узлы и шаги сетки по переменным  $x$  и  $t$ . Аппроксимируем

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_i^j \sim u_{i,i}^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t}, \quad K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_i^{j+1} \sim Ku_{\bar{x},i}^{j+1} = K \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h_x^2}, \quad f \Big|_i^{j+1} \sim \phi_i^{j+1}.$$

Тогда уравнение (2.5.1) заменится разностным уравнением

$$u_{i,i}^j = Ku_{\bar{x},i}^{j+1} + \phi_i^{j+1}, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots}, \quad (2.4.4)$$

а граничные и начальные условия дадут недостающие алгебраические уравнения

$$u_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, \quad u_{N_x}^{j+1} = \mu_2^{j+1}, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots}, \quad (2.4.5)$$

$$u_i^0 = \mu_{0,i}, \quad i = \overline{0, N_x}. \quad (2.4.6)$$

Наряду с РС (2.5.4) – (2.5.6) для задачи (2.5.1) – (2.5.3) можно построить схему

$$u_{i,i}^j = Ku_{\bar{x},i}^j + \phi_i^j, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots}, \quad (2.4.7)$$

$$u_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, \quad u_{N_x}^{j+1} = \mu_2^{j+1}, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots}, \quad (2.4.8)$$

$$u_i^0 = \mu_{0,i}, \quad i = \overline{0, N_x}. \quad (2.4.9)$$

*Определение.* Конфигурация узлов в разностных уравнениях называется шаблоном.

Схемы (2.4.4) и (2.4.7) имеют *четырёхточечные шаблоны*  $(u_i^j, u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1})$  и  $(u_i^{j+1}, u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j)$ . Обе являются *двухслойными*, т.к. содержат значения сеточной функции на двух временных слоях:  $t_j, t_{j+1}$ .

## 2.5. Явные и неявные РС

В нестационарных задачах время входит в разностные уравнения в качестве переменной. К таким уравнениям применяется алгоритм послойных вычислений. Схемы (2.4.4) и (2.4.7) принципиально различны. В первой из них в каждое уравнения внутри области входят три значения искомой функции:  $u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1}$  на следующем временном слое, а во второй – только одно значение  $u_i^{j+1}$ .

*Определение.* Схемы, в которых решение на следующем слое выражается через сеточные функции на нижнем слое, называются *явными*. Если же схема содержит несколько значений сеточной функции на верхнем слое, то она называется *неявной*.

**1. Алгоритм вычислений по явной схеме (2.4.7).** Из начального условия при  $j = 0$  находим  $u_i^0 = \mu_{0,i}$ ,  $i = \overline{0, N_x}$ . Из уравнений (2.4.8) и (2.4.7) найдем  $u_0^1 = \mu_1^1$ ,  $u_{N_x}^1 = \mu_2^1$ ,  $u_i^1 = u_i^0 + Kh_t/h_x^2 (u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0) + f_i^0$ ,  $i = \overline{1, N_x - 1}$ . В результате имеем весь набор искомых значений  $u_0^1, u_1^1, \dots, u_{N_x}^1$  на 1-ом временном слое. По этим значениям находится решение  $u_0^2, u_1^2, \dots, u_{N_x}^2$  на 2-ом временном слое и т.д.

**1. Алгоритм вычислений по неявной схеме (2.4.4).** Система алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которую необходимо решать на каждом  $(j+1)$ -ом слое, в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2+h_x^2/(Kh_\tau) & -1 & \dots & & \\ 0 & -1 & 2+h_x^2/(Kh_\tau) & -1 & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & & -1 & 2+h_x^2/(Kh_\tau) \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{j+1} \\ u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ u_3^{j+1} \\ \dots \\ u_{N_x}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^{j+1} \\ h_x^2/(Kh_\tau) \cdot (u_1^j + \varphi_1^{j+1}) \\ h_x^2/(Kh_\tau) \cdot (u_2^j + \varphi_2^{j+1}) \\ h_x^2/(Kh_\tau) \cdot (u_3^j + \varphi_3^{j+1}) \\ \dots \\ \mu_2^{j+1} \end{bmatrix}$$

## 2.6. Невязка РС. Построение РС повышенной точности

Пусть  $Au - f = 0$  – исходная непрерывная задача,  $A_h u - \varphi_h = 0$  – соответствующая ей разностная схема. Если подставить в нее непрерывное решение  $u$ , то в общем случае  $A_h u - \varphi_h \neq 0$ . Величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u \equiv Au - f - (A_h u - \varphi_h) = (Au - A_h u) - (f - \varphi_h) \quad (2.6.1)$$

называется *невязкой РС*. Например, для рассмотренной выше задачи  $Au \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$

для схемы (2.4.4) будем иметь:

$$\psi = (Au - A_h u) - (f - \varphi_h) = \left( \frac{\partial U}{\partial t}_i^j - K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}_i^j - u_i^j + Ku_{\bar{x},i}^{j+1} \right) - (f - \varphi_h) = O(h_\tau + h_x^2).$$

Аналогично для схемы (2.4.7)

$$\psi = (Au - A_h u) - (f - \varphi_h) = \left( \frac{\partial U}{\partial t}_i^j - K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}_i^j - u_i^j + Ku_{\bar{x},i}^j \right) - (f - \varphi_h) = O(h_\tau + h_x^2).$$

Для повышения точности РС можно попытаться повысить порядок невязки. Пусть для простоты  $f \equiv 0$ . Разложим функции  $u_{i\pm 1}^j$  и  $u_i^{j+1}$  в РС (2.4.7) до членов порядка  $O(h_x^4)$  и  $O(h_\tau^2)$  соответственно:

$$u_{i\pm 1}^j = u_i \pm h_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^j + \frac{h_x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^j \pm \frac{h_x^3}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^j + \frac{h_x^4}{24} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i^j \pm \frac{h_x^5}{120} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right)_i^j + O(h_x^6),$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + h_\tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^j + \frac{h_\tau^2}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i^j + O(h_\tau^3).$$

Если непрерывная функция  $u$  достаточно гладкая, то из уравнения (2.4.1) следует:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right) = K^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4}. \quad (2.6.2)$$

Так как  $\psi_i^j = \left( -\frac{h_\tau}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_i^j + \frac{Kh_x^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i^j \right) + O(h_\tau^2 + h_x^4)$ . Отсюда с учетом (2.6.2)

$$\psi_i^j = \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i^j \left( -\frac{K^2 h_\tau}{2} + \frac{K h_x^2}{12} \right) + O(h_\tau^2 + h_x^4) \quad (2.6.3)$$

Если главный член невязки (второй сомножитель в (2.6.3)) будет равен 0, то  $\psi_i^j = O(h_\tau^2 + h_x^4)$ . Отсюда

$$h_\tau = \frac{h_x^2}{6K}. \quad (2.6.4)$$

На такой специальной сетке, у которой шаг  $h_\tau$  (2.6.4) зависит от шага  $h_x$ , точность явной РС (2.4.7) увеличивается на порядок по времени и на два порядка по переменной  $x$ .

## 2.7. Разностные схемы с весами

Для рассматриваемой задачи теплопроводности в качестве РС можно взять линейную комбинацию схем (2.4.4) и (2.4.7):

$$\sigma u_{i,i}^j + (1-\sigma)u_{i,i}^j = \sigma K u_{\bar{x},i}^{j+1} + \sigma \varphi_i^{j+1} + (1-\sigma) K u_{\bar{x},i}^j + (1-\sigma) \varphi_i^j. \quad (2.7.1)$$

Введем обозначение  $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma)y$ , где  $0 \leq \sigma \leq 1$  – весовой параметр. Тогда соотношение (2.7.1) примет вид:

$$u_{i,i}^j = K u_{\bar{x},i}^{(\sigma)} + \varphi_i^{(\sigma)} \quad (2.7.2)$$

Очевидно, при  $\sigma = 0$  и  $\sigma = 1$  из (2.7.2) получаются соответственно схемы (2.4.4) и (2.4.7), а при  $\sigma = 0.5$  – схема Кранка-Никольсона с шеститочечным шаблоном  $(u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j, u_{i-1}^{j+1}, u_i^{j+1}, u_{i+1}^{j+1})$ . Ее невязка  $\psi = O(h_\tau^2 + h_x^2)$ .

Введенное понятие схем с весами позволяет говорить о *семействе разностных схем*, аппроксимирующих исходную непрерывную задачу.

## 2.8. Погрешность аппроксимации на сетке

При анализе РС важную роль играет не только оценка локальной аппроксимации, но и *порядка аппроксимации на всей сетке*. Пусть исходные дифференциальные уравнения и граничные условия (2.1)

$$Au = f, \quad \mathbf{r} \in D, \quad Ru|_{\Sigma} = \mu(\mathbf{r}, t) \quad (2.8.1)$$

аппроксимируются схемой

$$A_h y = \varphi_h, \quad \mathbf{r}_h \in D_h, \quad R_h y|_{\Sigma_h} = v_h. \quad (2.8.2)$$

Близость решений РС (2.8.2) и задачи (2.8.1) оценим по величине невязки

$$\psi_h = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h), \quad \mathbf{r} \in \omega_h - \text{во внутренних узлах,}$$

$$\xi_h = (Ru - \mu) - (R_h u - v_h), \quad \mathbf{r} \in \gamma_h - \text{в граничных узлах.}$$

*Определение.* РС (2.8.2) аппроксимирует непрерывную задачу (2.8.1), если  $\|\psi_h\|_{(H_*)} \rightarrow 0$ ,  $\|\xi_h\|_{(H_*)} \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow 0$  в некоторой сеточной норме  $H_{(*)}$ . Аппроксимация имеет порядок  $m$ , если  $\|\psi_h\|_{(H_*)} = O(h^m)$ ,  $\|\xi_h\|_{(H_*)} = O(h^m)$ .

*Замечание.* В случае функции многих переменных порядок аппроксимации может быть различным по разным переменным, например, в схеме (2.7.2)  $\|\psi_h\|_{(H,\cdot)} = O(h_x^2 + h_\tau^\alpha)$ , где  $\alpha = 1$  при  $\sigma \neq 0.5$  и  $\alpha = 2$  при  $\sigma = 0.5$ .

## 2.9. Сходимость и устойчивость РС

Основной целью каждого приближенного метода является получение решения исходной непрерывной задачи с заданной точностью  $\varepsilon$  за конечное число действий. Можно ли этого достичь в зависимости от выбора  $h = h(\varepsilon)$ ? Ответ на этот вопрос дает исследование таких важнейших свойств РС, как устойчивость и сходимость.

Введем понятие погрешности решения схемы:  $z_h = y - u_h$ . Подставим  $z_h - u_h = y$  в (2.8.2):

$$A_h z_h = \zeta_h, \quad R_h z_h = \eta_h, \quad (2.9.1)$$

где  $\zeta_h = \varphi_h - A_h u_h$  и  $\eta_h = \mu_h - R_h u_h$  – погрешности аппроксимации уравнения и граничных условий соответственно.

*Определение 1. Сходимость РС.* Решение задачи (2.8.2) сходится к решению задачи (2.8.1) (т.е. схема обладает *сходимостью*), если  $\|z_h\|_{(\cdot)} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . РС *сходится со скоростью*  $O(|h^p|)$  (или имеет порядок точности  $p$ ), если имеет место  $\|z_h\|_{(\cdot)} \leq M \cdot h^p$ ,  $M = \text{const} > 0$ ,  $p > 0$ .

*Замечание.* В случае функции многих переменных порядки точности могут быть различным по разным переменным, например, в схеме (2.7.2).

Пусть в общем случае нестационарной задачи

$$u'_t = Au + f, \quad \mathbf{r} \in D, \quad Ru|_{\Sigma} = \mu(\mathbf{r}, t), \quad u(0, \mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \quad (2.9.2)$$

аппроксимируются схемой

$$y_t = A_h y + \varphi_h, \quad \mathbf{r}_h \in D_h, \quad R_h y|_{\Sigma_h} = \nu_h, \quad y^0 = u_0. \quad (2.9.3)$$

*Определение 2. Устойчивость РС.* Если дискретное решение непрерывно зависит от входных данных  $(\varphi_h, \mu_h, u_0)$ , причем эта зависимость равномерна относительно величин шагов сетки, то схема устойчива по входным данным. Это требование можно записать в виде

$$\|\tilde{y}_h - y_h\|_{(N_1)} \leq M_1 \|\tilde{u}_0 - u_0\|_{(\cdot)} + M_2 \max_{0 \leq t' \leq t} \|\tilde{\varphi}_h(t) - \varphi_h(t)\|_{(N_2)} + M_3 \max_{0 \leq t' \leq t} |\tilde{\nu}_h(t) - \nu_h(t)| \quad (2.9.4)$$

где  $t = t_j$ ,  $N_1$  и  $N_2$  – некоторые сеточные нормы,  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$ ,  $M_3 > 0$ ,  $\tilde{y}_h$  и  $y_h$  – решения задачи (2.9.3) при возмущенных  $(\tilde{\varphi}_h, \tilde{\mu}_h, \tilde{u}_0)$  и невозмущенных  $(\varphi_h, \mu_h, u_0)$  входных данных. РС *устойчива по начальным данным, правой части и граничным условиям*.

**Теорема о сходимости.** Если РС аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком  $m$ , а погрешность решения схемы  $z_h$  непрерывно и равномерно по  $h$  зависит от невязок  $\psi_h$  и  $\nu_h$  (схема устойчива), то схема сходится, причем порядок ее точности совпадает с порядком аппроксимации:  $p = m$ .

*Замечание.* Погрешность аппроксимации схемы может быть оценена с использованием разложения в ряд Тейлора. Устойчивость же теоретически не всегда может быть до-



казана и часто это свойство РС проверяется посредством вычислительных экспериментов. Исследование аппроксимации и устойчивости позволяют обосновать сходимость РС.

**Определение 3. Корректность непрерывной задачи.** Задача является корректно поставленной, если при любых входных данных из некоторого класса существует ее единственное решение, непрерывно зависящее от входных данных.

**Определение 4. Корректность РС.** Схема корректна, если при всех входных данных из некоторого допустимого семейства существует ее единственное решение и схема устойчива.

*Пример.* Пусть  $ax - b = 0$  – линейное уравнение, корень которого нужно найти приближенным методом. Построим соответствующий итерационный процесс. Перепишем это уравнение в виде  $ax - b \pm x = x + (a - 1)x - b = 0$  или  $x = Ax + b$ , где  $A = -(a - 1)$ . Запишем итерационную схему, позволяющую найти корень уравнения с заданной точностью  $\varepsilon$ :

$$x^{m+1} = Ax^m + b. \quad (2.9.5)$$

Пусть  $a = -9$ ,  $b = -9$ ,  $A = 10$ . Очевидно,  $x = 1$  – решение исходного уравнения. Если начальное приближение для итерационной схемы  $x^0 = 1$ , то расчет по (2.9.5) выполняется при  $\varepsilon = 10^{-6}$  следующим образом:

$$m = 0: \quad x^0 = 1, \Rightarrow x^1 = 1, \quad \left| x^1 - x^0 \right| < \varepsilon, \Rightarrow \text{корень найден.}$$

Если начальное приближение  $x^0 = 1.1$  задано с погрешностью 10%, то при расчете по (2.9.5) будем иметь:

$$m = 0: \quad x^0 = 1.1, \Rightarrow x^1 = 11 - 9 = 2, \quad \left| x^1 - x^0 \right| > \varepsilon, \Rightarrow \text{продолжаем итерации;}$$

$$m = 1: \quad x^1 = 2, \Rightarrow x^2 = 20 - 9 = 11, \quad \left| x^2 - x^1 \right| > \varepsilon, \Rightarrow \text{продолжаем итерации;}$$

$$m = 2: \quad x^2 = 11, \Rightarrow x^3 = 110 - 9 = 101, \quad \left| x^3 - x^2 \right| > \varepsilon, \Rightarrow \text{продолжаем итерации.}$$

Видно, что в данном случае ошибка, обусловленная погрешностью исходных данных, накапливается в процессе счета. *Схема неустойчива.* Аналогичный процесс может возникать при машинном счете вследствие представления чисел в памяти ЭВМ с определенной точностью. Возникновение такой ситуации называется *вычислительной неустойчивостью*.

Пусть теперь  $a = 0.9$ ,  $b = 0.9$ ,  $A = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ .  $x = 1$  – решение исходного уравнения. При том же начальном приближении  $x^0 = 1.1$  при расчетах по (2.9.5) будем иметь:

$$m = 0: \quad x^0 = 1.100, \Rightarrow x^1 = 0.11000 + 0.9 = 1.0100, \quad \left| x^1 - x^0 \right| > \varepsilon, \Rightarrow \text{продолжаем итерации;}$$

$$m = 1: \quad x^1 = 1.010, \Rightarrow x^2 = 0.10010 + 0.9 = 1.0010, \quad \left| x^2 - x^1 \right| > \varepsilon, \Rightarrow \text{продолжаем итерации;}$$

$$m = 2: \quad x^2 = 1.001, \Rightarrow x^3 = 0.10001 + 0.9 = 1.0001, \quad \left| x^3 - x^2 \right| < \varepsilon, \Rightarrow \text{итерации закончены.}$$

Видно, что во втором случае ошибка в процессе счета убывает, т.е. *схема устойчива.* Дополнительно, рассмотренные примеры демонстрируют тот факт, что сходимость схемы зависит от свойств ее оператора.

## 2.10. Методы аппроксимации краевых и начальных условий

*Определение.* Узлы, в которых РС допускает запись на шаблоне, называются *регулярными*. В противном случае узлы относятся к *нерегулярным*.

В РС (2.7.2), (2.4.5) нерегулярными узлами являются точки  $x_0$  и  $x_{N_x}$ , которой уравнения схемы получаются из аппроксимации граничных условий I-го рода и имеют нестандартный вид:

$$y_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, \quad y_{N_x}^{j+1} = \mu_2^{j+1}.$$

Эти разностные краевые условия являются точными, т.к. в узлах  $x_0$  и  $x_{N_x}$   $\xi_h = 0$ . Таким образом, порядок аппроксимации схемы (2.7.2), (2.4.5) определяется аппроксимацией уравнений (2.7.2).

Рассмотрим теперь граничные условия II-го рода. Пусть, например, в линейной задаче теплопроводности (2.4.1)  $f = 0$ , а при  $x = 0$  задан тепловой поток

$$-K \frac{\partial U}{\partial x}(0, t) = \mu_1(t). \quad (2.10.1)$$

Заменяя производную  $U'_x$  в точке  $x_0$  разностью вперед, для схемы  $\sigma = 1$  будем иметь:

$$-\frac{K}{h_x}(u_1^{j+1} - u_0^{j+1}) = \mu_1^{j+1} \text{ или } R_h u = \mu_1,$$

где оператор  $R_h$  определен на двухточечном шаблоне. Оценим погрешность РС  $z_h = u - U_h$ :

$$\hat{z}_{hx,0} = \hat{\eta}_{1h}, \quad \text{где } \hat{\eta}_{1h} = \hat{\mu}_1 + K\hat{u}_{x,0}.$$

Преобразуем  $\hat{u}_{x,0}$  с помощью разложения в ряд Тейлора:  $\hat{u}_{x,0} = U'_x|_0^{j+1} + h_x/2 \cdot U''_{xx}|_0^{j+1} + O(h_x^2)$ . Так как  $(KU'_x + \mu_1)_i^{j+1} = 0$ ,  $\hat{\eta}_{1h} = O(h_x)$ . Погрешность аппроксимации схемы (2.7.2), (2.4.5) на сетке равна  $O(h_x)$  за счет более низкой ее точности в нерегулярном узле  $x_0$ . Для согласования точности уравнений схемы в регулярных и нерегулярных узлах должны использоваться некоторые специальные приемы.

**1. Использование разложения в ряд Тейлора.** Рассмотрим

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_0 + h_x U'_x|_0^{j+1} + h_x^2/2 \cdot U''_{xx}|_0^{j+1} + O(h_x^3).$$

С учетом уравнения теплопроводности  $1/K \cdot U'_t = U''_{xx}$  и граничного условия (2.10.1) перепишем его в виде:

$$\hat{U}_1 = \hat{U}_0 - \hat{\mu}_1 \cdot h_x/K + h_x^2/(2K) \cdot 1/K \cdot U'_t|_0^{j+1} + O(h_x^3).$$

Отсюда, переходя к сеточной функции  $\hat{u}_i$ , получим с точностью  $O(h_x^2)$

$$-\frac{K}{h_x}(u_1^{j+1} - u_0^{j+1}) = \mu_1^{j+1} - \frac{h_x}{2K} \frac{(u_0^{j+1} - u_0^{j+1})}{h_x} \quad \text{или} \quad -Ku_{x,0}^{j+1} = \mu_1^{j+1} - \frac{h_x}{2K} u_{t,0}^j. \quad (2.10.2)$$

По построению разностное уравнение (2.10.20) в нерегулярном узле  $x_0$  имеет тот же порядок аппроксимации  $O(h_x^2)$ , что и схема (2.7.2) в регулярных узлах  $x_i$ ,  $i = \overline{1, N_x - 1}$ .

**2. Метод фиктивных точек.** В этом методе вводится фиктивная точка  $x_{-1} = -h$ . Предположим, что разностное уравнение (2.7.2) справедливо и при  $i = 0$ , т.е. в нерегулярном узле  $x_0$  уравнение теплопроводности аппроксимируется соотношением

$$\frac{u_0^{j+1} - u_0^{j+1}}{h_\tau} = \frac{K}{h_x^2} (u_1^{j+1} - 2u_0^{j+1} + u_{-1}^{j+1}). \quad (2.10.3)$$

Для аппроксимации граничного условия II-го рода (2.10.1) воспользуемся центральной разностью, имеющей порядок точности  $O(h_x^2)$  относительно узла  $x_0$ :

$$-\frac{K}{2h_x} (u_1^{j+1} - u_{-1}^{j+1}) = \mu_1^{j+1}. \quad (2.10.4)$$

Выражая  $u_{-1}^{j+1}$  из уравнения (2.10.3) и исключая его из (2.10.4) получим соотношение

$$-\frac{K}{h_x} (u_1^{j+1} - u_0^{j+1}) = \mu_1^{j+1} - \frac{h_x}{2K} \frac{(u_0^{j+1} - u_0^{j+1})}{h_\tau}, \quad (2.10.5)$$

в точности совпадающее с (2.10.2).

## 2.11. Формулы разностного дифференцирования

Рассмотрим сначала правостороннюю разностную производную от произведения сеточных функций  $uv$ . По ее определению

$$(uv)_{x,i} = \frac{u_{i+1}v_{i+1} - u_i v_i}{h_x} = \frac{u(+1)v(+1) - uv}{h_x}.$$

Очевидно,

$$(uv)_x = \frac{u(+1)v(+1) - uv \pm u(+1)v}{h_x} = u(+1) \frac{v(+1) - v}{h_x} + v \frac{u(+1) - u}{h_x}.$$

Отсюда

$$(uv)_x = u(+1)v_x + vu_x. \quad (2.11.1)$$

Аналогично для левосторонней разностной производной от произведения сеточных функций  $uv$  справедлива формула

$$(uv)_{\bar{x}} = u(-1)v_{\bar{x}} + vu_{\bar{x}}. \quad (2.11.2)$$

Для производной по времени будем иметь

$$(uv)_t = \hat{u}v_t + vu_t. \quad (2.11.3)$$

## 2.12. Формулы перехода от одного веса к другому

Эти формулы позволяют перейти в РС от одного веса  $\alpha$  к другому  $\beta$ . По определению

$$y^{(\alpha)} = \alpha \hat{y} + (1 - \alpha)y, \quad y^{(\beta)} = \beta \hat{y} + (1 - \beta)y.$$

$$y^{(\alpha)} = y^{(\alpha)} \pm y^{(\beta)} = y^{(\beta)} + \hat{y}(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)y.$$

Отсюда

$$y^{(\alpha)} = y^{(\beta)} + h_t(\alpha - \beta)y_t. \quad (2.12.1)$$

Если  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , то формула (2.8.1) является дискретным аналогом разложения функции в ряд Тейлора до членов первого порядка малости:  $y^{j+1} = y^j + h_\tau y_t^j$ .

### Тема 3. КОНСЕРВАТИВНЫЕ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ РС

#### 3.1. Неизотермические задачи с подвижными границами в газовой динамике

Рассмотрим одномерную нестационарную задачу движения газа в области с неподвижной левой и неизвестной подвижной правой границей  $x_\Gamma(t)$ . Газ движется в область, в которой  $p = 0$  при  $x > x_\Gamma(t)$ . Для простоты положим  $Q \equiv 0$ ,  $\mathbf{F} \equiv 0$ ,  $v \equiv v_x$ . Вязкость газа мала, так что можно пренебречь касательными напряжениями в законе сохранения количества движения и диссипацией энергии в уравнении сохранения энергии. Одномерность течения означает, что

- 1) плоскость  $x = x_\Gamma(t)$  при движении остается ортогональной оси  $Ox$ ;
- 2) траектории движения частиц газа – прямые, параллельные оси  $Ox$ ;
- 3) любая плоскость  $x = A$  при движении остается ортогональной оси  $Ox$ ;

##### 3.1.1. Постановка неизотермической задачи в Эйлеровых координатах

В неподвижной Эйлеровой системе координат математическая модель СС в области  $D(t) = \{0 < x < x_\Gamma(t), t > 0\}$  примет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.1.2)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial x} \right\} = -\frac{\partial}{\partial x}(p v) - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad E = \varepsilon + \frac{v^2}{2}, \quad (3.1.3_1)$$

$$\text{или } \rho \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right\} = -p \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (3.1.3_2)$$

уравнения состояния:  $p = \Psi(\rho, T)$ ,  $\varepsilon = \Upsilon(\rho, T)$ .

Граничные условия и начальные условия, замыкающие систему ДУ:

$$v(0, t) = 0, \quad p(x_\Gamma(t), t) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{cases} T(0, t) = \theta_1(t) \\ T(x_\Gamma(t), t) = \theta_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} -W(0, t) = \mathcal{Q}_1(t) \\ W(x_\Gamma(t), t) = \mathcal{Q}_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} -W(0, t) = \alpha(T(0, t) - \mathcal{Q}_1(t)) \\ W(x_\Gamma(t), t) = \alpha(T(0, t) - \mathcal{Q}_2(t)) \end{cases}, \quad (3.1.5)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad x_\Gamma(0) = x_{\Gamma_0}. \quad (3.1.6)$$

Для температуры  $T$  может быть задана любая комбинация условий (3.1.5) I, II или III-го рода. Краевое условие  $p(x, 0) = p_0$  служит условием, из которого определяется неизвестная подвижная граница  $x_\Gamma(t)$ . Заметим, что при  $t = 0$  уравнение состояния  $p_0(x) = \Psi(\rho(0, x), T_0(x))$  позволяет найти начальное распределение плотности  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ .

### 3.1.2. Постановка неизотермической задачи в Лагранжевых координатах

Рассмотрим физический подход, который сводит задачу (3.1.1) – (3.1.6) к задаче с неподвижной границей и естественным образом приводит к понятию подвижной системе Лагранжевых координат. Заметим, что объем параллелепипеда, заключенного между сечениями единичной площади  $x=0$  и  $x=x_T(t)$  при движении газа будет изменяться. Однако масса  $M$  газа внутри него остается постоянной, т.е.  $M(t)=M(0)$  или  $dM/dt=0$ . Аналогично масса газа  $m_A$  слева от произвольного сечения  $x=x_A(0)$ , в котором находится некоторая частица газа в момент  $t=0$ , при перемещении этой частицы при  $t>0$  будет оставаться неизменной, несмотря на изменение положения плоскости  $x=x_A(t)$ :

$$m_A = 1 \times 1 \cdot \int_0^{x_A(t)} \rho(\zeta, t) d\zeta = 1 \times 1 \cdot \int_0^{x_A(0)} \rho_0(\zeta) d\zeta.$$

В общем случае соотношение

$$s = \int_0^x \rho(\zeta, t) d\zeta \quad (3.1.7)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками интервала  $0 \leq x \leq x_T(t)$  и значениями  $s$  из интервала  $[0, M]$ . Величину  $s$  можно трактовать как переменную Лагранжа (фиксированное значение  $s$  соответствует вполне определенной подвижной частице). Таким образом, вместо координат  $(x, t)$  можно выбрать новые переменные  $(s, t_n)$ . Положим, что  $t_n = t$ , т.е. время в обеих системах течет одинаково. Переформулируем уравнения (3.1.1) – (3.1.6) в новых переменных. Выразим

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t_n} \frac{\partial t_n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Из соотношения (3.1.7) с учетом (3.1.1) и граничного условия  $v(0, t) = 0$  следует, что

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \rho(x, t), \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial \rho(\zeta, t)}{\partial t} d\zeta = - \int_0^x \frac{\partial(\rho v)}{\partial t}(\zeta, t) d\zeta = -\rho(x, t) \cdot v(x, t). \quad (3.1.8)$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_n} - \rho v \frac{\partial}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial s}. \quad (3.1.9)$$

$$\text{Очевидно, } \frac{\partial}{\partial t_n} = \frac{\partial}{\partial t} + \rho v \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt}, \quad (3.1.10)$$

т.е. производная  $\partial/\partial t_n$  совпадает с определением субстанциональной производной  $d/dt$ .

Теперь с учетом (3.1.10) перепишем задачу (3.1.1) – (3.1.6):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (3.1.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (3.1.12)$$

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial}{\partial s} (p v - W), \quad E = \varepsilon + \frac{v^2}{2}, \quad (3.1.13_1)$$

$$\text{или } \frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = - \frac{\partial W}{\partial s}, \quad W = -\rho K \frac{\partial T}{\partial s} \quad (3.1.13_2)$$

уравнения состояния:  $p = \Psi(\rho, T)$ ,  $\varepsilon = \Upsilon(\rho, T)$ .

Граничные условия и начальные условия, замыкающие систему ДУ:

$$v(0,t) = 0, \quad p(M,t) = 0, \quad (3.1.14)$$

$$\begin{cases} T(0,t) = \theta_1(t) \\ T(M,t) = \theta_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} -\rho K \frac{\partial T}{\partial s}(0,t) = \theta_1(t) \\ \rho K \frac{\partial T}{\partial s}(M,t) = \theta_2(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} -\rho K \frac{\partial T}{\partial s}(0,t) = \alpha(T(0,t) - \vartheta_1(t)) \\ \rho K \frac{\partial T}{\partial s}(M,t) = \alpha(T(M,t) - \vartheta_2(t)) \end{cases}, \quad (3.1.15)$$

$$v(s,0) = 0, \quad p(s,0) = \tilde{p}_0(s), \quad T(s,0) = T_0(s), \quad 0 \leq s \leq M. \quad (3.1.16)$$

Задача (3.1.11) – (3.1.16) – задача с неподвижной границей. Однако для отыскания границы  $x_\tau(t)$  теперь необходимо дополнительное уравнение – уравнение траекторий движения частиц:

$$\frac{dx(s,t)}{dt} = v(s,t), \quad x(s,0) = x_0(s). \quad (3.1.17)$$

*Замечание.* Рассмотрим дифференциальные уравнения неразрывности и траекторий

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

Очевидно,  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}$  или  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right) = \frac{\partial v}{\partial s}$ . Тогда  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)$ . Проинтегрируем это

соотношение по переменным  $t$  и  $s$ :  $1 \times 1 \cdot \int_0^M ds / \rho = 1 \times 1 \cdot x(M,t) - \underline{\text{закон изменения объема}}$ ,

занимаемого газом в параллелепипеде с единичным сечением при изменении эйлеровой координаты подвижной границы. Вместо уравнения неразрывности можно использовать эквивалентное ему уравнение – закон изменения объема в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1/\rho. \quad (3.1.18)$$

### 3.2. Построение разностных схем. Шахматные сетки

Т.к. в уравнения (3.1.13<sub>1</sub>), (3.1.13<sub>2</sub>) входит вторая производная по переменной  $s$  от температуры, то она аппроксимируется с порядком  $O(h_s^2)$ . В уравнения (3.1.11) – (3.1.13) входят также первые производные по  $s$ , которые на обычной сетке будут иметь порядок  $O(h_s)$ , так что в целом схема будет иметь порядок  $O(h_s)$ . Для повышения точности используются *шахматные сетки*. Рассмотрим такую равномерную сетку

$$\omega_h = \left\{ (s_i, t_j), (s_{i+1/2}, t_{j+1/2}) : s_{i+1} = s_i + ih, s_{i+1/2} = s_i + ih/2; t_{j+1} = t_j + h_\tau, t_{j+1/2} = t_j + h_\tau/2 \right\}, \quad (3.2.1)$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad s_0 = 0, \quad s_N = h \cdot N = M, \quad j = \overline{0, 1, 2, \dots}$$

и построим одну из возможных разностных схем для задачи (3.1.11) – (3.1.18), относя к дробным и целым узлам сетки группы функций  $p(s,t)$ ,  $\rho(s,t)$ ,  $\varepsilon(s,t)$ ,  $T(s,t)$  и  $W(s,t)$ ,  $v(s,t)$ ,  $x(s,t)$ :

$$\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{h_\tau} = - \frac{p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}}{h}, \quad v_{i,i} = -\bar{p}_{s,i}^j, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{x_i^{j+1} - x_i^j}{h_\tau} = v_i^{j+1}, \quad x_{t,i} = \hat{v}_i, \quad (3.2.3)$$

$$W_i^j = -K \rho_{i+1/2}^{j+1/2} \frac{T_{i+1/2}^{j+1/2} - T_{i-1/2}^{j+1/2}}{h}, \quad W_i^j = -K \bar{\rho}_i^j \bar{T}_{s,i}^j, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}}{h} = \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+3/2}}, \quad \hat{x}_{s,i} = \frac{1}{\hat{\rho}_i}, \quad (3.2.5_1)$$

$$\text{или } \frac{1}{h_\tau} \left[ \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+3/2}} - \frac{1}{\rho_{i+1/2}^{j+1/2}} \right] = \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h}, \quad (1/\bar{\rho})_{t,i} = \hat{v}_{s,i}, \quad (3.2.5_2)$$

$$\frac{\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2}}{h_\tau} = -p_{i+1/2}^{j+3/2} \cdot \frac{v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}}{h} - \frac{W_{i+1}^j - W_i^j}{h}, \quad \bar{\varepsilon}_{t,i} = -\hat{p}_i \hat{v}_{s,i} - W_{s,i}, \quad (3.2.6)$$

$$p_{i+1/2}^{j+3/2} = R \cdot \rho_{i+1/2}^{j+3/2} \cdot T_{i+1/2}^{j+3/2}, \quad \hat{p}_i = R \hat{\rho}_i \hat{T}_i, \quad (3.2.7)$$

$$\varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} = C_V \cdot T_{i+1/2}^{j+3/2}, \quad \hat{\varepsilon}_i = C_V \hat{T}_i. \quad (3.2.8)$$

Порядок аппроксимации уравнений схемы (3.2.2) – (3.2.8) равен  $O(h_\tau + h^2)$ , при этом уравнения (3.2.2) – (3.2.4) оцениваются относительно точки  $(s_i, t_j)$ , а остальные – относительно точки  $(s_{i+1/2}, t_{j+1/2})$ .

### 3.3. Анализ построенных схем. Примеры нарушения консервативности РС

Проверим, выполняется эквивалентность дискретных аналогов различных форм законов сохранения энергии. По аналогии с дифференциальным случаем, получим сначала из закона сохранения количества движения закон изменение кинетической энергии. Для этого в разностном случае умножим уравнение (3.2.2) на  $v_i^{(0.5)}$ . Опуская индексы, будем иметь:

$$v^{(0.5)} \cdot v_t = \frac{\hat{v} + v}{2} \cdot \frac{\hat{v} - v}{h_\tau} = \left( \frac{v^2}{2} \right)_t = -v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s. \quad (3.3.1)$$

Сложим уравнения (3.3.1) и (3.2.6):

$$\left( \bar{\varepsilon} + v^2/2 \right)_t = -\left( v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + \hat{p} \hat{v}_s \right) - W_s \quad (3.3.2)$$

По формуле (2.12.1) перехода от одного веса к другому преобразуем сначала выражение в скобках:

$$v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + (\bar{p} + h_\tau \bar{p}_t) \left( v^{(0.5)} + 0.5 h_\tau v_t \right)_s = v^{(0.5)} \bar{p}_s + \bar{p} v_s^{(0.5)} + \delta_\varepsilon, \quad (3.3.3)$$

$$\text{где } \delta_\varepsilon = h_\tau (0.5 h_\tau \bar{p} v_{ts} + \bar{p}_t \hat{v}_s). \quad (3.3.4)$$

Применяя к (3.3.3) формулу разностного дифференцирования (2.11.1), получим:

$$v^{(0.5)} \bar{p}_s + \bar{p} v_s^{(0.5)} + \delta_\varepsilon = v^{(0.5)} \frac{\bar{p} - \bar{p}(-1)}{h} + \bar{p} v_s^{(0.5)} + \delta_\varepsilon = \left[ \bar{p}(-1) v^{(0.5)} \right]_s + \delta_\varepsilon \quad (3.3.5)$$

где  $\bar{p}(-1) = p_{i-1/2}$ ,  $\bar{p} = p_{i+1/2}$ . Таким образом, с учетом (3.3.4), (3.3.5) запишем окончательно разностную форму закона сохранения полной энергии (ЗСПЭ):

$$\left(\bar{\varepsilon} + v^2/2\right)_t = -\left[\bar{p}(-1)v^{(0.5)}\right]_s - W_s - \delta_\varepsilon. \quad (3.3.6)$$

Это уравнение является дискретным аналогом дифференциального уравнения (3.1.13<sub>1</sub>) на интервале  $h$  за время  $h_\tau$ .

Очевидно, что на сетке ЗСПЭ (3.3.5) нарушен из-за наличия дополнительного источника энергии  $\delta_\varepsilon$ , который имеет чисто разностное происхождение. Мощность источника  $\delta_\varepsilon$  (3.3.4) на гладких решениях имеет порядок  $O(h_\tau)$ , т.е. его влияние на приближенное решение падает при уменьшении шага  $h_\tau$ . Однако величина  $\delta_\varepsilon$  практически не зависит от  $h$ , следовательно, она не может быть уменьшена при дроблении сетки по переменной  $s$ .

Для получения интегральной формы ЗСПЭ просуммируем (3.3.6) по всем пространственным и временным шагам:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^J \left(\bar{\varepsilon} + v^2/2\right)_{t,i}^j + \left[\bar{p}(-1)v^{(0.5)}\right]_{s,i}^j + W_{s,i}^j = -\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^J \delta_{\varepsilon,i}^j. \quad (3.3.7)$$

Видно, что появление  $\delta_\varepsilon$  нарушает дискретный аналог интегральной формулировки ЗСПЭ

*Определение.* Схема, в которой выполняются все разностные формулировки дифференциальных законов сохранения, называется **консервативной**.

Рассмотренная выше схема из-за появления в ней дисбалансного члена  $\delta_\varepsilon$  не является консервативной.

*Замечание.* **Консервативность** схемы – важное требование для ее сходимости.

### 3.4. Интегральные методы построения консервативных разностных схем

#### 3.4.1. Интегро-интерполяционный метод

В этом методе РС строятся на основе интегральных соотношений, выражающих законы сохранения на элементарной ячейке сетки. Вводится интерполяция искомого решения и коэффициентов уравнений, и вычисляются интегралы по ячейкам. При этом от выбора интерполяции зависит вид РС, следовательно, ИИМ позволяет строить разнообразные семейства РС.

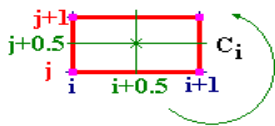


Рис. 3.4.1

Рассмотрим интегральные законы сохранения задачи (3.1.11) - (3.1.18). Проинтегрируем уравнения по ячейке  $\square_i$  (рис. 3.4.1) и перепишем их, воспользовавшись формулой Остроградского  $\int_{C_i} [\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y] ds = \oint_{C_i} P dx + Q dy$ , в виде:

$$\oint_{C_i} 1/\rho ds + v dt = 0, \quad (3.4.1.1)$$

$$\oint_{C_i} v ds - p dt = 0, \quad (3.4.1.2)$$

$$\oint_{C_i} (v^2/2 + \varepsilon) ds - (pv + W) dt = 0. \quad (3.4.1.3)$$

Остановимся более подробно на уравнении (3.4.1.3). Распишем интеграл по контуру  $C_i$

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} (v^2/2 + \varepsilon)(t_j, s) ds - \int_{t_j}^{t_{j+1}} (pv + W)(t, s_i) dt - \int_{s_i}^{s_{i+1}} (v^2/2 + \varepsilon)(t_{j+1}, s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} (pv + W)(t, s_{i+1}) dt = 0.$$



Воспользовавшись теоремой о среднем и формулой трапеций вычислим интегралы, входящие в это балансовое соотношение:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \varepsilon(t_j, s) ds \approx \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2} \cdot h, \quad 1/2 \int_{s_i}^{s_{i+1}} v^2(t_j, s) ds \approx 1/4 \left[ (v_{i+1}^j)^2 + (v_i^j)^2 \right] \cdot h,$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} (p v + W)(t, s_i) dt \approx 1/2 (p_{i+1/2}^{j+3/2} + p_{i-1/2}^{j+3/2}) \cdot v_i^{j+1} \cdot h_\tau + W_i^{j+1} \cdot h_\tau.$$

Тогда в итоге

$$\left( \varepsilon_{i+1/2}^{j+3/2} - \varepsilon_{i+1/2}^{j+1/2} \right) / h_\tau + 1/4 \left[ (v_{i+1}^{j+1})^2 + (v_i^{j+1})^2 - (v_{i+1}^j)^2 - (v_i^j)^2 \right] / h_\tau = \quad (3.4.1.4)$$

$$= -1/(2h) \left[ (p_{i+3/2}^{j+3/2} + p_{i+1/2}^{j+3/2}) v_{i+1}^{j+1} - (p_{i+1/2}^{j+3/2} + p_{i-1/2}^{j+3/2}) v_i^{j+1} \right] - (W_{i+1}^{j+1} - W_i^{j+1}) / h,$$

$$\text{или } \left( \bar{\varepsilon} + 1/4 [v^2(+1)] + v^2 \right)_i = -(\hat{p}_* \hat{v})_s - \hat{W}_s, \quad (3.4.1.5)$$

$$\text{где } p_* = 1/2 [p + p(-1)].$$

Изменяя характер интерполяции по отрезкам контура  $C_i$ , можно получить другие разностные уравнения для ЗСПЭ. Для уравнений (3.4.1.1), (3.4.1.2) можно построить, в частности, разностные уравнения, совпадающие с (3.2.2), (3.2.5<sub>2</sub>).

Заметим, что в такой РС выполняется ЗСПЭ. Проверим, справедливо ли это для ЗСВЭ. Вычтем из (3.4.1.5) полусумму уравнений (3.3.1), записанных для узлов  $i$  и  $(i+1)$ .

$$\bar{\varepsilon}_i = -(\hat{p}_* \hat{v})_s + 1/2 (v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + v^{(0.5)}(+1) \cdot \bar{p}_s(+1)) - \hat{W}_s. \quad (3.4.1.6)$$

Преобразуем первое слагаемое этого соотношения с помощью формулы перехода от одного веса к другому:

$$-(\hat{p}_* \hat{v})_s = -\left[ (\bar{p}_* + h_\tau (\bar{p}_*)_t) (v^{(0.5)} + 0.5 h_\tau v_t) \right]_s = -(\bar{p}_* v^{(0.5)})_s - \delta_E, \quad (3.4.1.7)$$

$$\delta_E = h_\tau \left[ (\bar{p}_*)_t \hat{v} + 0.5 \bar{p}_* v_t \right]_s. \quad (3.4.1.8)$$

Тогда с учетом (3.4.1.7), (3.4.1.8) из соотношения (3.4.1.6) получим:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_i &= -(\bar{p}_* v^{(0.5)})_s + 1/2 (v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + v^{(0.5)}(+1) \cdot \bar{p}_s(+1)) - \hat{W}_s - \delta_E = \\ &= 1/2 (v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + v^{(0.5)}(+1) \cdot \bar{p}_s(+1)) - 1/2 (\bar{p} v^{(0.5)})_s - 1/2 (\bar{p}(-1) v^{(0.5)})_s - \hat{W}_s - \delta_E = \\ &= 1/2 (v^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s + v^{(0.5)}(+1) \cdot \bar{p}_s) - 1/2 v^{(0.5)}(+1) \bar{p}_s - 1/2 v_s^{(0.5)} \bar{p} - 1/2 v_s^{(0.5)} \bar{p} - 1/2 v^{(0.5)} \bar{p}_s - \hat{W}_s - \delta_E. \end{aligned}$$

$$\text{В итоге } \bar{\varepsilon}_i = -\bar{p} v_s^{(0.5)} - \hat{W}_s - \delta_E. \quad (3.4.1.9)$$

Очевидно, что на сетке консервативность ЗСВЭ (3.4.1.9) нарушена из-за появления дисбалансного разностного источника энергии  $\delta_E$ . Мощность  $\delta_E$  (3.4.1.8) имеет порядок  $O(h_\tau)$ , но не зависит от шага  $h$ . Наличие источника может при расчетах существенно исказить температуру  $T$ , а также другие искомые функции, если процесс является существенно неизотермическим.

Таким образом, в некоторых случаях ИИМ может приводить к неконсервативным схемам. Неконсервативность возникает из-за несогласованности при выборе временных слоев при аппроксимации искомых функций и коэффициентов уравнений.

### 3.4.2. Особенности аппроксимации коэффициента теплопроводности в схеме для неизоэнтальной задачи газовой динамики

По принципу разделения процессов при изучении многопроцессного явления рассмотрим тепловую группу уравнений (3.1.3<sub>2</sub>) и (3.1.13<sub>2</sub>) полагая функции механического процесса известными:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f - \frac{\partial W}{\partial s}, \quad f = -p \frac{\partial v}{\partial s}, \quad (3.4.1)$$

$$W = -\Lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \Lambda(\rho, T) = \rho K(T). \quad (3.4.2)$$

Здесь источник энергии  $f$  обусловлен сжимаемостью газа. Запишем интегральную формулировку для ЗСВЭ:

$$\oint_{C_i} \varepsilon ds - W dt = \iint_{\square_i} f ds dt. \quad (3.4.3)$$

Для построения разностных уравнений воспользуемся ИИМ, преобразовав (3.4.3) к виду:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \varepsilon(t_j, s) ds - \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t, s_i) dt - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varepsilon(t_{j+1}, s) ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t, s_{i+1}) dt = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t, s) dt ds. \quad (3.4.4)$$

Вычислим интегралы соотношения (3.4.4) по отрезку  $[s_i, s_{i+1}]$ :

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \varepsilon(t_j, s) ds - \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varepsilon(t_{j+1}, s) ds = -(\hat{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_i^j) h. \quad (3.4.5)$$

При вычислении интегралов в (3.4.4) по времени  $[t_j, t_{j+1}]$  по теореме о среднем возьмем значение подинтегральной функции с весом  $\sigma$  в некоторой точке  $\tilde{t} \in [t_j, t_{j+1}]$ :

$$-\int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t, s_i) dt + \int_{t_j}^{t_{j+1}} W(t, s_{i+1}) dt = (W_{i+1}^{(\sigma)} - W_i^{(\sigma)}) h_\tau, \quad \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f dt ds \approx \bar{f}_i^{(\gamma)} h h_\tau, \quad (3.4.6)$$

где  $W_i^{(\sigma)} = \sigma W_i^{j+1} + (1-\sigma) W_i^j$ . Тогда с учетом (3.4.5), (3.4.6) получим

$$(\hat{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_i^j) / h_\tau = -(W_{i+1}^{(\sigma)} - W_i^{(\sigma)}) / h + \bar{f}_i^{(\gamma)} \quad \text{или} \quad \bar{\varepsilon}_{i,i} = -W_{s_i}^{(\sigma)} + \bar{f}_i^{(\gamma)}. \quad (3.4.7)$$

Построим теперь разностное уравнение для теплового потока, обращая основное внимание аппроксимации по переменной  $s$ . Запишем сначала (3.4.2) в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{W}{\Lambda(\rho, T)}. \quad (3.4.8)$$

Проинтегрируем (3.4.8) по отрезку  $[s_{i-1/2}, s_{i+1/2}]$ :

$$\int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \frac{\partial T}{\partial s} ds = - \int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \frac{W}{\Lambda(\rho, T)} ds, \quad \frac{T_{i+1/2} - T_{i-1/2}}{h} \approx -W_i \cdot \frac{1}{h} \int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \frac{ds}{\Lambda(\rho, T)_i}, \quad \text{откуда}$$

$$W_i = -a_i \bar{T}_{\bar{s}, i}, \quad a_i = \left[ \frac{1}{h} \int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \frac{ds}{\Lambda(s, t)} \right]^{-1}. \quad (3.4.9)$$

В зависимости от способа вычисления интеграла (3.4.9) коэффициент теплопроводности  $a_i$  допускает различные формы аппроксимации, например:

$$1) a_i = \Lambda_{i-1/2}, \quad 2) a_i = \Lambda_{i+1/2}, \quad 3) a_i = 0.5(\Lambda_{i-1/2} + \Lambda_{i+1/2}), \quad (3.4.10)$$

$$4) a_i = \left[ \frac{1}{h} \left( \int_{s_{i-1/2}}^{s_i} \frac{ds}{\Lambda(s,t)} + \int_{s_i}^{s_{i+1/2}} \frac{ds}{\Lambda(s,t)} \right) \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{h} \frac{h}{2} \left( \frac{1}{\Lambda_{i-1/2}} + \frac{1}{\Lambda_{i+1/2}} \right) \right]^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\Lambda_{i-1/2} \Lambda_{i+1/2}}{\Lambda_{i-1/2} + \Lambda_{i+1/2}}.$$

Аппроксимации типа 1) и 2) в ряде случаев могут полностью исказить решение задачи.

Пусть, например, при решении задачи о нагреве холодного тела используется аппроксимация 2),  $f \equiv 0$ , а зависимость  $\Lambda$  от температуры такова, что  $\Lambda|_{T=0} = 0$ . Если в ходе вычислений возникает ситуация, когда  $T_{i-1/2} \neq 0$ , а  $T_{i+1/2} = 0$ , то  $a_i = 0$ . Следовательно, по формуле (3.4.9)  $W_i = 0$ : возникает условие искусственной теплоизоляции в узле  $s = s_{i+1/2}$  и тепло перестает распространяться в область, расположенную справа от этого узла. Приближенное решение теряет физический смысл. Аналогичная ситуация может иметь место в задаче об охлаждении тела, если используется зависимость 1). Поэтому предпочтение отдается формулам типа 3) или 4).

Итак, окончательно для нелинейной задачи теплопроводности будем иметь консервативную разностную схему

$$\bar{\varepsilon}_{t,i} = -W_{s,i}^{(\sigma)} + \bar{f}_i^{(\gamma)}, \quad W_i^{(\sigma)} = -a_i^{(\sigma)} \bar{T}_{s,i}^{(\sigma)}, \quad \text{или} \quad C_V \bar{T}_{t,i} = -\left( a^{(\sigma)} \bar{T}_s^{(\sigma)} \right)_{s,i} + \bar{f}_i^{(\gamma)}, \quad (3.4.11)$$

где  $\sigma$  и  $\gamma$  – параметры схемы.

### 3.4.3. Метод сумматорных тождеств

Рассмотрим основные принципы МСТ на примере одномерной нелинейной ( $K = K(U, U')$ ) неоднородной стационарной задачи теплопроводности с граничными условиями II-го рода. В области  $D = \{s \in [0, 1]\}$

$$-(K \cdot U'_s)' = f(s), \quad 0 < s < 1, \quad (3.4.3.1)$$

$$-K \cdot U'_s(0) = q_0, \quad K \cdot U'_s(1) = q_1 \quad (3.4.3.2)$$

Здесь  $f(s)$  – заданная функция.

*Задача 1.* Найти функцию  $U \in W_2^2$ , удовлетворяющую уравнению (3.4.3.1) с граничными условиями (3.4.3.2).

Можно поставить другую задачу. Умножим (3.4.3.1) на  $v \in W_2^1$ , проинтегрируем по области  $D$  и с учетом граничных условий (3.4.3.2) получим **интегральное тождество**:

$$v(1)q_1 + v(0)q_0 - \int_0^1 Q v'_s ds + \int_0^1 f v ds = 0, \quad (3.4.3.3)$$

где  $Q = K \cdot U'_s$ .

*Задача 2.* Найти функцию  $U \in W_2^1$  – обобщенное решение задачи, удовлетворяющую интегральному уравнению (3.4.3.3) для любой функции  $v \in W_2^1$ .

*Замечание.* Интегральная формулировка ослабила требование на гладкость функции  $U$ , поэтому (3.4.3.3) называется *слабой формулировкой задачи*.

**Теорема.** Если существует решение задачи (3.4.3.1), (3.4.3.2), то существует решение задачи (3.4.3.3) и оба они совпадают. Обратное утверждение в общем случае не выполняется.

Построим на основе (3.4.3.3) разностную схему. Введем равномерную сетку

$$\omega_h = \{(s_i) : s_{i+1} = s_i + ih, i = \overline{0, N-1}, h = 1/N, s_0 = 0, s_N = h \cdot N = 1\}$$

Введем обозначения:

$$\tilde{h}_i = \begin{cases} h/2, & i = 0, i = N \\ h, & i = \overline{1, N-1} \end{cases},$$

$$[u, v] = \int_0^1 uv ds \approx \sum_{i=0}^N u_i v_i \tilde{h}_i = \{(u, v) + [u, v]\} / 2 - \text{формула трапеций}, \quad (3.4.3.4)$$

$$\text{где } (u, v) = \int_0^1 uv ds \approx \sum_{i=1}^N u_i v_i h - \text{формула левых прямоугольников},$$

$$[u, v) = \int_0^1 uv ds \approx \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i h - \text{формула правых прямоугольников}.$$

Заменяя в (3.4.3.3) интегралы квадратурными формулами (3.4.3.4), а производные – разностными соотношениями, перейдем теперь от интегрального к **сумматорному тождеству**:

$$u_0 q_1 + u_N q_0 - \frac{1}{2} \{ (Q^-, v_s^-) + (Q^+, v_s^+) \} + [f, v] = 0, \quad (3.4.3.5)$$

$$\text{или } u_0 q_1 + u_N q_0 - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^N Q_i^- \frac{v_i - v_{i-1}}{h} h + \sum_{i=0}^{N-1} Q_i^+ \frac{v_{i+1} - v_i}{h} h \right\} + \sum_{i=0}^N f_i v_i \tilde{h}_i = 0, \quad (3.4.3.6)$$

где верхние индексы (-) и (+) означают, что при аппроксимации  $Q = K \cdot U'_s$  производная  $U'_s$  заменена разностями назад  $u_s^-$  и вперед  $u_s^+$  соответственно.

Сеточная функция  $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$ , удовлетворяющая сумматорному тождеству для каждой сеточной пробной функции  $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)$  – приближенное решение задачи (3.4.3.1), (3.4.3.2).

Построим с помощью (3.4.3.5) систему алгебраических уравнений, выбирая в качестве  $v$  разностный аналог  $\delta$  – функции:

$$v(x_i - x_m) = \begin{cases} \tilde{h}_i^{-1}, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \quad (3.4.3.7)$$

Очевидно,  $v \rightarrow \infty, h \rightarrow 0$ , при этом площадь прямоугольника  $v(x_i - x_m) \cdot \tilde{h}_i^{-1} = 1$ .

1)  $i = 0$ : по определению (3.4.3.7) сеточная пробная функция  $v = (2/h, 0, \dots, 0)$ . Тогда тождество (3.4.3.6) примет вид:

$$\frac{2}{h} q_0 - \frac{1}{2} \left\{ -Q_1^- \frac{2}{h} - Q_0^+ \frac{2}{h} \right\} + f_0 \frac{2}{h} \cdot \frac{h}{2} = 0, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2} \{ Q_1^- + Q_0^+ \} = q_0 + \frac{h}{2} f_0 \quad (3.4.3.8)$$

– разностный аналог граничного условия при  $s = 0$ .

2)  $i = N$ : сеточная пробная функция  $v = (0, 0, \dots, 2/h)$ . Тождество (3.4.3.6) примет вид:

$$\frac{2}{h} q_1 - \frac{1}{2} \left\{ -Q_N^- \frac{2}{h} - Q_{N-1}^+ \frac{2}{h} \right\} + f_N \frac{2}{h} \cdot \frac{h}{2} = 0, \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2} \{ Q_N^- + Q_{N-1}^+ \} = q_1 + \frac{h}{2} f_N \quad (3.4.3.9)$$

– разностный аналог граничного условия при  $s = 1$ .

3) произвольный узел  $0 < i < N$ : сеточная пробная функция  $v = (0, 0, \dots, 1/h, \dots, 0, 0)$ .

Тождество (3.4.3.6) примет вид:

$$-\frac{1}{2} \left\{ Q_i^- \frac{1}{h} - Q_{i+1}^- \frac{1}{h} + Q_{i-1}^+ \frac{1}{h} - Q_i^+ \frac{1}{h} \right\} + f_i \frac{1}{h} \cdot h = 0, \quad \text{или}$$

$$\frac{1}{2} \{ Q_i^+ + Q_{i+1}^- \} - \frac{1}{2} \{ Q_{i-1}^+ + Q_i^- \} + h f_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (3.4.3.10)$$

– алгебраические уравнения во внутренних узлах сетки.

Итак, полученная система (3.4.3.8) – (3.4.3.10) содержит  $(N + 1)$  уравнение. Для нахождения сеточной функции  $u = (u_0, u_1, \dots, u_N)$  выразим  $Q_i^-$  и  $Q_i^+$  через значения этой функции.

$$-\frac{1}{2}\{K_1 u_{\bar{s},1} + K_0 u_{s,0}\} = -\frac{1}{2}\{K_1 + K_0\}u_{s,0} = -K_{1/2} \cdot u_{s,0} = q_0 + \frac{h}{2} f_0, \quad (3.4.3.11)$$

$$-\frac{1}{2}\{K_N u_{\bar{s},N} + K_{N-1} u_{s,N}\} = -\frac{1}{2}\{K_N + K_{N-1}\}u_{\bar{s},N} = -K_{N-1/2} \cdot u_{\bar{s},N} = q_1 + \frac{h}{2} f_N, \quad (3.4.3.12)$$

$$\frac{1}{2}\{K_i u_{s,i} + K_{i+1} u_{\bar{s},i+1}\} - \frac{1}{2}\{K_{i-1} u_{s,i-1} + K_i u_{\bar{s},i}\} + hf_i = \frac{1}{2}\{K_i + K_{i+1}\}u_{\bar{s},i+1} - \frac{1}{2}\{K_{i-1} + K_i\}u_{\bar{s},i} + hf_i = 0,$$

так что

$$K_{i+1/2} \cdot u_{\bar{s},i+1} - K_{i-1/2} \cdot u_{\bar{s},i} + hf_i = 0 \text{ или } (\bar{K} \cdot u_{\bar{s}})_{s,i} = -f_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.4.3.13)$$

*Замечание 1.* При построении РС с помощью МСТ аппроксимация граничных условий II-го (а также III-го рода) и уравнений внутри области получается автоматически и имеет одинаковый порядок  $O(h^2)$ . При этом не требовалось информации о виде зависимости  $K(U)$ , поэтому МСТ особенно удобен при построении РС для нелинейных задач.

*Замечание 2.* Полученные результаты без труда переносятся на нестационарные задачи. Например, если  $U'_t = (K \cdot U'_s)'_s + f(s)$ , то при этом достаточно положить  $F = f(s) - U'_t$  и в полученных выше соотношениях заменить  $f_i$  на  $F_i = f_i - u_{t,i}$ .

*Замечание 3.* Так же, как и ИИМ, МСТ может приводить к неконсервативным схемам. Причина неконсервативности также может быть обусловлена несогласованностью выбора временных слоев при построении разностных уравнений.

### 3.5. Принципы построения полностью консервативных разностных схем

При проведении расчетов на практике часто приходится использовать довольно грубые сетки. С другой стороны, при этом необходимо обеспечить приемлемую точность расчетов. Последнее требует обеспечения консервативности всех разностных уравнений. Одним из принципов построения таких схем является выявление условий, при которых в РС не возникают дисбалансные источники.

С этой целью рассмотрим многопараметрическое семейство разностных схем на равномерной шахматной сетке  $\omega_h = \{(s_i, t_j), (s_{i+1/2}, t_{j+1/2})\}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ ,  $s_0 = 0$ ,  $s_N = h \cdot N = M$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  и, опуская индексы, запишем:

$$v_t = -\bar{p}_s^{(\sigma_1)}, \quad (3.5.1)$$

$$x_t = v^{(\sigma_2)}, \quad (3.5.2)$$

$$\hat{W} = -\hat{K} \hat{\rho} \hat{T}_s, \quad (3.5.3)$$

$$\hat{x}_s = 1/\hat{\rho}, \quad (3.5.4_1)$$

$$\text{или } (1/\bar{\rho}) = v_s^{(\sigma_3)}, \quad (3.5.4_2)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = -\bar{p}^{(\sigma_4)} v_s^{(\sigma_5)} - W_s^{(\sigma)}, \quad (3.5.5)$$

$$\hat{\rho} = R \hat{\rho} \hat{T}, \quad (3.5.6)$$

$$\hat{\varepsilon} = C_v \hat{T}. \quad (3.5.7)$$

Найдем такие значения весов  $\sigma_m$ ,  $m = \overline{1,5}$ , при которых в схеме (3.5.1) – (3.5.7) не будут возникать дисбалансные источники.

### 3.5.1. Анализ законов сохранения энергии

Получим ЗСПЭ из ЗСВЭ (3.5.5). Умножим уравнение (3.5.1) на  $\nu^{(0.5)}$  ( $\nu^{(0.5)} \cdot \nu_t = -\nu^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s^{(\sigma_1)}$ ) и сложим с уравнением (3.5.5):

$$\left(\bar{\varepsilon} + \nu^2/2\right)_t = -\nu^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s^{(\sigma_1)} - \bar{p}^{(\sigma_4)} \nu_s^{(\sigma_5)} - W_s^{(\sigma)}. \quad (3.5.8)$$

По формуле (2.12.1) перехода от одного веса к другому преобразуем правую часть (3.5.8):

$$\begin{aligned} -W_s^{(\alpha)} - \nu^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s^{(\sigma_1)} - \left(\bar{p} + h_\tau(\sigma_4 - \sigma_1) \bar{p}_t\right) \left(\nu^{(0.5)} + (\sigma_5 - 0.5) h_\tau \nu_t\right)_s = \\ = -W_s^{(\alpha)} - \nu^{(0.5)} \cdot \bar{p}_s^{(\sigma_1)} - \bar{p}^{(\sigma_1)} \nu_s^{(0.5)} - \delta_\varepsilon(\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5), \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\text{где } \delta_\varepsilon = h_\tau \left( (\sigma_5 - 0.5) \bar{p}^{(\sigma_1)} \nu_{ts} + (\sigma_4 - \sigma_1) \bar{p}_t \nu_s^{(\sigma_5)} \right). \quad (3.5.10)$$

Применяя к (3.5.9) формулу разностного дифференцирования (2.11.1), из (3.5.8) получим:

$$\left(\bar{\varepsilon} + \nu^2/2\right)_t = -\left[\bar{p}^{(\sigma_1)} (-1) \nu^{(0.5)}\right]_s - W_s^{(\sigma)} - \delta_\varepsilon(\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5). \quad (3.5.11)$$

Очевидно, что на сетке ЗСПЭ (3.5.11) не будет нарушен, если  $\delta_\varepsilon(\sigma_1, \sigma_4, \sigma_5) = 0$  во всех узлах сетки. Отсюда

$$\sigma_5 = 0.5, \quad \sigma_1 = \sigma_4 = \alpha. \quad (3.5.12)$$

При выполнении этого условия РС обладает замечательным свойством: как и в непрерывном случае, на сетке выполняются ЗСПЭ и ЭСВЭ, причем независимо от шагов  $h$  и  $h_\tau$ .

Уравнение сохранения внутренней энергии в непрерывном случае имеет также другую форму (см. уравнение (3.1.13<sub>2</sub>)), которая получается с учетом уравнения неразрывности (3.1.11):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\partial W}{\partial s}. \text{ В сеточном соотношении (3.5.5) перейдем от веса } \sigma_5$$

к весу  $\sigma_3$ :

$$\bar{\varepsilon}_t = -\bar{p}^{(\alpha)} \nu_s^{(\sigma_3)} - W_s^{(\sigma)} = -\bar{p}^{(\alpha)} \nu_s^{(\sigma_3)} - \delta_\varepsilon^*(\sigma_3, \sigma_5) - W_s^{(\sigma)}, \quad (3.5.13)$$

$$\delta_\varepsilon^*(\sigma_3, \sigma_5) = (\sigma_5 - \sigma_3) h_\tau \nu_{ts}. \quad (3.5.14)$$

Следовательно, эта форма ЗСВЭ (3.1.13<sub>2</sub>) не будет нарушена, если источник (3.5.14)

$\delta_\varepsilon^*(\sigma_3, \sigma_5)$  равен нулю во всех узлах сетки. Следовательно,

$$\sigma_3 = \sigma_5. \quad (3.5.15)$$

### 3.5.2. Анализ уравнения неразрывности

Проверим теперь дискретные формы уравнения неразрывности (3.5.4<sub>2</sub>) и закона изменения объема (3.5.4<sub>1</sub>). По аналогии с дифференциальным случаем (см. параграф 3.1.2) на сетке будем иметь:

$$\left(1/\bar{\rho}\right)_t = \nu_s^{(\sigma_3)} = \nu_s^{(\sigma_2)} + (\sigma_3 - \sigma_2) h_\tau \nu_{ts} = x_{ts} + \delta_\rho(\sigma_3, \sigma_2), \quad (3.5.16)$$

$$\delta_\rho = (\sigma_3 - \sigma_2) h_\tau \nu_{ts}, \quad (3.5.17)$$

или  $(1/\bar{\rho} - x_s)_t = \delta_\rho(\sigma_3, \sigma_2)$ . Отсюда следует, что закон  $1/\bar{\rho} = x_s$  на сетке будет выполняться лишь тогда, когда  $\delta_\rho(\sigma_3, \sigma_2) = 0$ , т.е. при

$$\sigma_3 = \sigma_2. \quad (3.5.18)$$

Окончательно с учетом (3.5.12), (3.5.15) и (3.5.18) консервативная двухпараметрическая РС запишется в виде:

$$v_t = -\bar{p}_{\bar{s}}^{(\alpha)}, \quad x_t = v^{(0.5)}, \quad (1/\bar{\rho}) = v_s^{(0.5)}, \quad \bar{\varepsilon}_t = -\bar{p}^{(\alpha)} v_s^{(0.5)} - W_s^{(\sigma)}, \quad \hat{W}_i = -\hat{a}_i \hat{T}_{\bar{s},i}, \quad (3.5.19)$$

где  $\alpha$  и  $\sigma$  – свободные параметры.

*Определение.* Схемы, в которых выполняются все формы законов сохранения при отсутствии разностных дисбалансных источников, называются **полностью консервативными**.

Схема (3.5.19) при  $\alpha = \sigma = 0.5$  имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + h_\tau^2)$ , при других сочетаниях весов  $\alpha$  и  $\sigma$  ее точность  $O(h^2 + h_\tau)$ .

### 3.6. Методы решения разностных схем для изотермических задач газовой динамики

#### 3.6.1. Алгоритм явного решения неявной схемы ( $\alpha = \sigma = 0$ )

Рассмотрим разностную схему (3.5.19) при  $\alpha = \sigma = 0$  для задачи (3.1.11) – (3.1.18), в которой неявными являются все уравнения, кроме первого, и построим алгоритм ее явного решения. Он сводится к последовательному расчету по формулам:

$$v_i^{j+1} = v_i^j + h_\tau/h \cdot (p_{i+1/2}^{j+1/2} - p_{i-1/2}^{j+1/2}), \quad (3.6.1)$$

$$x_i^{j+1} = x_i^j + h_\tau/2 \cdot (v_i^{j+1} + v_i^j), \quad (3.6.2)$$

$$\rho_{i+1/2}^{j+3/2} = h/(x_{i+1}^{j+1} - x_i^{j+1}), \quad (3.6.3)$$

$$W_i^j = -a_i^j (T_{i+1/2}^j - T_{i-1/2}^j)/h, \quad (3.6.4)$$

$$T_{i+1/2}^{j+3/2} = T_{i+1/2}^{j+1/2} - h_\tau/(C_V h) p_{i+1/2}^{j+1/2} \cdot (v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1}) - h_\tau/(C_V h) (W_{i+1}^j - W_i^j), \quad (3.6.5)$$

$$p_{i+1/2}^{j+3/2} = R \cdot \rho_{i+1/2}^{j+3/2} \cdot T_{i+1/2}^{j+3/2}, \quad (3.6.6)$$

где  $v_i^j$ ,  $p_{i+1/2}^{j+1/2}$ ,  $x_i^j$ ,  $W_i^j$ ,  $\rho_{i+1/2}^{j+1/2}$ ,  $T_{i+1/2}^{j+1/2}$  – значения сеточных функций с нижнего временного слоя. Алгоритм прост в реализации, однако явная схема устойчива лишь при очень жестких требованиях на шаги сетки:

$$\left( \|p_i^j\|^2 + \|v_i^j\|^2 \right) \leq e^{-3C_0 T} \left( \|p_i^0\|^2 + \|v_i^0\|^2 \right), \quad h_\tau \leq C_0 \frac{h^2}{2a^2}, \quad (3.6.7)$$

где  $C_0$  – константа, не зависящая от шагов  $h$  и  $h_\tau$ ,  $a$  – характерная скорость распространения малых возмущений в газе (скорость звука). При расчетах по явной схеме происходит нарастание погрешности во времени.

### 3.6.2. Метод простой итерации при решении неявной схемы ( $\alpha = \sigma = 1$ )

Рассмотрим чисто неявную разностную схему (3.5.19) при  $\alpha = \sigma = 1$  для задачи (3.1.11) – (3.1.18), и построим итерационный алгоритм ее решения на основе неявной схемы (3.6.1) – (3.2.8), которая решается явным образом. В итерационных методах сеточное

решение ищется как предел:  $\hat{y} = \lim_{m \rightarrow \infty} y^m$ , где  $m$  – номер итерации. Тогда можно записать

следующую последовательность итерационных расчетов

$$v_i^{m+1} = v_i^j + h_\tau / h \cdot (p_{i+1/2}^m - p_{i-1/2}^m), \quad (3.6.8)$$

$$x_i^{m+1} = x_i^j + h_\tau / 2 \cdot (v_i^j + v_i^{m+1}), \quad (3.6.9)$$

$$\rho_{i+1/2}^{m+1} = h / (x_{i+1}^{m+1} - x_i^{m+1}), \quad (3.6.10)$$

$$T_{i+1/2}^{m+1} = T_{i+1/2}^{j+1/2} - h_\tau / (C_V h) p_{i+1/2}^m \cdot (v_{i+1}^{m+1} - v_i^{m+1}) + \\ + h_\tau / (C_V h) [a_{i+1} (T_{i+3/2}^{m+1} - T_{i+1/2}^{m+1}) / h - a_i (T_{i+1/2}^{m+1} - T_{i-1/2}^{m+1}) / h], \quad (3.6.11)$$

$$p_{i+1/2}^{m+1} = R \cdot \rho_{i+1/2}^{m+1} \cdot T_{i+1/2}^{m+1}, \quad (3.6.12)$$

где значения сеточных функций с предыдущей итерации обозначены верхним индексом  $m$ . В данном случае для нахождения температуры на каждой итерации требуется решить систему алгебраических уравнений (3.6.1) с трехдиагональной матрицей:

$$\frac{m}{A_i} \frac{m+1}{T_{i-1}} - \frac{m}{C_i} \frac{m+1}{T_i} + \frac{m}{B_i} \frac{m+1}{T_{i+1}} = -\frac{m}{F_i}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$\frac{m}{A_i} = a_i h_\tau / (C_V h^2), \quad \frac{m}{B_i} = a_{i+1} h_\tau / (C_V h^2), \quad \frac{m}{C_i} = 1 + \frac{m}{A_i} + \frac{m}{B_i}, \quad \frac{m}{F_i} = T_{i+1/2}^{j+1/2} - h_\tau / (C_V h) p_{i+1/2}^m \cdot (v_{i+1}^{m+1} - v_i^{m+1}).$$

Условие сходимости итерационного процесса по динамическим уравнениям

$$0 < a h_\tau / h < 2^{-1/2}.$$

### 3.6.3. Метод прогонки

Рассмотрим линейную систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_m y_{m-1} - C_m y_m + B_m y_{m+1} = -F_m, \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (3.6.13)$$

Система (3.6.13) решается методом прогонки. Сеточные функции  $y_m$  вычисляются по общей рекуррентной формуле

$$y_m = \alpha_{m+1} y_{m+1} + \beta_{m+1}, \quad m = \overline{1, N-1}, \quad (3.6.14)$$

где  $\alpha_m, \beta_m$  – неизвестные коэффициенты. С помощью (3.6.14) перепишем уравнения (3.6.13):

$$A_m [\alpha_m (\alpha_{m+1} y_{m+1} + \beta_{m+1}) + \beta_m] - C_m [\alpha_{m+1} y_{m+1} + \beta_{m+1}] + B_m y_{m+1} + F_m = \\ = [(A_m \alpha_m - C_m) \alpha_{m+1} + B_m] y_{m+1} + [(A_m \alpha_m - C_m) \beta_{m+1} + (A_m \beta_m + F_m)] = 0.$$

Это равенство выполняется, если равны нулю квадратные скобки, откуда для  $m = \overline{1, N-1}$  получим:

$$\alpha_{m+1} = B_m / (C_m - A_m \alpha_m), \quad \beta_{m+1} = (A_m \beta_m + F_m) / (C_m - A_m \alpha_m) \quad (3.6.15)$$



Из аппроксимации граничных условий имеем:

$$-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0, \quad A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N$$

$$\text{или } y_0 = \kappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \nu_2, \quad (3.6.16)$$

$$\text{где } \nu_1 = F_0 / C_0, \quad \nu_2 = F_N / C_N, \quad \kappa_1 = B_0 / C_0, \quad \kappa_2 = A_N / C_N.$$

Расчет начинается при  $\alpha_1 = \kappa_1$ ,  $\beta_1 = \nu_1$  с **прямой прогонки** по формулам (3.6.15), а затем по формулам (3.6.14) выполняется **обратная прогонка** при  $y_N = (\nu_2 + \kappa_2 \beta_N) / (1 - \kappa_2 \alpha_N)$ .

Параметры задачи должны удовлетворять условиям

$$A_m > 0, \quad B_m > 0, \quad C_m \geq A_m + B_m, \quad 0 \leq \kappa_1, \kappa_2 \leq 1, \quad \kappa_1 + \kappa_2 < 2,$$

обеспечивающим разрешимость и устойчивость метода.

### 3.6.4. Метод Ньютона линеаризации нелинейных систем алгебраических уравнений

Пусть  $f(x) = 0$  – нелинейное уравнение,  $x_0$  – его корень. Если в окрестности точки  $x_0$  производные  $f'_x$  и  $f''_{xx}$  непрерывны, то по формуле Тейлора

$$f(x_0) = 0 = f(x + (x_0 - x)) \approx f(x) + f'_x(x) \cdot (x_0 - x).$$

Отсюда получается итерационный процесс ( $m$  – номер итерации) вычисления корня:

$$(x - x^m) \cdot f'_x(x^m) = -f(x^m) \quad (3.6.17)$$

$$\text{или, обозначив } \delta x = x - x^m: \quad \delta x \cdot f'_x(x^m) = -f(x^m). \quad (3.6.18)$$

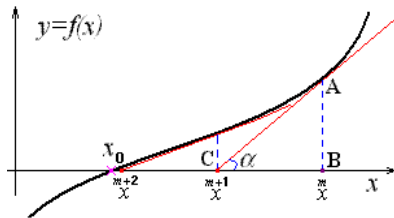


Рис.3.6.1

*Геометрический смысл (3.6.18).* По значению производной  $f'_x(x^m)$  строится касательная к функции  $f(x)$  в точке  $x^m$  (рис.3.6.1). Ее пересечение с осью  $Ox$  дает точку  $x^{m+1}$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие  $|\delta x| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность вычисления корня  $x_0$ . Действительно, из  $\triangle ABC$ :

$$BC \cdot \operatorname{tg} \alpha = (x - x^m) \cdot \operatorname{tg} \alpha = AB = f(x^m), \quad \operatorname{tg} \alpha = f'_x(x^m), \quad \text{откуда следует соотношение (3.6.18).}$$

Рассмотрим теперь систему  $n$  нелинейных алгебраических уравнений (3.6.19). Требуется найти ее решение  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ . По аналогии со случаем функции одной переменной линеаризация по методу Ньютона приводит к линейной системе:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (3.6.19)$$

$$\begin{cases} \delta x_1 \cdot f'_{1,x_1} + \delta x_2 \cdot f'_{1,x_2} + \dots + \delta x_n \cdot f'_{1,x_n} = -f_1 \\ \dots \\ \delta x_1 \cdot f'_{n,x_1} + \delta x_2 \cdot f'_{n,x_2} + \dots + \delta x_n \cdot f'_{n,x_n} = -f_n \end{cases} \quad (3.6.20)$$

Решение системы (3.6.20) может быть найдено, например, методом Гаусса. Запишем ее в матрично-векторном виде

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{x} = -\mathbf{F}, \quad \mathbf{A} = \left\{ f'_{j,x_k} \right\}_{k,j=1}^m, \quad \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}. \quad (3.6.21)$$

Здесь матрица  $\mathbf{A}$  и вектор правой части вычисляются по значениям с предыдущей  $m$ -ой итерации.

### 3.6.5. Решение динамических уравнений методом Ньютона

Применим метод Ньютона для построения итерационного алгоритма решения нелинейной системы алгебраических уравнений (3.5.6), (3.5.7), (3.5.19), описывающих движение газа. Запишем ее сначала в виде (3.6.19):

$$\begin{cases} f_1(\hat{v}_i, \hat{p}_{i+1/2}, \hat{p}_{i-1/2}) = h_\tau [v_{t,i} - \bar{p}_{s,i}^{(\alpha)}] = 0, \\ f_2(\hat{x}_i, \hat{v}_i) = h_\tau [x_{t,i} - v_i^{(0.5)}] = 0, \\ f_3(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \hat{\rho}_{i+1/2}) = [\hat{x}_{s,i} - 1/\hat{\rho}_i] = 0, \\ f_4(\hat{p}_{i+1/2}, \hat{\rho}_{i+1/2}, T_{i+1/2}) = \hat{p}_{i+1/2} - \mathcal{P}(\hat{\rho}_{i+1/2}, T_{i+1/2}) = 0, \end{cases} \quad (3.6.22_1)$$

или в индексной форме

$$\begin{cases} f_1(\hat{v}_i, \hat{p}_{i+1/2}, \hat{p}_{i-1/2}) = \hat{v}_i - v_i + \frac{\alpha h_\tau}{h} (\hat{p}_{i+1/2} - \hat{p}_{i-1/2}) + \frac{\alpha h_\tau (1-\alpha)}{h} (p_{i+1/2} - p_{i-1/2}) = 0, \\ f_2(\hat{x}_i, \hat{v}_i) = \hat{x}_i - x_i + \frac{h_\tau}{2} (\hat{v}_i + v_i) = 0, \\ f_3(\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \hat{\rho}_{i+1/2}) = \frac{\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i}{h} - 1/\hat{\rho}_{i+1/2} = 0, \\ f_4(\hat{p}_{i+1/2}, \hat{\rho}_{i+1/2}, T_{i+1/2}) = \hat{p}_{i+1/2} - \mathcal{P}(\hat{\rho}_{i+1/2}, T_{i+1/2}) = 0, \end{cases} \quad (3.6.22_2)$$

полагая температуру известной функцией. Применение метода Ньютона дает:

$$\begin{cases} \delta v_i + \frac{\alpha h_\tau}{h} (\delta p_{i+1/2} - \delta p_{i-1/2}) = -f_{1,i}, \\ \delta x_i - \frac{h_\tau}{2} \delta v_i = -f_{2,i}, \\ \frac{\delta x_{i+1} - \delta x_i}{h} + \rho_{i+1/2}^{-2} \delta \rho_{i+1/2} = -f_{3,i}, \\ \delta p_{i+1/2} - \mathcal{P}'(\rho_{i+1/2}^m) \cdot \delta \rho_{i+1/2} = -f_{4,i}. \end{cases} \quad (3.6.22_3)$$

Для удобства дальнейшего анализа запишем эту систему в безындексной форме:

$$\begin{cases} \delta v + \alpha h_\tau \cdot \delta \bar{p}_s = -f_1, \\ \delta x - 0.5 h_\tau \cdot \delta v = -f_2, \\ \delta x_s + \bar{\rho}^{-2} \cdot \delta \bar{\rho} = -f_3, \\ \delta \bar{p} - \mathcal{P}'(\bar{\rho}) \cdot \delta \bar{\rho} = -f_4. \end{cases} \quad (3.6.22_4)$$

Решим систему уравнений (3.6.224) методом исключения, сведя ее к одному уравнению относительно  $\delta v$ . Во-первых,

$$\delta x = 0.5h_\tau \cdot \delta v - f_2. \quad (3.6.23)$$

Далее,

$$\delta \bar{\rho} = -\bar{\rho}^2 \cdot (\delta x_s + f_3) = -\bar{\rho}^2 \cdot (0.5h_\tau \cdot \delta v - f_2)_s - \bar{\rho}^2 f_3 = -0.5h_\tau \bar{\rho}^2 \cdot \delta v_s - F_3, \quad (3.6.24)$$

где  $F_3 = \bar{\rho}^2 \cdot (f_3 - f_{2,s})$ . Теперь используем четвертое уравнение системы (3.6.22<sub>4</sub>):

$$\delta \bar{p} = \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta \bar{\rho} - f_4 = -\mathcal{P}'_\rho \cdot (0.5h_\tau \bar{\rho}^2 \cdot \delta v_s + F_3) - f_4 = -0.5h_\tau \bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta v_s - F_4, \quad (3.6.25)$$

$$F_4 = \mathcal{P}'_\rho F_3 + f_4.$$

Наконец, подставляя выражение для  $\delta \bar{p}$  в первое уравнение системы (3.6.22<sub>4</sub>), получим уравнение, содержащее только сеточную функцию  $\delta v$ :

$$\delta v - \alpha h_\tau \cdot (0.5h_\tau \bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta v_s + F_4)_s = -f_1, \quad \delta v - 0.5\alpha h_\tau^2 \cdot (\bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta v_s)_s = F, \quad (3.6.26)$$

где  $F = -f_1 + \alpha h_\tau (F_4)_s$ . В индексной форме уравнение (3.6.26) будет иметь вид:

$$A_i \cdot \delta v_{i-1} - C_i \cdot \delta v_i + B_i \cdot \delta v_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (3.6.27)$$

$$A_i = 0.5\alpha (h_\tau/h)^2 \bar{\rho}_{i-1}^2 \bar{\mathcal{P}}'_{\rho, i-1}, \quad B_i = 0.5\alpha (h_\tau/h)^2 \bar{\rho}_i^2 \bar{\mathcal{P}}'_{\rho, i} = A_{i+1}, \quad C_i = 1 + A_i + B_i.$$

Эта система уравнений на каждой итерации решается методом прогонки относительно  $\delta v_i^{m+1}$ , после чего по формулам (3.6.25), (3.6.24), (3.6.23) вычисляются приращения  $\delta \bar{p}_i^{m+1}$ ,  $\delta \bar{\rho}_i^{m+1}$  и  $\delta x_i^{m+1}$ . Затем по общей формуле  $y_i^{m+1} = y_i^m + \delta y_i^{m+1}$  определяются сеточные функции  $v_i^{m+1}$ ,  $\bar{p}_i^{m+1}$ ,  $\bar{\rho}_i^{m+1}$  и  $x_i^{m+1}$ . Итерации продолжаются до тех пор, пока с заданной точностью  $\varepsilon$  не выполнится условие типа

$$\max_{0 \leq i \leq N} \left\{ |\delta v_i^{m+1}|, |\delta x_i^{m+1}|, |\delta \bar{\rho}_i^{m+1}|, |\delta \bar{p}_i^{m+1}| \right\} < \varepsilon. \quad (3.6.28)$$

### 3.6.6. Метод разделения процессов ("динамические" и "тепловые" уравнения). Внутренний и внешний итерационный процессы

Для решения систем уравнений, описывающих несколько физических процессов, применяется метод разделения явления по процессам. Следуя этому принципу, в рассматриваемой задаче о неизотермическом течении газа выделим две группы уравнений:

1) «динамическая группа» (искомые функции  $v$ ,  $p$ ,  $x$ ,  $\rho$ ): уравнение неразрывности, закон сохранения количества движения, уравнение траекторий движения частиц и уравнение состояния  $p = \mathcal{P}(\rho, T)$ ;

2) «тепловая группа» (искомые функции  $T$ ,  $W$ ): закон сохранения энергии, закон теплопроводности Фурье, уравнение состояния  $\varepsilon = \zeta(\rho, T)$  и зависимость коэффициента теплопроводности  $a = \mathcal{A}(\rho, T)$ .

Уравнения каждой группы решаются отдельно итерационными методами. В частности, применение метода Ньютона для расчета динамического процесса изложено в предыдущем параграфе. Рассмотрим теперь алгоритм решения общей неизотермической задачи. В данном случае первые три уравнения системы (3.6.22<sub>1</sub>) остаются в силе, в четвертом урав-

нении вместо функции  $T_{i+1/2}$  следует взять искомую температуру на верхнем временном слое  $\hat{T}_{i+1/2}$ :  $f_4(\hat{p}_{i+1/2}, \hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = \hat{p}_{i+1/2} - \mathcal{P}(\hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = 0$ . (3.6.29)

Эта «динамическая» группа дополняется «тепловыми» уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_5(\hat{\varepsilon}_{i+1/2}, \hat{\nu}_i, \hat{\nu}_{i+1}, \hat{p}_{i+1/2}, \hat{W}_i, \hat{W}_{i+1}) = h_\tau [\bar{\varepsilon}_{\tau,i} + \bar{p}_i^{(\alpha)} \nu_{s,i}^{(0.5)} + W_{s,i}^{(\sigma)}] = 0, \\ f_6(\hat{\varepsilon}_{i+1/2}, \hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = \hat{\varepsilon}_{i+1/2} - \zeta(\hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = 0, \\ f_7(\hat{W}_i, \hat{a}_i, \hat{T}_{i+1/2}, \hat{T}_{i-1/2}) = \hat{W}_i + \hat{a}_i \hat{T}_{\bar{s},i} = 0, \\ f_8(\hat{a}_i, \hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = \hat{a}_i - \mathcal{A}(\hat{\rho}_{i+1/2}, \hat{T}_{i+1/2}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.6.30_1)$$

Применим метод Ньютона к нелинейным уравнениям (3.6.22<sub>1</sub>), (3.6.29), (3.6.30<sub>1</sub>). В безындексной форме линеаризованная система будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \nu + \alpha h_\tau \cdot \delta \bar{p}_s = -f_1, \\ \delta x - 0.5 h_\tau \cdot \delta \nu = -f_2, \\ \delta x_s + \bar{\rho}^{-2} \cdot \delta \bar{\rho} = -f_3, \\ \delta \bar{p} - \mathcal{P}'_\rho(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{\rho} - \mathcal{P}'_T(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{T} = -f_4, \\ \delta \bar{\varepsilon} + \alpha h_\tau \nu_s \cdot \delta \bar{p} + 0.5 h_\tau \bar{p}^{(\alpha)} \cdot \delta \nu_s + \sigma h_\tau \cdot \delta W_s = -f_5, \\ \delta \bar{\varepsilon} - \zeta'_\rho(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{\rho} - \zeta'_T(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{T} = -f_6, \\ \delta W + \bar{T}_s \cdot \delta a + a \cdot \delta \bar{T}_s = -f_7, \\ \delta a - \mathcal{A}'_\rho(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{\rho} - \mathcal{A}'_T(\bar{\rho}, \bar{T}) \cdot \delta \bar{T} = -f_8, \end{array} \right. \quad (3.6.31)$$

Выражая  $\delta x = 0.5 h_\tau \cdot \delta \nu - f_2$ ,  $\delta \bar{\rho} = -0.5 h_\tau \bar{\rho}^2 \cdot \delta \nu_s - F_3$  и  $\delta \bar{p} = -0.5 h_\tau \bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta \nu_s + \bar{\mathcal{P}}'_T \cdot \delta \bar{T} - F_4$  через приращения  $\delta \nu$  и  $\delta \bar{T}$ , из первого уравнения (3.6.31) получим

$$\delta \nu - 0.5 \alpha h_\tau^2 \cdot (\bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta \nu_s)_s + \alpha h_\tau (\bar{\mathcal{P}}'_T \cdot \delta \bar{T})_s = F \quad (3.6.33)$$

или в индексной форме

$$A_i \cdot \delta \nu_{i-1} - C_i \cdot \delta \nu_i + B_i \cdot \delta \nu_{i+1} + D_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1} - E_i \cdot \delta \bar{T}_i = -F_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (3.6.34)$$

где  $D_i = \alpha h_\tau \bar{\mathcal{P}}'_{T,i-1}$ ,  $E_i = \alpha h_\tau \bar{\mathcal{P}}'_{T,i} = D_{i+1}$ . Из (3.6.34) видно, что динамический и тепловой процессы взаимосвязаны.

Перейдем теперь к анализу системы (3.6.32). Подставим  $\delta a = \mathcal{A}'_\rho \cdot \delta \bar{\rho} + \mathcal{A}'_T \cdot \delta \bar{T} - f_8$  в третье уравнение (3.6.32):  $\delta W = -(\bar{T}_s \mathcal{A}'_\rho) \cdot \delta \bar{\rho} - (\bar{T}_s \mathcal{A}'_T) \cdot \delta \bar{T} - a \cdot \delta \bar{T}_s - F_7$ , где  $F_7 = f_7 - \bar{T}_s f_8$ . Исключим из первого уравнения (3.6.32) с помощью полученного соотношения для  $\delta W$  и выражения  $\delta \bar{\varepsilon} = \zeta'_\rho \cdot \delta \bar{\rho} + \zeta'_T \cdot \delta \bar{T} - f_6$  приращения теплового потока и внутренней энергии:

$$\zeta'_\rho \cdot \delta \bar{\rho} + \zeta'_T \cdot \delta \bar{T} + \alpha h_\tau \nu_s \cdot \delta \bar{p} + 0.5 h_\tau \bar{p}^{(\alpha)} \cdot \delta \nu_s - \sigma h_\tau \cdot [(\bar{T}_s \mathcal{A}'_\rho) \cdot \delta \bar{\rho} + (\bar{T}_s \mathcal{A}'_T) \cdot \delta \bar{T} + a \cdot \delta \bar{T}_s]_s = -f_5 + f_6 + \sigma h_\tau F_{7,s}. \quad (3.6.35)$$

Теперь подставим в (3.6.35)  $\delta \bar{\rho} = -0.5 h_\tau \bar{\rho}^2 \cdot \delta \nu_s - F_3$  и  $\delta \bar{p} = -0.5 h_\tau \bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho \cdot \delta \nu_s + \bar{\mathcal{P}}'_T \cdot \delta \bar{T} - F_4$ :

$$\begin{aligned} & [\zeta'_T + \alpha h_\tau \nu_s \cdot \bar{\mathcal{P}}'_T] \cdot \delta \bar{T} - \sigma h_\tau \cdot [(\bar{T}_s \mathcal{A}'_T) \cdot \delta \bar{T}]_s - \sigma h_\tau \cdot [a \cdot \delta \bar{T}_s]_s + 0.5 \sigma h_\tau^2 [(\bar{\rho}^2 \bar{T}_s \mathcal{A}'_\rho) \cdot \delta \nu_s]_s + \\ & + h_\tau / 2 (\bar{p}^{(\alpha)} - \bar{\rho}^2 \zeta'_\rho - \alpha h_\tau \nu_s \bar{\rho}^2 \mathcal{P}'_\rho) \cdot \delta \nu_s = \Phi, \end{aligned} \quad (3.6.36)$$

где  $\Phi = -f_5 + f_6 + \sigma h_\tau F_{7,S} + (\zeta'_\rho - \sigma h_\tau \bar{T}_S \mathcal{A}'_\rho) F_3 + \alpha h_\tau \nu_S F_4$ . В индексной форме

$$\{D'_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1} - E'_i \cdot \delta \bar{T}_i + G'_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1}\} + \{A'_i \cdot \delta \nu_{i-1} - C'_i \cdot \delta \nu_i + B'_i \cdot \delta \nu_{i+1} + \Omega'_i \cdot \delta \nu_{i+2}\} = -\Phi_i, \quad (3.6.37)$$

где коэффициенты  $D'_i$ ,  $E'_i$ ,  $G'_i$ ,  $A'_i$ ,  $C'_i$ ,  $B'_i$ ,  $\Omega'_i$  и правая часть  $\Phi_i$  нетрудно записать на основе соотношения (3.6.36). Из (3.6.37) также видна взаимосвязь температуры с характеристиками динамического процесса.

Для решения линеаризованных систем (3.6.34) и (3.6.37) применим метод разделения по процессам.

**1 внутренний цикл итераций.** В уравнениях 1-ой группы будем считать известным пространственное распределение температуры. Тогда итерационный расчет динамических функций сводится к решению методом прогонки системы

$$A_i \cdot \delta \nu_{i-1} - C_i \cdot \delta \nu_i + B_i \cdot \delta \nu_{i+1} = -F_i - D_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1} + E_i \cdot \delta \bar{T}_i, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3.6.38)$$

*Замечание.* При первом выполнении итерационного процесса (3.6.38) в качестве начального приближения зададим значения сеточных функций с нижнего  $j$ -го временного слоя. При  $m=0$ :  $\nu_i^0 = \nu_i^j$ ,  $\bar{p}_i^0 = \bar{p}_i^j$ ,  $\bar{\rho}_i^0 = \bar{\rho}_i^j$ ,  $x_i^0 = x_i^j$ . При  $l=0$ :  $\bar{T}_i^0 = \bar{T}_i^j$ .

Пусть  $M$  – номер итерации, на которой достигается заданная точность  $\varepsilon_1 \ll 1$  вычислений сеточных функций  $\nu_i^{m+1}$ ,  $\bar{p}_i^{m+1}$ ,  $\bar{\rho}_i^{m+1}$ ,  $x_i^{m+1}$ , прекращается выполнение итерационного процесса по  $m$  (при **фиксированном** распределении температуры) и начинается

**2 внутренний цикл итераций** – аналогичный расчет распределение температуры:

$$\left\{ D'_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1} - E'_i \cdot \delta \bar{T}_i + G'_i \cdot \delta \bar{T}_{i-1} \right\} = -\Phi_i - \left\{ A'_i \cdot \delta \nu_{i-1} - C'_i \cdot \delta \nu_i + B'_i \cdot \delta \nu_{i+1} + \Omega'_i \cdot \delta \nu_{i+2} \right\}. \quad (3.6.39)$$

При этом правая часть в уравнениях (3.6.39) вычисляется по найденным значениям динамических функций  $\nu_i^M$ ,  $\bar{p}_i^M$ ,  $\bar{\rho}_i^M$ ,  $x_i^M$  на первом цикле. Итерационный процесс (3.6.39) по  $k$  (при **фиксированных** распределениях функций  $\nu_i^M$ ,  $\bar{p}_i^M$ ,  $\bar{\rho}_i^M$ ,  $x_i^M$ ) продолжается до достижения заданной точности  $\varepsilon_2 \ll 1$  на некоторой итерации с номером  $K$ . В результате найдены значения  $\bar{T}_i^K$ .

**Внешний итерационный процесс** – переход с  $j$ -го на  $(j+1)$ -ый временной слой – объединяет оба внутренних цикла. После вычисления сеточной функции  $\bar{T}_i^K$  переменная внешнего цикла увеличивается на единицу ( $l=l+1$ ) и заново последовательно выполняются внутренние циклы, причем при решении системы (3.6.38) используются новый профиль температуры, т.е.  $\bar{T}_i^l = \bar{T}_i^K$  при вычислении правой части (3.6.38), а в качестве начального приближения при  $m=0$ :  $\nu_i^0 = \nu_i^M$ ,  $\bar{p}_i^0 = \bar{p}_i^M$ ,  $\bar{\rho}_i^0 = \bar{\rho}_i^M$ ,  $x_i^0 = x_i^M$ .

На некоторой итерации с номером  $L$  при достижении требуемой точности  $\varepsilon$  внешний цикл заканчивается. В качестве значений сеточных функций  $\nu_i^{j+1}$ ,  $\bar{p}_i^{j+1}$ ,  $\bar{\rho}_i^{j+1}$ ,  $x_i^{j+1}$ ,  $\bar{T}_i^{j+1}$  на  $(j+1)$ -м временном слое принимаются найденные при  $l=L$  распределения  $\nu_i^M$ ,  $\bar{p}_i^M$ ,  $\bar{\rho}_i^M$ ,  $x_i^M$  и  $\bar{T}_i^K$ .

## Тема 4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для описания фильтрационных потоков воспользуемся моделью радиального пласта с учетом упругоэластичности поровой среды и фильтрующейся жидкости. При этом на стенке скважины, вскрывающей пласт, должны выполняться условия сопряжения решений соответствующих задач в скважине и в области фильтрации, выражающие непрерывность давления и потока жидкости:

$$P|_{z=0} = P_{zab}(t), \quad Q_n(t) = Q|_{r=R_o}(t) = -\frac{2\pi k(P_{zab}(t))h_n}{\mu} R_o \left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=R_o} \quad (4.1)$$

где  $P_{zab}(\tau)$  - давление на открытом забое скважины; абсолютная проницаемость  $k(P_{zab}(t))$  в общем случае зависит от величины давления.

Рассмотрим наиболее простой случай однородного пласта, когда процесс фильтрации описывается известным линейным уравнением пьезопроводности. Оно имеет аналитическое решение, которое позволяет в явной форме записать соотношение (4.1) при  $k = const$ , определяющее объемный расход  $Q_n(\tau)$  жидкости из пласта в скважину или из скважины в пласт (в зависимости от знака перепада давления между пластом и скважиной)

$$Q_n(\tau) = \frac{2\pi kh_n}{\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (P_n^o - P_{z=0}(s)) \Psi \left( \frac{\pi K}{R_o^2} (\tau - s) \right) ds \quad (4.2)$$

$$\Psi(\tau) = 1/\ln(1 + \sqrt{\tau}) \quad (4.3)$$

Здесь  $\Psi(\tau)$  - функция радиального притока к забою скважины из пласта при упругом режиме фильтрации. Перепишем уравнение (4.2) в виде

$$\Theta = \int_0^t \mathbf{P}(s) \Psi [K_\kappa (t_{j+1} - s)] ds. \quad (4.4)$$

**Численное решение интегрального уравнения.** Остановимся теперь на построении сеточного представления интегрального члена в соотношении (4.4). Запишем этот интеграл в виде

$$\Theta^{j+1} = \sum_{i=0}^j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{P}(s) \Psi [K_\kappa (t_{j+1} - s)] ds \quad (4.5)$$

и для обеспечения порядка  $O(h_\tau^2)$  возьмем линейную интерполяцию искомой подынтегральной функции по ее значениям  $\mathbf{P}^i$  и  $\mathbf{P}^{i+1}$  на каждом интервале разбиения  $[t_i, t_{i+1}]$ :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}^i + (t - t_i) \frac{\mathbf{P}^{i+1} - \mathbf{P}^i}{h_\tau}$$

Подставим это выражение в точное равенство (4.5) и вычислим интегралы под знаком суммы, сделав замену переменной интегрирования  $u = (s - t_i)/h_\tau$ :

$$\begin{aligned} \Theta^{j+1} &= \sum_{i=0}^j \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \mathbf{P}^i + (\mathbf{P}^{i+1} - \mathbf{P}^i) \frac{s - t_i}{h_\tau} \right\} \cdot \Psi \left( K_\kappa [t_{j+1} - s] \right) ds = \\ &= h_\tau \sum_{i=0}^j \int_0^1 \left\{ \mathbf{P}^i + (\mathbf{P}^{i+1} - \mathbf{P}^i) u \right\} \cdot \Psi \left( K_\kappa [t_{j-i+1} - h_\tau u] \right) du = \\ &= h_\tau \sum_{i=0}^j \mathbf{P}^i \int_0^1 (1-u) \cdot \Psi \left( K_\kappa [t_{j-i} + h_\tau (1-u)] \right) du + h_\tau \sum_{i=0}^j \mathbf{P}^{i+1} \int_0^1 u \cdot \Psi \left( K_\kappa [t_{j-i+1} - h_\tau u] \right) du. \end{aligned}$$

С учетом того, что  $\mathbf{P}^0 = 0$ , сделав замену переменной  $v = 1 - u$  в интегралах первой суммы и изменив индекс суммирования во второй сумме, перепишем полученное выражение для  $\Theta^{j+1}$  в виде:

$$\begin{aligned}\Theta^{j+1} &= h_\tau \sum_{i=1}^j \mathbf{P}^i \int_0^1 v \cdot \Psi(K_\kappa [t_{j-i} + h_\tau v]) dv + h_\tau \sum_{k=1}^{j+1} \mathbf{P}^k \int_0^1 u \cdot \Psi(K_\kappa [t_{j-k+2} - h_\tau u]) du = \\ &= h_\tau \sum_{i=1}^j \mathbf{P}^i \int_0^1 v \left\{ \Psi(K_\kappa [t_{j-i} + h_\tau v]) + \Psi(K_\kappa [t_{j-i+2} - h_\tau v]) \right\} dv + \mathbf{P}^{j+1} h_\tau \int_0^1 u \cdot \Psi(K_\kappa h_\tau (1-u)) du.\end{aligned}$$

После несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned}\Theta^{j+1} &= \mathbf{P}^{j+1} h_\tau \int_0^1 (1-v) \cdot \Psi(K_\kappa h_\tau v) dv + \\ &+ h_\tau \sum_{i=1}^j \mathbf{P}^i \int_0^1 (1-u) \left\{ \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} + h_\tau u]) + \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} - h_\tau u]) \right\} du.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Введя обозначения:

$$A = K_\Psi \int_0^1 (1-v) \Psi(K_\kappa h_\tau v) dv, \quad \Omega_j = \sum_{i=1}^j \mathbf{P}^i \cdot I_{j-i+1}\quad (4.7)$$

$$I_{j-i+1} = K_\Psi \int_0^1 (1-u) \left\{ \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} + h_\tau u]) + \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} - h_\tau u]) \right\} du\quad (4.8)$$

получим окончательно:

$$\Theta^{j+1} = \mathbf{P}^{j+1} h_\tau \cdot A - h_\tau \Omega_j\quad (4.9)$$

Вычисление определенных интегралов в выражениях для  $A$  (4.7) и  $I_{j-i+1}$  (4.8) требует применения специальных приемов, поскольку в силу специфики функции  $\Psi(t)$  (10) подынтегральные функции в этих интегралах имеют особенности при  $v = 0$  и  $u = 1$  соответственно. Можно показать, что при  $u \rightarrow 1$  предел подынтегральной функции (31) равен нулю, так что особенность во втором интеграле устраняется переопределением этой функции

$$F_{j-i+1}(u) = \begin{cases} (1-u) \left\{ \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} + h_\tau u]) + \Psi(K_\kappa [t_{j-i+1} - h_\tau u]) \right\}, & u \neq 1 \\ 0, & u = 1 \end{cases}$$

Тогда интеграл (4.8) можно представить в виде:

$$I_{j-i+1} = K_\Psi \int_0^1 F(t_{j-i+1}, u) du\quad (4.10)$$

Для устранения особенности интеграла (4.7) воспользуемся асимптотикой функции  $\Psi(t)$  (4.3) при малых значениях  $v$  и в конечном итоге, переопределив подынтегральную функцию (4.7), будем иметь:

$$A = K_\Psi \int_0^1 (1-v) \cdot \Phi(v) dv + \frac{4}{3} K_\Psi (K_\kappa h_\tau)^{-1/2}\quad (4.11)$$

$$\text{где } \Phi(v) = \begin{cases} \Psi(K_\kappa h_\tau v) - 1/\sqrt{K_\kappa h_\tau v}, & v > 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases}\quad (4.12)$$

Теперь для приближенного вычисления интегралов  $I_{j-i+1}$  (4.10) и коэффициента  $A$  (4.11) можно воспользоваться стандартными методами численного интегрирования, например, методом Симпсона. Отметим, что коэффициент  $A$  не зависит от номера вре-

менного слоя и его достаточно определить один раз, в то время как расчет значений интегралов  $I_{j-i+1}$  необходимо выполнять на каждом временном слое.

Схема решения нелинейного уравнения пьезопроводности. Расчет гидродинамических характеристик жидкостного потока в нефтяной скважине с учетом взаимосвязи с пластом.



**Тема 5. ЭКОНОМИЧНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ  
РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

Рассмотрим двумерную линейную ( $K = const$ ) задачу теплопроводности на прямоугольнике  $D = \{x \in [0, a], y \in [0, b]\}$  со сторонами  $a$  и  $b$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t < T, \quad (5.1)$$

с граничными условиями I-го рода

$$U(0, y, t) = \mu_1(y, t), \quad U(a, y, t) = \mu_2(y, t), \quad (5.2)$$

$$U(x, 0, t) = \nu_1(x, t), \quad U(x, b, t) = \nu_2(x, t), \quad (5.3)$$

и начальным условием

$$U(x, y, 0) = \mu_0(x, y). \quad (5.4)$$

Здесь  $f(x, y, t)$  – правая часть уравнения,  $\mu_1(y, t)$ ,  $\mu_2(y, t)$ ,  $\nu_1(x, t)$ ,  $\nu_2(x, t)$ ,  $\mu_0(x, y)$  – заданные функции.

Введем равномерную сетку:

$$D_h = \left\{ (x_i, y_k, t_j), i = \overline{0, N_x}; k = \overline{0, N_y}; j = \overline{0, N_t}; h_x = a/N_x; h_y = b/N_y; h_t = T/N_t \right\},$$

где  $x_i = ih_x$ ,  $y_k = kh_y$ ,  $t_j = jh_t$  и  $h_x$ ,  $h_y$ ,  $h_t$  – узлы и шаги сетки по переменным  $x$ ,  $y$  и  $t$ .  
Аппроксимируем задачу (5.1) – (5.5) разностной схемой с весом  $\sigma$ :

$$\frac{U_{ik}^{j+1} - U_{ik}^j}{h_t} = \frac{K}{h_x^2} \left( U_{i-1k}^{(\sigma)} - 2U_{ik}^{(\sigma)} + U_{i+1k}^{(\sigma)} \right) + \frac{K}{h_y^2} \left( U_{ik-1}^{(\sigma)} - 2U_{ik}^{(\sigma)} + U_{ik+1}^{(\sigma)} \right) + f_{ik}^{(\sigma)} = \quad (5.5)$$

$$= \Lambda_x U_{ik}^{(\sigma)} + \Lambda_y U_{ik}^{(\sigma)} + f_{ik}^{(\sigma)}, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_y - 1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$U_{0,k}^{j+1} = \mu_{1k}^{j+1}, \quad U_{N_x,k}^{j+1} = \mu_{2k}^{j+1}, \quad k = \overline{1, N_y - 1}, \quad (5.6)$$

$$U_{i,0}^{j+1} = \nu_{1i}^{j+1}, \quad U_{i,N_y}^{j+1} = \nu_{2i}^{j+1}, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad (5.7)$$

$$U_{i,k}^j = \mu_{0k}^j, \quad i = \overline{0, N_x}; k = \overline{0, N_y}. \quad (5.8)$$

Здесь

$$\Lambda_x U_{ik}^{(\sigma)} = \frac{K}{h_x^2} \left( U_{i-1k}^{(\sigma)} - 2U_{ik}^{(\sigma)} + U_{i+1k}^{(\sigma)} \right), \quad \Lambda_y U_{ik}^{(\sigma)} = \frac{K}{h_y^2} \left( U_{ik-1}^{(\sigma)} - 2U_{ik}^{(\sigma)} + U_{ik+1}^{(\sigma)} \right).$$

Погрешность аппроксимации разностных уравнений (5.5)

$$\psi_{ik}^j = O(h_t^\alpha + h_x^2 + h_y^2), \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0.5 \\ 2, & \sigma = 0.5 \end{cases},$$

условие устойчивости схемы (5.5) имеет вид

$$\sigma \geq 0.5 - \frac{1}{4Kh_t} \left[ \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right]^{-1}. \quad (5.9)$$

Оценим общее количество  $N_o$  операций, которые нужно совершить для решения задачи (5.5) – (5.8).

1) Пусть  $\sigma = 0$  (явная разностная схема) и  $N_x = N_y = N$ . В этом случае для решения задачи (5.5) – (5.8) на временном слое  $[t_j, t_{j+1}]$  требуется  $N_C \sim N_x N_y \sim N^2$  операций. Из условия (5.9) следует, что схема устойчива, если  $h_t \leq \frac{1}{2K} \left[ \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right]^{-1} \sim N^{-2}$ . Следовательно,  $N_T \sim N^2$  - количество временных слоев на интервале  $[0, T]$ , а  $N_o = N_T \cdot N_C \sim N^4$ .

2) Пусть  $\sigma \geq 0.5$  (неявная разностная схема). Тогда для решения методом Гаусса системы алгебраических уравнений (5.5) – (5.8) порядка  $N^2$  с ленточной матрицей на слое  $[t_j, t_{j+1}]$  требуется  $N_C \sim N^4$  операций. Схема устойчива при любых шагах  $h_t$ . Возьмем  $h_t = h_x$ . Следовательно,  $N_T \sim N$ ,  $N_o \sim N^5$ .

В обоих случаях решение задач требует выполнения слишком большого количества операций – схемы не являются экономичными.

### 5.1. Продольно-поперечная схема (метод переменных направлений)

В методе переменных направлений решение задачи (5.5) – (5.8) находится за два шага из решения системы уравнений

$$\frac{\bar{U}_{ik} - U_{ik}^j}{h_t/2} = \frac{K}{h_x^2} (\bar{U}_{i-1k} - 2\bar{U}_{ik} + \bar{U}_{i+1k}) + \frac{K}{h_y^2} (U_{ik-1}^j - 2U_{ik}^j + U_{ik+1}^j) + \bar{f}_{ik}, \quad (5.10)$$

$$\frac{U_{ik}^{j+1} - \bar{U}_{ik}}{h_t/2} = \frac{K}{h_y^2} (U_{ik-1}^{j+1} - 2U_{ik}^{j+1} + U_{ik+1}^{j+1}) + \frac{K}{h_x^2} (\bar{U}_{i-1k} - 2\bar{U}_{ik} + \bar{U}_{i+1k}) + \bar{f}_{ik}, \quad (5.11)$$

где  $\bar{U}_{ik}$  – вспомогательная функция, определенная на дробном временном слое  $t = \bar{t} = t_{j+0.5}$ .

#### Вычислительный алгоритм.

**1 шаг.** Схема (5.10) – неявная по направлению  $x$  и явная по направлению  $y$ . Из этой системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом одномерной прогонки определяется сеточная функция  $\bar{U}_{ik}$ . Схема (5.10) служит для перехода с целого  $j$ -го слоя  $t_j$  на дробный временной слой  $\bar{t}$ .

**2 шаг.** Схема (5.11) – неявная по направлению  $y$  и явная по направлению  $x$ . С использованием найденных на 1-ом шаге значений  $\bar{U}_{ik}$  из системы (5.11) уравнений с трехдиагональной матрицей методом одномерной прогонки определяется сеточная функция  $U_{ik}^{j+1}$ . Схема (5.11) служит для перехода с дробного временного слоя  $\bar{t}$  на целый  $(j+1)$ -ый слой  $t_{j+1}$ .

Расчет на шаге сетки  $[t_j, t_{j+1}]$  по схеме (5.10), (5.11) требует  $N_C \sim N^2$  операций. Это одна из лучших экономичных двумерных схем, которая может быть применена и для решения трехмерных задач.

**Порядок аппроксимации схемы (5.10), (5.11).** Покажем, что эта схема эквивалентна исходной неявной схеме (5.5) при  $\sigma = 0.5$  и имеет тот же порядок аппроксимации. Складывая и вычитая уравнения (5.10), (5.11), получим:

$$\bar{U}_{ik} = \frac{1}{2}(U_{ik}^{j+1} + U_{ik}^j) - \frac{h_t}{4}\Lambda_y(U_{ik}^{j+1} - U_{ik}^j), \quad (5.12)$$

$$\frac{U_{ik}^{j+1} - U_{ik}^j}{h_t} = \Lambda_y \bar{U}_{ik} + \Lambda_y \left( \frac{U_{ik}^{j+1} + U_{ik}^j}{2} \right) + \bar{f}_{ik}. \quad (5.13)$$

Исключая функцию  $\bar{U}_{ik}$  из уравнения (5.13) с помощью соотношения (5.12), будем иметь:

$$\frac{U_{ik}^{j+1} - U_{ik}^j}{h_t} = \Lambda_y \left( \frac{U_{ik}^{j+1} + U_{ik}^j}{2} \right) + \Lambda_y \left( \frac{U_{ik}^{j+1} + U_{ik}^j}{2} \right) + \bar{f}_{ik} - \Delta \quad (5.13)$$

где  $\Delta = \frac{h_t^2}{4}\Lambda_y\Lambda_y\left(\frac{U_{ik}^{j+1} - U_{ik}^j}{h_t}\right)$  – дисбалансный член схемы (5.10), (5.11), возникающий за счет расщепления исходной схемы (5.5) на две квазиодномерные подзадачи. Из (5.13) следует, что если производная  $\frac{\partial^5 U}{\partial x^2 \partial y^2 \partial t}$  является непрерывной и ограниченной в точке  $(x_i, y_k, t_j)$ , то источник  $\Delta$  имеет порядок  $O(h_t^2)$ . Таким образом, схема (5.10), (5.11) имеет тот же порядок аппроксимации  $\psi_{ik}^j = O(h_t^2 + h_x^2 + h_y^2)$ , что и неявная схема (5.5) при  $\sigma = 0.5$ .

**Аппроксимация граничных условий для схемы (5.10), (5.11).** Для решения системы (5.11) граничные условия на сторонах прямоугольника  $y = 0$  и  $y = b$  определены в целых узлах сетки, так что разностные уравнения (5.11) дополняются граничными условиями (5.7):

$$U_{i,0}^{j+1} = v_{1i}^{j+1}, \quad U_{i,N_y}^{j+1} = v_{2i}^{j+1}, \quad i = \overline{0, N_x}.$$

Для решения системы (5.10) необходимо поставить граничные условия на сторонах прямоугольника  $x = 0$  и  $x = a$  на дробном временном слое. Если дополнить разностные уравнения (5.10) граничными условиями вида  $\bar{U}_{0,k} = \bar{\mu}_{1k}$ ,  $\bar{U}_{N_x,k} = \bar{\mu}_{2k}$ ,  $k = \overline{1, N_y - 1}$ , аналогичными (5.6), то, как нетрудно убедиться с помощью разложения в ряд Тейлора, их порядок аппроксимации будет равен  $O(h_t)$ . Поэтому для согласования аппроксимации уравнений (5.10) и граничных условий при  $x = 0$  и  $x = a$  необходимо использовать соотношение (5.12):

$$\bar{U}_{0,k} = \frac{1}{2}(U_{0,k}^{j+1} + U_{0,k}^j) - \frac{h_t}{4}\Lambda_y(U_{0,k}^{j+1} - U_{0,k}^j) = \frac{1}{2}(\mu_{1k}^{j+1} + \mu_{1k}^j) - \frac{h_t}{4}\Lambda_y(\mu_{1k}^{j+1} - \mu_{1k}^j), \quad (5.14)$$

$$\bar{U}_{N_x,k} = \frac{1}{2}(U_{N_x,k}^{j+1} + U_{N_x,k}^j) - \frac{h_t}{4}\Lambda_y(U_{N_x,k}^{j+1} - U_{N_x,k}^j) = \frac{1}{2}(\mu_{2k}^{j+1} + \mu_{2k}^j) - \frac{h_t}{4}\Lambda_y(\mu_{2k}^{j+1} - \mu_{2k}^j). \quad (5.15)$$

**Устойчивость схемы (5.10), (5.11).** Схема равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части.

**Сходимость схемы (5.10), (5.11).** Схема сходится в норме  $L_2$  с погрешностью  $O(h_t^2 + h_x^2 + h_y^2)$ .

## 5.2. Локально-одномерная схема

Рассмотрим трехмерную задачу анизотропной теплопроводности в параллелепипеде  $D = \{x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$  со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^3 K_{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad 0 < x \equiv x_1 < a, \quad 0 < y \equiv x_2 < b, \quad 0 < z \equiv x_3 < c, \quad 0 < t < T, \quad (5.16)$$

с граничными условиями I-го рода

$$U(0, y, z, t) = \mu_1(y, z, t), \quad U(a, y, z, t) = \mu_2(y, z, t), \quad (5.17)$$

$$U(x, 0, z, t) = \nu_1(x, z, t), \quad U(x, b, z, t) = \nu_2(x, z, t), \quad (5.18)$$

$$U(x, y, 0, t) = \varrho_1(x, y, t), \quad U(x, y, c, t) = \varrho_2(x, y, t), \quad (5.19)$$

и начальным условием

$$U(x, y, z, 0) = \mu_0(x, y, z). \quad (5.20)$$

Здесь  $K_{\alpha}$  – постоянные значения коэффициента теплопроводности,  $K_1 \neq K_2$ ,  $K_2 \neq K_3$ ,  $\mu_1(y, z, t)$ ,  $\mu_2(y, z, t)$ ,  $\nu_1(x, z, t)$ ,  $\nu_2(x, z, t)$ ,  $\varrho_1(x, y, t)$ ,  $\varrho_2(x, y, t)$ ,  $\mu_0(x, y, z)$  – заданные функции.

Введем равномерную сетку:

$$D_h = \left\{ (x_i, y_k, z_n, t_j), i = \overline{0, N_x}; k = \overline{0, N_y}; n = \overline{0, N_z}; j = \overline{0, N_t} \right\},$$

где  $x_i = ih_x$ ,  $y_k = kh_y$ ,  $z_n = nh_z$ ,  $t_j = jh_t$  и  $h_x = a/N_x$ ,  $h_y = b/N_y$ ,  $h_z = c/N_z$ ,  $h_t = T/N_t$  – узлы и шаги сетки соответственно по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$ . Аппроксимируем задачу (5.16) – (5.20) разностной схемой с весом  $\sigma$ :

$$\frac{U_{ikn}^{j+1} - U_{ikn}^j}{h_t} = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_{\alpha} U_{ikn}^{(\sigma)}, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad k = \overline{1, N_y - 1}, \quad n = \overline{1, N_z - 1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.21)$$

$$U_{0kn}^{j+1} = \mu_{1, kn}^{j+1}, \quad U_{N_x kn}^{j+1} = \mu_{2, kn}^{j+1}, \quad k = \overline{1, N_y - 1}, \quad n = \overline{1, N_z - 1}, \quad (5.22)$$

$$U_{i0n}^{j+1} = \nu_{1, in}^{j+1}, \quad U_{iN_y n}^{j+1} = \nu_{2, in}^{j+1}, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad n = \overline{0, N_z}, \quad (5.23)$$

$$U_{ik0}^{j+1} = \varrho_{1, ik}^{j+1}, \quad U_{ikN_z}^{j+1} = \varrho_{2, ik}^{j+1}, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad n = \overline{0, N_z}, \quad (5.24)$$

$$U_{ikn}^j = \mu_{0, kn}^j, \quad i = \overline{0, N_x}, \quad k = \overline{0, N_y}, \quad n = \overline{0, N_z}. \quad (5.25)$$

Здесь  $\Lambda_1 U_{ikn}^{(\sigma)} = \frac{K_1}{h_x^2} (U_{i-1kn}^{(\sigma)} - 2U_{ikn}^{(\sigma)} + U_{i+1kn}^{(\sigma)})$ ,  $\Lambda_2 U_{ikn}^{(\sigma)} = \frac{K_2}{h_y^2} (U_{ik-1n}^{(\sigma)} - 2U_{ikn}^{(\sigma)} + U_{ik+1n}^{(\sigma)})$ ,

$$\Lambda_3 U_{ikn}^{(\sigma)} = \frac{K_3}{h_z^2} (U_{ikn-1}^{(\sigma)} - 2U_{ikn}^{(\sigma)} + U_{ikn+1}^{(\sigma)}).$$

Погрешность аппроксимации разностной схемы (5.21) – (5.25)

$$\psi_{ikn}^j = O \left( h_t^{\varsigma} + \sum_{\alpha=1}^3 h_{\alpha}^2 \right), \quad \varsigma = \begin{cases} 1, & \sigma \neq 0.5 \\ 2, & \sigma = 0.5 \end{cases}$$

В трехмерном случае локально-одномерная схема решения системы (5.21) – (5.25) при  $\sigma = 0.5$  имеет вид:

$$\frac{\hat{\omega}_{1,ikn} - \omega_{1,ikn}}{h_t/3} = 3\Lambda_1 \left( \frac{\hat{\omega}_{1,ikn} + \omega_{1,ikn}}{2} \right), \quad (5.26)$$

$$\frac{\hat{\omega}_{2,ikn} - \omega_{2,ikn}}{h_t/3} = 3\Lambda_2 \left( \frac{\hat{\omega}_{2,ikn} + \omega_{2,ikn}}{2} \right), \quad (5.27)$$

$$\frac{\hat{\omega}_{3,ikn} - \omega_{3,ikn}}{h_t/3} = 3\Lambda_3 \left( \frac{\hat{\omega}_{3,ikn} + \omega_{3,ikn}}{2} \right), \quad (5.28)$$

где вспомогательные функции  $\omega_{1,ikn}$  и  $\omega_{2,ikn}$  определены на дробных временных слоях  $t_{j+1/3}$  и  $t_{j+2/3}$ , а  $\omega_{3,ikn}$  – на целом слое  $t_{j+1}$  так, что

$$\omega_{1,ikn} = U_{ikn}^j, \quad \omega_{2,ikn} = \hat{\omega}_{1,ikn}, \quad \omega_{3,ikn} = \hat{\omega}_{2,ikn}, \quad \hat{\omega}_{3,ikn} = U_{ikn}^{j+1}. \quad (5.29)$$

Отметим, что локально-одномерная схема может быть использована для решения задач размерности  $> 3$ .

### **Вычислительный алгоритм.**

**1 шаг.** Схема (5.26) – неявная по направлению  $x$  и явная по направлениям  $y$  и  $z$ . С использованием известных на  $j$ -го слое  $t_j$  значений  $\omega_{1,ikn} = U_{ikn}^j$  Из этой системы алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом одномерной прогонки определяется вспомогательная сеточная функция  $\hat{\omega}_{1,ikn}$ . Схема (5.26) служит для перехода с целого  $j$ -го слоя  $t_j$  на дробный временной слой  $t_{j+1/3}$ .

**2 шаг.** Схема (5.27) – неявная по направлению  $y$  и явная по направлениям  $x$  и  $z$ . С использованием найденных на 1-ом шаге значений  $\omega_{2,ikn} = \hat{\omega}_{1,ikn}$  из системы (5.27) с трехдиагональной матрицей методом одномерной прогонки определяется сеточная функция  $\hat{\omega}_{2,ikn}$ . Схема (5.27) служит для перехода с дробного временного слоя  $t_{j+1/3}$  на дробный слой  $t_{j+2/3}$ .

**3 шаг.** Схема (5.28) – неявная по направлению  $z$  и явная по направлениям  $x$  и  $y$ . С использованием найденных на 2-ом шаге значений  $\omega_{3,ikn} = \hat{\omega}_{2,ikn}$  из системы (5.28) с трехдиагональной матрицей методом одномерной прогонки определяется сеточная функция  $\hat{\omega}_{3,ikn}$ . Схема (5.28) служит для перехода с дробного временного слоя  $t_{j+2/3}$  на целый слой  $t_{j+1}$ . В результате оказывается найденной сеточная функция  $U_{ikn}^{j+1} \equiv \hat{\omega}_{3,ikn}$ .

Расчет на шаге сетки  $[t_j, t_{j+1}]$  по схеме (5.26) – (5.28) требует  $N_C \sim N^3$  операций, так что локально-одномерная сема является экономичной.

**Порядок аппроксимации схемы (5.26) - (5.27).** Покажем, что локально-одномерная схема эквивалентна исходной неявной схеме (5.21) при  $\sigma = 0.5$  и имеет тот же порядок аппроксимации. Опуская индексы  $i, k$  и  $n$ , запишем уравнения (5.26) – (5.28) в виде:

$$(E - h_t/2 \Lambda_1) \hat{\omega}_1 = (E + h_t/2 \Lambda_1) \omega_1, \quad (5.30)$$

$$(E - h_t/2 \Lambda_2) \hat{\omega}_2 = (E + h_t/2 \Lambda_2) \omega_2, \quad (5.31)$$

$$(E - h_t/2 \Lambda_3) \hat{\omega}_3 = (E + h_t/2 \Lambda_3) \omega_3, \quad (5.32)$$

где  $E$  – единичный оператор. Воспользовавшись определением функций из уравнений (5.31), (5.30) и (5.30) получим:

$$\hat{\omega}_2 \equiv \omega_3 = (E + h_t/2\Lambda_3)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_3)U^{j+1}, \quad (5.33)$$

$$\hat{\omega}_1 \equiv \omega_2 = (E + h_t/2\Lambda_2)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_2)\hat{\omega}_2, \quad (5.34)$$

$$U^j \equiv \omega_1 = (E + h_t/2\Lambda_1)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_1)\hat{\omega}_1. \quad (5.35)$$

Отсюда

$$U^j = (E + h_t/2\Lambda_1)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_1)(E + h_t/2\Lambda_2)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_2)(E + h_t/2\Lambda_3)^{-1} (E - h_t/2\Lambda_3)U^{j+1}$$

Используя свойство перестановочности операторов  $\Lambda_\alpha$ , в рассматриваемом случае постоянных значений  $K_\alpha$  будем иметь:

$$\prod_{\alpha=1}^3 (E - h_t/2\Lambda_\alpha)U^{j+1} = \prod_{\alpha=1}^3 (E + h_t/2\Lambda_\alpha)U^j. \quad (5.36)$$

Раскроем произведения в соотношении (5.36) с точностью до  $O(h_t^3)$ :

$$\left( E - \frac{h_t}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha + \frac{h_t^2}{4} \sum_{\alpha \neq \beta} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta + O(h_t^3) \right) U^{j+1} = \left( E + \frac{h_t}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha + \frac{h_t^2}{4} \sum_{\alpha \neq \beta} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta + O(h_t^3) \right) U^j.$$

Отсюда

$$\frac{U^{j+1} - U^j}{h_t} = \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_\alpha U^{(0.5)} + \Delta + O(h_t^2), \quad (5.37)$$

где  $\Delta = \frac{h_t^2}{4} \sum_{\alpha \neq \beta} \Lambda_\alpha \Lambda_\beta \frac{U^{j+1} - U^j}{h_t}$  – дисбалансный член схемы (5.26) – (5.28), возникающий за счет расщепления исходной схемы (5.21) на три квазиодномерные подзадачи. Из (5.37)

следует, что если производные  $\frac{\partial^5 U}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2 \partial t}$  являются непрерывными и ограниченными в

точке  $(x_i, y_k, z_n, t_j)$ , то источник  $\Delta$  имеет порядок  $O(h_t^2)$ . Таким образом, схема (5.26) –

(5.28) имеет тот же порядок аппроксимации  $\psi_{ikn}^j = O\left(h_t^2 + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2\right)$ , что и неявная схема

(5.21) при  $\sigma = 0.5$ .

**Аппроксимация граничных условий для схемы (5.26) – (5.28).** Для решения систем (5.28) граничные условия на гранях параллелепипеда  $z = 0$ ,  $z = c$  и определены в целых узлах сетки, так что разностные уравнения (5.28) дополняются граничными условиями (5.24):

$$\hat{\omega}_{3,ik0} \equiv U_{ik0}^{j+1} = v_{1,ik}^{j+1}, \quad \hat{\omega}_{3,ikN_z} \equiv U_{ikN_z}^{j+1} = v_{2,ik}^{j+1}.$$

Для решения систем (5.26) и (5.27) необходимо поставить граничные условия на гранях  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = 0$ ,  $y = b$  на дробных временных слоях  $t_{j+1/3}$  и  $t_{j+2/3}$ . Если дополнить раз-

ностные уравнения (5.26) и (5.27) граничными условиями вида  $\hat{\omega}_{1,0in} = \mu_{1,in}(t_{j+1/3})$ ,

$\hat{\omega}_{1,N_xin} = \mu_{2,in}(t_{j+1/3})$ ,  $\hat{\omega}_{2,i0n} = \mu_{1,in}(t_{j+2/3})$ ,  $\hat{\omega}_{2,i0n} = \mu_{2,in}(t_{j+2/3})$ , аналогичными (5.22) и (5.23), то

их порядок аппроксимации будет равен  $O(h_t)$ . Поэтому для согласования аппроксимации уравнений (5.26), (5.27) и соответствующих им граничных условий необходимо использо-

вать поправочные формулы, получаемые из соотношений (5.33) – (5.35), например:

$$\hat{\omega}_{1,0in} = (E + h_t/2 \Lambda_2)^{-1} (E - h_t/2 \Lambda_2) (E + h_t/2 \Lambda_3)^{-1} (E - h_t/2 \Lambda_3) U_{0in}^{j+1}, \text{ откуда}$$

$$\hat{\omega}_{1,0in} = (E + h_t/2 \Lambda_2)^{-1} (E - h_t/2 \Lambda_2) (E + h_t/2 \Lambda_3)^{-1} (E - h_t/2 \Lambda_3) \mu_{1,in}^{j+1}. \quad (5.38)$$

**Устойчивость схемы (5.26) – (5.28).** Схема равномерно и безусловно устойчива по начальным данным.

**Сходимость схемы (5.26) – (5.28).** Схема безусловно сходится в норме  $L_2$  с погрешностью  $O\left(h_t^2 + \sum_{\alpha=1}^3 h_\alpha^2\right)$ .

### 5.3. Стационарные многомерные уравнения эллиптического типа. Счет на установление

Рассмотрим трехмерную задачу анизотропной теплопроводности,  $K(x, y, z) > 0$ , в области  $D = \{x, y, z\}$

$$\operatorname{div}[K(x, y, z) \operatorname{grad} U] = -f(x, y, z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in D, \quad (5.3.1)$$

с граничными условиями I-го рода

$$U|_\Gamma = \mu(\mathbf{r}), \quad (5.3.2)$$

Здесь  $\mu(\mathbf{r})$  – заданная функция.

Пусть наряду с задачей (5.3.1), (5.3.2) относительно функции  $V(x, y, z, t)$  в области  $D$  имеет место нестационарная задача с теми же граничными условиями:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{div}[K(x, y, z) \operatorname{grad} V] + f(x, y, z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in D, \quad t > 0, \quad (5.3.3)$$

$$V|_\Gamma = \mu(\mathbf{r}), \quad (5.3.4)$$

и произвольным начальным распределением функции  $V(x, y, z, t)$  при  $t = 0$ :

$$V(\mathbf{r}, 0) = V_0(\mathbf{r}), \quad (5.3.5)$$

Пусть  $\omega(x, y, z, t) = V(x, y, z, t) - V(x, y, z)$ . Рассмотрим вспомогательную задачу относительно функции  $\omega(x, y, z, t)$ , которая представляет собой разность задач (5.3.1), (5.3.2) и (5.3.3) – (5.3.5). Учитывая, что  $U'_t(x, y, z) = 0$ , получим однородное уравнение теплопроводности с нулевыми граничными условиями

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \operatorname{div}[K(x, y, z) \operatorname{grad} \omega], \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in D, \quad t > 0, \quad (5.3.3)$$

$$\omega|_\Gamma = 0, \quad (5.3.4)$$

и начальным условием

$$\omega(\mathbf{r}, 0) = V_0(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \omega_0(\mathbf{r}), \quad (5.3.5)$$

где  $\omega_0(\mathbf{r})$  – произвольная функция.

Покажем, что решение (5.3.3) – (5.3.5) при больших временах стремится к решению задачи (5.3.1), (5.3.2). Запишем точное решение задачи (5.3.3) – (5.3.5) в виде

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\lambda_m t} \omega_m(\mathbf{r}) \quad (5.3.5)$$

где  $\lambda_m$  и  $\omega_m(\mathbf{r})$  – собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Леувилля

$$\operatorname{div}[K(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \omega_m(\mathbf{r})] + \lambda_m \omega_m(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in D, \quad \omega_m(\mathbf{r})|_{\Gamma} = 0,$$

$C_m = \int_D \omega(\mathbf{r}, 0) \cdot \omega_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  – коэффициенты Фурье. При этом  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ , а  $\{\omega_m(\mathbf{r})\}_{m=1}^{\infty}$  –

полная ортонормированная система в области  $D(\mathbf{r})$ . Тогда

$$\|\omega(\mathbf{r}, t)\|_{L_2} = \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m^2 e^{-2\lambda_m t} \right)^{1/2} \leq e^{-\lambda_1 t} \left( \sum_{m=1}^{\infty} C_m^2 \right)^{1/2} = e^{-\lambda_1 t} \|\omega_0(\mathbf{r})\|_{L_2}.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$ :  $\|\omega(\mathbf{r}, t)\|_{L_2} = \|V_0(\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})\|_{L_2} \rightarrow 0$  со скоростью  $e^{-\lambda_1 t}$ . Следовательно, решение (5.3.3) – (5.3.5) при больших временах среднеквадратично стремится к решению задачи (5.3.1), (5.3.2). При заданной величине  $\varepsilon$  точности расчеты с помощью (5.3.3) – (5.3.5) должны проводиться до момента времени  $T \approx \lambda_1^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$ .

Итак, вместо задачи (5.3.1), (5.3.2) можно любым из рассмотренных выше экономических методов решать задачу (5.3.3) – (5.3.5).



## Тема 6. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

### 6.1. Слабая формулировка задачи. Задача минимизации функционала

Рассмотрим основные принципы ВМ на примере одномерной неоднородной стационарной задачи теплопроводности. Пусть  $K \equiv 1$ . В области  $D = \{x \in [0, 1]\}$

$$-U'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6.1.1)$$

$$U(0) = U(1) = 0, \quad (6.1.2)$$

Здесь  $f(x)$  – заданная функция.

**Задача 1.** Найти функцию  $U \in W_2^2$ , удовлетворяющую уравнению (6.1.1) с граничными условиями (6.1.2).

**Решение задачи 1 единственно.** Действительно,

$$U(x) = -\int_0^x ds \int_0^s f(t) dt + Ax + B,$$

где константы  $A$  и  $B$  определяются однозначно из условий (6.1.2).

*Замечание.* Для численного решения задачи (6.1.1), (6.1.2) можно использовать метод конечных разностей:

$$u_{\bar{x},i} = -\phi_i, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad u_0 = 0, \quad u_{N_x} = 0. \quad (6.1.1_1)$$

Можно поставить другую задачу. Умножим (6.1.1) на  $v \in W_2^1$ , проинтегрируем по области  $D$ :

$$\int_0^1 U'_x v'_x dx = \int_0^1 f v dx \quad (6.1.3)$$

*Определения.* Линейная  $\varphi$  и билинейная  $a$  формы –

$$\varphi(v) = \int_0^1 f v dx, \quad \varphi: W_2^0 \rightarrow R; \quad (6.1.4)$$

$$a(U, v) = \int_0^1 U'_x v'_x dx, \quad a: W_2^1 \times W_2^1 \rightarrow R. \quad (6.1.5)$$

**Задача 2.** Найти функцию  $U \in W_2^1$ , удовлетворяющую интегральному уравнению

$$a(U, v) = \varphi(v), \quad (6.1.6)$$

для любой функции  $v \in W_2^1$ .

**Решение задачи 2 единственно.** Пусть  $U_1$  и  $U_2$  – решения, т.е.  $a(U_1, v) = \varphi(v)$  и  $a(U_2, v) = \varphi(v)$ . Тогда  $a(U_1 - U_2, v) = a(w, v) = 0$ , где  $w = U_1 - U_2$ . Так как функция  $v$  –

произвольная, положим  $v = w$ :  $a(w, w) = 0$  или  $\int_0^1 (w'_x)^2 dx = 0$ . Отсюда  $w'_x = 0$ ,  $w \equiv 0$ ,

$$U_1 \equiv U_2$$

Задача 2 называется *слабой формулировкой* задачи 1.

*Замечание.* Для численного решения задачи (6.1.3) можно использовать метод сумматорных тождеств, который приводит к системе алгебраических уравнений, аналогичных системе (6.1.1<sub>1</sub>).

**Теорема.** Пусть  $a$  – симметричная положительно определенная билинейная форма:  $a: W_2^1 \times W_2^1 \rightarrow R$ ;  $\varphi$  – линейная форма:  $\varphi: W_2^0 \rightarrow R$ . Пусть  $F(U) = 1/2a(U, U) - \varphi(U)$  – квадратичная форма:  $F: W_2^1 \rightarrow R$ . Тогда задача 2 эквивалентна задаче 3:

*Задача 3.* Найти такую функцию  $U \in W_2^1$ , что  $F(U) \leq F(v)$ ,  $\forall v \in W_2^1$ , т.е.

$$\min_{v \in W_2^1} F(v) = F(U). \quad (6.1.7)$$

Доказательство. Пусть  $U$  – решение задачи 3, следовательно  $\forall |\varepsilon| \in R, \forall v \in W_2^1$ :

$$\begin{aligned} F(U + \varepsilon v) &= 1/2a(U + \varepsilon v, U + \varepsilon v) - \varphi(U + \varepsilon v) = \\ &= 1/2a(U, U) + \varepsilon a(U, v) + 1/2\varepsilon^2 a(v, v) - \varphi(U) - \varepsilon \varphi(v) = \\ &= F(U) + \varepsilon a(U, v) + 1/2\varepsilon^2 a(v, v) - \varepsilon \varphi(v) \geq F(U). \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Отсюда следует, что  $\varepsilon [a(U, v) - \varphi(v)] + 1/2\varepsilon^2 a(v, v) \geq 0$ , причем  $1/2\varepsilon^2 a(v, v) \geq 0$ . Но  $\varepsilon$  может быть отрицательным, поэтому для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы  $[a(U, v) - \varphi(v)] = 0$  (ч.т.д.).

*Замечание.* Слагаемое  $a(U, v) - \varphi(v)$  в соотношении (6.1.8) называется 1-ой вариацией функционала  $F$ .

Рассмотрим задачу численной минимизации функционала (6.1.7). Введем равномерное разбиение  $\omega_h = \{x_i, i = \overline{0, N}\}$  отрезка  $[0, 1]$ . Запишем функционал (6.1.7) в виде:

$$F(v) = 1/2 \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v'_x)^2 dx - \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f v dx \approx 1/2 \sum_{i=1}^N h \left( \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right)^2 - \sum_{i=1}^N h \frac{f_{i-1} v_{i-1} + f_i v_i}{2},$$

где  $v_i$  – значения функции  $v(x)$  в узлах сетки  $\omega_h$ . Условие минимума функции  $F$ :  $\partial F / \partial v_i|_U = 0$ , где  $U = (u_0, u_1, \dots, u_N)$  – искомая точка минимума. Отсюда

$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - h f_i = 0$ , следовательно, для нахождения сеточной минимизирующей функции необходимо решить систему уравнений, совпадающую с (6.1.11):

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad u_0 = 0, \quad u_N = 0.$$

## 6.2. Метод Бубнова-Галеркина. Метод Рунца

Рассмотрим приближенное решение задачи (6.1.6) на подпространстве  $W_{2U^*}^{(1)} \in W_{2v^*}^{(1)}$  размерности  $N$ : найти функцию  $U^* \in W_{2U^*}^{(1)}$ , удовлетворяющую

$$a(U^*, v^*) = \varphi(v^*), \quad \forall v^* \in W_{2v^*}^{(1)}. \quad (6.2.1)$$

Пусть  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  и  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  – базисы  $W_{2U^*}^{(1)}$  и  $W_{2v^*}^{(1)}$  соответственно. Будем искать  $U^*$  в виде:

$U^* = \sum_{i=1}^N C_i \psi_i$ . Подставляя эту сумму в (6.2.1), получим систему уравнений относительно коэффициентов  $C_i$ :

$$\sum_{i=1}^N C_i \cdot a(\psi_i, \phi_k) = \varphi(\phi_k), \quad k = \overline{1, N}. \quad (6.2.2)$$

Матрица  $\mathbf{A} = \{a(\psi_i, \phi_k)\}_{i,k=1}^N$  – матрица жесткости.

Метод Ритца – частный случай метода Бубнова-Галерк

$$\sum_{i=1}^N C_i \cdot a(\psi_i, \psi_k) = \varphi(\psi_k), \quad k = \overline{1, N}.$$

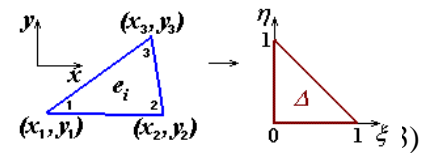


Рис.6.3.2

В общем случае матрица жесткости в обоих методах ~~заполненная~~, поэтому для решения системы алгебраических уравнений требуется  $\sim N^4$  операций.

### 6.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

МКЭ – приближенный метод, основанный на методах Галеркина и Ритца. Он приводит к разреженной матрице жесткости  $\mathbf{A}$  за счет специального построения базисных функций. В МКЭ исходная область  $D$  и ее граница  $\partial D$  разбиваются на такие подмножества  $\{e_i\}_{i=1}^N$ , что

$$1) \text{mes}(e_i \cap e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}, \quad 2) \bigcup_{i=1}^N e_i = \bar{D} = D \cup \partial D.$$

Здесь  $e_i$  – **конечный элемент** – носитель базисной функции  $\psi_i$ .

*Определение.* Множество  $\{\psi_i\}_{i=1}^N$  называется конечно-элементным базисом, если число  $M_i = \{j, \text{mes}(e_i \cap e_j) \neq 0\}$  мало, так что  $a(\psi_i, \psi_j) = 0$ , если  $j \notin M_i$ . В этом случае число элементов матрицы жесткости  $a(\psi_i, \psi_j) \neq 0$  при  $j \in M_i$  мало, матрица  $\mathbf{A}$  – разреженная, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых функций в узлах сетки.

#### 6.3.1. Примеры конечных элементов. Линейные преобразования элементов произвольной формы в базисные

Рассмотрим примеры базисных элементов одномерного и двумерного разбиений.

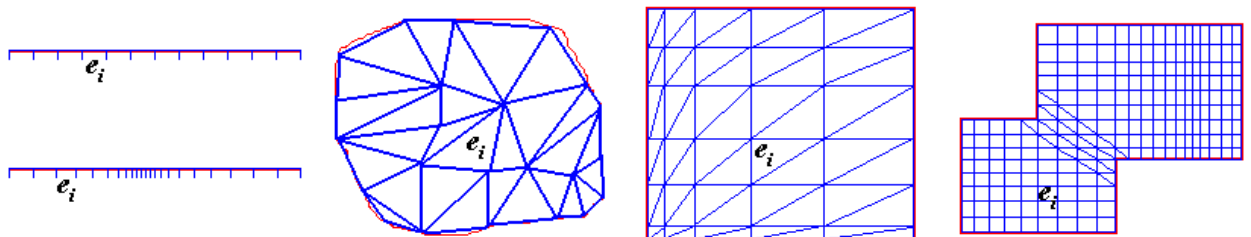


Рис.6.3.1

1) *Одномерный случай:*  $\bar{D} = \{x \in [0,1]\}$ . Разобьем эту область на конечные элементы – отрезки  $[x_{i-1}, x_i]$  разной длины,  $i = \overline{1, N}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_N = 1$ . Здесь  $\{e_i\}_{i=1}^N = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^N$ . Для удобства рассмотрим преобразование, которое переводит произвольный элемент  $e_i$  в отрезок единичной длины:

$$\xi = (x - x_{i-1}) / (x_i - x_{i-1}) = (x - x_{i-1}) / h_i \quad \text{или} \quad x = x_{i-1} + \xi(x_i - x_{i-1}) = x_{i-1} + \xi h_i. \quad (6.3.1)$$

2) *Двумерный случай:*  $\bar{D} = \{(x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ . Разобьем квадрат на конечные элементы  $e_i$  – треугольники произвольного размера,  $\{e_i\}_{i=1}^N$ . Обозначим координаты вер-

шин некоторого треугольника  $e_i$  через  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ . Рассмотрим преобразование координат  $x$  и  $y$ , которое переводит произвольный элемент  $e_i$  в прямоугольный треугольник  $\Delta$  с катетами единичной длины с координатами вершин  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  в системе координат  $\xi$  и  $\eta$ . Пусть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (6.3.2)$$

где  $\mathbf{J}$  – матрица преобразования. Найдем ее элементы из решения систем уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + J_{11} \\ y_2 = y_1 + J_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_{11} = x_2 - x_1 \\ J_{12} = y_2 - y_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_1 + J_{21} \\ y_3 = y_1 + J_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_{21} = x_3 - x_1 \\ J_{22} = y_3 - y_1 \end{cases}, \text{ так что}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (6.3.3)$$

Нетрудно видеть, что  $mes e_i = \int_{e_i} dx dy = \int_{\Delta} |\mathbf{J}|_i d\xi d\eta = 1/2 \cdot |\mathbf{J}|_i$ , откуда видно, что определитель  $|\mathbf{J}|_i$ , составленный из координат треугольного элемента  $e_i$ , равен его удвоенной площади.

### 6.3.2. Примеры построения базисных функций

1) *Одномерный случай.* Пусть  $f_{i-1}$  и  $f_i$  – значения некоторой функции в узлах произвольного конечного элемента  $[x_{i-1}, x_i]$ . Ему соответствует отрезок  $\xi \in [0,1]$ . Обозначим  $f_{i-1}$  и  $f_i$  на этом отрезке через  $f_1^{(i)} = f_{i-1}$  и  $f_2^{(i)} = f_i$ . Функция  $f(\xi)$  может быть аппроксимирована на этом отрезке полиномом 1-го порядка:

$$f(\xi) = f_{i-1} + (f_i - f_{i-1})\xi = f_{i-1}(1-\xi) + f_i\xi = f_1^{(i)}\Lambda_1(\xi) + f_2^{(i)}\Lambda_2(\xi) = \sum_{k=1}^2 f_k^{(i)}\Lambda_k(\xi), \quad (6.3.4)$$

$$\Lambda_1(\xi) = 1 - \xi, \quad \Lambda_2(\xi) = \xi. \quad (6.3.5)$$

Соотношение (6.3.4) можно рассматривать как разложение функции  $f(\xi)$  по базису  $\Lambda_1(\xi)$  и  $\Lambda_2(\xi)$ . Вид базисных функций  $\psi_i$  показан на левом рисунке 6.3.3. Отрезок  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , на котором эта функция отлична от нуля, называется ее носителем.

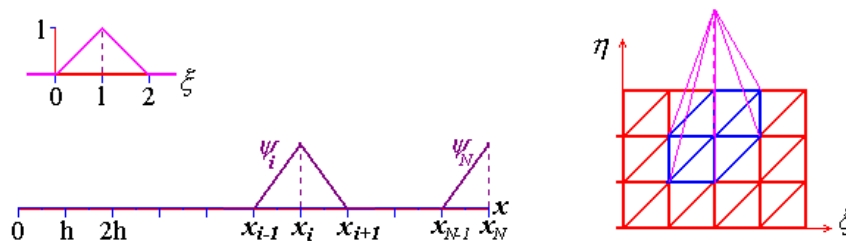


Рис.6.3.3

2) *Двумерный случай.* Пусть  $f_1^{(i)}$ ,  $f_2^{(i)}$  и  $f_3^{(i)}$  – значения некоторой функции  $f(x, y)$  в вершинах  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  произвольного треугольного элемента  $e_i$ . В системе координат  $(\xi, \eta)$  ему соответствует прямоугольный треугольник  $\Delta$ . Функция  $f(\xi)$  может быть аппроксимирована на этом треугольнике поверхностью 1-го порядка в виде:

$$f(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 f_k^{(i)} \Lambda_k(\xi, \eta), \quad (6.3.6)$$

$$\Lambda_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \Lambda_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \Lambda_3(\xi, \eta) = \eta. \quad (6.3.7)$$

Соотношение (6.3.6) – разложение функции  $f(\xi, \eta)$  по базису Лагранжа  $\{\Lambda_k(\xi, \eta)\}_{k=1}^3$ . Вид базисной функции  $\psi_i(\xi, \eta)$  и ее носитель показаны на правом рисунке 6.3.3.

### 6.3.3. Вычисление "вектора сил" на базисном элементе

1) *Одномерный случай.* Пусть  $h_i = h = const$ ,  $e_i = [x_{i-1}, x_i]$  – конечный элемент,  $f_1^{(i)} = f_{i-1}$  и  $f_2^{(i)} = f_i$  – значения сеточной функции,  $v_1^{(i)} = v_{i-1}$  и  $v_2^{(i)} = v_i$  значения пробной функции. Разложим  $f(\xi) = \sum_{k=1}^2 f_k^{(i)} \Lambda_k(\xi)$ ,  $v(\xi) = \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \Lambda_k(\xi)$  на элементе  $e_i$  и вычислим

$$\begin{aligned} \int_{e_i} f v dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f v dx = h \int_0^1 f v d\xi = h \int_0^1 \sum_{m=1}^2 f_m^{(i)} \Lambda_m(\xi) \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \Lambda_k(\xi) d\xi = \\ &= h \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \sum_{m=1}^2 f_m^{(i)} \int_0^1 (\Lambda_k, \Lambda_m) d\xi = h \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \left( \sum_{m=1}^2 f_m^{(i)} \Phi_{km}^{(i)} \right) = h \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \mathcal{F}_k^{(i)} = h(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)}), \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

где  $\mathbf{F}^{(i)} = (F_1^{(i)}, F_2^{(i)})$  – "вектор сил" на базисном элементе,  $\mathbf{v}^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)})$  – вектор пробной

функции. Подсчитаем элементы матрицы  $\left( \Phi_{km}^{(i)} = \int_0^1 (\Lambda_k, \Lambda_m) d\xi \right)_{k,m=1}^2$ .

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{(i)} &= \int_0^1 (\Lambda_1, \Lambda_1) d\xi = \int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi = \frac{1}{3}, & \Phi_{22}^{(i)} &= \int_0^1 (\Lambda_2, \Lambda_2) d\xi = \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{1}{3}, \\ \Phi_{12}^{(i)} &= \Phi_{21}^{(i)} = \int_0^1 (\Lambda_1, \Lambda_2) d\xi = \int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad \text{Итак, } \mathbf{\Phi}^{(i)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

2) *Двумерный случай.* Пусть  $f_1^{(i)}$ ,  $f_2^{(i)}$  и  $f_3^{(i)}$  – значения функции  $f(x, y)$  в вершинах  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  произвольного треугольного элемента  $e_i$ . Аналогично одномерному случаю

$$\int_{e_i} f v dx dy = |\mathbf{J}_i| \int_{\Delta} f v d\xi d\eta = |\mathbf{J}_i| \int_{\Delta} \sum_{m=1}^3 f_m^{(i)} \Lambda_m \sum_{k=1}^3 v_k^{(i)} \Lambda_k d\xi d\eta = |\mathbf{J}_i| \sum_{k=1}^3 v_k^{(i)} \mathcal{F}_k^{(i)} = |\mathbf{J}_i| (\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)}), \quad (6.3.10)$$

где  $\mathbf{F}^{(i)} = (F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, F_3^{(i)})$  и  $\mathbf{v}^{(i)} = (v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, v_3^{(i)})$  – "вектор сил" и пробная функция на тре-

угольнике  $\Delta$ ,  $|\mathbf{J}_i| = 2mes e_i$ . Подсчитаем элементы матрицы  $\left( \Phi_{km}^{(i)} = \int_{\Delta} (\Lambda_k, \Lambda_m) d\xi d\eta \right)_{k,m=1}^3$ .

$$\Phi_{11}^{(i)} = \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} (1-\xi-\eta)^2 d\xi d\eta = - \int_0^1 \frac{(1-\xi-\eta)^3}{3} \Big|_0^{1-\xi} d\xi = \int_0^1 \frac{(1-\xi)^3}{3} d\xi = \frac{1}{12},$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{22}^{(i)} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi^2 d\xi d\eta = \int_0^1 \xi^2 (1-\xi) d\xi = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, & \Phi_{33}^{(i)} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \eta^2 d\xi d\eta = \int_0^1 \frac{(1-\xi)^3}{3} d\xi = \frac{1}{12}, \\
\Phi_{12}^{(i)} &= \Phi_{21}^{(i)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi(1-\xi-\eta) d\xi d\eta = -\int_0^1 \xi \frac{(1-\xi-\eta)^2}{2} \Big|_0^{1-\xi} d\xi = \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)^2}{2} d\xi = \frac{1}{24}, \\
\Phi_{13}^{(i)} &= \Phi_{31}^{(i)} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \eta(1-\xi-\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{24}. & \text{Итак, } \Phi^{(i)} &= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

#### 6.3.4. Вычисление матрицы жесткости на базисном элементе

1) *Одномерный случай.* Пусть  $h_i = h = \text{const}$ ,  $e_i = [x_{i-1}, x_i]$  – конечный элемент,  $u_1^{(i)} = u_{i-1}$  и  $u_2^{(i)} = u_i$  – значения искомой сеточной функции  $\{u_i\}_{i=0}^N$ . Вычислим

$$\begin{aligned}
\int_{e_i} u'_x v'_x dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'_x v'_x dx = \frac{1}{h} \int_0^1 u'_\xi v'_\xi d\xi = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \sum_{m=1}^2 u_m^{(i)} \int_0^1 (\Lambda'_k, \Lambda'_m) d\xi = \\
&= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} \left( \sum_{m=1}^2 u_m^{(i)} a_{km}^{(i)} \right) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^2 v_k^{(i)} (A \cdot u)_k^{(i)} = \frac{1}{h} \left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A} \mathbf{u})^{(i)} \right),
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

где  $\left( a_{km}^{(i)} = \int_0^1 (\Lambda'_k, \Lambda'_m) d\xi \right)_{k,m=1}^2$  – матрица жесткости.

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(i)} &= \int_0^1 (\Lambda'_1, \Lambda'_1) d\xi = \int_0^1 (-1)(-1) d\xi = 1, & a_{22}^{(i)} &= \int_0^1 (\Lambda'_2, \Lambda'_2) d\xi = \int_0^1 1 \cdot 1 d\xi = 1, \\
a_{12}^{(i)} &= a_{21}^{(i)} = \int_0^1 (\Lambda'_1, \Lambda'_2) d\xi = \int_0^1 (-1)(1) \xi d\xi = -1. & \text{Итак, } \mathbf{A}^{(i)} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Таким образом, дискретный аналог интегрального тождества (6.1.6) на конечном элементе  $e_i$  будет иметь вид:

$$h(\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)}) = \frac{1}{h} \left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A} \mathbf{u})^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, N}. \tag{6.3.13}$$

2) *Двумерный случай.* Пусть  $u_1^{(i)}$ ,  $u_2^{(i)}$  и  $u_3^{(i)}$  – значения искомой функции  $u(x, y)$  в вершинах  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  произвольного треугольного элемента  $e_i$ . В данном случае  $a(u, v) = \int_{e_i} (\nabla u, \nabla v) dx dy$ . При переходе к координатам  $(\xi, \eta)$  учтем, что

$\nabla_{(x,y)} u = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla_{(\xi,\eta)} u$ , где  $\mathbf{J}^{-1}$  – обратная к  $\mathbf{J}$  матрица, « $T$ » означает транспонирование,

$$(\mathbf{J}^{-1})^T = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} J_{22} & -J_{21} \\ -J_{12} & J_{11} \end{pmatrix} \tag{6.3.14}$$

$$\int_{e_i} (\nabla u, \nabla v) dx dy = |\mathbf{J}_i| (\mathbf{J}_i^{-1})^T (\mathbf{J}_i^{-1})^T \int_{\Delta} (\nabla_{(\xi,\eta)} u, \nabla_{(\xi,\eta)} v) d\xi d\eta = \tag{6.3.15}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{J}_i|} \sum_{k=1}^3 v_k^{(i)} \sum_{m=1}^3 u_m^{(i)} \int_{\Delta} (\mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_k, \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_m) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{J}_i|} \sum_{k=1}^3 v_k^{(i)} \left( \sum_{m=1}^3 u_m^{(i)} a_{km}^{(i)} \right) = \frac{1}{|\mathbf{J}_i|} \sum_{k=1}^3 v_k^{(i)} (A \cdot u)_k^{(i)} = \frac{1}{h} \left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A} \mathbf{u})^{(i)} \right),$$

где  $\left( a_{km}^{(i)} = \int_{\Delta} \left( \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_k, \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_m \right) d\xi d\eta \right)_{k,m=1}^2 = -$  матрица жесткости. При вычислении

ее элементов учтем, что  $\int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\xi d\eta = \int_0^1 (1-\xi) d\xi = 1/2$ ,

$$\nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_1 = \begin{pmatrix} J_{21} - J_{22} \\ J_{12} - J_{11} \end{pmatrix}_i;$$

$$\nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_2 = \begin{pmatrix} J_{22} \\ -J_{12} \end{pmatrix}_i; \quad \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega}_i \nabla_{(\xi,\eta)} \Lambda_3 = \begin{pmatrix} -J_{21} \\ J_{11} \end{pmatrix}_i.$$

$$a_{11}^{(i)} = 0.5 \left[ (J_{21} - J_{22})_i^2 + (J_{12} - J_{11})_i^2 \right] > 0,$$

$$a_{22}^{(i)} = 0.5 \left[ (J_{22})_i^2 + (J_{12})_i^2 \right] > 0,$$

$$a_{33}^{(i)} = 0.5 \left[ (J_{21})_i^2 + (J_{11})_i^2 \right] > 0,$$

$$a_{12}^{(i)} = a_{21}^{(i)} = 0.5 \left\{ (J_{22})_i \left[ (J_{21})_i - (J_{22})_i \right] + (J_{12})_i \left[ (J_{11})_i - (J_{12})_i \right] \right\},$$

$$a_{13}^{(i)} = a_{31}^{(i)} = (J_{21})_i \left[ (J_{22})_i - (J_{21})_i \right] + (J_{11})_i \left[ (J_{12})_i - (J_{11})_i \right],$$

$$a_{23}^{(i)} = a_{32}^{(i)} = -0.5 \left\{ (J_{22})_i (J_{21})_i + (J_{11})_i (J_{12})_i \right\}.$$

Таким образом, дискретный двумерный аналог интегрального тождества (6.1.6) на треугольном конечном элементе  $e_i$  будет иметь вид:

$$|\mathbf{J}_i| \left( \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)} \right) = \frac{1}{|\mathbf{J}_i|} \left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A}\mathbf{u})^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, N}. \quad (6.3.16)$$

### 6.3.5. Построение расширенных векторов и глобальных матрицы жесткости и вектора сил

1) *Одномерный случай.* С учетом соотношения (6.3.13) запишем дискретный аналог интегрального тождества (6.1.6) во всей области  $\bar{D} = \{x \in [0, 1]\}$ :

$$\frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A}\mathbf{u})^{(i)} \right) = h \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)} \right). \quad (6.3.17)$$

Локальные вектора  $\mathbf{v}^{(i)}$ ,  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $(\mathbf{A}\mathbf{u})^{(i)}$  и  $\mathbf{F}^{(i)}$ , соответствующие конечному элементу  $e_i = [x_{i-1}, x_i]$  с номером  $i$ , имеют только две компоненты. Образует из векторов  $\mathbf{u}^{(i)}$ ,  $(\mathbf{A}\mathbf{u})^{(i)}$  и  $\mathbf{F}^{(i)}$  *расширенные вектора*  $\vec{\mathbf{u}}$ ,  $\vec{\mathbf{A}\mathbf{u}}$  и  $\vec{\mathbf{F}}$ . Например, вектор  $\vec{\mathbf{F}}$  строим по компонентам вектора  $f_1^{(i)}$  и  $f_2^{(i)}$  так, что среди компонент  $\vec{\mathbf{F}}$  будут отличны от нуля только те, которые соответствуют номерам узлов элемента  $e_i$ :  $\vec{\mathbf{F}} = (0, 0, \dots, 0, f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, 0, \dots, 0)$ . Аналогичным образом введем также в рассмотрение *глобальный вектор*  $\vec{\mathbf{v}} = (v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \dots, v_N^{(i)})$ , определенный во всех узлах области  $D$ . Тогда в соотношении (6.3.17) в силу построения расширенных векторов

$$\left( \mathbf{v}^{(i)}, (\mathbf{A}\mathbf{u})^{(i)} \right) = \left( \vec{\mathbf{v}}, \left( \vec{\mathbf{A}\mathbf{u}} \right)^{(i)} \right), \quad \left( \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{F}^{(i)} \right) = \left( \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{F}} \right)^{(i)}. \quad (6.3.18)$$

Подставив (6.3.18) в (6.3.17) и определив расширенные вектора

$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N \left( \vec{\mathbf{A}}\mathbf{u} \right)^{(i)}, \quad \vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{F}}^{(i)} \quad (6.3.19)$$

в силу произвольности пробной функции  $\vec{\mathbf{v}}$  получим систему уравнений МКЭ

$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \vec{\mathbf{F}} \quad (6.3.20)$$

для нахождения сеточной функции  $\vec{\mathbf{u}}$ . Нетрудно видеть, что в одномерном случае сборка матрицы жесткости  $\mathbf{A}$  и вектора сил  $\vec{\mathbf{F}}$  сводится к суммированию локальных матриц (6.3.9) и (6.3.12), так что

$$\vec{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & & & & & & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & & 0 & -1 & 1 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad (6.3.21)$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & & & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & & & 1 & 4 & 1 & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & & & & 0 & 1 & 2 & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_N \end{bmatrix}. \quad (6.3.22)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – глобальная трехдиагональная матрица. В данном случае в регулярных узлах  $i = 1, N-1$  систему (6.3.21) можно представить в виде обычного разностного уравнения

$$-(u_x)_{\bar{x},i} = \gamma_i, \quad \gamma_i = (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})/6. \quad (6.3.23)$$



Тема 7.

ДВУМЕРНАЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В РАЗРЕЗЕ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТА

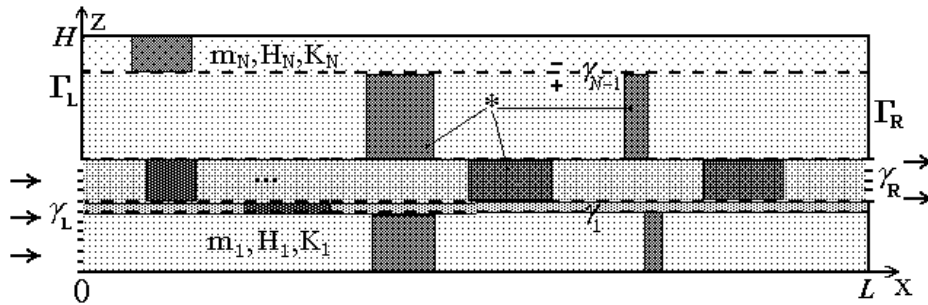


Рис. 7.1. Схема слоистого пласта

Уравнения двухфазной фильтрации:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(S) \cdot U_x) + \frac{\partial}{\partial z} (f(S) \cdot U_z) = 0, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma(S) \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma(S) \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0. \quad (7.2)$$

где  $S$  – насыщенность порового пространства водой (водонасыщенность),  $P$  – давление,  $\sigma = k \cdot K^*$  – коэффициент гидропроводности,  $K^*(S) = k_1(S)/\mu_1 + k_2(S)/\mu_2$ ,  $k_1(S)$  и  $k_2(S)$  – относительные фазовые проницаемости воды и нефти:

$$k_1 = \begin{cases} 0 & , 0 \leq S \leq S_* \\ ((S - S_*)/S^*)^3 & , S_* \leq S \leq 1 \end{cases}, \quad k_2 = \begin{cases} ((S^* - S)/(S^* - S_*))^3 & , 0 \leq S \leq S^* \\ 0 & , S^* \leq S \leq 1 \end{cases}$$

где  $S_*$  и  $S^*$  – значения связанной и предельной водонасыщенности.

Уравнение (7.1) используется для определения водонасыщенности  $S$ , а квазистационарное уравнение (7.2) – для определения давления  $P$ .

На границах разрыва  $\gamma_i$  абсолютной проницаемости  $k$  должны выполняться условия сопряжения:

$$[P] = 0, \quad \left[ \sigma \frac{\partial P}{\partial n} \right] = 0, \quad [f] = 0 \quad (7.3)$$

где  $[F] = F^+ - F^-$  – скачок произвольной функции  $F$ . Граничные условия для давления:

- на левой границе (нагнетательная ГС):

$$P|_{x=0} = P_0, \quad x \in \gamma_L \quad (7.4)$$

либо

$$Q_0: \quad Q_0 = \int_0^H U_x|_{x=0} dz, \quad \frac{\partial P}{\partial Z}|_{x=0} = 0, \quad x \in \gamma_L \quad (7.5)$$

- на правой границе (добывающая ГС):

$$P|_{x=L} = P_L, \quad x \in \gamma_R \quad (7.6)$$

Условия непроницаемости кровли и подошвы пласта, а также боковых границ  $\Gamma_L$  и  $\Gamma_R$ :

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{z \in \Gamma_L} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{z \in \Gamma_R} = 0 \quad (7.7)$$

Граничные условия для насыщенности  $S$  задаются на боковой границе, вскрытой нагнетательной горизонтальной скважиной (ГС):

$$S(0, t) = S^*, \quad t > 0 \quad (7.8)$$

Начальное условие для функции  $S$  имеет вид:

$$S(x, z, 0) = S^0 \geq S_* \quad (7.9)$$

Решение системы (7.1), (7.2) с условиями (7.3) – (7.9) отыскивается в области  $D = \{0 < x < L, 0 < z < H\}$  при  $t \in (0, T)$ , где  $H$  – толщина пласта, а  $T$  – время его эксплуатации.

При разработке пластов добывающие скважины эксплуатируются только до определенной их обводненности  $\theta^*$ , представляющей собой предельную долю воды в дебите скважины, выраженную в процентах. Затем скважина закрывается, то есть ее дебит становится равным нулю вне зависимости от режима ее работы до этого момента. Величина текущей обводненности  $\theta$  вычисляется по формуле

$$\theta(t) = \int_{\gamma_R} f \cdot \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dz \Big/ \int_{\gamma_R} \sigma \frac{\partial P}{\partial x} dz \quad (7.10)$$

В числителе этого выражения стоит величина текущего дебита воды, а в знаменателе – значение суммарного дебита жидкости.

### 7.1. Разностная схема

Введем сеточное разбиение  $D_h = \{(x_i, z_k), (x_{i+1/2}, z_{k+1/2})\}$  исходной области  $D$  решения задачи с элементами разбиения, представленными на Рис. 7.2, и шагами сетки: по времени  $h_\tau$  и по пространственным переменным:  $h_x = L/N_x$ ,  $h_p = H_p/N_p$ ,  $p = \overline{1, N}$ , где  $H_p$  – толщина  $p$ -го слоя,  $N$  – число слоев пласта.

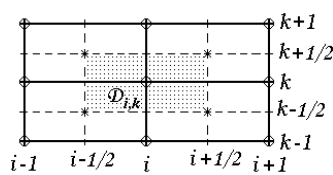


Рис. 7.2.

Ясно, что шаг по оси  $Oz$  может быть переменным:

$$h_z = \begin{cases} h_1, & 1 \leq k \leq N_1 \\ h_2, & 1 + N_1 \leq k \leq N_1 + N_2 \\ \dots & \dots \\ h_N, & 1 + \sum_{p=1}^{N-1} N_p \leq k \leq N_z \end{cases}$$

С целью улучшения аппроксимации потоков будем рассматривать сдвинутую на полшага сетку как по  $x$ , так и по  $z$  в каждом слое. Тогда на границах области  $D$  и слоев будут располагаться не узлы

сетки  $D_h$ , а границы элементарных ячеек  $D_{i,k}$ . Всего сетка будет содержать  $N_x \cdot N_z$  внутренних узлов, где  $N_z = \sum_{p=1}^N N_p$ .

Построим РС для исходной задачи.

**Аппроксимация уравнений (7.2)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} = \sigma \cdot \nabla P$  для давления.** Запишем консервативную разностную схему

$$h_x h_k L[V]_{i,k} = V_{i+1/2,k} - V_{i-1/2,k} + V_{i,k+1/2} - V_{i,k-1/2} = 0, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad k = \overline{1, N_z}. \quad (7.1.1)$$

Здесь введены обозначения:

$$V_{i+1/2,k} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} (P_{i+1,k} - P_{i,k}), \quad (7.1.2)$$

$$V_{i,k+1/2} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i,k+1/2} (P_{i,k+1} - P_{i,k}) \quad (7.1.3)$$

Разностные уравнения (7.1.1) - (7.1.3) будут использоваться **для расчета давления** в узлах сетки.

**Аппроксимация уравнения (7.1)**  $m \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v}_1 = 0$ ,  $\mathbf{v}_1 = -f(S) \mathbf{v}$  для  $S$ :

$$h_x h_k L[fV]_{i,k} - m \frac{h_x h_k}{\tau} (J_{i,k}^{t+\tau} - J_{i,k}^t) = 0, \quad (7.1.4)$$

Здесь использовались обозначения  $J_{i,k}$  среднеинтегрального значения насыщенности в элементарной ячейке:

$$J_{i,k} = (h_x h_k)^{-1} \int_{D_{i,k}} S dx dy \quad (7.1.5)$$

и для величин  $V_1$ :

$$V_{1,i+1/2,k} = (fV)_{i+1/2,k}, \quad V_{1,i,k+1/2} = (fV)_{i,k+1/2}, \quad (7.1.6)$$

$$\sigma_{i,k+1/2} = K_{i,k+1/2} \cdot K_{i,k+1/2}^*, \quad \sigma_{i+1/2,k} = K_{i+1/2,k} \cdot K_{i+1/2,k}^*, \quad (7.1.7)$$

$$K_{i+1/2,k}^* = K^*(S_{i+1/2,k}), \quad S_{i+1/2,k} = 0.5(J_{i+1,k} + J_{i,k}), \quad (7.1.8)$$

$$K_{i,k+1/2}^* = K^*(S_{i,k+1/2}), \quad S_{i,k+1/2} = 0.5(J_{i,k} + J_{i,k+1}). \quad (7.1.9)$$

Существенным моментом задачи является наличие линий разрыва абсолютной проницаемости  $K(x, z)$ . В этом случае для расчета проницаемости в дробных узлах сетки целесообразно воспользоваться ее среднегеометрической аппроксимацией:

$$K_{i,k+1/2} = 2K_{i,k+1} \cdot K_{i,k} / (K_{i,k+1} + (h_{k+1}/h_k)K_{i,k}), \quad K_{i+1/2,k} = 2K_{i+1,k} \cdot K_{i,k} / (K_{i+1,k} + K_{i,k}). \quad (7.1.10)$$

## 7.2. Итерационный метод расчета давления

### 7.2.1. Построение системы уравнений с пятидиагональной матрицей

Будем использовать систему  $h_x h_k L[V]_{i,k} = V_{i+1/2,k} - V_{i-1/2,k} + V_{i,k+1/2} - V_{i,k-1/2} = 0$  (7.1.1) разностных уравнений суммарного потока для определения давления  $P_{i,k}$  и решать ее итерационным методом при заданных  $J_{i,k}$ . Рассмотрим пару уравнений (7.1.1)  $L[V]_{1,k} = 0$  и  $L[V]_{2,k} = 0$  при  $k = \overline{1, N_z - 1}$ . С учетом (7.1.2) и (7.1.3) запишем:

$$L[V]_{1,k} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{3/2,k} (\hat{P}_{2,k} - \hat{P}_{1,k}) - \frac{h_k}{h_x} \sigma_{1/2,k} (\hat{P}_{1,k} - \hat{P}_{0,k}) + \quad (7.2.1)$$

$$+ \frac{h_x}{h_k} \sigma_{1,k+1/2} (\hat{P}_{1,k+1} - \hat{P}_{1,k}) - \frac{h_x}{h_k} \sigma_{1,k-1/2} (\hat{P}_{1,k} - \hat{P}_{1,k-1}) = 0$$

$$L[V]_{2,k} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{5/2,k} (\hat{P}_{3,k} - \hat{P}_{2,k}) - \frac{h_k}{h_x} \sigma_{3/2,k} (\hat{P}_{2,k} - \hat{P}_{1,k}) +$$

$$+ \frac{h_x}{h_k} \sigma_{2,k+1/2} (\hat{P}_{2,k+1} - \hat{P}_{2,k}) - \frac{h_x}{h_k} \sigma_{2,k-1/2} (\hat{P}_{2,k} - \hat{P}_{2,k-1}) = 0$$

Здесь значения  $P_{0,k}$  определены из граничных условий, а остальные сеточные функции определим так:  $\widehat{P}_{3,k} \rightarrow P_{3,k}^{(n-1)}$ ,  $\widehat{P}_{1,k} \rightarrow P_{1,k}^{(n)}$ ,  $\widehat{P}_{2,k} \rightarrow P_{2,k}^{(n)}$ . Переходя к одномерной нумерации и вводя обозначения  $U_{2k+1} = P_{1,k}^{(n)}$  и  $U_{2k} = P_{2,k}^{(n)}$ ,  $k = \overline{0, N_z} \Rightarrow$  перестроим систему уравнений.

1) Пусть  $k=1$ , тогда  $L[V]_{1,1} = 0$  будет иметь вид (см. Рис.7.3):

$$a_3 U_1 + 0 \cdot U_2 - c_3 U_3 + b_4 U_4 + a_5 U_5 = -\varphi_3$$

$$a_3 = \sigma_{1,1/2} h_x / h_1, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = (\sigma_{3/2,1} + \sigma_{1/2,1}) h_1 / h_x + (\sigma_{1,3/2} + \sigma_{1,1/2}) h_x / h_1,$$

$$b_4 = \sigma_{3/2,1} \cdot h_x / h_1, \quad a_5 = \sigma_{1,3/2} \cdot h_x / h_1, \quad \varphi_3 = \sigma_{1/2,1} \widehat{P}_{0,1} \cdot h_1 / h_x$$

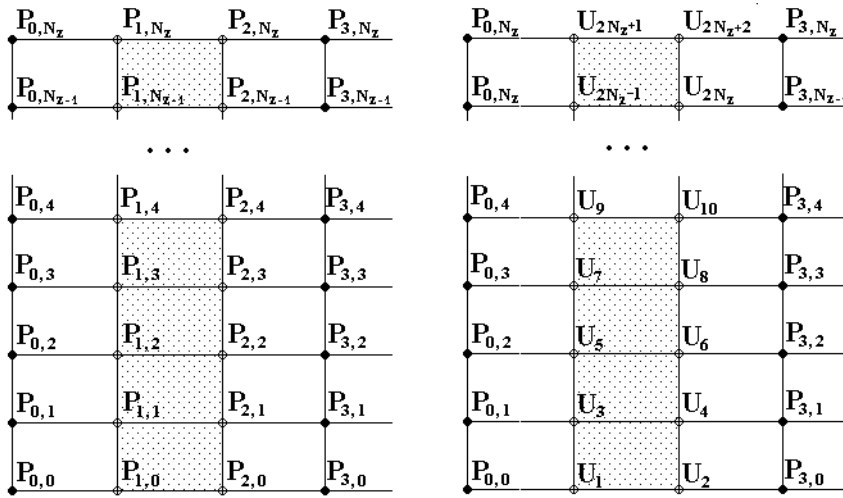


Рис. 7.3

2) Пусть  $k=1$ , тогда  $L[V]_{2,1} = 0$  будет иметь вид:

$$a_4 U_2 + b_4 U_3 - c_4 U_4 + 0 \cdot U_5 + a_6 U_6 = -\varphi_4$$

$$a_4 = \sigma_{2,1/2} h_x / h_1, \quad b_4 = \sigma_{3/2,1} \cdot h_x / h_1, \quad c_4 = (\sigma_{3/2,1} + \sigma_{5/2,1}) h_1 / h_x + (\sigma_{2,1/2} + \sigma_{2,3/2}) h_x / h_1,$$

$$b_5 = 0, \quad a_6 = \sigma_{2,3/2} \cdot h_x / h_1, \quad \varphi_4 = \sigma_{5/2,1} \cdot P_{3,1}^{(n-1)} \cdot h_1 / h_x$$

Далее, при  $k=2$  перепишем уравнения  $L[V]_{1,2} = 0$  и  $L[V]_{2,2} = 0$ , при  $k=3$  перепишем уравнения  $L[V]_{1,3} = 0$  и  $L[V]_{3,2} = 0$ , и т.д. В итоге получим систему уравнений с пятидиагональной матрицей (рис. 7.4).

**Замечание.** Коэффициенты двух первых и двух последних строк матрицы, а также значения правых частей  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_{2N_z+1}$  и  $\varphi_{2N_z+2}$ , должны быть образованы за счет граничных условий (18) непроницаемости границ пласта.

Запишем систему уравнений в общем виде

$$a_m U_{m-2} + b_m U_{m-1} - c_m U_m + b_{m+1} U_{m+1} + a_{m+2} U_{m+2} = -\varphi_m, \quad m = \overline{3, 2N_z}, \quad (7.2.2)$$

аналогичном системе с трехдиагональной матрицей:

$$A_m y_{m-1} - C_m y_m + B_m y_{m+1} = -F_m, \quad m = \overline{1, N-1}.$$

$-c_1$	$b_2$	$a_3$								
$b_2$	$-c_2$	$0$	$a_4$							
$a_3$	$0$	$-c_3$	$b_4$	$a_5$				$0$		
	$a_4$	$b_4$	$-c_4$	$0$	$a_6$					
		$a_5$	$0$	$-c_5$	$b_6$	$a_7$				
				...	...	...	...	...		
					$a_{2N_z-1}$	$0$	$-c_{2N_z-1}$	$b_{2N_z}$	$a_{2N_z+1}$	
		$0$				$a_{2N_z}$	$b_{2N_z+1}$	$-c_{2N_z}$	$0$	$a_{2N_z+2}$
							$a_{2N_z+1}$	$0$	$-c_{2N_z+1}$	$b_{2N_z+2}$
								$a_{2N_z+2}$	$b_{2N_z+2}$	$-c_{2N_z+2}$

Рис. 7.4

### 7.2.2. Метод пятидиагональной прогонки

Сеточные функции  $U_m$  системы (7.2.2) вычисляются по общей рекуррентной формуле

$$U_m = \alpha_m U_{m+1} + \beta_m U_{m+2} + \gamma_m, \quad (i = \overline{1, 2N_z}) \quad (7.2.3)$$

Перепишем уравнение (7.2.2) с помощью (7.2.3):

$$\begin{aligned} & a_m (\alpha_{m-2} U_{m-1} + \beta_{m-2} U_m + \gamma_{m-2}) + b_m U_{m-1} - c_m U_m + b_{m+1} U_{m+1} + a_{m+2} U_{m+2} + \varphi_m = \\ & = (a_m \alpha_{m-2} + b_m) U_{m-1} + (a_m \beta_{m-2} - c_m) U_m + b_{m+1} U_{m+1} + a_{m+2} U_{m+2} + \varphi_m + a_m \gamma_{m-2} = \\ & = [(a_m \alpha_{m-2} + b_m) \alpha_{m-1} + (a_m \beta_{m-2} - c_m)] U_m + [\beta_{m-1} (a_m \alpha_{m-2} + b_m) + b_{m+1}] U_{m+1} + a_{m+2} U_{m+2} + \\ & \quad + \varphi_m + a_m \gamma_{m-2} + (a_m \alpha_{m-2} + b_m) \gamma_{m-1} = \\ & = [(a_m \alpha_{m-2} + b_m) \alpha_{m-1} + a_m \beta_{m-2} - c_m] [\alpha_m U_{m+1} + \beta_m U_{m+2} + \gamma_m] + \dots = \end{aligned}$$

Обозначим  $R_m = c_m - \alpha_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2}) - a_m \beta_{m-2}$ , тогда

$$\begin{aligned} & [\beta_{m-1} (a_m \alpha_{m-2} + b_m) + b_{m+1} - R_m \alpha_m] U_{m+1} + [a_{m+2} - R_m \beta_m] U_{m+2} + \\ & + [\varphi_m + a_m \gamma_{m-2} + (a_m \alpha_{m-2} + b_m) \gamma_{m-1} - R_m \gamma_m] = 0 \end{aligned}$$

Это равенство выполняется, если равны нулю квадратные скобки, откуда получим, что прогоночные коэффициенты определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= (b_{m+1} + \beta_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2})) / R_m, \quad \beta_m = a_{m+2} / R_m, \\ \gamma_m &= (\varphi_m + a_m \gamma_{m-2} + \gamma_{m-1} (b_m + a_m \alpha_{m-2})) / R_m, \quad m = \overline{3, 2N_z} \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Из аппроксимации граничных условий на подошве пласта (первая и вторая строки матрицы) в общем случае следует, что

$$-c_1 U_1 + b_2 U_2 + a_3 U_3 = -\varphi_1, \quad b_2 U_1 - c_2 U_2 + a_4 U_4 = -\varphi_2.$$

Сравнивая первое выражение с рекуррентной формулой (7.2.4) при  $m=1$ , найдем значения коэффициентов прямой прогонки  $\alpha_1 = b_2/c_1$ ,  $\beta_1 = a_3/c_1$ ,  $\gamma_1 = \varphi_1/c_1$ .

Аналогично из второго выражения получим

$$\alpha_2 = \beta_1 b_2 / (c_2 - \alpha_1 b_2), \quad \beta_2 = a_4 / (c_2 - \alpha_1 b_2), \quad \gamma_2 = (\varphi_2 + \gamma_1 b_2) / (c_2 - \alpha_1 b_2).$$

**Самостоятельное задание.** Показать, что при  $m = \overline{1, 2N_z}$   $c_m > a_m + b_m + a_{m+2} + b_{m+1}$ , и, следовательно, условие устойчивости метода пятидиагональной прогонки выполнено.

Решив систему (7.2.3) для  $i = 1$  и  $i = 2$ , аналогичным образом рассмотрим и решим следующую "пару"  $L[V]_{3,k} = 0$ ,  $L[V]_{4,k} = 0$ ,  $k = \overline{1, N_z}$  и т.д.

**Замечание.** Из построения метода следует, что число  $N_x$  должно быть четным. Тогда в результате решения  $N_x/2$  систем вида (7.2.3) найдем давление во всех узлах сетки на  $n$ -ой итерации. Обозначим их через

$$\boxed{\bar{P}_{i,k} = P_{i,k}^{(n)}}, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad k = \overline{1, N_z}. \quad (7.2.5)$$

### 7.2.3. Уточнение итераций по давлению

Прежде, чем перейти к уточнению найденных значений  $\bar{P}_{i,k}$ , проинтегрируем уравнение (7.2) по  $z$  от 0 до  $H$  (по всей толщине пласта), учитывая, что  $U_x = \sigma(S)P'_x$ ,  $U_z = \sigma(S)P'_z$ :

$$\int_0^H \left( \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \cdot dz = \int_0^H \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dz + U_z \Big|_0^H = \int_0^H \frac{\partial U_x}{\partial x} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H U_x \cdot dz = 0$$

Здесь учтено, что в силу непроницаемости кровли и подошвы суммарный поток на границах  $z = 0$  и  $z = H$  отсутствует, см. граничные условия (7.7). Очевидно, величина  $\int_0^H U_x \cdot dz$  в любом сечении  $x$  не зависит от этой координаты. Тогда на сетке должно вы-

полняться соответствующее условие независимости суммы  $\sum_{k=1}^{N_z} V_{i+1/2,k}$  от индекса  $i$ .

Используем это свойство для уточнения вычисленных значений  $\bar{P}_{i,k}$ . Пусть  $P_{i,k}^{(n)} = \bar{P}_{i,k} + B_i$ ,  $i = \overline{1, N_x}$ ,  $k = \overline{1, N_z}$ , где  $B_i$  - некоторые поправки к найденным значениям давления  $\bar{P}_{i,k}$ . Тогда из (7.1.2), (7.1.3)  $V_{i+1/2,k} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} (P_{i+1,k} - P_{i,k})$ ,

$V_{i,k+1/2} = \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i,k+1/2} (P_{i,k+1} - P_{i,k})$  будем иметь:

$$V_{i,k+1/2}^{(n)} = \bar{V}_{i,k+1/2}, \quad V_{i+1/2,k}^{(n)} = \bar{V}_{i+1/2,k} + \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} (B_{i+1} - B_i) \quad (7.2.6).$$

Независимость суммы  $\sum_{k=1}^{N_z} V_{i+1/2,k}$  от индекса  $i$  означает, что должно выполняться равенство  $\sum_{k=1}^{N_z} V_{i+1/2,k}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N_z} V_{i-1/2,k}^{(n)}$ . Подставляя сюда соотношение (7.2.6), получим:

$$\sum_{k=1}^{N_z} \bar{V}_{i+1/2,k} + \sum_{k=1}^{N_z} \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} B_{i+1} - \sum_{k=1}^{N_z} \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k} B_i = \sum_{k=1}^{N_z} \bar{V}_{i-1/2,k} + \sum_{k=1}^{N_z} \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i-1/2,k} B_i - \sum_{k=1}^{N_z} \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i-1/2,k} B_{i-1}$$

Вводя обозначения  $A_i = \sum_{k=1}^{N_z} \frac{h_k}{h_x} \sigma_{i+1/2,k}$ ,  $\Phi_i = \sum_{k=1}^{N_z} (\bar{V}_{i-1/2,k} - \bar{V}_{i+1/2,k})$ , перепишем это разностное соотношение в виде:

$$A_{i-1} B_{i-1} - (A_{i-1} + A_i) B_i + A_i B_{i+1} = \Phi_i, \quad i = \overline{1, N_x} \quad (7.2.7)$$

где  $B_0 = 0$ ,  $B_{N_x+1} = 0$ .

Полученная система (7.2.7) линейных уравнений с трехдиагональной матрицей решается методом прогонки. Таким образом, вычислив  $B_i$  для всех  $i = \overline{1, N_x}$ , на  $n$ -ой итерации окончательно получим значения давления  $P_{i,k}^{(n)}$  при  $i = \overline{1, N_x}$ ,  $k = \overline{1, N_z}$ .

Итерационный процесс (вычисление “фонового” поля давления во всем пласте методом пятидиагональной прогонки по вертикали, а затем уточнение найденного поля при помощи трехдиагональной прогонки по горизонтали) продолжается до тех пор, пока не выполнится условие сходимости.

## Тема 8. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

### 8.1. Формулировка задач переноса

Линейное уравнение переноса, возникающее в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д., имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \nabla u = -f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad (8.1.1)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$  – скорость переноса.

Рассмотрим простейшую постановку задачи Коши при  $a = \text{const} > 0$ ,  $f = 0$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad (8.1.2)$$

$$u(x, 0) = v(x) \quad (8.1.3)$$

где  $v(x)$  – заданное начальное распределение функции  $u$ . Точное решение этой задачи может быть найдено методом характеристик

$$u(x, t) = v(x - at), \quad (8.1.4)$$

и представляет собой бегущую волну, распространяющиеся вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $a$ . Профиль волны задается начальным условием (8.1.4). Прямые линии  $x - at = \text{const}$  – характеристики уравнения (8.1.2). Решение (8.1.4) постоянной вдоль такой линии, поэтому говорят, что *начальные условия переносятся по характеристикам*. В данном случае решение легко строится без использования численных методов (рис. 8.1).

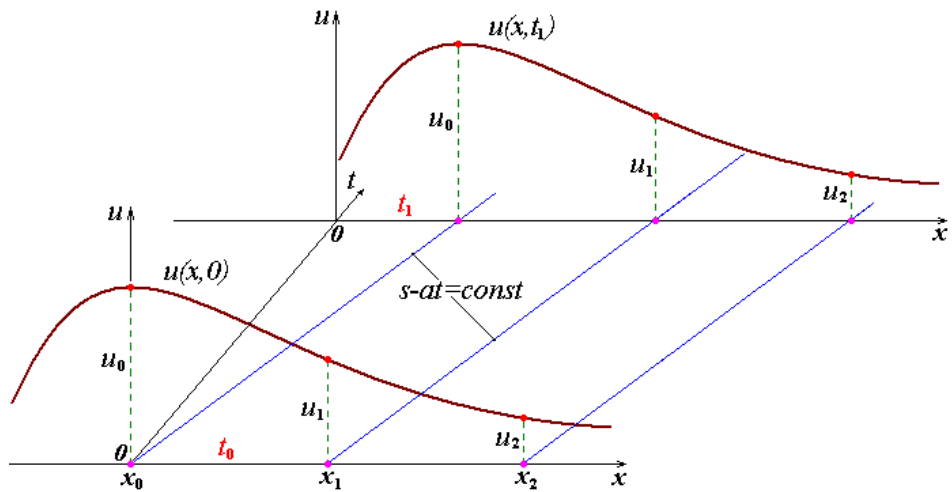


Рис. 8.1

Смешанная задача Коши ( $a = const > 0$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < X, \quad 0 < t < T; \quad (8.1.5)$$

$$\text{Н.у.: } u(x, 0) = v(x), \quad 0 \leq x \leq X; \quad (8.1.6)$$

$$\text{Г.у.: } u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T; \quad (8.1.7)$$

$$v(0) = \mu(0). \quad (8.1.8)$$

### 8.1. Разностные схемы

Рассмотрим сначала явные разностные схемы, аппроксимирующие уравнения (8.1.2), (8.1.3) и (8.1.5) – (8.1.7) при  $a > 0$  с порядком  $O(h_\tau + h_x)$ :

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{h_\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h_x} = 0, \quad (y_{t,i} + a \cdot y_{x,i} = 0), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad (8.1.9)$$

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{h_\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h_x} = 0, \quad (y_{t,i} + a \cdot y_{x,i} = 0), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1.10)$$

$$\text{Н.у.: } y_i^0 = v_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{Г.у.: } y_0^{j+1} = \mu^{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1.11)$$

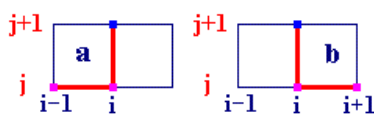


Рис. 8.2

Шаблоны схем (8.1.9) и (8.1.10) показаны на рис.8.2. Введя обозначение

$$\lambda = ah_\tau/h_x,$$

перепишем схемы (8.1.9) и (8.1.10) в виде

$$y_i^{j+1} = y_i^j (1 - \lambda) + \lambda y_{i-1}^j, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1.13)$$

$$y_i^{j+1} = y_i^j (1 + \lambda) - \lambda y_{i+1}^j, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (8.1.14)$$

**Критерий Куранта.** Необходимым и достаточным условием устойчивости схем (8.1.9) и (8.1.10) является выполнение неравенства

$$h_\tau \leq h_x/a. \quad (8.1.15)$$



Рассмотрим геометрическую интерпретацию устойчивости явных схем. По схеме (8.1.9) значение разностного решения переносится в узел  $(x_i, t_{j+1})$  по характеристике  $AA'$  с нижнего слоя из некоторой точки  $(x_*, t_j)$ , которая на слое  $t_j$  в общем случае не совпадает ни с одним из узлов  $(x_k, t_j)$ . Значение  $y_*^j$  в точке  $x_*$  определяется по значениям сеточной функции в соседних узлах сетки:  $y_*^{j+1} = y^j(x_*) = y_*^j$ . Если  $\lambda < 1$ , то  $x_* \in [x_{i-1}, x_i]$ . При этом  $y_*^j = y_i^j(1-\lambda) + \lambda y_{i-1}^j$ . (8.1.16)

Покажем, что в устойчивой схеме  $y_*^j$  определяется **интерполяцией** сеточной функции по ее значениям  $y_{i-1}$  и  $y_i$  в узлах  $x_{i-1}$  и  $x_i$ . Действительно, пусть характеристика  $AA'$  проходит через узел  $x_i$  на верхнем слое  $t_{j+1}$ , а на нижнем слое – через некоторую точку  $x_* = x_i - ah_\tau$  (см. рис.8.3, а). По формуле

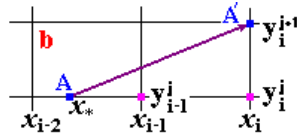
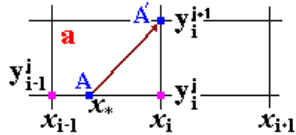


Рис.8.3

линейной интерполяции можно записать

$$y_*^j = y_{i-1}^j \frac{x_i - x_*}{h_x} + y_i^j \frac{x_* - x_{i-1}}{h_x} = y_{i-1}^j \frac{ah_\tau}{h_x} + y_i^j \left(1 - \frac{ah_\tau}{h_x}\right) = y_i^j(1-\lambda) + \lambda y_{i-1}^j, \quad (8.1.17)$$

что совпадает с формулой (8.1.16). Это значение без изменения перенесем по характеристике  $AA'$  в узел  $(x_i, t_{j+1})$ , т.е. положим  $y_i^{j+1} = y_*^j$ .

Если  $\lambda > 1$ , то  $x_* \notin [x_{i-1}, x_i]$ , рис. 8.3, б. В этом случае значение  $y_*^j$ , определяемое по формуле (8.1.16), является результатом **экстраполяции**, которая приводит к большим погрешностям. Это и есть причина неустойчивости схемы (8.1.9) при невыполнении критерия Куранта.

**Устойчивость схемы (8.1.9) по начальным данным.** Пусть теперь  $j = 0$ , что соответствует начальным условиям. Если внести возмущение начальных данных в окрестности точки  $x_*$ , то, очевидно, точное решение  $u(x, t)$  в узлах  $(x_k, t_{j+1})$  изменится. В то же время решение  $y_i^{j+1}$  разностной задачи при  $\lambda < 1$  не изменится, т.к. оно определяется только по значениям  $y_{i-1}$  и  $y_i$ .

**Схема (8.1.10).** Это абсолютно неустойчивая схема, т.к. при любых соотношениях между шагами  $h_x$  и  $h_\tau$  точка  $x_*$  лежит вне интервала  $[x_i, x_{i+1}]$ , рис. 8.4.

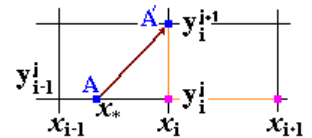


Рис.8.4

Рассмотрим случай  $a < 0$ . Наклон характеристик меняется: теперь схема (8.1.10) будет устойчивой при условии

$$h_\tau \leq h_x / |a|, \quad (8.1.18)$$

а схема (8.1.9) будет абсолютно неустойчивой (рис. 8.5).

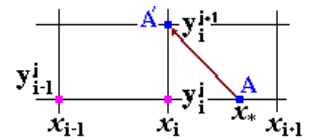


Рис.8.5

Схемы (8.1.9) и (8.1.10) называются также схемами бегущего счета типа «уголок». В первой из них для производной  $u'_x$  используется аппроксимация «против потока» (схема устойчива), во второй – «по потоку» (схема неустойчива). Алгоритм вычислений очень прост, см. рис. 8.6.

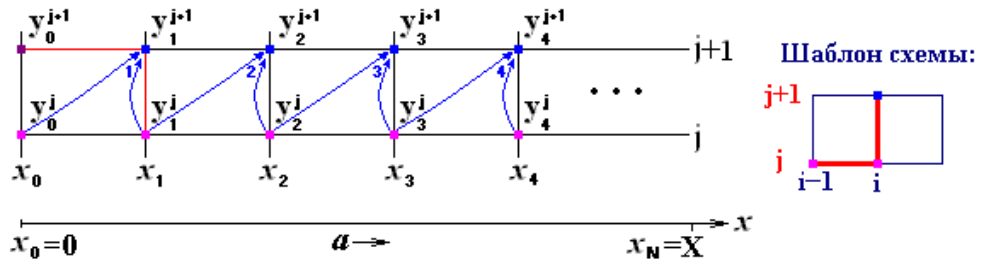


Рис. 8.6. Порядок вычислений по схеме (8.1.9)

В случае для знакопеременной скорости переноса  $a = a(x, t)$  используется комбинированная разностная схема, обеспечивающая при изменении направления скорости аппроксимацию «против потока»:

$$y_{t,i} + a_+ y_{\bar{x},i} + a_- y_{x,i} = 0 \quad (8.1.19)$$

$$\text{где } a_- = 0.5(a - |a|) = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ a, & a < 0 \end{cases}, \quad a_+ = 0.5(a + |a|) = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}.$$

Эта схема переходит в схемы (8.1.9) и (8.1.10) соответственно при  $a \geq 0$  и  $a < 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 2004.
2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 2003. – 352 с.
3. Калиткин М.И. Численные методы. – М.: Наука, 2005. – 412 с.
4. Конюхов В.М. Дисперсные потоки в нефтяных скважинах. – Казань: Изд-во КГУ, 1990. – 160 с.
5. Конюхов В.М., Храмченков М.Г., Чекалин А.Н. Миграция разноплотностных жидкостей в водоносных пластах сложной структуры. – Изд-во Казанского математ. общества, Казань, 2005.
6. Волков Ю.А., Конюхов В.М., Костерин А.В., Чекалин А.Н. Математическое моделирование имплозионного воздействия на пласт. – Казань: Изд-во "Плутон", 2004. – 96 с.
7. Мазо А.Б. Математическое моделирование процессов горячей обработки металлов. – Изд-во Казанский фонд "Математика", 1996.
8. Чекалин А.Н., Конюхов В.М., Костерин А.В. Двухфазная многокомпонентная фильтрация в нефтяных пластах сложной структуры. – Казань: Изд-во Казанского гос. ун-та, 2009. – 180с.
9. Карчевский М.М., Лапин А.В. Некоторые вопросы теории метода конечных элементов. – Изд-во КГУ, 1995.

## ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАДАНИЯ

### 1. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

ОДУ возникают в задачах движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей и т.д. Общий вид ОДУ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f(t, U), \quad U(t^0) = U^0, \quad t^0 < t < T. \quad (1)$$

**1. Метод Эйлера (схема ломаных).** Вводится сеточное разбиение области  $[t^0, T]$  с узлами  $t_i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ ,  $t_0 = t^0$ ,  $t_{i+1} = t_i + h$ ,  $h = (T - t^0)/N$ . Решение  $U(t)$  разлагается на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  в ряд Тейлора:

$$U_{i+1} = U_i + h \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_i + O(h^2), \quad \text{где } U_i = U(t_i).$$

Отсюда получается приближенное разностное уравнение Эйлера 2-го порядка точности:

$$Y_{i+1} = Y_i + h_i f(t_i, Y_i), \quad i = \overline{0, N-1}, \quad Y_0 = U^0. \quad (2)$$

**2. Метод Рунге-Кутты.** Наиболее часто употребляется схема 4-го порядка точности. Для неравномерной сетки с шагом  $h_i$  она имеет вид:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6} (K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i}), \quad i = \overline{0, N-1}, \quad Y_0 = U^0, \quad (2.1)$$

$$\text{где } K_{1,i} = f(t_i, Y_i), \quad K_{2,i} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} K_{1,i}\right), \quad (2.2)$$

$$K_{3,i} = f\left(t_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2} K_{2,i}\right), \quad K_{4,i} = f(t_i + h, Y_i + h K_{3,i}). \quad (2.3)$$

**3. Неявные разностные схемы.** Записываются на произвольном отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  в виде:

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1})], \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

**3.1. Метод последовательных приближений.** Алгебраическое уравнение (3) в общем случае является нелинейным. Если выполняется условие  $h|f'_U(t_i)| < 2$ , то решение уравнения (3) в каждой точке  $t_{i+1}$  ( $i = \overline{0, N-1}$ ) можно найти с заданной точностью  $\varepsilon$  методом последовательных приближений:

$$Y_{i+1}^{(s+1)} = Y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1}^{(s)})], \quad s = 0, 1, 2, \dots, S^*, \quad (3.1)$$

где  $S^*$  - номер итерации, на которой выполнилось условие сходимости  $\|Y_{i+1}^{(s+1)} - Y_{i+1}^{(s)}\| < \varepsilon$ .

**3.2. Схема типа «предиктор-корректор».** Используется, если трудно проверить условие сходимости метода последовательных приближений. В этих схемах задается нулевое приближение  $Y_{i+1}^{(0)} = Y_i$ , а первая и вторая итерации выполняются соответственно по схеме Эйлера и по схеме Рунге-Кутты 2-го порядка точности:

$$Y_{i+1}^{(1)} = Y_i + hf(t_i, Y_i), \quad Y_{i+1}^{(2)} = Y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, Y_i) + f(t_{i+1}, Y_{i+1}^{(1)})], \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (3.2)$$

**Задание.**

- а) Реализовать в программе методы 1-3, предусмотрев визуализацию расчетов.  
 б) Исследовать сходимость методов с помощью точного решения задачи.  
 в) Исследовать устойчивость разностного решения по начальным данным.

**Варианты заданий**

<i>Вариант</i>	$f(t,U)$	$t^0$	$U^0$	$T$
<b>1</b>	$-U - t$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	$-2U + 4t$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	$4/t^2 - U/t - U^2$	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	$1 + U(2t - 1)/t^2$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	$\cos t - U$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>9.5</b>
<b>6</b>	$\sec(t) + tg(t) \cdot U$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1.5</b>
<b>7</b>	$\sin t + U$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>12.5</b>
<b>8</b>	$-t + U(2t + 1)/t + U^2/t$	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>18.2</b>
<b>9</b>	$U^2/t^2 - 2$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>10.2</b>
<b>10</b>	$U/t + t/U$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2.3</b>
<b>11</b>	$0.5 \cdot \sin(2t) - U \cos t$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>5.2</b>
<b>12</b>	$(\sin(\ln U) + \cos(\ln t) + 1) \cdot U$	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>6.3</b>
<b>13</b>	$\exp(-\sin t) - U \cos t$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>9.3</b>
<b>14</b>	$tU^2 + 3tU$	<b>0</b>	<b>3</b>	<b>5.5</b>

## 2. Решение уравнений параболического типа (УПТ)

УПТ возникают в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д. Общий вид УПТ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(U) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + f(x, t, U), \quad x_0 < x < x_1, \quad t_0 < t < T; \quad (1)$$

$$\text{Н.у.: } U(x, t_0) = U^0(x), \quad \text{Г.у.: } U(x_0, t) = q_0(t) \quad a(U) \frac{\partial U}{\partial x}(x_1, t) = q_1(t). \quad (2)$$

1. Построить неявные разностные схемы вида  $y_{t,i} = (k_{i+0.5} \cdot y_x^{(\sigma)})_{\bar{x},i}$ , где  $k_{i+0.5} = 0.5 \cdot (a_i^{(\sigma)} + a_{i+1}^{(\sigma)})$  с порядком аппроксимации  $O(h_\tau + h_x^2)$  и  $O(h_\tau^2 + h_x^2)$  для произвольной правой части  $f(x, t, U)$  и коэффициента  $a(U)$ .
2. Составить программу решения задачи (1), (2) предусмотрев визуализацию расчетов на отрезке  $[x_0, x_1]$  в каждый момент времени при решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей вида:

$$A_m y_{m-1} - C_m y_m + B_m y_{m+1} = -F_m, \quad m = \overline{1, N-1}. \quad (a)$$

### Формулы трехдиагональной прогонки.

Сеточные функции  $y_m$  вычисляются по общей рекуррентной формуле:

$$y_m = \alpha_{m+1} y_{m+1} + \beta_{m+1}, \quad (m = \overline{0, N-1}), \quad (b)$$

где  $\alpha_m, \beta_m$  - неизвестные коэффициенты, которые вычисляются по формулам:

$$\alpha_{m+1} = B_m / (C_m - A_m \alpha_m), \quad \beta_{m+1} = (A_m \beta_m + F_m) / (C_m - A_m \alpha_m), \quad m = \overline{1, N-1} \quad (c)$$

Из аппроксимации граничных условий имеем:

$$-C_0 y_0 + B_0 y_1 = -F_0, \quad A_N y_{N-1} - C_N y_N = -F_N$$

$$\text{или } y_0 = \kappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \nu_2, \quad (d)$$

где  $\nu_1 = F_0 / C_0, \quad \nu_2 = F_N / C_N, \quad \kappa_1 = B_0 / C_0, \quad \kappa_2 = A_N / C_N$ .

Расчет начинается при  $\alpha_1 = \kappa_1, \quad \beta_1 = \nu_1$  с **прямой прогонки** по формулам (c), а затем по формулам (b) выполняется **обратная прогонка** при  $y_N = (\nu_2 + \kappa_2 \beta_N) / (1 - \kappa_2 \alpha_N)$ .

Параметры задачи должны удовлетворять условиям

$$A_m > 0, \quad B_m > 0, \quad C_m \geq A_m + B_m, \quad 0 \leq \kappa_1, \kappa_2 \leq 1, \quad \kappa_1 + \kappa_2 < 2,$$

обеспечивающим разрешимость и устойчивость метода.

3. Решить задачу теплопроводности (1), (2) на полупрямой  $x_0 < x < \infty$  для случая:

$$a(U) = a_0 U^m, \quad a_0 > 0, \quad m > 0; \quad f \equiv 0,$$

$$\text{Н.у.: } U(x, 0) = 0, \quad x \geq x_0; \quad \text{Г.у.: } U(x_0, t) = (c^2 m t / a_0)^{1/m}, \quad t > 0$$

и исследовать сходимость и устойчивость численного решения с помощью точного авторемодельного решения:

$$U(x, t) = \begin{cases} \left( \frac{cm}{a_0} (x_0 - x + ct) \right)^{1/m}, & x < x_0 + ct, \\ 0, & x > x_0 + ct \end{cases}$$

которое представляет собой температурную волну, бегущую с постоянной скоростью по нулевому фону температуры. Скорость движения волны  $c$  определяется скоростью роста температуры на границе из исходного граничного условия:  $U(x_0, t) = U_0(t), \quad t > 0$ .

4. Решить задачу теплопроводности (1), (2) на отрезке  $x_0 < x < x_1$  для заданной правой части и численно исследовать ее сходимость и устойчивость.

**Варианты заданий**

№ вар	$f(t, U)$	$t_0$	$q_0$	$q_1$	$T$
1	$-U - t$	0	$\sin(t)$	$\cos(t)$	10
2	$-\sqrt{U+t}$ ,	0	$\exp(-t)$	$1/(1+t)$	3
3	$-\sqrt{t} + U^2$	1	1	$\cos(t^2)$	3
4	$t^2 + \exp(-U)$	1	$\exp(-t)\sin(t)$	1	10
5	$\cos t - U$	0	$\exp(-\sqrt{t+t^2})$	$ \cos(t) $	10.
6	$\exp(-t) + \sqrt{U}$ ,	0	$\sqrt{\cos^2(t) + \exp(-t)}$	0	1.5
7	$\sin t + U$	0	$\cos(2t)$	$t/(1+t^2)$	$4\pi$ .
9	$\exp(t+U) + U^2$	1	1	$\exp(-t \cdot \cos(t))$	20
10	$2U^2 \cos(t)$	1	$1/t^2$	$\exp(-\sqrt{t})\sin(t)$	10
11	$U \cdot \sin(t)$	0	$\sqrt{ \sin(t) }$	$\sqrt{2/(1+t^2)}$	2

### 3. Решение уравнения переноса (УП)

УП возникают в задачах теплопроводности, фильтрации, диффузии и т.д. Рассмотрим две задачи переноса, отличающиеся направлением скорости  $a$ :

$a = \text{const} > 0$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < X, \quad t > 0; \quad (1_1)$$

$$\text{Н.у.: } U(x, 0) = U^0(x), \quad \text{Г.у.: } U(0, t) = \mu(t), \quad t > 0; \quad U^0(0) = \mu(0). \quad (2_1)$$

$a = \text{const} < 0$ :

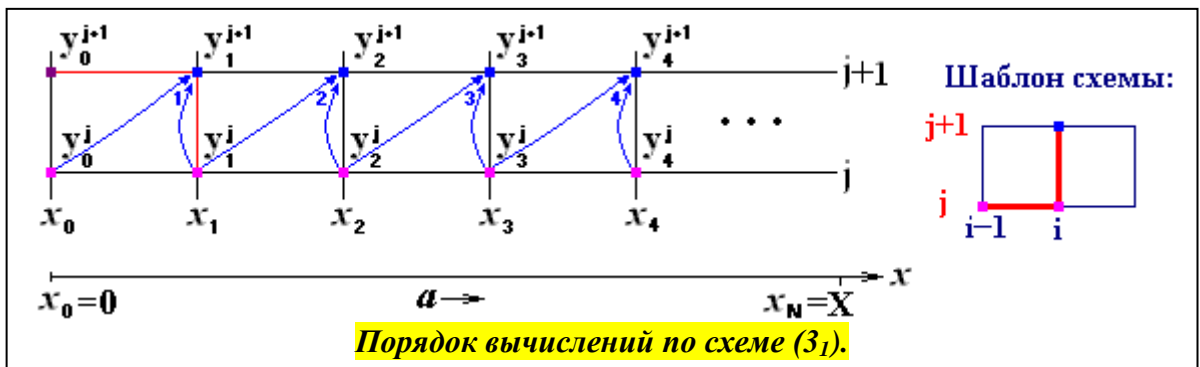
$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < X, \quad t > 0; \quad (1_2)$$

$$\text{Н.у.: } U(x, 0) = U^0(x), \quad \text{Г.у.: } U(X, t) = \mu(t), \quad t > 0; \quad U^0(X) = \mu(0). \quad (2_2)$$

5. Для решения задач (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) и (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>) воспользуемся явными разностными схемами бегущего счета типа «уголок» с аппроксимацией «против потока» с порядком  $O(h_\tau + h_x)$ :

1.1.  $a > 0$ :  $\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{h_\tau} + a \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h_x} = 0, \quad (y_{i,i} - a \cdot y_{x,i} = 0), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad (3)$

$$y_i^{j+1} = y_i^j (1 - \lambda) + \lambda y_{i-1}^j, \quad \lambda = ah_\tau/h_x, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3_1)$$

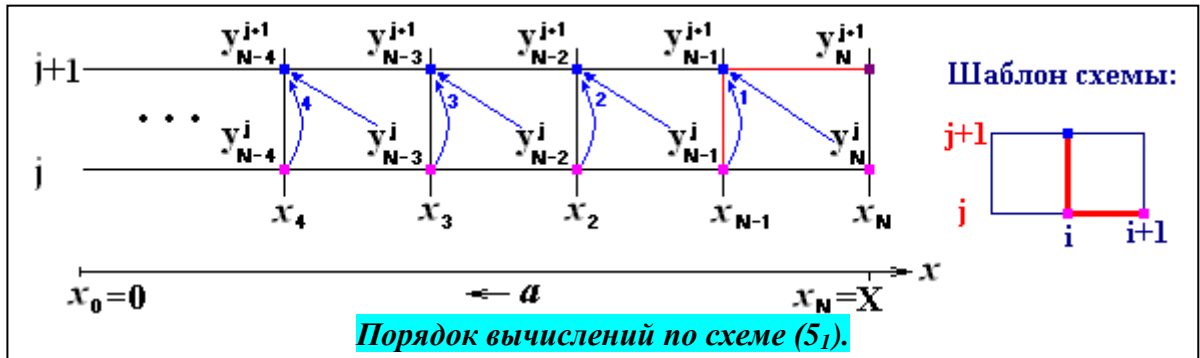


Аппроксимация начального и граничного условий для схемы (3):

$$\text{Н.у.: } y_i^0 = U^0(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{Г.у.: } y_0^{j+1} = \mu(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

1.2.  $a < 0$ :  $\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{h_\tau} + a \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h_x} = 0, \quad (y_{i,i} - a \cdot y_{x,i} = 0), \quad i = N-1, N-2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$

$$y_i^{j+1} = y_i^j (1 + \lambda) - \lambda y_{i+1}^j, \quad \lambda = ah_\tau/h_x, \quad i = N-1, N-2, \dots \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5_1)$$



Аппроксимация начального и граничного условий для схемы (5):



$$\mathbf{Н.у.}: y_i^0 = U^0(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad \mathbf{Г.у.}: y_N^{j+1} = \mu(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

6. Составить программу решения задач (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) и (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>), предусмотрев визуализацию расчетов на заданном отрезке  $[0, X]$  в каждый момент времени  $t$ .
7. Показать условную устойчивость численных решений задач (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) и (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>) при выполнении критерия Куранта

$$h_\tau \leq h_x / |a| \quad (7)$$

и абсолютную неустойчивость в противном случае.

8. Сравнить приближенное решение задач (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) и (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>) с точными их решениями

**4.1.** при  $a > 0$  на отрезке  $0 < x < X$  :

$$U(x, t) = \begin{cases} U^0(x - at), & x \geq at \\ \mu(t - x/a), & x < at \end{cases} \quad (8_1)$$

**4.2.** при  $a < 0$  на отрезке  $0 < x < X$  :

$$U(x, t) = \begin{cases} U^0(X - x - |a|t), & X - x \geq |a|t \\ \mu(t - (X - x)/|a|), & X - x < |a|t \end{cases} \quad (8_2)$$

которые представляют собой волны, распространяющиеся вдоль оси  $Ox$  с постоянной скоростью  $a$ .

**Исходные данные для задач (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) и (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>):**  $\mu(t)$ ,  $U^0(x)$ ,  $X$  – вариант таблицы,  $a$  – произвольный параметр.

9. Решить задачу (1<sub>1</sub>), (2<sub>1</sub>) для знакопеременной скорости  $a = a(x, t)$  с помощью комбинированной разностной схемы:

$$y_{t,i} + a_+ y_{\bar{x},i} + a_- y_{x,i} = 0 \quad (9)$$

$$\text{где } a_- = 0.5(a - |a|) = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ a, & a < 0 \end{cases}, \quad a_+ = 0.5(a + |a|) = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}.$$

Эта схема переходит в схемы (3) и (5) соответственно при  $a \geq 0$  и  $a < 0$ .

При реализации схемы (9) учесть, что

- а) если в точке  $x_N = X$  скорость  $a(X, t) < 0$  (приток в область), то  $y_N^{j+1} = y_N^j$ ;
- б) если в точке  $x_0 = 0$  скорость  $a(0, t) < 0$  (вытекание из области), то значение функции  $y_0^{j+1}$  должно вычисляться по схеме (5);
- в) временной шаг в силу изменения модуля скорости  $|a(x, t)|$  должен пересчитываться по критерию Куранта на каждом временном слое

$$h_\tau^{j+1} = \begin{cases} h_x / \max_{i=1, N_x} |a_i^{j+1}|, & \max_{i=1, N_x} |a_i^{j+1}| \neq 0 \\ h_x, & \max_{i=1, N_x} |a_i^{j+1}| = 0 \end{cases}.$$

**Исходные данные для задачи (9):**  $\mu(t)$ ,  $U^0(x)$ ,  $X$  – вариант таблицы, скорость для всех вариантов  $a(x, t) = \sin(t/4.5 - x/2)$ .

Варианты заданий

№ вар	$U^0(x)$	$X$	$\mu(t)$
1	0	10	$\exp(-t/20) \cdot  \sin(t) $
2	$x/X \cdot  \sin(x) $	10	$\exp(-\sqrt{t}/15) \cdot  \sin(t/5) $
3	$x/X \cdot \sqrt{ \sin(x) }$	10	$1 - \exp(-t/10)$
4	$(x/X)^2 \cdot  \cos(x-1) $	10	$(1 - \exp(-t/10)) \cdot  \cos(t) $
5	$(x/X)^3 \cdot  \sin(x/5) $	10	$\sqrt{t/60} \cdot  \cos(t) $
6	$(x/X)^2 \cdot \sin^2(2x)$	10	$(t/50)^{1/5} \cdot  \cos(2t+1) $
7	$\sqrt{x/X} \cdot  \cos(2x-1) $	10	$(t/50)^{1/6} \cdot \sin^2(t/6)$
8	$\sqrt{1-x/X} \cdot  \sin(3x) $	10	$1/(1+t/100) \cdot \sin^2(t/8)$
9	$\sqrt{x/X} \cdot \sqrt{ \sin(x) }$	10	$(1 - \exp(-t/10)) \cdot \cos^2(t)$
10	$\sqrt{1-x/X} \cdot \sqrt{ \sin(x) }$	10	$(1 - \exp(-t/10)) \cdot \sqrt{ \cos(t) }$
11	$(1-x/X)^5 \cdot  \sin(x/2) $	10	$\exp(-t/20) \cdot \sqrt{ \sin(t/5) }$
12	$x/X \cdot (1-x/X)^{3/2} \cdot  \sin(x) $	10	$\exp(-t/20) \cdot  \sin(t) \cdot (1-t^{1/3}) $
13	$x/X \cdot \sqrt{ \cos(x/3) }$	10	$\sqrt{ \cos(t) } \cdot (1+t)^{-1/4}$
14	$ \sin^{1/3}(x/X)  \cdot (1+x/X)^{-1/3}$	10	$ \cos(t) ^{1/4} \cdot (t/100)^{1/3}$
15	0.5	10	$(1.5 - \exp(-\sqrt{t}/20)) \cdot \cos^4(t)$
16	1	10	$\exp(-t/30) \cdot \sqrt{ \cos(2t) }$