Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа

1

Биномиальное вероятности можно вычислять приближенно используя предельные теоремы.

1) Локальная теорема Лапласа (Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления событий равна p $(0<p<1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$$

здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Зам $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\exists$ таб фнц $\varphi(x)$

2) Теорема Пуассона

Если $n \to \infty$ и $p = p_n \to 0$, так, что $np \to \lambda (>0)$, то $\forall\, m \geq 0$ $P(m|n,p) \to P(m|\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

3) Интегральная теорема Лапласа. 2

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равно

$$P(k_1 : k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - ф-ция Лапласа

$$x' = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad x'' = (k_2 - np)/\sqrt{npq}$$

Зам. разработаны таблицы для значений ф-ции Лапласа, и ф-ция Лапласа нечетная

$$\Phi(-x) = -\Phi(x) \quad \text{и} \quad \Phi(x) \approx 0{,}5 \text{ при } x>5$$

также существует рекомендация: когда n - велико, то при $p<0{,}01$ и $np<10$ использовать формулу Пуассона, и при $np \geq 10$ ~~формулу~~ лок. формулу Муавра - Лапласа, т.к. $qp>0{,}01$

Примеры:

1) Вероятность набора абонентом телефонного номера с ошибкой равна 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных заказов не более 2 номеров были набраны с ошибкой?

Решение.

не более 2 номеров означает: "либо ошибки в наборе нет", либо "два номера набрано с ошибкой", либо «один номер набран с ошибкой». Вероятность искомого события будет складываться из вероятностей этих трех событий (3)

$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2)$.

Согласно условию $n = 500$, $p = 0{,}001$

$np < 10$. По формуле Пуассона $\lambda = np = 0{,}5$

$$\frac{0{,}5^0}{0!} e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5}{1!} e^{-0{,}5} + \frac{0{,}5}{2!} e^{-0{,}5} \approx 0{,}9856$$

2) При установившимся технологическом процесса происходит в среднем 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определить вероятность того, что в течение часа на 80 веретен происходит 7 обрывов нити.

Решение

Вероятность обрыва нити равна $P = \frac{10}{100} = 0{,}1$

тогда $q = 1 - p = 0{,}9 \Rightarrow p, q > 0{,}01 \Rightarrow$ Используем локальную ф-лу Муавра - Лапласа

$$P(7) = \frac{1}{\sqrt{80 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \varphi\left(\frac{7 - 80 \cdot 0{,}1}{\sqrt{80 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}}\right) = \frac{1}{2{,}6833} \varphi(-0{,}37)$$

$\varphi(-0{,}37) = \varphi(0{,}37) = 0{,}6443$

3) Передается закодированное сообщение (4)
из 1100 символов. Вероятность ошибки при
декодировании каждого символа независимо
от других, найти вероятность того, что число
ошибок в принятом сообщении не превышает 20

Р-е

Применим интегральную формулу Муавра-Лапласа

$p = 0{,}01$; $q = 0{,}99$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

$$P_{1100}(0 \leq k \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 - 1100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{0 - 1100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}}\right)$$

4) Вероятность появления в каждом
из независимых испытаний равна 0,2.
Найти наименьшее число испытаний
при котором с вероятностью 0,99 можно
ожидать, что ~~отклонение~~ относительная частота
появления событий отклоняется от ее вероятности
по модулю не более чем на 0.04.

Решение

k - число успехов
n - число испытаний
ε - отклонение

вероятность появления равна $p=0,02$, тогда (5)

при $n\to\infty$ $\frac{k}{n}\to p=0,02$

И фактически $P=0,99$ есть $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)$

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=P\left(-\varepsilon\leq\frac{k}{n}-p\leq\varepsilon\right)=$$

$$=P\left((p-\varepsilon)n\leq k\leq(p+\varepsilon)n\right)\Rightarrow$$ По ф-ле

Муавра-Лапласа

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=\Phi\left(\frac{(p+\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{(p-\varepsilon)n-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

Дальнейший алгоритм следующий: - найти по таблице при каком аргументе фнц $\Phi(x)=\frac{P}{2}$ и решить ~~ур~~ уравнение $X=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, относительно n.

Таб. можно посмотреть в учебниках:

1) С.В. Симушкин, Л.Н. Пушкин, Задачи по теории вероятностей - Казань: Казан. ун-т, 2011 - 223с.

2) В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.

- также во 2 учебнике много разобранных примеров.

...