получим

$$a_k = \frac{2}{l}\left( -\frac{l\xi}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi + \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{l}\xi \right)\Bigg|_0^{l/2} +$$

$$+\frac{2}{l}\left( -\frac{l^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi + \frac{l\xi}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{l}\xi - \frac{l^2}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{l}\xi \right)\Bigg|_{l/2}^{l} = \frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

Следовательно, искомое решение по формуле (4.5) имеет вид

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}t} \sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

### 4.2.2. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \qquad (4.6)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = 0, \qquad (4.7)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \ge 0.$$

Будем искать решение этой задачи в виде ряда Фурье по функциям $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (4.8)$$

считая при этом $t$ параметром. Представим функцию $f(x,t)$ в виде ряда Фурье:

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x,\ f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi. \qquad (4.9)$$

Подставляя ряды (4.8) и (4.9) в исходное уравнение (4.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 u_k(t)+\frac{du_k(t)}{dt}-f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi}{l}x=0 .$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, то есть

$$\frac{du_k(t)}{dt}=-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 u_k(t)+f_k(t) . \qquad (4.10)$$

Для определения $u_k(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Далее начальные условия (4.7) дают

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0)\sin\frac{k\pi}{l}x=0 ,$$

следовательно,

$$u_k(0)=0 . \qquad (4.11)$$

Условие (4.11) полностью определяют решение (4.10), а именно

$$u_k(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau . \qquad (4.12)$$

Таким образом, решение исходной задачи согласно формулам (4.8) и (4.12) запишется в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau)d\tau\sin\frac{k\pi}{l}x . \qquad (4.13)$$

Далее, воспользовавшись выражением (4.9) для $f_k(t)$, найденное решение (4.13) можно представить с помощью функции точечного источника $G(x,\xi,t)$ следующим образом:

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$