МОНОГРАФИИ ПО МАТЕМАТИКЕ. № 5

В.И. Жегалов, А.Н. Миронов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Казанское математическое общество — 2001

Казанское математическое общество
Российская федерация, 420008
Татарстан, Казань,
Университетская 17, НИИММ

Kazan Mathematical Society
NIIMM, 17, University str.,
Kazan, Tatarstan
420008, Russian Federation

e-mail: kfm@ksu.ru

УДК 517.956
ББК В161.62
Ж 46

Ж 46 Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными // Казанское математическое общество. — 2001. — 226 с.

Научный редактор — доктор физ.-мат. наук, профессор Ю.В. Обносов

Рецензенты:
Кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета
Доктор физ.-мат. наук, профессор Ф.Г. Мухлисов

ISBN 5-900975-26-6

Отличительный признак рассматриваемых в монографии уравнений — наличие старшей частной производной: все остальные производные, входящие в уравнение, получаются отбрасыванием в ней по крайней мере одного дифференцирования. Частными случаями данного класса являются уравнения Аллера, Бианки, Буссинеска-Лява, Манжерона, встречающиеся при изучении процессов вибрации и поглощения влаги корнями растений, а также играющие существенную роль в теориях аппроксимации и отображений. В книге излагается, в частности, новый вариант классического метода Римана, на основе которого решаются как уже известные, так и новые граничные задачи.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов.

Библиогр. 130.

ISBN 5-900975-26-6

Оглавление

Предисловие

В евклидовом пространстве точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ рассмотрим оператор

$$D \equiv D_n \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \tag{1}$$

и пусть M — линейный однородный дифференциальный оператор с переменными коэффициентами, содержащий лишь производные, получаемые из D отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Основной целью нашего исследования являются уравнения вида

$$(D + M)u = f(x). \tag{2}$$

В соответствии с классификацией из [3, с. 15–16] уравнение (2) относится к гиперболическому типу.

Известно [6, с. 63], что дифференциальные уравнения с оператором (1) используются при изучении процессов, связанных с явлениями вибрации и другими задачами механики и математической физики, а также играют существенную роль в теориях аппроксимации и отображений [6, с. 109]. К виду (2) специальными подстановками приводятся уравнения

$$\frac{\partial^n F(\omega, x)}{\partial \omega^n} - \frac{\partial^n F(\omega, x)}{\partial x^n} - \sum_{i+k<n} P_{ik}(\omega, x) \frac{\partial^{i+k} F(\omega, x)}{\partial \omega^i \partial x^k} = H(\omega, x) \tag{3}$$

в смешанных переменных: комплексной по ω и действительной по x [75]. В свою очередь, к задаче Коши для частных форм (3) сводится задача интегрального представления преобразований одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие [76], [77, с. 5–13]. Задача Гурса для уравнений с итерациями операторов (1) тоже связана с задачей Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [6, п. 7.4 главы 7].

Первая известная нам публикация, обнаруженная А.А. Андреевым (Самарский университет, кафедра уравнений математической физики) об уравнениях вида (2) относится к 1879 г. и принадлежит

А. Старкову [67]. Им рассмотрен частный случай $Mu \equiv c(x)u$: путем некоторой последовательности подстановок сконструирован ряд, представляющий общий интеграл этого уравнения. В дальнейшем различные вопросы, связанные с указанным случаем, изучались другими авторами, в том числе сравнительно недавно [20], [103], [129]. В 1895 г. Л. Бианки [95] и О. Николетти [116] предложили распространение на общий случай (2) метода решения задачи Коши, разработанного в свое время Б. Риманом для уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y). \tag{4}$$

Заметим, что Луиджи Бианки был специалистом не только в области дифференциальных уравнений: Д.Я. Стройк в своей книге по истории математики называет его "самым блестящим представителем дифференциальной геометрии в Италии" 19 века [68, с. 221]. Через 50 лет результаты Л. Бианки были для $n = 3$ переоткрыты Е. Лаэ [109], а в 1956 – 1958 г.г. появились публикации М.К. Фаге [74], [75], посвященные этому же уравнению. В статье [75] при этом отмечалось, что "... Бианки и Николетти разработали лишь формальную часть теории, не вдаваясь в аналитические детали ... ". В той же статье был представлен вариант метода Римана, более соответствующий современному уровню развития математики. Здесь же обращает на себя внимание некоторая самооценка автора: "... изучение сопровождается довольно сложными выкладками" [75, с. 281]. В названии же работы уравнению присваивается имя Бианки. Позднее [77, с. 11] М.К. Фаге указал, что первым автором термина "уравнение Бианки" был Бейтмен [94]. Мы будем называть (2) основным уравнением, поскольку далее рассматриваются другие уравнения, в которых оператор D входит в продифференцированной форме.

Перечисленные выше авторы развивали метод Римана, отправляясь от его классического варианта. Однако, имеется модификация этого метода [11, §§ 4–6], [2, с. 62–66], которая заключается в том, что исходное тождество, использованное Риманом, берется в иной форме. Предлагаемое ниже развитие метода Римана базируется как раз на указанной модификации. При этом введено еще одно изменение: функция Римана определяется не как решение сопряженного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, число которых очень быстро увеличивается с ростом n, а как решение некоторого интегрального уравнения. Оба указанных изменения привели, на наш взгляд, к существенному уменьшению сложности выкладок, и вывод окончательных формул решения стал более прозрачным. К тому же появились дополнительные возможности получения функции Римана в явном виде путем непосредственного решения интегрального уравнения.

В книге для уравнения (2) рассматриваются также новые характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях. Здесь картина разрешимости, по сравнению с известными задачами Коши и Гурса, существенно меняется.

К более сложным уравнениям, в которые оператор D входит в продифференцированной форме, также применяется предложенное нами развитие метода Римана. Пока что это удалось сделать только для некоторых частных случаев обсуждаемых уравнений.

Иной подход используется при исследовании уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{m} a_k L^k u = 0, \tag{5}$$

где L^k может быть, в частности, итерацией k-го порядка от оператора D. Удалось получить общее представление решений уравнения (5), аналогичное классической формуле общего решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

К классу уравнений со старшими производными мы относим также систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(x) u_k + f_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства, которая с разных точек зрения изучалась А.В. Бицадзе [4], Т.В. Чекмаревым [85] – [88], О.М. Теутом [70], И.Е. Плещинской [56] – [58] и другими.

Поясним здесь цели нашего исследования на примере $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_{1x_1} &= a(x_1, x_2)u_1 + b(x_1, x_2)u_2 + f(x_1, x_2), \\ u_{2x_2} &= c(x_1, x_2)u_1 + d(x_1, x_2)u_2 + g(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Задача Гурса для (7) рассматривается в характеристическом прямоугольнике $T = \{x_{10} < x_1 < x_{11}, x_{20} < x_2 < x_{21}\}$ и состоит в отыскании функций u_1, u_2 по известным их значениям

$$u_1(x_{10}, x_2) = \varphi_1(x_2), \quad u_2(x_1, x_{20}) = \varphi_2(x_1). \tag{8}$$

Наряду с термином “задача Гурса” часто употребляется название “характеристическая задача”. Ее решение существует и единственно. При внимательном рассмотрении формул (7) – (8) нетрудно заметить некоторое несоответствие: u_1, u_2 входят в (7) равноправно, а в граничных условиях (8) каждая из этих функций жестко связана с определенной характеристикой. В связи с данным обстоятельством естественной представляется мысль о замене (8) следующими более общими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(x_2)u_1(x_{10}, x_2) + \alpha_{12}(x_2)u_2(x_{10}, x_2) = m_1(x_2), \\ \alpha_{21}(x_1)u_1(x_1, x_{20}) + \alpha_{22}(x_1)u_2(x_1, x_{20}) = m_2(x_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, в постановку задачи включается тогда частный случай, когда уравнения (7) имеют вид

$$u_{1x_1} = 0, \quad u_{2x_2} = 0, \tag{10}$$

а условия (8) —

$$u_1(x_1, x_{20}) = m_2(x_1), \quad u_2(x_{10}, x_2) = m_1(x_2). \tag{11}$$

Из (10) следует, что u_1 должна зависеть лишь от x_2, а u_2 — лишь от x_1. Поэтому (11) не могут выполняться в общей своей форме: необходимо, чтобы $m_1(x_2)$ и $m_2(x_1)$ были константами. Если они равны соответственно λ и μ, то

$$u_1 = \mu + \Phi_1(x_2), \quad u_2 = \lambda + \Phi_2(x_1)$$

с произвольными функциями $\Phi_1(x_2)$, $\Phi_2(x_1)$, обращающимися в нуль при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}$, дадут решение задачи (10) – (11). Следовательно, в общей постановке задача (7), (9) может быть как неразрешимой, так и разрешимой, причем во втором случае решение может быть как единственным (задача Гурса), так и содержащим произвольные функции. Таким образом, возникает вопрос об условиях, обеспечивающих тот или иной характер разрешимости задачи (7), (9). В предлагаемой книге (глава 4) как раз и рассматривается этот вопрос по отношению к системе (6) при $n = 2$, 3. Конечно, задача может быть легко сформулирована для любого n. Именно эту общую постановку мы будем называть “общей характеристической задачей”.

Глава 1. Задачи Коши и Гурса для основного уравнения

В п.п. 1 – 2 следующего параграфа мы для удобства дальнейших рассуждений изложим указанную выше модификацию метода Римана.

§ 1. Случай двух независимых переменных

1. Метод интегральных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x,y) - \int_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)d\xi - \int_{y_0}^{y} K_2(y,x,\eta)\varphi(x,\eta)d\eta -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi = F(x,y) \quad (1.1)$$

с непрерывными коэффициентами. Известно [51, § 28], что его решение существует и единственно. Нашей задачей здесь является запись решения в виде обозримой формулы.

Возьмем сначала частные случаи:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) - \int_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)\varphi_1(\xi,y)d\xi = F_1(x,y),\\ \varphi_2(x,y) - \int_{y_0}^{y} K_2(y,x,\eta)\varphi_2(x,\eta)d\eta = F_2(x,y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обычным способом, отыскивая их решения в виде ряда Неймана, получим (см., напр., [46, § 21])

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,y) = F_1(x,y) + \int_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi)F_1(\xi,y)d\xi,\\ \varphi_2(x,y) = F_2(x,y) + \int_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)F_2(x,\eta)d\eta, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где резольвенты Γ_k имеют вид:

$$\begin{gathered}
\Gamma_1(x,y,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{1,m}(x,y,\xi), \quad K_{1,0} \equiv K_1, \\
K_{1,m}(x,y,\xi) = \int_{\xi}^{x} K_1(x,y,\xi_1) K_{1,m-1}(\xi_1,y,\xi) d\xi_1, \\
m = 1,2,\dots, \\
\Gamma_2(y,x,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{2,m}(y,x,\eta), \quad K_{2,0} \equiv K_2, \\
K_{2,m}(y,x,\eta) = \int_{\eta}^{y} K_2(y,x,\eta_1) K_{2,m-1}(\eta_1,x,\eta) d\eta_1, \\
m = 1,2,\dots .
\end{gathered} \tag{1.4}$$

При этом Γ_1, Γ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}
\Gamma_1(x,y,\xi) = K_1(x,y,\xi) + \int_{\xi}^{x} K_1(x,y,\xi_1)\Gamma_1(\xi_1,y,\xi) d\xi_1 = \\
= K_1(x,y,\xi) + \int_{\xi}^{x} K_1(\xi_1,y,\xi)\Gamma_1(x,y,\xi_1) d\xi_1, \\
\Gamma_2(y,x,\eta) = K_2(y,x,\eta) + \int_{\eta}^{y} K_2(y,x,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,x,\eta) d\eta_1 = \\
= K_2(y,x,\eta) + \int_{\eta}^{y} K_2(\eta_1,x,\eta)\Gamma_2(y,x,\eta_1) d\eta_1,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Теперь обратимся к общему случаю уравнения (1.1). Будем искать его решение в форме

$$\varphi(x,y) = \varphi_0(x,y) + \int_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi)\varphi_0(\xi,y) d\xi + \int_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta) d\eta, \tag{1.6}$$

где $\varphi_0(x,y)$ — новая искомая функция. Подставляя (1.6) в (1.1) и принимая во внимание (1.5), получим

$$\varphi_0(x,y) - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} K_0(x,y,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta) d\eta d\xi = F(x,y), \tag{1.7}$$

$$
\begin{aligned}
K_0(x,y,\xi,\eta) = K_1(x,y,\xi)\Gamma_2(y,\xi,\eta) + K_2(y,x,\eta)\Gamma_1(x,\eta,\xi) + \\
+ K(x,y,\xi,\eta) + \int_\xi^x K(x,y,\xi_1,\eta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,\xi)d\xi_1 + \\
+ \int_\eta^y K(x,y,\xi,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1. \quad (1.8)
\end{aligned}
$$

Поступая с (1.7), как с (1.3), найдем его решение в виде

$$
\varphi_0(x,y) = F(x,y) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \Gamma_0(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \qquad (1.9)
$$

где

$$
\begin{gathered}
\Gamma_0(x,y,\xi,\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} K_{0,m}(x,y,\xi,\eta), \quad K_{0,0} \equiv K_0, \\
K_{0,m}(x,y,\xi,\eta) = \int_\xi^x \int_\eta^y K_0(x,y,\xi,\eta)K_{0,m-1}(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1 d\xi_1, \\
m = 1,2,\ldots\,.
\end{gathered} \qquad (1.10)
$$

Подставляя (1.9) в (1.6), получим окончательную формулу решения:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = F(x,y) + \int_{x_0}^x \Gamma_1(x,y,\xi)F(\xi,y)d\xi + \\
+ \int_{y_0}^y \Gamma_2(y,x,\eta)F(x,\eta)d\eta + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \Gamma(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \quad (1.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x,y,\xi,\eta) = \Gamma_0(x,y,\xi,\eta) + \int_\xi^x \Gamma_1(x,y,\xi_1)\Gamma_0(\xi_1,y,\xi,\eta)d\xi_1 + \\
+ \int_\eta^y \Gamma_2(y,x,\eta_1)\Gamma_0(x,\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1. \quad (1.12)
\end{aligned}
$$

Замечание. Проследив изложенный вывод формулы (1.11) (он заимствован из [11, § 3]), а также учитывая абсолютную и равномерную сходимость рядов (1.4), (1.10) и рядов, получаемых из них дифференцированием (при соответствующей гладкости коэффициентов в (1.1)), нетрудно сделать вывод, что степень гладкости $\varphi(x,y)$ будет той же, что у K_1, K_2, K, F.

Только что описанный процесс получения формулы (1.11) можно, очевидно, считать доказательством существования решения уравнения (1.1). Покажем, что некоторое продолжение рассуждений дает возможность доказать и единственность.

Действительно, считая в (1.6)

$$\varphi(x,y) - \int_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)d\eta$$

временно известной функцией, мы можем с помощью резольвенты $\Gamma_1^*(x,y,\eta)$ прийти к соотношению

$$\varphi_0(x,y) + \int_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)d\eta = \varphi(x,y) +$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \Gamma_1^*(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)d\xi - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \Gamma_1^*(x,y,\xi)\Gamma_2(y,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta)d\eta d\xi.$$

Опять рассматривая здесь правую часть как известную, разрешим это уравнение через резольвенту для ядра "$-\Gamma_2$". Тогда придем для φ_0 к уравнению вида (1.7), которое в свою очередь разрешим по формуле вида (1.9). Функция, играющая роль F, будет представлять собой однородный интегральный оператор от φ. Таким образом, мы доказали, что (1.6) определяет взаимно однозначное соответствие между решениями φ уравнения (1.1) и решениями φ_0 уравнения (1.7), при этом тривиальному значению $\varphi_0 \equiv 0$ соответствует $\varphi \equiv 0$.

Пусть теперь в (1.1) $F \equiv 0$. Тогда и (1.7) будет однородным для φ_0. Но для (1.7) имеет место теорема единственности. Следовательно, $\varphi_0 \equiv 0$, откуда по сказанному следует $\varphi \equiv 0$.

Итак, дополненное рассуждение можно считать доказательством существования и единственности решения уравнения (1.1).

Рассмотрим теперь в прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ **задачу Гурса:**

$$L(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1.13}$$

$$u(x_0,y) = \varphi(y), \quad u(x,y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0). \tag{1.14}$$

Путем непосредственного интегрирования (1.13) с учетом (1.14) находим

$$u(x,y) + \int_{x_0}^{x} b(\xi,y)u(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} a(x,\eta)u(x,\eta)d\eta +$$
$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} [c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - b_\eta(\xi,\eta)]u(\xi,\eta)d\eta d\xi = F(x,y), \tag{1.15}$$

$$F(x,y)=\varphi(y)+\psi(x)-\psi(x_0)+\int_{x_0}^{x} b(\xi,y_0)\psi(\xi)d\xi+$$
$$+\int_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)d\eta. \quad (1.16)$$

Очевидно, соотношение (1.15) есть частный случай уравнения (1.1). Подставляя в (1.11) значения K_1, K_2, K, F из (1.15), (1.16), получим в терминах резольвент решение задачи Гурса, которое будет регулярным, если $\varphi \in C^1[y_0,y_1]$, $\psi \in C^1[x_0,x_1]$, а также существуют a_x, b_y и при этом a, b, c, a_x, $b_y \in C(\overline{D})$. Окончательная формула содержит определенную информацию о структуре решения уравнения (1.13): при произвольных $\varphi(y)$, $\psi(x)$ ее можно рассматривать как интегральное представление решений данного уравнения.

Заметим еще, что проведенное здесь рассуждение можно рассматривать как еще одно доказательство существования и единственности решения задачи Гурса.

2. Метод Римана

Остановимся на решении задачи Гурса (1.13) – (1.14). Решение интегрального уравнения

$$v(x,y)-\int_{\xi}^{x} b(\alpha,y)v(\alpha,y)d\alpha-\int_{\eta}^{y} a(x,\beta)v(x,\beta)d\beta+$$
$$+\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y} c(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha=1 \quad (1.17)$$

будем называть функцией Римана. Это есть частный случай (1.1), поэтому v существует и единственна. Когда нужно подчеркнуть зависимость v от (ξ,η), будем писать $v=R(x,y,\xi,\eta)$. Из (1.17) непосредственно усматривается, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial R}{\partial x}-b(x,\eta)R\equiv 0 \text{ при } y=\eta,\\ \frac{\partial R}{\partial y}-a(\xi,y)R\equiv 0 \text{ при } x=\xi,\\ R(x,y,x,y)\equiv 1.\end{gathered} \quad (1.18)$$

Если, как в предыдущем пункте a, b, c, a_x, $b_y \in C(\overline{D})$, то для любой непрерывной в $\overline{D}$ функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условиям u_x, u_y, $u_{xy} \in C(D)$, имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x \partial y} - RL(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - aR\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x} - bR\right)\right]. \quad (1.19)$$

Оно проверяется непосредственно, при этом надо принять во внимание, что по (x,y) R удовлетворяет сопряженному с $L(u) = 0$ уравнению (см. (1.17)). Полагая в (1.19) $u(x,y)$ решением (1.13), меняя ролями переменные (x,ξ), (y,η) и вычисляя затем двойной интеграл по ξ, η в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$, с учетом тождеств (1.18) и значений (1.14), получим

$$\begin{aligned} u(x,y) = R(x,y_0,x,y)\psi(x) + R(x_0,y,x,y)\varphi(y) - R(x_0,y_0,x,y)\psi(x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x}\left[b(\alpha,y_0)R(\alpha,y_0,x,y) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y)\right]\psi(\alpha)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,\beta)R(x_0,\beta,x,y) - \frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y)\right]\varphi(\beta)d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}R(\alpha,\beta,x,y)f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha. \quad (1.20) \end{aligned}$$

Это и есть решение задачи Гурса.

Считая $\varphi(y)$, $\psi(x)$ произвольными функциями, можно рассматривать (1.20) как общее представление регулярных решений уравнения (1.13) [2, с. 66].

Конечно, функция R удовлетворяет и традиционному ее определению: она есть решение уравнения

$$v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0$$

с условиями

$$v\,|_{y=\eta} = \exp\int_{\xi}^{x} b(\alpha,\eta)d\alpha, \quad v\,|_{x=\xi} = \exp\int_{\eta}^{y} a(\xi,\beta)d\beta. \quad (1.21)$$

Тождество (1.19) можно использовать и для решения задачи Коши. Для этого его следует записать в несколько иной форме (объединяя правую часть с первым слагаемым левой части):

$$RL(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}(uR)_y - u(R_y - aR)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}(uR)_x - u(R_x - bR)\right].$$

Интегрируя это тождество по области, в которой рассматривается задача Коши, с применением формулы Грина, придем к известному результату [2, с. 67].

3. Варианты эффективного решения

3.1. Функции Римана для уравнений с нулевыми инвариантами. В связи с формулой (1.20) важным является вопрос о построении функции Римана в явном виде, ибо тогда решение задачи Гурса тоже приобретает замкнутую форму. Имеются обзоры уравнений, для которых указанное построение удается сделать [102], [16].

В частности, функция Римана записывается в явном виде в том случае, когда выполняется хотя бы одно из условий $h = a_x + ab - c \equiv 0$, $k = b_y + ab - c \equiv 0$, функции h и k являются известными инвариантами [71, с. 176].

Пусть $k \equiv 0$. Тогда сопряженное к (4) уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a\right) v = 0. \tag{1.22}$$

Уравнение (1.22) можно разрешить в квадратурах [71, с. 177]:

$$v(x, y, \xi, \eta) = \int_{\eta}^{y} \exp\left(\int_{\beta_1}^{y} a(x, \beta) d\beta + \int_{\xi}^{x} b(\alpha, \beta_1) d\alpha\right) \varphi(\beta_1) d\beta_1 + \\ + \exp\left(\int_{\eta}^{y} a(x, \beta) d\beta\right) \psi(x).$$

Здесь $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — произвольные функции. Учитывая условия (1.21), получим явную запись для функции Римана

$$v(x, y, \xi, \eta) = \exp\left(\int_{\eta}^{y} a(x, \beta) d\beta + \int_{\xi}^{x} b(\alpha, \eta) d\alpha\right). \tag{1.23}$$

В случае $h \equiv 0$ сопряженное уравнение записывается в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right) v = 0.$$

Аналогично вышеизложенному получаем

$$v(x, y, \xi, \eta) = \exp\left(\int_{\eta}^{y} a(\xi, \beta) d\beta + \int_{\xi}^{x} b(\alpha, y) d\alpha\right). \tag{1.24}$$

3.2. Новые варианты интегральных уравнений для функции Римана. Здесь мы излагаем [34] некоторый подход к решению данного вопроса, основанный на возможности так записать интегральное уравнение для функции Римана, что оно будет содержать лишь двойной интеграл.

Запишем уравнение, предшествующее (1.21), в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-a\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-b\right)v=hv, \quad h=a_x+ab-c. \tag{1.25}$$

Построим сначала функцию Римана R для (1.25), считая $h\equiv 0$. Нетрудно проверить непосредственно, что R есть решение задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+a\right)R=0, \tag{1.26}$$

$$R(x,\eta,\xi,\eta)=\exp\int_x^\xi b(\alpha,\eta)d\alpha, \quad R(\xi,y,\xi,\eta)=\exp\int_y^\eta a(\xi,\beta)d\beta. \tag{1.27}$$

Как было сказано выше, уравнение (1.26) решается в квадратурах. Проделав это с учетом (1.27), найдем

$$R(x,y,\xi,\eta)=\exp\left(\int_y^\eta a(x,\beta)d\beta+\int_x^\xi b(\alpha,\eta)d\alpha\right). \tag{1.28}$$

Пусть теперь $h\not\equiv 0$. Рассматривая уравнение (1.25) как неоднородное, запишем его решение по формуле (1.20), в которой предварительно проинтегрируем по частям слагаемые, содержащие производные от R. Полагая $x_0=\xi$, $y_0=\eta$, имеем:

$$\begin{aligned}v(x,y)=R(\xi,\eta,x,y)v(\xi,\eta)&+\\ &+\int_\xi^x R(\alpha,\eta,x,y)\left[\frac{\partial v(\alpha,\eta)}{\partial\alpha}-b(\alpha,\eta)v(\alpha,\eta)\right]d\alpha+\\ &+\int_\eta^y R(\xi,\beta,x,y)\left[\frac{\partial v(\xi,\beta)}{\partial\beta}-a(\xi,\beta)v(\xi,\beta)\right]d\beta+\\ &\qquad+\int_\xi^x\int_\eta^y R(\alpha,\beta,x,y)h(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha.\end{aligned}$$

Здесь для краткости у v не записана вторая пара аргументов (ξ,η). Так как в соответствии с (1.21)

$$v(\xi,y,\xi,\eta)=\exp\int_\eta^y a(\xi,\beta)d\beta, \quad v(x,\eta,\xi,\eta)=\exp\int_\xi^x b(\alpha,\eta)d\alpha,$$

то выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю, а $v(\xi,\eta) = v(\xi,\eta,\xi,\eta) = 1$. Поэтому от предыдущей формулы остается

$$v(x,y) = \int_\xi^x \int_\eta^y R(\alpha,\beta,x,y)h(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha + R(\xi,\eta,x,y). \quad (1.29)$$

Аналогично можно рассуждать, отправляясь от записи уравнения для v в отличной от (1.25) форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a\right) v = kv, \quad k = b_y + ab - c. \quad (1.30)$$

Тогда функция Римана при $k \equiv 0$ дается формулой

$$R_1(x,y,\xi,\eta) = \exp\left(\int_y^\eta a(\xi,\beta)d\beta + \int_x^\xi b(\alpha,y)d\alpha\right), \quad (1.31)$$

а вместо (1.29) получается равенство

$$v(x,y) = \int_\xi^x \int_\eta^y R_1(\alpha,\beta,x,y)k(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha + R_1(\xi,\eta,x,y). \quad (1.32)$$

Соотношения (1.29) и (1.32) есть как раз те варианты интегральных уравнений для функции Римана v, которые мы хотели получить. Интересно, что в случаях, когда хоть один из инвариантов h, k тождественно равен нулю, эти уравнения автоматически дают явный вид функции Римана (1.28) или (1.31).

Полученные уравнения можно использовать для выявления менее тривиальных, чем (1.23), (1.24) случаев построения функции Римана в явном виде.

1. Предположим, например, что

$$a = a_1(y) + \lambda x, \quad b = b_1(x) + \lambda y, \quad \lambda = const. \quad (1.33)$$

Тогда $h \equiv k$, и

$$R \equiv R_1 = \frac{r(x)s(y)\exp(-\lambda xy)}{r(\xi)s(\eta)\exp(-\lambda\xi\eta)},$$

$$r(x) = \exp\int_x^0 b_1(\alpha)d\alpha, \quad s(y) = \exp\int_y^0 a_1(\beta)d\beta. \quad (1.34)$$

Поэтому уравнения (1.29) и (1.32) совпадают и после введения новой функции

$$\omega = r(x)s(y)\exp(-\lambda xy)v(x,y) \quad (1.35)$$

записываются в форме

$$\omega(x,y) = r(\xi)s(\eta)\exp(-\lambda\xi\eta) - \int_\xi^x \int_\eta^y h(\alpha,\beta)\omega(\alpha,\beta)d\beta d\alpha. \tag{1.36}$$

Очевидно, (1.36) эквивалентно задаче для дифференциального уравнения

$$\omega_{xy} - h\omega = 0 \tag{1.37}$$

с условиями Гурса

$$\omega(x,\eta) = \omega(\xi,y) = r(\xi)s(\eta)\exp(-\lambda\xi\eta). \tag{1.38}$$

Предположим теперь, что инвариант h представляет собой произведение двух функций, каждая из которых зависит лишь от одного переменного

$$h = -\varphi(x)\psi(y). \tag{1.39}$$

Для этого случая уравнения (1.37) функция Римана известна [89]. Это есть функция Бесселя

$$\Omega = J_0\left(2\left[\int_\xi^x \varphi(\alpha)d\alpha \int_\eta^y \psi(\beta)d\beta\right]^{\frac{1}{2}}\right). \tag{1.40}$$

Снова пользуясь формулой (1.20), вычисляем $\omega(x,y)$ в виде

$$\omega = r(\xi)s(\eta)\exp(-\lambda\xi\eta)\Omega(x,y,\xi,\eta).$$

Отсюда по формулам (1.34), (1.35) находим функцию Римана исходного уравнения (1.13)

$$v = \Omega(x,y,\xi,\eta)\exp\left(\int_\xi^x b_1(\alpha)d\alpha + \int_\eta^y a_1(\beta)d\beta + \lambda(xy - \xi\eta)\right). \tag{1.41}$$

Итак, доказано утверждение: при условиях (1.33) и $c - ab - \lambda = \varphi(x)\psi(y)$ функция Римана уравнения (1.13) дается формулой (1.41).

2. Пусть теперь a, b, c имеют структурные представления

$$\begin{gathered} a = \frac{q'(y) + r_y(x,y)}{w(x,y)}, \quad b = \frac{p'(x) + r_x(x,y)}{w(x,y)}, \\ c = r_{xy}(x,y)w(x,y) + \varphi(x)\psi(y), \end{gathered} \tag{1.42}$$

где p, q, r, φ, ψ — любые непрерывные (вместе с производными из (1.42)) функции и при этом выполнено условие

$$w = p(x) + q(y) + r(x, y) \neq 0.$$

Оказывается, что в этом случае (1.39) тоже имеет место, уравнения (1.29), (1.32) совпадают и решаются по схеме предыдущего случая 1. Функция Римана имеет вид

$$v = \Omega(x, y, \xi, \eta) \, \frac{p(x) + q(y) + r(x, y)}{p(\xi) + q(\eta) + r(\xi, \eta)}, \tag{1.43}$$

где Ω по-прежнему дается формулой (1.40).

3. По изложенной схеме могут быть рассмотрены и более общие случаи, аналогичные 1 – 2. Так, если вместо (1.33) имеют место представления

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a_1(y) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \psi_k'(y), \\ b(x, y) &= b_1(x) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k'(x) \psi_k(y), \end{aligned} \tag{1.44}$$

и при этом

$$c - ab - \sum_{k=1}^{n} \varphi_k'(x) \psi_k'(y) = \varphi(x) \psi(y), \tag{1.45}$$

то

$$\begin{aligned} v = \Omega(x, y, \xi, \eta) \exp\Bigg(\int_{\xi}^{x} b_1(\alpha) d\alpha + \int_{\eta}^{y} a_1(\beta) d\beta + \\ + \sum_{k=1}^{n} [\varphi_k(x) \psi_k(y) - \varphi_k(\xi) \psi_k(\eta)] \Bigg). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Здесь φ, ψ, φ_k, ψ_k — любые функции из классов $\varphi, \psi \in C$, $\varphi_k, \psi_k \in C^1$.

Если вместо (1.42) a, b, c даются более общими формулами

$$\begin{aligned} a = \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k' + r_{ky}}{w_k}, \quad b = \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k' + r_{kx}}{w_k}, \\ c = \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{kxy}}{w_k} + 2 \sum_{\substack{k,\, s=1, \\ k<s}}^{m} \frac{(p_k' + r_{kx})(q_s' + r_{sy})}{w_k w_s} + \varphi(x) \psi(y), \end{aligned} \tag{1.47}$$

то функция Римана имеет вид

$$v = \Omega(x, y, \xi, \eta) \prod_{k=1}^{m} \frac{w_k(x, y)}{w_s(\xi, \eta)}. \tag{1.48}$$

Предполагается при этом, что для всех $w_k = p_k + q_k + r_k$ выполняются неравенства $w_k \neq 0$.

§ 2. Трехмерные задачи

Здесь речь пойдет об уравнении

$$L(u) \equiv u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{2.1}$$

Общая схема рассуждений будет такой же, как в § 1. Сначала обратимся к интегральному уравнению.

1. Решение задачи Гурса в резольвентах интегральных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x, y, z) - \int_{x_0}^{x} K_1(x, y, z, \xi)\varphi(\xi, y, z)d\xi - \int_{y_0}^{y} K_2(x, y, z, \eta)\varphi(x, \eta, z)d\eta -$$
$$- \int_{z_0}^{z} K_3(x, y, z, \zeta)\varphi(x, y, \zeta)d\zeta - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} L_1(x, y, z, \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta, z)d\eta d\xi -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} L_2(x, y, z, \xi, \zeta)\varphi(\xi, y, \zeta)d\zeta d\xi -$$
$$- \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} L_3(x, y, z, \eta, \zeta)\varphi(x, \eta, \zeta)d\zeta d\eta -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} K(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\varphi(\xi, \eta, \zeta)d\zeta d\eta d\xi = F(x, y, z) \tag{2.2}$$

с непрерывными коэффициентами. О существовании и единственности решения этого уравнения известно [51, § 30]. Как и для уравнения (1.1) из § 1 покажем, что его решение может быть записано в замкнутой форме.

Аналогами уравнений (1.2) здесь являются

$$\varphi_1(x,y,z) - \int_{x_0}^{x} K_1(x,y,z,\xi)\varphi_1(\xi,y,z)d\xi = F_1(x,y,z),$$

$$\varphi_2(x,y,z) - \int_{y_0}^{y} K_2(x,y,z,\eta)\varphi_2(x,\eta,z)d\eta = F_2(x,y,z),$$

$$\varphi_3(x,y,z) - \int_{z_0}^{z} K_3(x,y,z,\zeta)\varphi_3(x,y,\zeta)d\zeta = F_3(x,y,z).$$

Для каждого из них аналогично формулам (1.4) можно ввести резольвенты Γ_1, Γ_2, Γ_3 (соответственно), которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(x,y,z,\xi) &= K_1(x,y,z,\xi) + \int_{\xi}^{x} K_1(x,y,z,\xi_1)\Gamma_1(\xi_1,y,z,\xi)d\xi_1,\\
\Gamma_2(x,y,z,\eta) &= K_2(x,y,z,\eta) + \int_{\eta}^{y} K_2(x,y,z,\eta_1)\Gamma_2(x,\eta_1,z,\eta)d\eta_1,\\
\Gamma_3(x,y,z,\zeta) &= K_3(x,y,z,\zeta) + \int_{\zeta}^{z} K_3(x,y,\zeta_1,\zeta)\Gamma_3(x,y,\zeta_1,\zeta)d\zeta_1,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

играющим роль (1.5).

Введем замену искомой функции, аналогичную (1.6):

$$\varphi(x,y,z) = \varphi_0(x,y,z) + \int_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,z,\xi)\varphi_0(\xi,y,z)d\xi +$$
$$+ \int_{y_0}^{y} \Gamma_2(x,y,z,\eta)\varphi_0(x,\eta,z)d\eta + \int_{z_0}^{z} \Gamma_3(x,y,z,\zeta)\varphi_0(x,y,\zeta)d\zeta. \tag{2.4}$$

При подстановке (2.4) в (2.2) слагаемые с однократными интегралами оказываются в силу соотношений (2.3) равными нулю, а уравнение приобретает вид

$$\varphi_0(x,y,z) - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} K_1^0(x,y,z,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta,z)d\eta d\xi -$$

$$- \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} K_2^0(x,y,z,\xi,\zeta)\varphi_0(\xi,y,\zeta)d\zeta d\xi -$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} K_3^0(x,y,z,\eta,\zeta)\varphi_0(x,\eta,\zeta)d\zeta d\eta -$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} K^0(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\varphi_0(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi = F(x,y,z), \qquad (2.5)$$

где

$$K_1^0(x,y,z,\xi,\eta) = L_1(x,y,z,\xi,\eta) + K_1(x,y,z,\xi)\Gamma_2(\xi,y,z,\eta) +$$

$$+K_2(x,y,z,\eta)\Gamma_1(x,\eta,z,\xi) + \int_{\xi}^{x} L_1(x,y,z,\xi_1,\eta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,z,\xi)d\xi_1 +$$

$$+\int_{\eta}^{y} L_1(x,y,z,\xi,\eta_1)\Gamma_2(\xi,\eta_1,z,\eta)d\eta_1,$$

$$K_2^0(x,y,z,\xi,\zeta) = L_2(x,y,z,\xi,\zeta) + K_2(x,y,z,\xi)\Gamma_3(\xi,y,z,\zeta) +$$

$$+K_3(x,y,z,\zeta)\Gamma_1(x,y,\zeta,\xi) + \int_{\xi}^{x} L_2(x,y,z,\xi_1,\zeta)\Gamma_1(\xi_1,y,\zeta,\xi)d\xi_1 +$$

$$+\int_{\zeta}^{z} L_2(x,y,z,\xi,\zeta_1)\Gamma_3(\xi,y,\zeta_1,\zeta)d\zeta_1,$$

$$K_3^0(x,y,z,\eta,\zeta) = L_3(x,y,z,\eta,\zeta) + K_2(x,y,z,\eta)\Gamma_3(x,\eta,z,\zeta) +$$

$$+K_3(x,y,z,\zeta)\Gamma_2(x,y,\zeta,\eta) + \int_{\eta}^{y} L_3(x,y,z,\eta_1,\zeta)\Gamma_2(x,\eta_1,\zeta,\eta)d\eta_1 +$$

$$+\int_{\zeta}^{z} L_3(x,y,z,\eta,\zeta_1)\Gamma_3(x,\eta,\zeta_1,\zeta)d\zeta_1,$$

$$K^0(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = K(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) + L_3(x,y,z,\eta,\zeta)\Gamma_1(x,\eta,\zeta,\xi) +$$

$$+L_2(x,y,z,\xi,\zeta)\Gamma_2(\xi,y,\zeta,\eta) + L_1(x,y,z,\xi,\eta)\Gamma_3(\xi,\eta,z,\zeta) +$$

$$+\int_{\xi}^{x} K(x,y,z,\xi_1,\eta,\zeta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,\zeta,\xi)d\xi_1 +$$

$$+\int_{\eta}^{y} K(x,y,z,\xi,\eta_1,\zeta)\Gamma_2(\xi,\eta_1,\zeta,\eta)d\eta_1 +$$

$$+\int_{\zeta}^{z} K(x,y,z,\xi,\eta,\zeta_1)\Gamma_3(\xi,\eta,\zeta_1,\zeta)d\zeta_1.$$

Итак, в результате перехода к неизвестной функции $\varphi_0(x,y,z)$ мы освободились от однократных интегралов. Применим этот же прием к уравнению (2.5), чтобы получить уравнение, содержащее лишь тройной интеграл. Опять берем аналоги уравнений (1.2), но уже с двойными интегралами, содержащими K_1^0, K_2^0, K_3^0. Для них вводим резольвенты $\Gamma_1^0(x,y,z,\xi,\eta)$, $\Gamma_2^0(x,y,z,\xi,\zeta)$, $\Gamma_3^0(x,y,z,\eta,\zeta)$ и соотношения типа (1.5), (2.3):

$$\begin{gathered}
\Gamma_1^0(x,y,z,\xi,\eta) = K_1^0(x,y,z,\xi,\eta) + \\
+ \int_\xi^x \int_\eta^y K_1^0(x,y,z,\xi_1,\eta_1)\Gamma_1^0(\xi_1,\eta_1,z,\xi,\eta)d\eta_1 d\xi_1, \\
\Gamma_2^0(x,y,z,\xi,\zeta) = K_2^0(x,y,z,\xi,\zeta) + \\
+ \int_\xi^x \int_\zeta^z K_2^0(x,y,z,\xi_1,\zeta_1)\Gamma_2^0(\xi_1,y,\zeta_1,\xi,\zeta)d\zeta_1 d\xi_1, \\
\Gamma_3^0(x,y,z,\eta,\zeta) = K_3^0(x,y,z,\eta,\zeta) + \\
+ \int_\eta^y \int_\zeta^z K_3^0(x,y,z,\eta_1,\zeta_1)\Gamma_3^0(x,\eta_1,\zeta_1,\eta,\zeta)d\zeta_1 d\eta_1.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

После этого вводим искомую функцию φ_1 с помощью подстановки вида (1.7), (2.4):

$$\begin{multlined}
\varphi_0(x,y,z) = \varphi_1(x,y,z) + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \Gamma_1^0(x,y,z,\xi,\eta)\varphi_1(\xi,\eta,z)d\eta d\xi + \\
+ \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z \Gamma_2^0(x,y,z,\xi,\zeta)\varphi_1(\xi,y,\zeta)d\zeta d\xi + \\
+ \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \Gamma_3^0(x,y,z,\eta,\zeta)\varphi_1(x,\eta,\zeta)d\zeta d\eta.
\end{multlined} \tag{2.7}$$

Подставляя (2.7) в (2.5), обнаруживаем, что в силу формул (2.6) все двойные интегралы исчезнут, и уравнение (2.5) преобразуется в следующее:

$$\varphi_1(x,y,z) - \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z K^1(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\varphi_1(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi = F(x,y,z). \tag{2.8}$$

Здесь

$$K^1(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = K^0(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) +$$

$$+\int_\xi^x [K_1^0(x,y,z,\xi_1,\eta)\Gamma_2^0(\xi_1,\eta,z,\xi,\zeta) + K_2^0(x,y,z,\xi_1,\zeta)\Gamma_1^0(\xi_1,y,\zeta,\xi,\eta)]d\xi_1 +$$

$$+\int_{\eta}^{y}[K_1^0(x,y,z,\xi,\eta_1)\Gamma_3^0(\xi,\eta_1,z,\eta,\zeta)+K_3^0(x,y,z,\eta_1,\zeta)\Gamma_1^0(x,\eta_1,\zeta,\xi,\eta)]d\eta_1+$$

$$+\int_{\zeta}^{z}[K_2^0(x,y,z,\xi,\zeta_1)\Gamma_3^0(\xi,y,\zeta_1,\eta,\zeta)+K_3^0(x,y,z,\eta,\zeta_1)\Gamma_2^0(x,\eta,\zeta_1,\xi,\zeta)]d\zeta_1+$$

$$+\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}K^0(x,y,z,\xi_1,\eta_1,\zeta)\Gamma_1^0(\xi_1,\eta_1,\zeta,\xi,\eta)d\eta_1 d\xi_1+$$

$$+\int_{\xi}^{x}\int_{\zeta}^{z}K^0(x,y,z,\xi_1,\eta,\zeta_1)\Gamma_2^0(\xi_1,\eta,\zeta_1,\xi,\zeta)d\zeta_1 d\xi_1+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\int_{\zeta}^{z}K^0(x,y,z,\xi,\eta_1,\zeta_1)\Gamma_3^0(\xi,\eta_1,\zeta_1,\eta,\zeta)d\zeta_1 d\eta_1.$$

Для (2.8) обычным путем определяется резольвента $\Gamma(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$, с помощью которой записывается решение

$$\varphi_1(x,y,z)=F(x,y,z)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\Gamma(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)F(\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi. \tag{2.9}$$

Подставив это значение φ_1 в (2.7), а получающийся при этом результат — в (2.4), найдем окончательное решение в виде формулы, играющей роль (1.11). Эта формула содержит семь резольвент Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_1^0, Γ_2^0, Γ_3^0, Γ более простых уравнений, чем исходное.

Приведеное рассуждение есть еще одно доказательство существования решения. Единственность решения можно доказать аналогично тому, как это сделано в п. 1 § 1. А именно, рассуждая с (2.4) как с (1.6), убеждаемся в том, что φ_0 однозначно определяется через φ, причем $\varphi\equiv 0$ отвечает $\varphi_0\equiv 0$ и наоборот. Повторяя ту же схему, но уже по отношению к (2.7), приходим к однозначному определению φ_1 через φ_0, а следовательно, через φ. При этом значению $\varphi\equiv 0$ отвечает $\varphi_1\equiv 0$ и наоборот. По формуле (2.9) при $F\equiv 0$ имеем $\varphi_1\equiv 0$, а значит, и $\varphi\equiv 0$.

Обратимся теперь к **задаче Гурса***: найти в параллелепипеде* $D=\{x_0<x<x_1,\ y_0<y<y_1,\ z_0<z<z_1\}$ *решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{\overline{X}}=\varphi_1(y,z),\quad u\big|_{\overline{Y}}=\varphi_2(x,z),\quad u\big|_{\overline{Z}}=\varphi_3(x,y)\,. \tag{2.10}$$

Здесь X, Y, Z — грани D при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ соответственно. Черта сверху, как обычно, означает замыкание множества. Решение ищется в классе $C^{(1,1,1)}(D)\cap C(\overline{D})$, где $C^{(k,l,m)}$ означает существование непрерывных производных $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}}$ для всех $r_1\leqslant k$, $r_2\leqslant l$, $r_3\leqslant m$. Гладкость коэффициентов уравнения определяется включениями

$$\begin{gathered} a\in C^{(1,1,0)},\quad b\in C^{(0,1,1)},\quad c\in C^{(1,0,1)},\quad d\in C^{(1,0,0)},\\ e\in C^{(0,1,0)},\quad f\in C^{(0,0,1)},\quad g\in C^{(0,0,0)}, \end{gathered}\tag{2.11}$$

имеющими место в замкнутой области $\overline{D}$.

Относительно граничных значений (2.10) предполагается, что

$$\varphi_1\in C^{(1,1)}(\overline{X}),\quad \varphi_2\in C^{(1,1)}(\overline{Y}),\quad \varphi_3\in C^{(1,1)}(\overline{Z}),\tag{2.12}$$

а также выполняются условия согласования на ребрах D:

$$\varphi_2(x,z_0)=\varphi_3(x,y_0),\quad \varphi_1(y,z_0)=\varphi_3(x_0,y),\quad \varphi_1(y_0,z)=\varphi_2(x_0,z).\tag{2.13}$$

Путем непосредственного интегрирования (2.1) с учетом (2.10) приходим к интегральному уравнению

$$\begin{gathered} u(x,y,z)+\int_{x_0}^{x}[bu](\xi,y,z)d\xi+\int_{y_0}^{y}[cu](x,\eta,z)d\eta+\\ +\int_{z_0}^{z}[au](x,y,\zeta)d\zeta-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[(b_\eta+c_\xi-f)u](\xi,\eta,z)d\eta d\xi-\\ -\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}[(a_\xi+b_\zeta-e)u](\xi,y,\zeta)d\zeta d\xi-\\ -\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[(a_\eta+c_\zeta-d)u](x,\eta,\zeta)d\zeta d\eta+\\ +\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[(a_{\xi\eta}+b_{\eta\zeta}+c_{\xi\zeta}-d_\xi-e_\eta-\\ -f_\zeta+g)u](\xi,\eta,\zeta)d\zeta d\eta d\xi=F(x,y,z), \end{gathered}\tag{2.14}$$

$$\begin{gathered} F(x,y,z)=\varphi_1(y,z)+\varphi_2(x,z)+\varphi_3(x,y)-\\ -\varphi_1(y_0,z)-\varphi_2(x,z_0)-\varphi_3(x_0,y)+\varphi_1(y_0,z_0)+\\ +\int_{x_0}^{x}[b(\xi,y_0,z)\varphi_2(\xi,z)+b(\xi,y,z_0)\varphi_3(\zeta,y)-b(\xi,y_0,z_0)\varphi_2(\xi,z_0)]d\xi+\\ +\int_{y_0}^{y}[c(x_0,\eta,z)\varphi_1(\eta,z)+c(x,\eta,z_0)\varphi_3(x,\eta)-c(x_0,\eta,z_0)\varphi_3(x_0,\eta)]d\eta+ \end{gathered}$$

$$+\int_{z_0}^{z}[a(x_0,y,\zeta)\varphi_1(y,\zeta)+a(x,y_0,\zeta)\varphi_2(x,\zeta)-a(x_0,y_0,\zeta)\varphi_1(y_0,\zeta)]d\zeta-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[b_\eta+c_\xi-f](\xi,\eta,z_0)\varphi_3(\xi,\eta)d\eta d\xi-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}[a_\xi+b_\zeta-e](\xi,y_0,\zeta)\varphi_2(\xi,\zeta)d\zeta d\xi-$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[a_\eta+c_\zeta-d](x_0,\eta,\zeta)\varphi_1(\eta,\zeta)d\zeta d\eta.$$

Здесь, например, запись $[(b_\eta+c_\xi-f)u](\xi,\eta,z)$ означает $[b_\eta(\xi,\eta,z)+c_\xi(\xi,\eta,z)-f(\xi,\eta,z)]u(\xi,\eta,z)$.

Очевидно, (2.14) есть частный случай уравнения (2.2). Поэтому решение задачи (2.1), (2.10) существует, единственно и записывается с помощью резольвент некоторых интегральных уравнений, более простых, чем (2.14). Проследив рассуждения, касающиеся уравнения (2.2), можно убедиться, что включения (2.11) – (2.13) обеспечивают принадлежность $u(x,y,z)$ указанному классу $C^{(1,1,1)}(D)\cap C(\overline{D})$.

2. Развитие метода Римана

Рассмотрим трехмерный аналог уравнения (1.17):

$$v(x,y,z)-\int_{\zeta}^{z}a(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)d\gamma-$$

$$-\int_{\xi}^{x}b(\alpha,y,z)v(\alpha,y,z)d\alpha-\int_{\eta}^{y}c(x,\beta,z)v(x,\beta,z)d\beta+$$

$$+\int_{\eta}^{y}\int_{\zeta}^{z}d(x,\beta,\gamma)v(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta+\int_{\xi}^{x}\int_{\zeta}^{z}e(\alpha,y,\gamma)v(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}f(\alpha,\beta,z)v(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha-$$

$$-\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}\int_{\zeta}^{z}g(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha=1. \qquad (2.15)$$

Решение этого уравнения будем называть функцией Римана. Поскольку (2.15) есть частный случай (2.2), функция v существует и единственна. Очевидно, v зависит от ξ, η, ζ. Когда нужно эту зависимость подчеркнуть, будем писать $v = R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{gathered}(uR)_{xyz} \equiv RL(u) + ([R_z - aR]u)_{xy} + ([R_x - bR]u)_{yz} + \\ + ([R_y - cR]u)_{xz} - ([R_{yz} - (aR)_y - (cR)_z + dR]u)_x - \\ - ([R_{xz} - (aR)_x - (bR)_z + eR]u)_y - ([R_{xy} - (bR)_y - (cR)_x + fR]u)_z,\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $a, \ldots, f$ зависят от (x, y, z), $R = R(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, а $u(x, y, z)$ — любая функция из $C^{(1,1,1)}$.

В дальнейшем (2.16) играет роль соотношения (1.19): путем интегрирования этого тождества будут получены решения задач Гурса и Коши.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}A = R_x - bR, \quad B = R_y - cR, \quad C = R_z - aR, \\ M = R_{xy} - (bR)_y - (cR)_x + fR, \\ N = R_{yz} - (aR)_y - (cR)_z + dR, \\ P = R_{xz} - (aR)_x - (bR)_z + eR.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Путем дифференцирования соотношения (2.15) нетрудно убедиться в выполнении тождеств

$$\begin{array}{ll} A \equiv 0 \text{ при } y = \eta,\ z = \zeta; & B \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ z = \zeta; \\ C \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ y = \eta; & M \equiv 0 \text{ при } z = \zeta; \\ N \equiv 0 \text{ при } x = \xi; & P \equiv 0 \text{ при } y = \eta. \end{array} \tag{2.18}$$

3. Формула решения задачи Гурса

Считая в тождестве (2.16) функцию $u(x, y, z)$ решением уравнения (2.1), меняя ролями переменные (x, ξ), (y, η), (z, ζ) и вычисляя затем тройной интеграл по ξ, η, ζ в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$, $z_0 < \zeta < z$ с учетом (2.18), получим

$$u(x, y, z) = R(x, y, z_0)\varphi_3(x, y) + R(x, y_0, z)\varphi_2(x, z) +$$

$$+R(x_0,y,z)\varphi_1(y,z) - R(x,y_0,z_0)\varphi_3(x,y_0) -$$
$$-R(x_0,y,z_0)\varphi_3(x_0,y) - R(x_0,y_0,z)\varphi_2(x_0,z) + R(x_0,y_0,z_0)\varphi_1(y_0,z_0) +$$
$$+\int_{x_0}^{x}[A(\alpha,y_0,z_0)\varphi_3(\alpha,y_0) - A(\alpha,y,z_0)\varphi_3(\alpha,y) - A(\alpha,y_0,z)\varphi_2(\alpha,z)]d\alpha +$$
$$+\int_{y_0}^{y}[B(x_0,\beta,y_0)\varphi_3(x_0,\beta) - B(x,\beta,z_0)\varphi_3(x,\beta) - B(x_0,\beta,z)\varphi_1(\beta,z)]d\beta +$$
$$+\int_{z_0}^{z}[C(x_0,y_0,\gamma)\varphi_2(y_0,\gamma) - C(x,y_0,\gamma)\varphi_2(x,\gamma) - C(x_0,y,\gamma)\varphi_1(y,\gamma)]d\gamma +$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} M(\alpha,\beta,z_0)\varphi_3(\alpha,\beta)d\beta d\alpha + \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} P(\alpha,y_0,\gamma)\varphi_2(\alpha,\gamma)d\gamma d\alpha +$$
$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} N(x_0,\beta,\gamma)\varphi_1(\beta,\gamma)d\gamma d\beta. \tag{2.19}$$

Это и есть искомая формула. Заметим, что у R, A, B, C, M, N, P указана только первая тройка аргументов, вторая всегда есть (x,y,z).

Подобно тому, как это делается в [2, с. 66] можно рассматривать (2.19) при произвольных φ_1, φ_2, φ_3 в качестве общего представления решений уравнения (2.1).

Формула (2.19) выведена в [27]. Несколько иным путем позднее она была получена в [17].

Замечание. Если при интегрировании тождества (2.16) считать, что u является решением неоднородного уравнения $L(u) = F(x,y,z)$, то в правой части (2.19) добавится слагаемое

$$u_0 = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma)F(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha.$$

Очевидно, u_0 есть решение однородной задачи Гурса для неоднородного уравнения, соответствующего (2.1).

4. Задача Коши

Пусть $z = z(x,y)$ — уравнение поверхности S класса C^3, обладающей свойством: касательная плоскость к ней ни в одной точке не параллельна ни одной из координатных осей (например, $z_x > 0$, $z_y > 0$).

Проведем через точку $M(x_0, y_0, z_0) \notin S$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, пересекающие S по кривым QC, CP и PQ соответственно. Обозначим Ω конечную область, ограниченную этими плоскостями и участком QCP поверхности S. Считаем ориентацию Ω положительной.

Задача: *найти регулярное в* Ω *решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_S = \psi_k, \qquad k = 0,\, 1,\, 2, \tag{2.20}$$

где l *— заданное на* S *некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Будем считать

$$a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g \in C^3(\overline{\Omega}), \quad \psi_k \in C^{3-k}(\overline{S}). \tag{2.21}$$

Перепишем тождество (2.16) в виде

$$RL(u) \equiv \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z}, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{3}(uR)_{yz} - \frac{1}{2}[(uC)_y + (uB)_z] + uN, \\ T_2 &= \frac{1}{3}(uR)_{xz} - \frac{1}{2}[(uC)_x + (uA)_z] + uP, \\ T_3 &= \frac{1}{3}(uR)_{xy} - \frac{1}{2}[(uA)_y + (uB)_x] + uM. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Считая $u(x, y, z)$ решением уравнения (2.1), интегрируя (2.22) по области Ω, и используя формулу Гаусса — Остроградского [43, с. 241], получим

$$\iint\limits_{\partial\Omega} T_1 dy \wedge dz + T_2 dz \wedge dx + T_3 dx \wedge dy = 0. \tag{2.24}$$

Здесь знак "$\wedge$" — внешнее умножение дифференциальных форм. Заменяя в левой части, которую обозначим I, интеграл по $\partial\Omega$ суммой интегралов по ее составляющим CQM, PCM, PQM и PQC, а также учитывая последние три тождества (2.18), имеем

$$I = \iint\limits_{CMQ} \left\{ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{6}(uR)_y - \frac{1}{2}uB\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{6}(uR)_z - \frac{1}{2}uC\right]\right\} dy \wedge dz +$$

$$+\iint\limits_{PMC}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}uC\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}uA\right]\right\}dz\wedge dx+$$

$$+\iint\limits_{PQM}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}uA\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}uB\right]\right\}dx\wedge dy+$$

$$+\iint\limits_{PQC}\left[\frac{1}{3}u_{yz}R-\frac{1}{6}u_yR_z-\frac{1}{6}u_zR_y+\frac{1}{3}uR_{yz}+\frac{1}{2}u_yaR-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}u(aR)_y+\frac{1}{2}u_zcR-\frac{1}{2}u(cR)_z+udR\right]dy\wedge dz+$$

$$+\left[\frac{1}{3}u_{xz}R-\frac{1}{6}u_xR_z-\frac{1}{6}u_zR_x+\frac{1}{3}uR_{xz}+\frac{1}{2}u_xaR-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}u(aR)_x+\frac{1}{2}u_zbR-\frac{1}{2}u(bR)_z+ueR\right]dz\wedge dx+$$

$$+\left[\frac{1}{3}u_{xy}R-\frac{1}{6}u_xR_y-\frac{1}{6}u_yR_x+\frac{1}{3}uR_{xy}+\frac{1}{2}u_ybR-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}u(bR)_y+\frac{1}{2}u_xcR-\frac{1}{2}u(cR)_x+ufR\right]dx\wedge dy.$$

По формуле Грина [43, с. 236] все интегралы по плоским областям сводятся к однократным интегралам по замкнутым контурам, причем любой участок каждого контура обходится дважды (в противоположных направлениях), как это и должно быть у ориентированной поверхности:

$$I=\int\limits_{CMQ}\left[\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}uC\right]dz-\left[\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}uB\right]dy+$$

$$+\int\limits_{PMC}\left[\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}uA\right]dx-\left[\frac{1}{6}(uR)_z-\frac{1}{2}uC\right]dz+$$

$$+\int\limits_{PQM}\left[\frac{1}{6}(uR)_y-\frac{1}{2}uB\right]dy-\left[\frac{1}{6}(uR)_x-\frac{1}{2}uA\right]dx+$$

$$+\frac{1}{6}\iint\limits_{PQC}\Big\{2u_{yz}R+u_y(3aR-R_z)+u_z(3cR-R_y)+$$

$$+u[2R_{yz}-3(aR)_y-3(cR)_z+6dR]\Big\}\,dy\wedge dz+$$

$$+\Big\{2u_{xz}R+u_x(3aR-R_z)+u_z(3bR-R_x)+$$

$$+u[2R_{xz}-3(aR)_x-3(bR)_z+6eR]\Big\}\,dz\wedge dx+$$

$$+\Big\{2u_{xy}R+u_x(3cR-R_y)+u_y(3bR-R_x)+$$

$$+u[2R_{xy}-3(bR)_y-3(cR)_x+6fR]\Big\}\,dx\wedge dy.$$

Аналогично случаю с двойными интегралами, заменяя каждый криволинейный интеграл суммой интегралов по составляющим его контура и используя первые три тождества (2.18), получим, что сумма этих однократных интегралов K перепишется в виде:

$$K=\frac{1}{6}\int\limits_{CM}(uR)_z\,dz-\frac{1}{6}\int\limits_{MQ}(uR)_y\,dy+$$

$$+\frac{1}{6}\int\limits_{QC}(u_zR-2uR_z+3uaR)\,dz-(u_yR-2uR_y+3ucR)\,dy+$$

$$+\frac{1}{6}\int\limits_{PM}(uR)_x\,dx-\frac{1}{6}\int\limits_{MC}(uR)_z\,dz+$$

$$+\frac{1}{6}\int\limits_{CP}(u_xR-2uR_x+3ubR)\,dx-(u_zR-2uR_z+3uaR)\,dz+$$

$$+\frac{1}{6}\int\limits_{QM}(uR)_y\,dy-\frac{1}{6}\int\limits_{MP}(uR)_x\,dx+$$

$$+\frac{1}{6}\int\limits_{PQ}(u_yR-2uR_y+3ucR)\,dy-(u_xR-2uR_x+3ubR)\,dx.$$

Вычисляя здесь интегралы по отрезкам прямых и используя K, I и (2.24), окончательно получаем:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{(uR)(C)+(uR)(Q)+(uR)(P)}{3}-$$

$$-\frac{1}{6}\Bigg\{\int\limits_{QC}\Big[u_zR+u(3aR-2R_z)\Big]\,dz-\Big[u_yR+u(3cR-2R_y)\Big]\,dy+$$

$$+\int\limits_{CP}\Big[u_xR+u(3bR-2R_x)\Big]\,dx-\Big[u_zR+u(3aR-2R_z)\Big]\,dz+$$

$$+\int\limits_{PQ}\Big[u_yR+u(3cR-2R_y)\Big]\,dy-\Big[u_xR+u(3bR-2R_x)\Big]\,dx+$$

$$+\iint\limits_{PQC}\Big[2u_{yz}R+u_y(3aR-R_z)+u_z(3cR-R_y)+$$

$$+u(2R_{yz}-3(aR)_y-3(cR)_z+6dR)\Big]\,dy\,dz+$$

$$+\Big[2u_{xz}R+u_x(3aR-R_z)+u_z(3bR-R_x)+$$

$$+u(2R_{xz}-3(aR)_x-3(bR)_z+6eR)\Big]\,dx\,dz+$$

$$+\Big[2u_{xy}R+u_x(3cR-R_y)+u_y(3bR-R_x)+$$

$$+u(2R_{xy}-3(bR)_y-3(cR)_x+6fR)\Big]\,dx\,dy\Bigg\}. \qquad (2.25)$$

Формула (2.25) даст решение задачи (2.1), (2.20), если u_x, $u_y, \ldots$ на поверхности S выразить через данные Коши. Покажем, как это можно сделать.

Пусть поле направлений l задано вектором $\vec{a}(l_1, l_2, l_3)$, $l_k(x,y) \in C^3$, $k = 1$, 2, 3. Очевидно, можно полагать $|\vec{a}| \equiv 1$. Тогда в криволинейных координатах (x, y, l), связанных с S, имеем $u = u(x + l_1(x,y)l, y + l_2(x,y)l, z(x,y) + l_3(x,y)l)$. Находя на поверхности S все частные производные функции u по x, y, l, получим систему 9 уравнений с 9-ю неизвестными частными производными решения u по x, y, z до второго порядка, вычисленными на S: $u_x(x,y,z(x,y))$, $u_y(x,y,z(x,y))$ и т. д.

Вот эта система:

$$\begin{cases} u_x + u_z z_x & = \psi_{0x}, \\ u_y + u_z z_y & = \psi_{0y}, \\ u_x l_1 + u_y l_2 + u_z l_3 & = \psi_1, \\ u_{xx} + u_{zz}(z_x)^2 + 2u_{xz} z_x + u_z z_{xx} & = \psi_{0xx}, \\ u_{yy} + u_{zz}(z_y)^2 + 2u_{yz} z_y + u_z z_{yy} & = \psi_{0yy}, \\ u_{xx} l_1^2 + u_{yy} l_2^2 + u_{zz} l_3^2 + 2u_{xy} l_1 l_2 + 2u_{xz} l_1 l_3 + 2u_{yz} l_2 l_3 & = \psi_2, \\ u_{zz} z_x z_y + u_{xy} + u_{xz} z_y + u_{yz} z_x + u_z z_{xy} & = \psi_{0xy}, \\ u_{xx} l_1 + u_{zz} z_x l_3 + u_{xy} l_2 + u_{xz}(l_3 + z_x l_1) + u_{yz} z_x l_2 + & \\ + u_x l_{1x} + u_y l_{2x} + u_z l_{3x} & = \psi_{1x}, \\ u_{yy} l_2 + u_{zz} z_y l_3 + u_{xy} l_1 + u_{xz} z_y l_1 + u_{yz}(l_3 + z_y l_2) + & \\ + u_x l_{1y} + u_y l_{2y} + u_z l_{3y} & = \psi_{1y}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Ее определитель есть

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z_x^2 & 0 & 2z_x & 0 \\ 0 & 1 & z_y^2 & 0 & 0 & 2z_y \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & 2l_1 l_2 & 2l_1 l_3 & 2l_2 l_3 \\ 0 & 0 & z_x z_y & 1 & z_y & z_x \\ l_1 & 0 & z_x l_3 & l_2 & l_3 + z_x l_1 & z_x l_2 \\ 0 & l_2 & z_y l_3 & l_1 & z_y l_1 & l_3 + z_y l_2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_{xx} \\ 0 & 0 & z_{yy} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_{xy} \\ l_{1x} & l_{2x} & l_{3x} \\ l_{1y} & l_{2y} & l_{3y} \end{pmatrix}.$$

Значение W не зависит от D [45, с. 41] и равно $\det B \det C$. Понижая порядок определителя $\det C$ по методу Гаусса, получим

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & z_y^2 & 0 & 0 & 2z_y \\ l_2^2 & l_3^2 - l_1^2 z_x^2 & 2l_1 l_2 & 2l_1 l_3 - 2l_1^2 z_x & 2l_2 l_3 \\ 0 & z_x z_y & 1 & z_y & z_x \\ 0 & z_x l_3 - l_1 z_x^2 & l_2 & l_3 - z_x l_1 & z_x l_2 \\ l_2 & z_y l_3 & l_1 & z_y l_1 & l_3 + z_y l_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} l_3^2 - l_1^2 z_x^2 - l_2^2 z_y^2 & 2l_1 l_2 & 2l_1 l_3 - 2l_1^2 z_x & 2l_2 l_3 - 2l_2^2 z_y \\ z_x z_y & 1 & z_y & z_x \\ z_x l_3 - l_1 z_x^2 & l_2 & l_3 - z_x l_1 & z_x l_2 \\ z_y l_3 - l_2 z_y^2 & l_1 & z_y l_1 & l_3 - z_y l_2 \end{vmatrix} =$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

где

$$
\begin{array}{ll}
a_{11} = l_3^2 - l_1^2 z_x^2 - l_2^2 z_y^2 - 2l_1 l_2 z_x z_y, & a_{12} = 2l_1(l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y), \\
a_{13} = 2l_2(l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y), & a_{21} = z_x(l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y), \\
a_{22} = l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y, & a_{23} = 0, \\
a_{31} = z_y(l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y), & a_{32} = 0, \\
a_{33} = l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y. &
\end{array}
$$

Так как $a_{11} = (l_3 + l_1 z_x + l_2 z_y)(l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y)$, то все элементы имеют общий множитель $l_3 - l_1 z_x - l_2 z_y = \det B$. Поэтому

$$
\det C = (\det B)^3 \begin{vmatrix} l_3 + l_1 z_x + l_2 z_y & 2l_1 & 2l_2 \\ z_x & 1 & 0 \\ z_y & 0 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= (\det B)^3 (l_3 + l_1 z_x + l_2 z_y - 2l_2 z_y - 2l_1 z_x) = (\det B)^4.
$$

Значит,

$$
W = (\det B)^5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}^5.
$$

В полученном определителе две первые строки — координаты векторов, касательных к S, а третья — вектора $\vec{a}$, который по предположению не касателен к S. Итак, $W \neq 0$, вследствие чего система (2.26) однозначно разрешима. Таким образом, на S могут быть определены все подынтегральные выражения формулы (2.25), и задачу Коши можно считать решенной.

При изложении настоящего пункта мы следовали работе В.А. Севастьянова [63].

5. Построение функции Римана в явном виде

Методика, изложенная в п. 3 § 1, допускает распространение на случай уравнения (2.1). Аналогами инвариантов h, k здесь являются

$$\begin{aligned} &h_1 = a_x + ab - e, \quad && h_2 = a_y + ac - d, \quad && h_3 = b_y + bc - f, \\ &h_4 = b_z + ab - e, && h_5 = c_x + bc - f, && h_6 = c_z + ac - d, \\ &h_7 = d_x + bd - g, && h_8 = e_y + ce - g, && h_9 = f_z + af - g. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Взяв от (2.15) производную $\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}$, получим, что v удовлетворяет сопряженному с (2.1) уравнению

$$- L^*(u) \equiv v_{xyz} - (av)_{xy} - (bv)_{yz} - (cv)_{xz} + (dv)_x + \\ + (ev)_y + (fv)_z - gv = 0. \tag{2.28}$$

5.1. Случаи расщепления оператора в левой части уравнения. Положим в (2.15) $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0. \tag{2.29}$$

Тогда функция Римана для уравнения (2.1) имеет вид

$$R(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \exp \left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha, y_0, z_0) d\alpha + \right. \\ \left. + \int_{y_0}^{y} c(x, \beta, z_0) d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x, y, \gamma) d\gamma \right). \tag{2.30}$$

Доказательство этого утверждения будем проводить сначала при двух фиксированных переменных, затем при одной фиксированной переменной и в общем виде.

Положим в (2.15) $y = y_0$, $z = z_0$, затем продифференцируем по x. Получим

$$v_x(x, y_0, z_0) - (bv)(x, y_0, z_0) = 0,$$

откуда

$$R(x, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = \exp \left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha, y_0, z_0) d\alpha \right). \tag{2.31}$$

Коэффициент перед экспонентой в (2.31) равен 1 в силу того, что $R(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = 1$.

Очевидно, что (2.31) — частный случай (2.30). Аналогичным образом находим

$$R(x_0, y, z_0, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0) d\beta\right),$$

$$R(x_0, y_0, z, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(x_0, y_0, \gamma) d\gamma\right).$$

Положим теперь в (2.15) $z = z_0$ и продифференцируем по x и y. Тогда

$$v_{xy}(x, y, z_0) - (bv)_x(x, y, z_0) - (cv)_y(x, y, z_0) + (fv)(x, y, z_0) = 0. \quad (2.32)$$

Так как $h_3 \equiv 0$, (2.32) равносильно уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b(x, y, z_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c(x, y, z_0)\right) v(x, y, z_0) = 0.$$

Перепишем его в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} - cv = v_1, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - bv_1 = 0. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$v(x, y, z_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x, \beta, z_0) d\beta\right) \times$$
$$\times \left[\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x, \beta, z_0) d\beta + \int_{x_0}^{x} b(\alpha, \eta, z_0) d\alpha\right) \varphi(\eta) d\eta + \psi(x)\right], \quad (2.33)$$

где φ и ψ — произвольные функции. Положим в (2.33) $y = y_0$. Тогда

$$\psi(x) = R(x, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha, y_0, z_0) d\alpha\right).$$

Подставим найденную функцию $\psi(x)$ в (2.33). Положив $x = x_0$, получим

$$\exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0) d\beta\right)\left[\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0, \beta, z_0) d\beta\right) \varphi(\eta) d\eta + 1\right] =$$
$$= R(x_0, y, z_0, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0) d\beta\right).$$

Следовательно

$$\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0,\beta,z_0)d\beta\right)\varphi(\eta)d\eta = 0. \tag{2.34}$$

Поскольку верхний предел интегрирования в (2.34) переменный, $\varphi(\eta) \equiv 0$.

Подставляя ψ и φ в (2.33) получаем

$$v(x,y,z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha + \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0)d\beta\right),$$

то есть (2.30) при $z = z_0$.

Аналогично показывается справедливость (2.30) при $x = x_0$ и при $y = y_0$.

Наконец, пусть все три переменные x, y, z в (2.30) не являются фиксированными. Продифференцируем (2.15) по x, y, z. Полученное уравнение

$$v_{xyz} - (av)_{xy} - (bv)_{yz} - (cv)_{xz} + (dv)_x + (ev)_y + (fv)_z - gv = 0$$

в силу условий (2.29) равносильно уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a\right)v = 0. \tag{2.35}$$

Покажем это. Перепишем (2.35):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(v_{yz} - (av)_y - (cv)_z + dv\right) = 0.$$

При этом мы учли, что $h_6 \equiv 0$. Преобразуем данное уравнение еще раз:

$$v_{xyz} - (av)_{xy} - bv_{yz} - (cv)_{xz} + (dv)_x + b(av)_y + b(cv)_z - bdv = 0.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} v_{xyz} - (av)_{xy} - (bv)_{yz} - (cv)_{xz} + (dv)_x + ([b_z + ab]v)_y &+ \\ + ([b_y + bc]v)_z - (b_{yz} + ab_y + cb_z + bd)v &= 0. \end{aligned}$$

В силу (2.29)

$$b_y + bc = f, \qquad b_z + ab = e,$$

$$b_{yz} + ab_y + cb_z + bd = (b_y + bc)_z + a(b_y + bc) = f_z + af = g.$$

Тем самым формула (2.35) доказана.

Записав уравнение (2.35) в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} - av = v_1, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - cv_1 = v_2, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - bv_2 = 0, \end{cases}$$

находим общее решение

$$\begin{gathered} v(x,y,z) = R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(x,y,\gamma)d\gamma\right) \times \\ \times \left[\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} a(x,y,\gamma)d\gamma + \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,\zeta)d\beta\right) \times \right. \\ \times \left(\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x,\beta,\zeta)d\beta + \int_{x_0}^{x} b(\alpha,\eta,\zeta)d\alpha\right) \times \right. \\ \left. \left. \times \varphi_1(\eta,\zeta)d\eta + \varphi_2(x,\zeta)\right)d\zeta + \varphi_3(x,y)\right]. \quad (2.36) \end{gathered}$$

Положим $z = z_0$. Тогда

$$\begin{gathered} \varphi_3(x,y) = R(x,y,z_0,x_0,y_0,z_0) = \\ = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha + \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0)d\beta\right). \end{gathered}$$

Подставим выражение для $\varphi_3(x,y)$ в (2.36). При $y = y_0$ будет

$$\begin{gathered} \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right)\left[\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right) \times \right. \\ \left. \times \varphi_2(x,\zeta)d\zeta + \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha\right)\right] = \\ = R(x,y_0,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha + \int_{z_0}^{z} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right). \end{gathered}$$

Отсюда

$$\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right)\varphi_2(x,\zeta)d\zeta = 0.$$

Как и в предыдущем случае получаем, что $\varphi_2(x,\zeta) \equiv 0$.

Наконец, пусть $x = x_0$. Тогда (2.36) запишется в виде

$$v(x_0, y, z) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(x_0, y, \gamma)d\gamma\right)\times$$

$$\times\Bigg[\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} a(x_0, y, \gamma)d\gamma + \int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, \zeta)d\beta\right)\times$$

$$\times \int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0, \beta, \zeta)d\beta\right)\varphi_1(\eta, \zeta)d\eta d\zeta +$$

$$+\exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0)d\beta\right)\Bigg] = R(x_0, y, z, x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x_0, y, \gamma)d\gamma\right).$$

Следовательно

$$\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} a(x_0, y, \gamma)d\gamma + \int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, \zeta)d\beta\right)\times$$
$$\times \int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0, \beta, \zeta)d\beta\right)\varphi_1(\eta, \zeta)d\eta d\zeta = 0,$$

поэтому $\varphi_1(\eta, \zeta) \equiv 0$.

Формула (2.30) доказана.

Пользуясь приведенной выше схемой рассуждений, можно доказать следующие утверждения.

1) Если $h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0$, то функция Римана для уравнения (2.1) имеет вид

$$R(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha, y, z_0)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x, y, \gamma)d\gamma\right).$$

2) Если $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0$, то

$$R(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha, y_0, z)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y} c(x, \beta, z)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x_0, y_0, \gamma)d\gamma\right).$$

3) Если $h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv h_8 \equiv 0$, то

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right).$$

4) Если $h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0$, то

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y,z)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x_0,y_0,\gamma)d\gamma\right).$$

5) Если $h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv h_7 \equiv 0$, то

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y,z)d\alpha + \right.$$
$$\left. + \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z_0)d\beta + \int_{z_0}^{z} a(x_0,y,\gamma)d\gamma\right).$$

5.2. Использование интегральных уравнений. Здесь речь идет о построении интегрального уравнения для функции Римана, содержащего только тройной интеграл [32].

Пусть

$$h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0. \tag{2.37}$$

В этом случае уравнение (2.28) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - a\right) v = -h_9 v. \tag{2.38}$$

Формула (2.38) доказывается так же, как (2.35).

Сопряженное к (2.38) уравнение при $h_9 \equiv 0$ может быть представлено в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + c\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right) w = 0.$$

Функция Римана для уравнения (2.38) при $h_9 \equiv 0$ имеет вид (см. п. 5.1)

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y,z)d\alpha - \right.$$
$$\left. - \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x_0,y_0,\gamma)d\gamma\right).$$

Мы будем рассматривать (2.38) как неоднородное уравнение с правой частью $-h_9 v$. Формула (2.19) с учетом замечания на странице 28 дает нам решение задачи Гурса для такого уравнения. Избавимся в (2.19) от производных функции R при помощи интегрирования по частям

$$v(x,y,z) = (Rv)(x_0,y_0,z_0) + \int_{x_0}^{x} (R[v_\alpha - bv])(\alpha,y_0,z_0)d\alpha +$$
$$+ \int_{y_0}^{y} (R[v_\beta - cv])(x_0,\beta,z_0)d\beta + \int_{z_0}^{z} (R[v_\gamma - av])(x_0,y_0,\gamma)d\gamma +$$
$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} (R[v_{\alpha\beta} - cv_\alpha - bv_\beta + (f - c_\alpha - b_\beta)v])(\alpha,\beta,z_0)d\beta d\alpha +$$
$$+ \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} (R[v_{\alpha\gamma} - av_\alpha - bv_\gamma + (e - a_\alpha - b_\gamma)v])(\alpha,y_0,\gamma)d\gamma d\alpha +$$
$$+ \int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} (R[v_{\beta\gamma} - av_\beta - cv_\gamma + (d - a_\beta - c_\gamma)v])(x_0,\beta,\gamma)d\gamma\beta -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} (Rh_9 v)(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha. \tag{2.39}$$

В (2.39) не записана вторая тройка аргументов у функции R, которая всегда есть (x,y,z).

Сопоставляя уравнения (2.15) и (2.39), видим, что все выражения в квадратных скобках в одно- и двукратных интегралах тождественно равны нулю, а $v(x_0,y_0,z_0) = 1$. Следовательно, функция Римана (2.1) при условиях (2.37) удовлетворяет уравнению

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) -$$
$$- \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)h_9(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha. \tag{2.40}$$

Аналогично вышеизложеному получаются следующие 5 вариантов условий, обеспечивающих построение интегральных уравнений типа (2.40).

1) $h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0$.

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)h_9(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha,$$

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z)d\alpha + \right. \\ \left. - \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x_0,y_0,\gamma)d\gamma\right).$$

2) $h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0$.

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)h_8(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha,$$

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y,z_0)d\alpha - \right. \\ \left. - \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z_0)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x,y,\gamma)d\gamma\right).$$

3) $h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 0$.

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z)h_8(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha,$$

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y,z)d\alpha - \right. \\ \left. - \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z_0)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x_0,y,\gamma)d\gamma\right).$$

4) $h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv 0$.

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z) h_7(\alpha,\beta,\gamma) v(\alpha,\beta,\gamma) d\gamma d\beta d\alpha,$$

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha - \right. \\ \left. - \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x,y,\gamma)d\gamma\right).$$

5) $h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0$.

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z) h_7(\alpha,\beta,\gamma) v(\alpha,\beta,\gamma) d\gamma d\beta d\alpha,$$

$$R(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} b(\alpha,y_0,z_0)d\alpha - \right. \\ \left. - \int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z)d\beta - \int_{z_0}^{z} a(x,y_0,\gamma)d\gamma\right).$$

Используем полученный результат для построения функции Римана в явном виде.

1. Предположим, что имеет место (2.37) и

$$a = a_1(z) + \lambda xy, \quad b = b_1(x) + \lambda yz, \quad c = c_1(y) + \lambda xz, \quad \lambda = const. \tag{2.41}$$

Тогда непосредственным вычислением легко убедиться в том, что

$$h_7 = h_8 = h_9 = H,$$

а уравнение (2.40) и все его аналоги из 1) – 5) совпадают и записываются в форме

$$v(x,y,z) = R(x_0,y_0,z_0,x,y,z) - \\ - \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} R(\alpha,\beta,\gamma,x,y,z) H(\alpha,\beta,\gamma) v(\alpha,\beta,\gamma) d\gamma d\beta d\alpha. \tag{2.42}$$

Введем обозначение

$$T(x,y,z)=\exp\left(-\int_0^x b_1(\alpha)d\alpha-\int_0^y c_1(\beta)d\beta-\int_0^z a_1(\gamma)d\gamma-\lambda xyz\right).$$

Используя новую искомую функцию $\omega=Tv$, перепишем (2.42) в виде

$$\omega(x,y,z)=T(x_0,y_0,z_0)-\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y\int_{z_0}^z H(\alpha,\beta,\gamma)\omega(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha. \quad (2.43)$$

Уравнение (2.43) эквивалентно задаче Гурса для уравнения

$$\omega_{xyz}-H\omega=0 \quad (2.44)$$

с условиями

$$\omega\mid_{x=x_0}=\omega\mid_{y=y_0}=\omega\mid_{z=z_0}=T(x_0,y_0,z_0).$$

Если

$$H=\varphi(x)\psi(y)\theta(z), \quad (2.45)$$

то функция Римана r уравнения (2.44) известна [16, с. 10–12]. Она дается формулой

$$r={}_0F_2(1,1;\sigma),\quad \sigma=-\int_{x_0}^x\varphi(\alpha)d\alpha\int_{y_0}^y\psi(\beta)d\beta\int_{z_0}^z\theta(\gamma)d\gamma.$$

Здесь ${}_0F_2(1,1;\sigma)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[(1)_k]^2}\frac{\sigma^k}{k!}$ — обобщенная гипергеометрическая функция [1, с. 183], $(1)_k=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ — символ Похгаммера. Вычислив ω по формуле (2.19) и возвратившись снова к функции v, получим

$$v(x,y,z,x_0,y_0,z_0)={}_0F_2(1,1;\sigma)\exp\left(\int_{x_0}^x b_1(\alpha)d\alpha+\right.$$
$$\left.+\int_{y_0}^y c_1(\beta)d\beta+\int_{z_0}^z a_1(\gamma)d\gamma+\lambda(xyz-x_0y_0z_0)\right). \quad (2.46)$$

Нами доказано утверждение: если выполняются условия (2.37), (2.41), (2.45), то функция Римана уравнения (2.1) дается формулой (2.46). Условие (2.37) можно заменить на одно из условий 1) – 5).

2. Пусть имеют место представления

$$\begin{gathered}a=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial z},\quad b=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad c=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y},\quad d=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z},\\ e=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z},\quad f=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\quad g=\frac{1}{w}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}+\varphi(x)\psi(y)\theta(z),\end{gathered} \quad (2.47)$$

где w имеет структуру

$$w = p_1(x) + p_2(y) + p_3(z) + q_1(x,y) + q_2(y,z) + q_3(x,z) + r(x,y,z) \neq 0.$$

Тогда имеют место (2.37) и (2.45), уравнения типа (2.40) из п. 5.2 совпадают и могут быть разрешены по схеме случая 1. Функция Римана для (2.1) записывается в форме

$$v = {}_0F_2(1,1,\sigma)\frac{w(x,y,z)}{w(x_0,y_0,z_0)},$$

где σ та же, что и в (2.46).

3. Рассмотрим теперь некоторые обобщения случаев из 1 – 2.

Если коэффициенты a, b, c имеют вид

$$a(x,y,z) = a_1(z) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k(y)\theta_k'(z),$$
$$b(x,y,z) = b_1(x) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k'(x)\psi_k(y)\theta_k(z),$$
$$c(x,y,z) = c_1(y) + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\psi_k'(y)\theta_k(z),$$

а также выполняются условия

$$h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0, \qquad h_9 = \varphi(x)\psi(y)\theta(z), \tag{2.48}$$

то

$$v(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = {}_0F_2(1,1;\sigma)\exp\Bigg(\int_{x_0}^{x} b_1(\alpha)d\alpha + \int_{y_0}^{y} c_1(\beta)d\beta +$$
$$+ \int_{z_0}^{z} a_1(\gamma)d\gamma + \sum_{k=1}^{n}[\varphi_k(x)\psi_k(y)\theta_k(z) - \varphi_k(x_0)\psi_k(y_0)\theta_k(z_0)]\Bigg),$$

где σ та же, что в (2.46).

Если

$$a = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial z}, \quad b = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial x}, \quad c = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial y},$$

$$w_k = p_{1k}(x) + p_{2k}(y) + p_{3k}(z) + q_{1k}(x,y) +$$
$$+ q_{2k}(y,z) + q_{3k}(x,z) + r_k(x,y,z) \neq 0,$$

то при выполнении (2.48) получаем

$$v = {}_0F_2(1,1,\sigma)\prod_{k=1}^{m}\frac{w_k(x,y,z)}{w_k(x_0,y_0,z_0)},$$

функция σ опять та же, что и в (2.46).

§ 3. О многомерных задачах ($n \geqslant 4$)

Метод интегральных уравнений, подробно изложенный в п. 1 § 1 и п. 1 § 2 может быть обобщен на случай любого конечного числа измерений. В.А. Севастьяновым [61], [62], [64] предложена схема получения в резольвентах решений многомерных аналогов уравнений (1.1), (2.2) и доказаны существование и единственность их решений. Здесь мы не будем рассматривать этот вопрос, а остановимся на построении решений задач Гурса и Коши в терминах функции Римана.

1. Четырехмерное пространство

1.1. Задача Гурса. Рассмотрим уравнение

$$u_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + \\ + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} + mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = 0. \quad (3.1)$$

Задача: *найти в области* $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1,\ 0 < t < t_1\}$ *решение уравнения* (3.1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t),\ \ u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t),\ \ u\big|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y,t),\ \ u\big|_{\overline{T}} = \varphi_4(x,y,z). \quad (3.2)$$

Здесь X, Y, Z, T — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ соответственно.

Решение задачи Гурса для уравнения (3.1) ищется в классе $C^{(1,1,1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$. Коэффициенты (3.1) должны удовлетворять следующим условиям:

$$
\begin{array}{lll}
a \in C^{(1,1,1,0)}(\overline{D}), & b \in C^{(1,1,0,1)}(\overline{D}), & c \in C^{(1,0,1,1)}(\overline{D}), \\
d \in C^{(0,1,1,1)}(\overline{D}), & e \in C^{(1,1,0,0)}(\overline{D}), & f \in C^{(1,0,1,0)}(\overline{D}), \\
g \in C^{(1,0,0,1)}(\overline{D}), & h \in C^{(0,1,1,0)}(\overline{D}), & k \in C^{(0,1,0,1)}(\overline{D}), \\
s \in C^{(0,0,1,1)}(\overline{D}), & m \in C^{(1,0,0,0)}(\overline{D}), & n \in C^{(0,1,0,0)}(\overline{D}), \\
p \in C^{(0,0,1,0)}(\overline{D}), & q \in C^{(0,0,0,1)}(\overline{D}), & r \in C^{(0,0,0,0)}(\overline{D}).
\end{array} \tag{3.3}
$$

Относительно граничных значений предполагаем выполнение условий гладкости

$$
\varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \varphi_4 \in C^{(1,1,1)}(\overline{T}), \tag{3.4}
$$

и условий согласования

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1(0,z,t) = \varphi_2(0,z,t), & \varphi_1(y,0,t) = \varphi_3(0,y,t), \\
\varphi_1(y,z,0) = \varphi_4(0,y,z), & \varphi_2(x,0,t) = \varphi_3(x,0,t), \\
\varphi_2(x,z,0) = \varphi_4(x,0,z), & \varphi_3(x,y,0) = \varphi_4(x,y,0).
\end{array} \tag{3.5}
$$

Здесь $C^{(k,l,m,n)}$ означает существование непрерывных производных $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3+r_4}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}\partial t^{r_4}}$ для всех $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant l$, $r_3 \leqslant m$, $r_4 \leqslant n$.

Путем непосредственного интегрирования (3.1) с учетом (3.2) приходим к интегральному уравнению Вольтерра, аналогичному (2.14). Следовательно, решение задачи (3.1), (3.2) существует, единственно и записывается с помощью резольвент интегральных уравнений. Условия (3.3) – (3.5) обеспечивают принадлежность $u(x,y,z,t)$ указанному классу $C^{(1,1,1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$.

Четырехмерный аналог уравнений (1.17), (2.15) имеет вид

$$
v(x,y,z,t) - \int_\tau^t (av)(x,y,z,\delta)d\delta - \int_\zeta^z (bv)(x,y,\gamma,t)d\gamma -
$$

$$
- \int_\eta^y (cv)(x,\beta,z,t)d\beta - \int_\xi^x (dv)(\alpha,y,z,t)d\alpha +
$$

$$
+ \int_\zeta^z \int_\tau^t (ev)(x,y,\gamma,\delta)d\delta d\gamma + \int_\eta^y \int_\tau^t (fv)(x,\beta,z,\delta)d\delta d\beta +
$$

$$
+ \int_\eta^y \int_\zeta^z (gv)(x,\beta,\gamma,t)d\gamma d\beta + \int_\xi^x \int_\tau^t (hv)(\alpha,y,z,\delta)d\delta d\alpha +
$$

$$+\int_\xi^x\int_\zeta^z(kv)(\alpha,y,\gamma,t)d\gamma d\alpha+\int_\xi^x\int_\eta^y(sv)(\alpha,\beta,z,t)d\beta d\alpha-$$

$$-\int_\eta^y\int_\zeta^z\int_\tau^t(mv)(x,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta-$$

$$-\int_\xi^x\int_\zeta^z\int_\tau^t(nv)(\alpha,y,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\alpha-$$

$$-\int_\xi^x\int_\eta^y\int_\tau^t(pv)(\alpha,\beta,z,\delta)d\delta d\beta d\alpha-$$

$$-\int_\xi^x\int_\eta^y\int_\zeta^z(qv)(\alpha,\beta,\gamma,t)d\gamma d\beta d\alpha+$$

$$+\int_\xi^x\int_\eta^y\int_\zeta^z\int_\tau^t(rv)(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha=1. \tag{3.6}$$

Решение этого уравнения будем называть функцией Римана. Функция v существует и единственна. Очевидно, v зависит от ξ, η, ζ, τ, то есть $v=R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости тождества

$$(uR)_{xyzt}\equiv RL(u)+([R_t-aR]u)_{xyz}+([R_z-bR]u)_{xyt}+$$

$$+(u[R_y-cR])_{xzt}+([R_x-dR])_{yzt}-([R_{zt}-(aR)_z-(bR)_t+eR]u)_{xy}-$$

$$-([R_{yt}-(aR)_y-(cR)_t+fR]u)_{xz}-([R_{yz}-(bR)_y-(cR)_z+gR]u)_{xt}-$$

$$-([R_{xt}-(aR)_x-(dR)_t+hR]u)_{yz}-([R_{xz}-(bR)_x-(dR)_z+kR]u)_{yt}-$$

$$-([R_{xy}-(cR)_x-(dR)_y+sR]u)_{zt}+([R_{yzt}-(aR)_{yz}-(bR)_{yt}-(cR)_{zt}+$$

$$+(eR)_y+(fR)_z+(gR)_t-mR]u)_x+([R_{xzt}-(aR)_{xz}-(bR)_{xt}-(dR)_{zt}+$$

$$+(eR)_x+(hR)_z+(kR)_t-nR]u)_y+([R_{xyt}-(aR)_{xy}-(cR)_{xt}-(dR)_{yt}+$$

$$+(fR)_x+(hR)_y+(sR)_t-pR]u)_z+([R_{xyz}-(bR)_{xy}-(cR)_{xz}-(dR)_{yz}+$$

$$+(gR)_x+(kR)_y+(sR)_z-qR]u)_t. \tag{3.7}$$

Введем обозначения:

$$A=R_t-aR,\ B=R_z-bR,\ C=R_y-cR,\ D=R_x-dR,$$

$$E=R_{zt}-(aR)_z-(bR)_t+eR,\quad F=R_{yt}-(aR)_y-(cR)_t+fR,$$

$$G = R_{yz} - (bR)_y - (cR)_t + gR, \quad H = R_{xt} - (aR)_x - (dR)_t + hR,$$
$$K = R_{xz} - (bR)_x - (dR)_z + kR, \quad S = R_{xy} - (cR)_x - (dR)_y + sR,$$
$$M = R_{yzt} - (aR)_{yz} - (bR)_{yt} - (cR)_{zt} + (eR)_y +$$
$$+ (fR)_z + (gR)_t - mR,$$
$$N = R_{xzt} - (aR)_{xz} - (bR)_{xt} - (dR)_{zt} + (eR)_x +$$
$$+ (hR)_z + (kR)_t - nR,$$
$$P = R_{xyt} - (aR)_{xy} - (cR)_{xt} - (dR)_{yt} + (fR)_x +$$
$$+ (hR)_y + (sR)_t - pR,$$
$$Q = R_{xyz} - (bR)_{xy} - (cR)_{xz} - (dR)_{yz} + (gR)_x +$$
$$+ (kR)_y + (sR)_z - qR,$$

где $a, \ldots, q$ зависят от x, y, z, t, а R (следовательно $A, \ldots, Q$) — от x, y, z, t, ξ, η, ζ, τ. Дифференцируя соотношение (3.6), нетрудно убедиться в выполнении тождеств

$$\begin{gathered}
A \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ y = \eta,\ z = \zeta; \\
B \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ y = \eta,\ t = \tau; \\
C \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ z = \zeta,\ t = \tau; \\
D \equiv 0 \text{ при } y = \eta,\ z = \zeta,\ t = \tau; \\
E \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ y = \eta; \quad F \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ z = \zeta; \\
G \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ t = \tau; \quad H \equiv 0 \text{ при } y = \eta,\ z = \zeta; \\
K \equiv 0 \text{ при } y = \eta,\ t = \tau; \quad S \equiv 0 \text{ при } z = \zeta,\ t = \tau; \\
M \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ t = \tau; \quad N \equiv 0 \text{ при } y = \eta; \\
P \equiv 0 \text{ при } z = \zeta; \quad Q \equiv 0 \text{ при } t = \tau.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Полагая в тождестве (3.7) $u(x, y, z, t)$ решением уравнения (3.1), меняя ролями переменные (x, ξ), (y, η), (z, ζ), (t, τ) и вычисляя четырехкратный интеграл по ξ, η, ζ, τ в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$, $z_0 < \zeta < z$, $t_0 < \tau < t$ с учетом (3.8), получим

$$u(x, y, z, t) = (Ru)(x_0, y, z, t) + (Ru)(x, y_0, z, t) +$$
$$+ (Ru)(x, y, z_0, t) + (Ru)(x, y, z, t_0) - (Ru)(x_0, y_0, z, t) -$$
$$- (Ru)(x_0, y, z_0, t) - (Ru)(x_0, y, z, t_0) - (Ru)(x, y_0, z_0, t) -$$
$$- (Ru)(x, y_0, z, t_0) - (Ru)(x, y, z_0, t_0) + (Ru)(x_0, y_0, z_0, t) +$$
$$+ (Ru)(x_0, y_0, z, t_0) + (Ru)(x_0, y, z_0, t_0) + (Ru)(x, y_0, z_0, t_0) -$$

$$-(Ru)(x_0,y_0,z_0,t_0)-\int_{t_0}^{t}[(Au)(x_0,y,z,\delta)+(Au)(x,y_0,z,\delta)+$$

$$+(Au)(x,y,z_0,\delta)-(Au)(x_0,y_1,z,\delta)-(Au)(x_0,y,z_0,\delta)-$$

$$-(Au)(x,y_0,z_0,\delta)+(Au)(x_0,y_1,z_0,\delta)]\,d\delta-\int_{z_0}^{z}[(Bu)(x_0,y,\gamma,t)+$$

$$+(Bu)(x,y_0,\gamma,t)+(Bu)(x,y,\gamma,t_0)-(Bu)(x_0,y_0,\gamma,t)-$$

$$-(Bu)(x_0,y,\gamma,t_0)-(Bu)(x,y_0,\gamma,t_0)+(Bu)(x_0,y_0,\gamma,t_0)]\,d\gamma-$$

$$-\int_{y_0}^{y}[(Cu)(x_0,\beta,z,t)+(Cu)(x,\beta,z_0,t)+(Cu)(x,\beta,z,t_0)-$$

$$-(Cu)(x_0,\beta,z_0,t)-(Cu)(x_0,\beta,z,t_0)-(Cu)(x,\beta,z_0,t_0)+$$

$$+(Cu)(x_0,\beta,z_0,t_0)]\,d\beta-\int_{x_0}^{x}[(Du)(\alpha,y_0,z,t)+(Du)(\alpha,y,z_0,t)+$$

$$+(Du)(\alpha,y,z,t_0)-(Du)(\alpha,y_0,z_0,t)-(Du)(\alpha,y_0,z,t_0)-$$

$$-(Du)(\alpha,y,z_0,t_0)+(Du)(\alpha,y_0,z_0,t_0)]\,d\alpha+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}[(Eu)(x_0,y,\gamma,\delta)+(Eu)(x,y_0,\gamma,\delta)-$$

$$-(Eu)(x_0,y_0,\gamma,\delta)]\,d\delta d\gamma+\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}[(Fu)(x_0,\beta,z,\delta)+$$

$$+(Fu)(x,\beta,z_0,\delta)-(Fu)(x_0,\beta,z_0,\delta)]\,d\delta d\beta+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[(Gu)(x_0,\beta,\gamma,t)+(Gu)(x,\beta,\gamma,t_0)-$$

$$-(Gu)(x_0,\beta,\gamma,t_0)]\,d\gamma d\beta+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t}[(Hu)(\alpha,y_0,z,\delta)+$$

$$+(Hu)(\alpha,y,z_0,\delta)-(Hu)(\alpha,y_0,z_0,\delta)]\,d\delta d\alpha+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}[(Ku)(\alpha,y_0,\gamma,t)+(Ku)(\alpha,y,\gamma,t_0)-$$

$$-(Ku)(\alpha,y_0,\gamma,t_0)]\,d\gamma d\alpha+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[(Su)(\alpha,\beta,z_0,t)+$$

$$+(Su)(\alpha,\beta,z,t_0)-(Su)(\alpha,\beta,z_0,t_0)]\,d\beta d\alpha-$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(Mu)(x_0,\beta,\gamma,\delta)\,d\delta d\gamma d\beta-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(Nu)(\alpha, y_0, \gamma, \delta)\, d\delta d\gamma d\alpha -$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}(Pu)(\alpha, \beta, z_0, \delta)\, d\delta d\beta d\alpha -$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}(Qu)(\alpha, \beta, \gamma, t_0)\, d\gamma d\beta d\alpha. \tag{3.9}$$

Подставляя сюда граничные значения (3.2), получим формулу решения задачи Гурса. В записи функций R, $A, \ldots$, Q для сокращения записи указаны лишь первые четыре аргумента, вторые четыре всюду (x, y, z, t).

Можно рассматривать формулу (3.9) при произвольных функциях $u(x_0, y, z, t) = \varphi_1(y, z, t)$, $u(x, y_0, z, t) = \varphi_2(x, z, t)$, $u(x, y, z_0, t) = \varphi_3(x, y, t)$, $u(x, y, z, t_0) = \varphi_4(x, y, z)$, в качестве общего представления решений уравнения (3.1), как это делается в [2, с. 66] для двумерного уравнения.

Формула (3.9) получена в работе [29].

Замечание. Если при интегрировании тождества (3.7) считать, что u является решением неоднородного уравнения $L(u) = F(x, y, z)$, то в правой части (3.9) добавится слагаемое

$$u_0 = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t} R(\alpha, \beta, \gamma, \delta) F(\alpha, \beta, \gamma, \delta) d\delta d\gamma d\beta d\alpha.$$

Очевидно, u_0 есть решение однородной задачи Гурса для неоднородного уравнения, соответствующего (3.1).

1.2. Задача Коши. В ориентированном системой координат (x, y, z, t) пространстве R^4 рассмотрим поверхность S класса C^4, заданную уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ y = y(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ z = z(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \\ t = t(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \end{cases} \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_1} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_2} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu_3} & \dfrac{\partial t}{\partial \mu_3} \end{pmatrix} = 3,$$

где $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in G^3 \subset R^3$. Предполагаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей. Положим для определенности $x_y < 0$, $y_z < 0$, $z_t < 0$. Проведем через точку $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$ плоскости $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$. Обозначим через S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, через Ω — конечную область пространства R^4, ограниченную плоскостями $x = x_0, y = y_0, z = z_0, t = t_0$ и S^0, $\partial\Omega$ — край Ω. Считаем ориентацию области Ω положительной. Рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^0, Ω и $\partial\Omega$ с индексами из 1, 2 или 3 различных переменных x, y, z, t. S^0 и Ω-многообразия определим как пересечения соответственно S^0 и Ω с соответствующими плоскостями, а $\partial\Omega$-многообразия — как края соответствующих Ω-многообразий. Например S^0_{xy} — множество точек поверхности S^0, лежащих в плоскостях $x = x_0$ и $y = y_0$. Очевидно, что геометрически S^0-многообразия содержатся в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами, а Ω-многообразия — в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами без последней переменной. Например S^0_y — часть $\partial\Omega_y$, Ω_{zxy} — часть $\partial\Omega_{zx}$. Будем считать, что названные многообразия — не только подмножества $\partial\Omega$-множеств, но и имеют одинаковую с ними ориентацию. Ориентации $\partial\Omega$-многообразий будем считать согласованными с ориентациями соответствующих Ω-многообразий.

В результате индуктивно определены все введенные ориентированные многообразия.

Нетрудно видеть, что два из рассмотренных как Ω-, так и S^0-многообразий совпадают геометрически, если их индексы образованы одним и тем же набором переменных. Причем, если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Рассмотрим уравнение с правой частью

$$L(u) = \Phi, \tag{3.10}$$

соответствующее (3.1).

Задача: *найти регулярное в* Ω *решение уравнения* (3.10)*, которое удовлеворяет условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_S = \psi_k,\ k = \overline{0,3}, \tag{3.11}$$

где l — заданное на S некасательное к этой поверхности поле направлений.

Будем считать

$$a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g,\, h,\, k\, s,\, m,\, n,\, p,\, q,\, r \in C^3(\overline{\Omega}),\ \Phi \in C(\overline{\Omega}),\ \psi_k \in C^{4-k}(\overline{S}).$$

При решении будем опираться на соотношение:

$$R\Phi = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \frac{\partial W_4}{\partial t}, \tag{3.12}$$

где

$$\begin{aligned}
W_1 = \frac{1}{4}(Ru)_{yzt} - \frac{1}{3}(Au)_{yz} - \frac{1}{3}(Bu)_{yt} - \frac{1}{3}(Cu)_{zt} + \\
+\frac{1}{2}(Eu)_y + \frac{1}{2}(Fu)_z + \frac{1}{2}(Gu)_t - Mu, \\
W_2 = \frac{1}{4}(Ru)_{xzt} - \frac{1}{3}(Au)_{xz} - \frac{1}{3}(Bu)_{xt} - \frac{1}{3}(Du)_{zt} + \\
+\frac{1}{2}(Eu)_x + \frac{1}{2}(Hu)_z + \frac{1}{2}(Ku)_t - Nu, \\
W_3 = \frac{1}{4}(Ru)_{xyt} - \frac{1}{3}(Au)_{xy} - \frac{1}{3}(Cu)_{xt} - \frac{1}{3}(Du)_{yt} + \\
+\frac{1}{2}(Fu)_x + \frac{1}{2}(Hu)_y + \frac{1}{2}(Su)_t - Pu, \\
W_4 = \frac{1}{4}(Ru)_{xyz} - \frac{1}{3}(Bu)_{xy} - \frac{1}{3}(Cu)_{xz} - \frac{1}{3}(Du)_{yz} + \\
+\frac{1}{2}(Gu)_x + \frac{1}{2}(Ku)_y + \frac{1}{2}(Su)_z - Qu.
\end{aligned}$$

Здесь (3.12) представляет собой видоизмененное тождество (3.7), u — решение уравнения (3.10), $R(x, y, z, t, x_0, y_0, z_0, t_0)$ — функция Римана для (3.10), удовлетворяющая (3.6) при $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$, $\tau = t_0$.

Интегрируя (3.12) по области Ω и используя общую формулу Стокса для дифференциальной 3-формы в R^4 [43, с. 246], получим

$$\int\limits_{\Omega} R\Phi\, dx\, dy\, dz\, dt = \int\limits_{\partial\Omega} W_1 dy \wedge dz \wedge dt - W_2 dz \wedge dt \wedge dx + \\
+ W_3 dt \wedge dx \wedge dy - W_4 dx \wedge dy \wedge dz. \tag{3.13}$$

Заменяя в (3.13) интеграл по области $\partial\Omega$ суммой интегралов по ее составляющим и учитывая тождества

$$M(x_0,y,z,t)\equiv 0,\ N(x,y_0,z,t)\equiv 0,\ P(x,y,z_0,t)\equiv 0,\ Q(x,y,z,t_0)\equiv 0, \tag{3.14}$$

приведенные ранее, получим

$$\int\limits_{\Omega} R\Phi\,dx\,dy\,dz\,dt=\int\limits_{\Omega_x}\left(\frac{\partial E^*}{\partial y}+\frac{\partial F^*}{\partial z}+\frac{\partial G^*}{\partial t}\right)dy\wedge dz\wedge dt-$$

$$-\int\limits_{\Omega_y}\left(\frac{\partial H^*}{\partial z}+\frac{\partial K^*}{\partial t}+\frac{\partial E^*}{\partial x}\right)dz\wedge dt\wedge dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega_z}\left(\frac{\partial S^*}{\partial t}+\frac{\partial F^*}{\partial x}+\frac{\partial H^*}{\partial y}\right)dt\wedge dx\wedge dy-$$

$$-\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\partial G^*}{\partial x}+\frac{\partial K^*}{\partial y}+\frac{\partial S^*}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz+$$

$$+\frac{1}{12}\int\limits_{S^0} M_u\,dy\wedge dz\wedge dt-N_u dz\wedge dt\wedge dx+P_u dt\wedge dx\wedge dy-$$

$$-Q_u\,dx\wedge dy\wedge dz, \tag{3.15}$$

где

$$E^*=\frac{1}{12}(Ru)_{zt}-\frac{1}{6}(Au)_z-\frac{1}{6}(Bu)_t+\frac{1}{2}Eu,$$
$$F^*=\frac{1}{12}(Ru)_{yt}-\frac{1}{6}(Au)_y-\frac{1}{6}(Cu)_t+\frac{1}{2}Fu,$$
$$G^*=\frac{1}{12}(Ru)_{yz}-\frac{1}{6}(Bu)_y-\frac{1}{6}(Cu)_z+\frac{1}{2}Gu,$$
$$H^*=\frac{1}{12}(Ru)_{xt}-\frac{1}{6}(Au)_x-\frac{1}{6}(Du)_t+\frac{1}{2}Hu,$$
$$K^*=\frac{1}{12}(Ru)_{xz}-\frac{1}{6}(Bu)_x-\frac{1}{6}(Du)_z+\frac{1}{2}Ku,$$
$$S^*=\frac{1}{12}(Ru)_{xy}-\frac{1}{6}(Cu)_x-\frac{1}{6}(Du)_y+\frac{1}{2}Su,$$
$$R_1=3R,\quad A_1=R_t-4aR,\quad B_1=R_z-4bR,$$

$$C_1 = R_y - 4cR, \quad D_1 = R_x - 4dR,$$
$$E_1 = R_{zt} - 2(aR)_z - 2(bR)_t + 6eR,$$
$$F_1 = R_{yt} - 2(aR)_y - 2(cR)_t + 6fR,$$
$$G_1 = R_{yz} - 2(bR)_y - 2(cR)_z + 6gR,$$
$$H_1 = R_{xt} - 2(aR)_x - 2(dR)_t + 6hR,$$
$$K_1 = R_{xz} - 2(bR)_x - 2(dR)_z + 6kR,$$
$$S_1 = R_{xy} - 2(cR)_x - 2(dR)_y + 6sR,$$
$$M_1 = 3R_{yzt} - 4(aR)_{yz} - 4(bR)_{yt} - 4(cR)_{zt} + 6(eR)_y +$$
$$+6(fR)_z + 6(gR)_t - 12mR,$$
$$N_1 = 3R_{xzt} - 4(aR)_{xz} - 4(bR)_{xt} - 4(dR)_{zt} + 6(eR)_x +$$
$$+6(hR)_z + 6(kR)_t - 12nR,$$
$$P_1 = 3R_{xyt} - 4(aR)_{xy} - 4(cR)_{xt} - 4(dR)_{yt} + 6(fR)_x +$$
$$+6(hR)_y + 6(sR)_t - 12pR,$$
$$Q_1 = 3R_{xyz} - 4(bR)_{xy} - 4(cR)_{xz} - 4(dR)_{yz} + 6(gR)_x +$$
$$+6(kR)_y + 6(sR)_z - 12qR,$$
$$M_u = R_1 u_{yzt} - A_1 u_{yz} - B_1 u_{yt} - C_1 u_{zt} + E_1 u_y +$$
$$+F_1 u_z + G_1 u_t - M_1 u,$$
$$N_u = R_1 u_{xzt} - A_1 u_{xz} - B_1 u_{xt} - D_1 u_{zt} + E_1 u_x +$$
$$+H_1 u_z + K_1 u_t - N_1 u,$$
$$P_u = R_1 u_{xyt} - A_1 u_{xy} - C_1 u_{xt} - D_1 u_{yt} + F_1 u_x +$$
$$+H_1 u_y + S_1 u_t - P_1 u,$$
$$Q_u = R_1 u_{xyz} - B_1 u_{xy} - C_1 u_{xz} - D_1 u_{yz} + G_1 u_x +$$
$$+K_1 u_y + S_1 u_z - Q_1 u.$$

Здесь в записи M_u, $N_u, \ldots$ символ u — индекс.

Применяя формулу Гаусса — Остроградского [43, с. 241] к интегралам I_x, I_y, I_z, I_t по областям Ω_x, Ω_y, Ω_z, Ω_t соответственно, заменяя двойные интегралы по областям $\partial\Omega_x$, $\partial\Omega_y$, $\partial\Omega_z$, $\partial\Omega_t$ суммами интегралов по их составляющим и учитывая тождества $E(x_0, y_0, z, t) \equiv 0$,

$F(x_0,y,z_0,t)\equiv 0$, $G(x_0,y,z,t_0)\equiv 0$, $H(x,y_0,z_0,t)\equiv 0$, $K(x,y_0,z,t_0)\equiv 0$, $S(x,y,z_0,t_0)\equiv 0$, найдем

$$I_x=\int\limits_{\Omega_{xy}}\left(\frac{\partial A^*}{\partial z}+\frac{\partial B^*}{\partial t}\right)dz\wedge dt+\int\limits_{\Omega_{xz}}\left(\frac{\partial C^*}{\partial t}+\frac{\partial A^*}{\partial y}\right)dt\wedge dy+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{xt}}\left(\frac{\partial B^*}{\partial y}+\frac{\partial C^*}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\frac{1}{12}\int\limits_{S_x^0}E_u\,dz\wedge dt+$$
$$+F_u\,dt\wedge dy+G_u\,dy\wedge dz,$$
$$I_y=\int\limits_{\Omega_{yx}}\left(\frac{\partial A^*}{\partial z}+\frac{\partial B^*}{\partial t}\right)dz\wedge dt+\int\limits_{\Omega_{yz}}\left(\frac{\partial D^*}{\partial t}+\frac{\partial A^*}{\partial x}\right)dt\wedge dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{yt}}\left(\frac{\partial B^*}{\partial x}+\frac{\partial D^*}{\partial z}\right)dx\wedge dz+\frac{1}{12}\int\limits_{S_y^0}H_u\,dt\wedge dx+$$
$$+K_u\,dx\wedge dz+E_u\,dz\wedge dt,$$
$$I_z=\int\limits_{\Omega_{zx}}\left(\frac{\partial A^*}{\partial y}+\frac{\partial C^*}{\partial t}\right)dy\wedge dt+\int\limits_{\Omega_{zy}}\left(\frac{\partial D^*}{\partial t}+\frac{\partial A^*}{\partial x}\right)dt\wedge dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{zt}}\left(\frac{\partial C^*}{\partial x}+\frac{\partial D^*}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\frac{1}{12}\int\limits_{S_z^0}S_u\,dx\wedge dy+$$
$$+F_u\,dy\wedge dt+H_u\,dt\wedge dx,$$
$$I_t=\int\limits_{\Omega_{tx}}\left(\frac{\partial B^*}{\partial y}+\frac{\partial C^*}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\int\limits_{\Omega_{ty}}\left(\frac{\partial D^*}{\partial z}+\frac{\partial B^*}{\partial x}\right)dz\wedge dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_{tz}}\left(\frac{\partial C^*}{\partial x}+\frac{\partial D^*}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\frac{1}{12}\int\limits_{S_t^0}G_u\,dy\wedge dz+$$
$$+K_u\,dz\wedge dx+S_u\,dx\wedge dy.$$

При этом

$$A^*=\frac{1}{24}(Ru)_t-\frac{1}{6}Au,\quad B^*=\frac{1}{24}(Ru)_z-\frac{1}{6}Bu,$$
$$C^*=\frac{1}{24}(Ru)_y-\frac{1}{6}Cu,\quad D^*=\frac{1}{24}(Ru)_x-\frac{1}{6}Du,$$
$$A_2=R_t-2aR,\quad B_2=R_z-2bR,$$

$$C_2 = R_y - 2cR, \quad D_2 = R_x - 2dR,$$
$$E_2 = 3R_{zt} - 4(aR)_z - 4(bR)_t + 6eR,$$
$$F_2 = 3R_{yt} - 4(aR)_y - 4(cR)_t + 6fR,$$
$$G_2 = 3R_{yz} - 4(bR)_y - 4(cR)_z + 6gR,$$
$$H_2 = 3R_{xt} - 4(aR)_x - 4(dR)_t + 6hR,$$
$$K_2 = 3R_{xz} - 4(bR)_x - 4(dR)_z + 6kR,$$
$$S_2 = 3R_{xy} - 4(cR)_x - 4(dR)_y + 6sR,$$
$$E_u = Ru_{zt} - A_2u_z - B_2u_t + E_2u,$$
$$F_u = Ru_{yt} - A_2u_y - C_2u_t + F_2u,$$
$$G_u = Ru_{yz} - B_2u_y - C_2u_z + G_2u,$$
$$H_u = Ru_{xt} - A_2u_x - D_2u_t + H_2u,$$
$$K_u = Ru_{xz} - B_2u_x - D_2u_z + K_2u,$$
$$S_u = Ru_{xy} - C_2u_x - D_2u_y + S_2u.$$

В сумме $I_1 = I_x - I_y + I_z - I_t$ после приведения подобных (равных) слагаемых из интегралов по плоским областям будут содержаться лишь интегралы по областям Ω_{xy}, Ω_{xz}, Ω_{xt}, Ω_{yz}, Ω_{yt}, Ω_{zt}. Применяя к этим интегралам I_{xy}, I_{xz}, I_{xt}, I_{yz}, I_{yt}, I_{zt} формулу Грина [43, с. 236], заменяя интегралы по контурам $\partial\Omega_{xy}$, $\partial\Omega_{xz}$, $\partial\Omega_{xt}$, $\partial\Omega_{yz}$, $\partial\Omega_{yt}$, $\partial\Omega_{zt}$ суммами интегралов по их составляющим и учитывая тождества $A(x_0, y_0, z_0, t) \equiv 0$, $B(x_0, y_0, z, t_0) \equiv 0$, $C(x_0, y, z_0, t_0) \equiv 0$, $D(x, y_0, z_0, t_0) \equiv 0$, найдем

$$I_{xy} = \frac{1}{12}\left(\int\limits_{\Omega_{xyz}} (Ru)_t dt - \int\limits_{\Omega_{xyt}} (Ru)_z dz + \int\limits_{S^0_{xy}} A_u dt - B_u dz\right),$$

$$I_{xz} = \frac{1}{12}\left(\int\limits_{\Omega_{xzt}} (Ru)_y dy - \int\limits_{\Omega_{xzy}} (Ru)_t dt + \int\limits_{S^0_{xz}} C_u dy - A_u dt\right),$$

$$I_{xt} = \frac{1}{12}\left(\int\limits_{\Omega_{xty}} (Ru)_z dz - \int\limits_{\Omega_{xtz}} (Ru)_y dy + \int\limits_{S^0_{xt}} B_u dz - C_u dy\right),$$

$$I_{yz} = \frac{1}{12}\left(\int\limits_{\Omega_{yzx}} (Ru)_t dt - \int\limits_{\Omega_{yzt}} (Ru)_x dx + \int\limits_{S^0_{yz}} A_u dt - D_u dx\right),$$

$$I_{yt}=\frac{1}{12}\Bigg(\int\limits_{\Omega_{ytz}}(Ru)_x dx-\int\limits_{\Omega_{ytx}}(Ru)_z dz+\int\limits_{S^0_{yt}}D_u dx-B_u dz\Bigg),$$

$$I_{zt}=\frac{1}{12}\Bigg(\int\limits_{\Omega_{ztx}}(Ru)_y dy-\int\limits_{\Omega_{zty}}(Ru)_x dx+\int\limits_{S^0_{zt}}C_u dy-D_u dx\Bigg),$$

где

$$A_u=u_t R-u(3R_t-4aR),\quad B_u=u_z R-u(3R_z-4bR),$$
$$C_u=u_y R-u(3R_y-4cR),\quad D_u=u_x R-u(3R_x-4dR).$$

В сумме $I_2=I_{xy}+I_{xz}+I_{xt}+I_{yz}+I_{yt}+I_{zt}$ после приведения подобных слагаемых из интегралов по отрезкам прямых будут содержаться лишь интегралы по отрезкам Ω_{xyz}, Ω_{xyt}, Ω_{xzt}, и Ω_{yzt}. Непосредственно вычисляя эти интегралы, учитывая равенство $R(x_0,y_0,z_0,t_0,x_0,y_0,z_0,t_0)=1$, вытекающее из определения функции Римана, и возвращаясь к (3.15), получаем:

$$u(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{1}{4}\Big((Ru)(S^0_{xyz})+(Ru)(S^0_{xyt})+(Ru)(S^0_{xzt})+$$

$$+(Ru)(S^0_{yzt})\Big)-\frac{1}{12}\Bigg\{\int\limits_{S^0_{xy}}A_u dt-B_u dz+\int\limits_{S^0_{xz}}C_u dy-A_u dt+$$

$$+\int\limits_{S^0_{xt}}B_u dz-C_u dy+\int\limits_{S^0_{yz}}A_u dt-D_u dx+\int\limits_{S^0_{yt}}D_u dx-B_u dz+$$

$$+\int\limits_{S^0_{zt}}C_u dy-D_u dx+\int\limits_{S^0_{x}}E_u dz\wedge dt+F_u dt\wedge dy+G_u dy\wedge dz-$$

$$-\int\limits_{S^0_{y}}H_u dt\wedge dx+K_u dx\wedge dz+E_u dz\wedge dt+\int\limits_{S^0_{z}}S_u dx\wedge dy+$$

$$+F_u dy\wedge dt+H_u dt\wedge dx-\int\limits_{S^0_{t}}G_u dy\wedge dz+K_u dz\wedge dx+$$

$$+S_u dx\wedge dy+\int\limits_{S^0}M_u dy\wedge dz\wedge dt-N_u dz\wedge dt\wedge dx+$$

$$+P_u dt\wedge dx\wedge dy - Q_u dx\wedge dy\wedge dz\Bigg\}+$$

$$+\int_{x_0}^{x_{S^0_{yzt}}}dx\int_{y_0}^{y_{S^0_{zt}}(x)}dy\int_{z_0}^{z_{S^0_t}(x,y)}dz\int_{t_0}^{t_{S^0}(x,y,z)}R\Phi dt. \qquad (3.16)$$

Здесь $x = x_{S^0_{yzt}}$ — абсцисса точки S^0_{yzt}, $y = y_{S^0_{zt}}(x)$ — уравнение кривой S^0_{zt} в плоскости $z = z_0$, $t = t_0$, $z = z_{S^0_t}(x, y)$ — уравнение поверхности S^0_t в плоскости $t = t_0$ и $t = t_{S^0}(x, y, z)$ — уравнение поверхности S^0. Перечисленные пределы интегрирования последнего интеграла в (3.16) существуют, так как все определители

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_3} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial y}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_3} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_1} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_2} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_3} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_1} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_2} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial z}{\partial\mu_3} & \dfrac{\partial t}{\partial\mu_3} \end{vmatrix}$$

отличны от нуля в силу свойств поверхности S.

Формула (3.16) содержит значения частных производных решения u по x, y, z, t до третьего порядка включительно, вычисленные на S. Она даст решение рассматриваемой задачи, если указанные производные вычислить через функции ψ_k из условий (3.11). Покажем, что это можно сделать.

Для удобства переобозначим $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $t = x_4$. Пусть поле направлений l задано вектором

$$\vec{l}\Big(l_1(\mu_1,\mu_2,\mu_3), l_2(\mu_1,\mu_2,\mu_3), l_3(\mu_1,\mu_2,\mu_3), l_4(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\Big),\ \vec{l}\in C^3(G^3),$$

причем $|\vec{l}| \equiv 1$. Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3) + l_i(\mu_1, \mu_2, \mu_3)\mu_4, \tag{3.17}$$

где $i = \overline{1,4}$, $\mu_4 \in R$. Поле направлений l по условию не касательно к S, следовательно, существует обратное преобразование $\mu_i = \mu_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ класса C^3 в окрестности поверхности S [42, с. 495]. Последовательно находя производные первого, второго и третьего порядков решения исходной задачи u по x_i в точках поверхности S, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \mu_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial u}{\partial \mu_i},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial \mu_k}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^3 u}{\partial \mu_i \partial \mu_j \partial \mu_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \left(\frac{\partial^2 \mu_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial \mu_i \partial \mu_j} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial \mu_j}{\partial x_\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \mu_i \partial \mu_j} \right) + \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^3 \mu_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \frac{\partial u}{\partial \mu_i}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Очевидно, здесь

$$\left. \frac{\partial^s u}{\partial \mu_1^p \partial \mu_2^q \partial \mu_3^r \partial \mu_4^v} \right|_S = \frac{\partial^{s-v} \psi_v}{\partial \mu_1^p \partial \mu_2^q \partial \mu_3^r}, \quad s = p + q + r + v,$$

$s = \overline{1,3}$, а производные μ_i по x_α находятся по теореме о неявной функции [42, с. 488]. Подставляя эти производные в (3.16), получим решение задачи Коши.

При изложении настоящего пункта мы следовали работе В.А. Севастьянова [65].

1.3. Функции Римана для расщепляющихся уравнений. В дальнейшем используются конструкции

$$
\begin{array}{ll}
h_{1,2} = d_y + cd - s, & h_{2,1} = c_x + cd - s, \\
h_{1,3} = d_z + bd - k, & h_{3,1} = b_x + bd - k, \\
h_{1,4} = d_t + ad - h, & h_{4,1} = a_x + ad - h, \\
h_{2,3} = c_z + bc - g, & h_{3,2} = b_y + bc - g, \\
h_{2,4} = c_t + ac - f, & h_{4,2} = a_y + ac - f, \\
h_{3,4} = b_t + ab - e, & h_{4,3} = a_z + ab - e, \\
h_{12,3} = s_z + bs - q, & h_{12,4} = s_t + as - p, \\
h_{13,2} = k_y + ck - q, & h_{13,4} = k_t + ak - n, \\
h_{14,2} = h_y + ch - p, & h_{14,3} = h_z + bh - n, \\
h_{23,1} = g_x + dg - q, & h_{24,1} = f_x + df - p, \\
h_{23,4} = g_t + ag - m, & h_{24,3} = f_z + bf - m, \\
h_{34,1} = e_x + de - n, & h_{34,2} = e_y + ce - m, \\
h_{123,4} = q_t + aq - r, & h_{124,3} = p_z + bp - r, \\
h_{134,2} = n_y + cn - r, & h_{234,1} = m_x + dm - r.
\end{array}
\tag{3.19}
$$

являющиеся аналогами h_i, $i = \overline{1,9}$, из п. 5 § 2. Нумерация конструкций из (3.19) имеет следующий смысл. Запишем уравнение (3.1) в виде

$$
\begin{gathered}
u_{x_1x_2x_3x_4} + a_1 u_{x_2x_3x_4} + a_2 u_{x_1x_3x_4} + a_3 u_{x_1x_2x_4} + a_4 u_{x_1x_2x_3} + a_{12} u_{x_3x_4} + \\
+ a_{13} u_{x_2x_4} + a_{14} u_{x_2x_3} + a_{23} u_{x_1x_4} + a_{24} u_{x_1x_3} + a_{34} u_{x_1x_2} + a_{123} u_{x_4} + \\
+ a_{124} u_{x_3} + a_{134} u_{x_2} + a_{234} u_{x_1} + a_{1234} u = 0,
\end{gathered}
$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$. Тогда, например, $h_{1,3} = a_{1x_3} + a_1 a_3 - a_{13}$, $h_{23,4} = a_{23x_4} + a_{23} a_4 - a_{234}$.

Продифференцировав (3.6) по x, y, z, t, получим, что функция v удовлетворяет сопряженному к (3.1) уравнению

$$
\begin{gathered}
L^*(u) = v_{xyzt} - (av)_{xyz} - (bv)_{xyt} - (cv)_{xzt} - (dv)_{yzt} + (ev)_{xy} + \\
+ (fv)_{xz} + (gv)_{xt} + (hv)_{yz} + (kv)_{yt} + (sv)_{zt} - (mv)_x - \\
- (nv)_y - (pv)_z - (qv)_t + rv = 0.
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

1. Положим в (3.6) $\xi = x_0$, $\eta = y_0$, $\zeta = z_0$, $\tau = t_0$.

Покажем, что если

$$
\begin{gathered}
h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv \\
\equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv h_{123,4} \equiv 0,
\end{gathered}
\tag{3.21}
$$

то функция Римана уравнения (3.1) имеет вид

$$R(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0)=\exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha,y_0,z_0,t_0)\,d\alpha+\right.$$

$$\left.+\int_{y_0}^{y} c(x,\beta,z_0,t_0)\,d\beta+\int_{z_0}^{z} b(x,y,\gamma,t_0)\,d\gamma+\int_{t_0}^{t} a(x,y,z,\delta)\,d\delta\right). \quad (3.22)$$

Доказательство формулы (3.22) (приведенное в [64]) будем проводить при фиксированных сначала трех переменных, затем двух, одной и лишь затем — в общем виде.

Предварительно покажем, что при условиях (3.21) уравнение (3.20) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-d\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-c\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\right)v=0\,. \quad (3.23)$$

Чтобы показать это, проведем соответствующие вычисления. Сначала перепишем (3.23):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-d\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-c\right)\Big(v_{zt}-(av)_z-(bv)_t+ev\Big)=0\,. \quad (3.24)$$

Здесь учтено, что $h_{3,4}\equiv 0$, то есть $b_t+ab=e$. Преобразуем (3.24):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-d\right)\Big(v_{yzt}-(av)_{yz}-(bv)_{yt}+(ev)_y-$$

$$-cv_{zt}+c(av)_z+c(bv)_t-cev\Big)=0\,. \quad (3.25)$$

Перегруппируем слагаемые в (3.25):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-d\right)\Big(v_{yzt}-(av)_{yz}-(bv)_{yt}-(cv)_{zt}+(ev)_y+((c_t+ac)v)_z+$$

$$+((c_z+bc)v)_t-(c_{zt}+ac_z+bc_t+ce)v\Big)=0\,. \quad (3.26)$$

Учитываем теперь, что $h_{2,3}\equiv h_{2,4}\equiv 0$, то есть $c_t+ac=f$, $c_z+bc=g$. Далее,

$$c_{zt}+ac_z+bc_t+ce=(c_z+bc)_t+a(c_z+bc)=g_t+ag=m.$$

Здесь мы использовали условия $h_{3,4} \equiv 0$, $h_{2,3} \equiv 0$, $h_{23,4} \equiv 0$. Наконец, распишем уравнение (3.26):

$$\begin{aligned} v_{xyzt} - (av)_{xyz} - (bv)_{xyt} - (cv)_{xzt} - dv_{yzt} + (ev)_{xy} + \\ + (fv)_{xz} + (gv)_{xt} + d(av)_{yz} + d(bv)_{yt} + d(cv)_{zt} - \\ - (mv)_x - d(ev)_y - d(fv)_z - d(gv)_t + dmv = 0\,. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Займемся теперь преобразованием выражения

$$\begin{aligned} P = -dv_{yzt} + d(av)_{yz} + d(bv)_{yt} + d(cv)_{zt} - \\ - d(ev)_y - d(fv)_z - d(gv)_t + dmv\,, \end{aligned}$$

содержащегося в левой части (3.27):

$$\begin{gathered} P = [-(dv)_{yzt} + (d_y v)_{zt} + (d_z v)_{yt} + (d_t v)_{yz} - d_{yz} v_t - d_{yt} v_z - \\ -d_{zt} v_y - 2d_{yzt} v] + [(adv)_{yz} - d_{yz} av - d_y (av)_z - d_z (av)_y] + \\ +[(bdv)_{yt} - d_{yt} bv - d_y (bv)_t - d_t (bv)_y] + [(cdv)_{zt} - d_{zt} cv - d_z (cv)_t - d_t (cv)_z] - \\ -[(dev)_y - d_y ev] - [(dfv)_z - d_z fv] - [(dgv)_t - d_t gv] + dmv = \\ = -(dv)_{yzt} + ((d_y + cd)v)_{zt} + ((d_z + bd)v)_{yt} + ((d_t + ad)v)_{yz} - \\ -[d_{yz} v_t + d_{yt} v_z - d_{yt} v_z + 2d_{yzt} v] - [(d_y av)_z + (d_z av)_y - d_{yz} av] - \\ -[(d_y bv)_t + (d_t bv)_y - d_{yt} bv] - [(d_z cv)_t + (d_t cv)_z - d_{zt} cv] - \\ -[(d_y av)_z - (d_z av)_y - d_{yz} av] - [(dev)_y - d_y ev] - [(dfv)_z - d_z fv] - \\ -[(dgv)_t - d_t gv] + dmv = -(dv)_{yzt} + ((d_y + cd)v)_{zt} + \\ +((d_z + bd)v)_{yt} + ((d_t + ad)v)_{yz} + P_1. \end{gathered}$$

Сгруппируем слагаемые в P_1 таким образом:

$$\begin{gathered} P_1 = -[d_{yz} v_t + (d_y bv)_t + (d_z cv)_t + (dgv)_t] - \\ -[d_{yt} v_z + (d_y av)_z + (d_t cv)_z + (dfv)_z] - \\ -[d_{zt} v_y + (d_z av)_y + (d_t bv)_y + (dev)_y] + [d_{yz} a + d_{yt} b + d_{zt} c + d_y e + \\ +d_z f + d_t g + dm - 2d_{yzt}]v = -[(d_{zt} + d_z a + d_t b + de)v]_y - \\ -[(d_{yt} + d_y a + d_t c + df)v]_z - [(d_{yz} + d_y b + d_z c + dg)v]_t + \\ +[d_{yzt} + d_{yz} a + d_{yt} b + d_{zt} c + d_y e + d_z f + d_t g + dm]v = \\ = -[(d_{zt} + d_z a + d_t b + de)v]_y - [(d_{yt} + d_y a + d_t c + df)v]_z - \end{gathered}$$

$$-[(d_{yz} + d_y b + d_z c + dg)v]_t + P_2 v.$$

Преобразуем первое слагаемое в полученном выражении:

$$[(d_{zt} + d_z a + d_t b + de)v]_y = [((d_z + bd)_t + a(d_z + bd))v]_y = (nv)_y.$$

Здесь использовались условия $h_{3,4} \equiv 0$, $h_{1,3} \equiv 0$, $h_{13,4} \equiv 0$. Совершенно аналогично получаем, что

$$[(d_{yt} + d_y a + d_t c + df)v]_z = (pv)_z, \quad [(d_{yz} + d_y b + d_z c + dg)v]_t = (qv)_t,$$

при этом используются условия $h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,3} \equiv 0$ и $h_{2,4} \equiv h_{1,2} \equiv h_{12,4} \equiv 0$ соответственно. Осталось преобразовать P_2. Распишем $m = g_t + ag$ (то есть $h_{23,4} \equiv 0$). Тогда

$$P_2 = [d_{yz} + d_y b + d_z c + dg]_t + d_{yz} a + d_y e + d_z f + dag - d_y b_t - d_z c_t.$$

Теперь используем формулы $e = b_t + ab$ и $f = c_t + ac$. Очевидно

$$P_2 = [d_{yz} + d_y b + d_z c + dg]_t + a[d_{yz} a + d_y b + d_z c + dg] = q_t + aq = r,$$

поскольку $h_{123,4} \equiv 0$. Тем самым формула (3.23) доказана.

Положим в (3.6) $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ и продифференцируем по x. Получим

$$v_x(x, y_0, z_0, t_0) - (dv)(x, y_0, z_0, t_0) = 0,$$

откуда

$$R(x, y_0, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha, y_0, z_0, t_0)\, d\alpha\right). \qquad (3.28)$$

Здесь коэффициент перед экспонентой равен 1 в силу

$$R(x_0, y_0, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = 1.$$

Очевидно (3.28) — частный случай (3.22). Аналогично находим

$$R(x_0, y, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right)$$

$$R(x_0, y_0, z, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} b(x_0, y_0, \gamma, t_0)\, d\gamma\right)$$

$$R(x_0, y_0, z_0, t, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(x_0, y_0, z_0, \delta)\, d\delta\right).$$

Полагаем в (3.6) $z = z_0$, $t = t_0$ и дифференцируем по x, y:

$$v_{xy}(x, y, z_0, t_0) - (cv)_x(x, y, z_0, t_0) -$$
$$- (dv)_y(x, y, z_0, t_0) + (sv)(x, y, z_0, t_0) = 0. \quad (3.29)$$

В силу (3.21) $d_y + cd - s \equiv 0$, поэтому (3.29) равносильно уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - d(x, y, z_0, t_0)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c(x, y, z_0, t_0)\right) v(x, y, z_0, t_0) = 0.$$

Записав его в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} - cv = v_1, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} - dv_1 = 0, \end{cases}$$

находим общее решение

$$v(x, y, z_0, t_0) = R(x, y, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) =$$
$$= \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right)\left[\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x, \beta, z_0, t_0)\, d\beta +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{x_0}^{x} d(\alpha, \eta, z_0, t_0)\, d\alpha\right) \varphi(\eta)\, d\eta + \psi(x)\right]. \quad (3.30)$$

Положим $y = y_0$. Тогда

$$\psi(x) = R(x, y_0, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha, y_0, z_0, t_0)\, d\alpha\right).$$

Подставим найденное значение $\psi(x)$ в (3.30). Полагая $x = x_0$, получим

$$\exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0, t_0)\, dx_0\right) \times$$
$$\times \left[\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right) \varphi(\eta)\, d\eta + 1\right] =$$
$$= R(x_0, y, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} c(x_0, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right).$$

Отсюда

$$\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x_0, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right) \varphi(\eta)\, d\eta = 0.$$

Верхний предел интегрирования внешнего интеграла переменный, следовательно $\varphi(\eta) \equiv 0$.

Подставляя ψ и φ в (3.30), получим выражение для $R(x, y, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0)$ совпадающее с (3.22) при $z = z_0$, $t = t_0$.

Аналогично доказывается справедливость (3.22) в оставшихся 5 случаях с фиксированными двумя переменными.

Пусть в уравнении (3.6) теперь $t = t_0$. Дифференцируя его по x, y, z, получим:

$$v_{xyz} - (bv)_{xy} - (cv)_{xz} - (dv)_{yz} + (gv)_x + (kv)_y + (sv)_z - qv = 0. \quad (3.31)$$

Здесь все аргументы (x, y, z, t_0).

В силу условий (3.21), уравнение (3.31) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - d\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - b\right) v = 0.$$

Как и раньше, переписывая это уравнение в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial z} - bv = v_1, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - cv_1 = v_2, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - dv_2 = 0, \end{cases}$$

находим его общее решение:

$$\begin{gathered} v(x, y, z, t_0) = R(x, y, z, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{z_0}^{z} b(x, y, \gamma, t_0)\, d\gamma\right) \times \\ \times \left[\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} b(x, y, \gamma, t_0)\, d\gamma + \int_{y_0}^{y} c(x, \beta, \zeta, t_0)\, d\beta\right) \times \right. \\ \times \left[\int_{y_0}^{y} \exp\left(-\int_{y_0}^{\eta} c(x, \beta, \zeta, t_0)\, d\beta + \int_{x_0}^{x} d(\alpha, \eta, \zeta, t_0)\, d\alpha\right) \times \right. \\ \left.\left. \times \varphi_1(\eta, \zeta)\, d\eta + \varphi_2(x, \zeta)\right] d\zeta + \varphi_3(x, y)\right]. \end{gathered} \quad (3.32)$$

Положим $z = z_0$. Получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y) &= R(x, y, z_0, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) = \\ &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha, y_0, z_0, t_0)\, d\alpha + \int_{y_0}^{y} c(x, \beta, z_0, t_0)\, d\beta\right). \end{aligned}$$

Подставим это выражение в (3.32), положим $y = y_0$. Тогда

$$\exp\left(\int_{z_0}^{z} b(x, y_0, \gamma, t_0)\, d\gamma\right) \left[\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} b(x, y_0, \gamma, t_0)\, d\gamma\right) \times \right.$$

$$\left. \times \varphi_2(x, \zeta)\, d\zeta + \exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha, y_0, z_0, t_0)\, d\alpha\right)\right] =$$

$$= R(x, y_0, z, t_0, x_0, y_0, z_0, t_0) =$$

$$= \exp\left(\int_{x_0}^{x} d(\alpha, y_0, z_0, t_0)\, d\alpha + \int_{z_0}^{z} b(x, y_0, \gamma, t_0)\, d\gamma\right).$$

Отсюда

$$\int_{z_0}^{z} \exp\left(-\int_{z_0}^{\zeta} b(x, y_0, \gamma, t_0)\, d\gamma\right) \varphi_2(x, \zeta)\, d\zeta = 0.$$

Как и в предыдущих случаях $\varphi_2(x, \zeta) \equiv 0$.

Аналогично $\varphi_1(\eta, \zeta) \equiv 0$. Подставив φ_1, φ_2, φ_3 в (3.32) получим формулу (3.22) при $t = t_0$.

Выражения R при $x = x_0$, либо $y = y_0$, либо $z = z_0$ получаются аналогично.

Действуя по указанной схеме можно найти выражение R не фиксируя ни одной переменной, то есть доказать формулу (3.22) полностью.

Пользуясь приведенной выше схемой доказательства можно получить еще 23 аналога формулы (3.22), подобно тому, как это было сделано в п. 5.1 § 2.

2. Покажем, что при условиях

$$\begin{gathered} h_{1,4} \equiv h_{2,4} \equiv h_{3,4} \equiv h_{1,3} \equiv h_{2,3} \equiv h_{1,2} \equiv \\ \equiv h_{12,4} \equiv h_{13,4} \equiv h_{23,4} \equiv h_{12,3} \equiv 0 \end{gathered} \tag{3.33}$$

можно записать интегральное уравнение для функции Римана так, что оно будет содержать лишь четырехкратный интеграл.

Пусть имеет место (3.33). Тогда (3.20) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - d\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - c\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\right) v = h_{123,4} v. \tag{3.34}$$

Сопряженное к (3.34) уравнение при $h_{123,4} \equiv 0$ записывается следующим образом

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + c\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + d\right) w = 0. \tag{3.35}$$

Как было показано выше, функция Римана для уравнения (3.23) при $h_{123,4} \equiv 0$ (удовлетворяющая (3.35)) имеет вид

$$R_{1234}(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0) =$$
$$= \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(x_0,y_0,z_0,\delta)d\delta - \int_{z_0}^{z} b(x_0,y_0,\gamma,t)d\gamma - \right.$$
$$\left. - \int_{y_0}^{y} c(x_0,\beta,z,t)d\beta - \int_{x_0}^{x} d(\alpha,y,z,t)d\alpha\right).$$

Будем теперь рассматривать (3.23) как неоднородное уравнение с правой частью $h_{123,4}v$. Запишем его решение в виде суммы решения однородного (при $h_{123,4}v \equiv 0$) и функции

$$u_0 = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t} R(\alpha,\beta,\gamma,\delta)[h_{123,4}u](\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha.$$

В соответствии с формулой (3.9) имеем

$$u(x,y,z,t) = (Ru)(x_0,y,z,t) + (Ru)(x,y_0,z,t) +$$
$$+(Ru)(x,y,z_0,t) + (Ru)(x,y,z,t_0) - (Ru)(x_0,y_0,z,t) -$$
$$-(Ru)(x_0,y,z_0,t) - (Ru)(x_0,y,z,t_0) - (Ru)(x,y_0,z_0,t) -$$
$$-(Ru)(x,y_0,z,t_0) - (Ru)(x,y,z_0,t_0) + (Ru)(x_0,y_0,z_0,t) +$$
$$+(Ru)(x_0,y_0,z,t_0) + (Ru)(x_0,y,z_0,t_0) + (Ru)(x,y_0,z_0,t_0) -$$
$$-(Ru)(x_0,y_0,z_0,t_0) - \int_{x_0}^{x}[(Du)(\alpha,y_0,z,t) + (Du)(\alpha,y,z_0,t) +$$
$$+(Du)(\alpha,y,z,t_0) - (Du)(\alpha,y_0,z_0,t) - (Du)(\alpha,y_0,z,t_0) -$$
$$-(Du)(\alpha,y,z_0,t_0) + (Du)(\alpha,y_0,z_0,t_0)]d\alpha -$$
$$-\int_{y_0}^{y}[(Cu)(x_0,\beta,z,t) + (Cu)(x,\beta,z_0,t) +$$
$$+(Cu)(x,\beta,z,t_0) - (Cu)(x_0,\beta,z_0,t) - (Cu)(x_0,\beta,z,t_0) -$$
$$-(Cu)(x,\beta,z_0,t_0) + (Cu)(x_0,\beta,z_0,t_0)]d\beta -$$
$$-\int_{z_0}^{z}[(Bu)(x_0,y,\gamma,t) + (Bu)(x,y_0,\gamma,t) +$$
$$+(Bu)(x,y,\gamma,t_0) - (Bu)(x_0,y_0,\gamma,t) - (Bu)(x_0,y,\gamma,t_0) -$$
$$-(Bu)(x,y_0,\gamma,t_0) + (Bu)(x_0,y_0,\gamma,t_0)]d\gamma -$$

$$
\begin{gathered}
-\int_{t_0}^{t}[(Au)(x_0,y,z,\delta)+(Au)(x,y_0,z,\delta)+\\
+(Au)(x,y,z_0,\delta)-(Au)(x_0,y_0,z,\delta)-(Au)(x_0,y,z_0,\delta)-\\
-(Au)(x,y_0,z_0,\delta)+(Au)(x_0,y_0,z_0,\delta)]d\delta+\\
+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[(Su)(\alpha,\beta,z_0,t)+(Su)(\alpha,\beta,z,t_0)-\\
-(Su)(\alpha,\beta,z_0,t_0)]d\beta d\alpha+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}[(Ku)(\alpha,y_0,\gamma,t)+\\
+(Ku)(\alpha,y,\gamma,t_0)-(Ku)(\alpha,y_0,\gamma,t_0)]d\gamma d\alpha+\\
+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t}[(Hu)(\alpha,y_0,z,\delta)+(Hu)(\alpha,y,z_0,\delta)-\\
-(Hu)(\alpha,y_0,z_0,\delta)]\,d\delta d\alpha+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[(Gu)(x_0,\beta,\gamma,t)+\\
+(Gu)(x,\beta,\gamma,t_0)-(Gu)(x_0,\beta,\gamma,t_0)]\,d\gamma d\beta+\\
+\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}[(Fu)(x_0,\beta,z,\delta)+(Fu)(x,\beta,z_0,\delta)-\\
-(Fu)(x_0,\beta,z_0,\delta)]d\delta d\beta+\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}[(Eu)(x_0,y,\gamma,\delta)+\\
+(Eu)(x,y_0,\gamma,\delta)-(Eu)(x_0,y_0,\gamma,\delta)]\,d\delta d\gamma-\\
-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}(Qu)(\alpha,\beta,\gamma,t_0)d\gamma d\beta d\alpha-\\
-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}(Pu)(\alpha,\beta,z_0,\delta)d\delta d\beta d\alpha-\\
-\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(Nu)(\alpha,y_0,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\alpha-\\
-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(Mu)(x_0,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta+\\
+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(Rh_{123,4}u)(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha. \qquad (3.36)
\end{gathered}
$$

При этом у функций R, $A,\ldots,Q$ не записана вторая четверка аргументов, которая всегда (x,y,z,t).

Избавившись от производных функции $R = R_{1234}$ с помощью интегрирования по частям, перепишем (3.36) так:

$$v(x,y,z,t) = (R_{1234}v)(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_\delta - av])(x_0,y_0,z_0,\delta)d\delta + \int_{z_0}^{z}(R_{1234}[v_\gamma - bv])(x_0,y_0,\gamma,t_0)d\gamma+$$

$$+\int_{y_0}^{y}(R_{1234}[v_\beta - cv])(x_0,\beta,z_0,t_0)d\beta + \int_{x_0}^{x}(R_{1234}[v_\alpha - dv])(\alpha,y_0,z_0,t_0)d\alpha+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\gamma\delta} - av_\gamma - bv_\delta + (e - a_\gamma - b_\delta)v])(x_0,y_0,\gamma,\delta)d\delta d\gamma+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\beta\delta} - av_\beta - cv_\delta + (f - a_\beta - c_\delta)v])(x_0,\beta,z_0,\delta)d\delta d\beta+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\alpha\delta} - av_\alpha - dv_\delta + (h - a_\alpha - d_\delta)v])(\alpha,y_0,z_0,\delta)d\delta d\alpha+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}(R_{1234}[v_{\beta\gamma} - bv_\beta - cv_\gamma + (g - b_\beta - c_\gamma)v])(x_0,\beta,\gamma,t_0)d\gamma\beta+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}(R_{1234}[v_{\alpha\gamma} - bv_\alpha - dv_\gamma + (k - b_\alpha - d_\gamma)v])(\alpha,y_0,\gamma,t_0)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(R_{1234}[v_{\alpha\beta} - cv_\alpha - dv_\beta + (s - c_\alpha - d_\beta)v])(\alpha,\beta,z_0,t_0)d\beta d\alpha+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\beta\gamma\delta} - av_{\beta\gamma} - bv_{\beta\delta} - cv_{\gamma\delta}+$$

$$+(e - a_\gamma - b_\delta)v_\beta + (f - c_\delta - a_\beta)v_\gamma + (g - c_\gamma - b_\beta)v_\delta -$$

$$-(m - e_\beta - f_\gamma - g_\delta + a_{\beta\gamma} + b_{\beta\delta} + c_{\gamma\delta})v])(x_0,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\alpha\gamma\delta} - av_{\alpha\gamma} - bv_{\alpha\delta} - dv_{\gamma\delta}+$$

$$+(e - a_\gamma - b_\delta)v_\alpha + (h - a_\alpha - d_\delta)v_\gamma + (k - b_\alpha - d_\gamma)v_\delta -$$

$$-(n - e_\alpha - h_\gamma - k_\delta + a_{\alpha\gamma} + b_{\alpha\delta} + d_{\gamma\delta})v])(\alpha,y_0,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\alpha+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}[v_{\alpha\beta\delta} - av_{\alpha\beta} - cv_{\alpha\gamma} - dv_{\beta\delta}+$$

$$+(f - a_\beta - c_\delta)v_\alpha + (h - a_\alpha - d_\delta)v_\beta + (s - c_\alpha - d_\beta)v_\delta -$$

$$-(p - f_\alpha - h_\beta - s_\delta + a_{\alpha\beta} + c_{\alpha\delta} + d_{\beta\delta})v])(\alpha,\beta,z_0,\delta)d\delta d\beta d\alpha+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}(R_{1234}[v_{\alpha\beta\gamma}-bv_{\alpha\beta}-cv_{\alpha\gamma}-dv_{\beta\gamma}+$$
$$+(g-b_\beta-c_\gamma)v_\alpha+(k-b_\alpha-d_\gamma)v_\beta+(s-c_\alpha-d_\beta)v_\gamma-$$
$$-(q-g_\alpha-k_\beta-s_\gamma+b_{\alpha\beta}+c_{\alpha\gamma}+d_{\beta\gamma})v])(\alpha,\beta,\gamma,t_0)d\gamma d\beta d\alpha+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}(R_{1234}h_{123,4}v)(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha. \qquad (3.37)$$

Сопоставляя (3.37) и (3.6), видим, что все выражения в квадратных скобках в одно-, дву- и трехкратных интегралах тождественно равны нулю, следовательно функция Римана для (3.1) при условиях (3.33) удовлетворяет уравнению

$$v(x,y,z,t)=R_{1234}(x_0,y_0,z_0,t_0,x,y,z,t)v(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}R_{1234}(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y,z,t)\times$$
$$\times h_{123,4}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha. \qquad (3.38)$$

Аналогично вышеизложенному можно построить еще 23 варианта уравнений типа (3.38), подобно тому, как были построены в п. 5.2 § 2 аналоги формулы (2.40). Каждое из них соответствует своему набору, аналогичному (3.33). При этом каждому из этих наборов отвечает уравнение, отличающееся от (3.23) только порядком следования операторов и правой частью. Фактически при записи уравнений вида (3.38) приходится лишь менять ролями переменные и коэффициенты.

Полученные результаты могут быть использованы для построения функции Римана в явном виде.

3. Пусть для (3.1) выполняются условия (3.33) и

$$\begin{gathered}a=A(t)+\lambda xyz,\quad b=B(z)+\lambda xyt,\\ c=C(y)+\lambda xzt,\quad d=D(x)+\lambda yzt,\quad \lambda=const.\end{gathered} \qquad (3.39)$$

Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что

$$h_{123,4}=h_{124,3}=h_{134,2}=h_{234,1}=H, \qquad (3.40)$$

а уравнение (3.38) и все его аналоги имеют вид

$$v(x,y,z,t)=R(x_0,y_0,z_0,t_0,x,y,z,t)v(x_0,y_0,z_0,t_0)+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}\int_{t_0}^{t}R(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x,y,z,t)\times$$
$$\times H(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta d\alpha. \qquad (3.41)$$

Введем обозначения

$$\omega = Tv, \qquad T(x,y,z,t) = \exp\left(-\int_0^t A(\delta)d\delta - \int_0^z B(\gamma)d\gamma - \right.$$

$$\left. - \int_0^y C(\beta)d\beta - \int_0^x D(\alpha)d\alpha - \lambda xyzt\right),$$

Тогда (3.41) записывается в форме

$$\omega(x,y,z,t) = T(x_0,y_0,z_0,t_0) +$$
$$+ \int_{t_0}^t \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x H(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\omega(\alpha,\beta,\gamma,\delta)d\alpha d\beta d\gamma d\delta.$$

Это уравнение эквивалентно задаче Гурса для уравнения

$$\omega_{xyzt} - H\omega = 0 \tag{3.42}$$

с условиями

$$\omega\mid_{x=x_0} = \omega\mid_{y=y_0} = \omega\mid_{z=z_0} = \omega\mid_{t=t_0} = T(x_0,y_0,z_0,t_0).$$

Если

$$H = \chi(x)\varphi(y)\psi(z)\theta(t), \tag{3.43}$$

то функция Римана r для (3.42) известна [16, с. 10–12]:

$$r = {}_0F_3(1,1,1;\sigma), \quad \sigma = \int_{x_0}^x \chi(\alpha)d\alpha \int_{y_0}^y \varphi(\beta)d\beta \int_{z_0}^z \psi(\gamma)d\gamma \int_{t_0}^t \theta(\delta)d\delta,$$

следовательно ω записывается явно. Вычислив ω согласно формуле (3.9) и возвратившись снова к функции v, найдем, что

$$v(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0) = {}_0F_3(1,1,1;\sigma)R(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0), \tag{3.44}$$

$$R(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\delta)d\delta + \int_{z_0}^z B(\gamma)d\gamma + \right.$$

$$\left. + \int_{y_0}^y C(\beta)d\beta + \int_{x_0}^x D(\alpha)d\alpha + \lambda(xyzt - x_0y_0z_0t_0)\right),$$

$${}_0F_3(1,1,1;\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[(1)_k]^3}\frac{\sigma^k}{k!}.$$

Здесь ${}_0F_3$ — обобщенная гипергеометрическая функция [1, с. 183].

4. Пусть теперь имеют место представления

$$a=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial t},\quad b=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial z},\quad c=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial y},\quad d=\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$e=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial t},\quad f=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t},\quad h=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t},\quad g=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z},$$

$$k=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z},\quad s=\frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\quad m=\frac{1}{w}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial z\partial t},\tag{3.45}$$

$$n=\frac{1}{w}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial z\partial t},\quad p=\frac{1}{w}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial t},\quad q=\frac{1}{w}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z},$$

$$r=\frac{1}{w}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y\partial z\partial t}+\chi(x)\varphi(y)\psi(z)\theta(t),$$

при этом имеет место условие

$$w=p_1(x)+p_2(y)+p_3(z)+p_4(t)+p_{12}(x,y)+p_{13}(x,z)+$$

$$+p_{14}(x,t)+p_{23}(y,z)+p_{24}(y,t)+p_{34}(z,t)+p_{123}(x,y,z)+$$

$$+p_{124}(x,y,t)+p_{134}(x,z,t)+p_{234}(y,z,t)+p_{1234}(x,y,z,t)\neq 0.$$

Тогда выполняются (3.33), (3.40), (3.43), уравнения типа (3.38) совпадают и могут быть разрешены по схеме предыдущего случая. Функция Римана для (3.1) имеет вид

$$v={}_0F_3(1,1,1,\sigma)\frac{w(x,y,z)}{w(x_0,y_0,z_0)},$$

где σ та же, что и в (3.44).

5. Условия (3.39), (3.45) могут быть обобщены. А именно, пусть

$$a(x,y,z,t)=a_1(t)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x)\varphi_k(y)\psi_k(z)\theta_k'(t),$$

$$b(x,y,z,t)=b_1(z)+\sum_{k=1}^{n}\chi(x)\varphi_k(y)\psi_k'(z)\theta_k(t),$$

$$c(x,y,z,t)=c_1(y)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k(x)\varphi_k(y)\psi_k'(z)\theta_k(t),$$

$$d(x,y,z,t)=d_1(x)+\sum_{k=1}^{n}\chi_k'(x)\varphi_k(y)\psi_k(z)\theta_k(t),$$

а также выполняются условия (3.33) и

$$h_{123,4} = \chi(x)\varphi(y)\psi(z)\theta(t). \tag{3.46}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0) = {}_0F_3(1,1,1;\sigma) \times \\ \times \exp\Bigg(\int_{x_0}^{x} d_1(\alpha)d\alpha + \int_{y_0}^{y} c_1(\beta)d\beta + \int_{z_0}^{z} b_1(\gamma)d\gamma + \int_{x_0}^{x} a_1(\delta)d\delta + \\ + \sum_{k=1}^{n}[\chi_k(x)\varphi_k(y)\psi_k(z)\theta_k(t) - \chi_k(x_0)\varphi_k(y_0)\psi_k(z_0)\theta_k(t_0)]\Bigg), \end{aligned}$$

где σ та же, что в (3.44).

Если же

$$a = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial t}, \quad b = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial z}, \quad c = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial y},$$

$$d = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial w_k}{\partial x}, \quad e = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial z\partial t}, \quad f = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y\partial t},$$

$$g = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y\partial z}, \quad h = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x\partial t}, \quad k = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x\partial z},$$

$$s = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x\partial y}, \quad m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^3 w_k}{\partial y\partial z\partial t}, \quad n = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^3 w_k}{\partial x\partial z\partial t},$$

$$p = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^3 w_k}{\partial x\partial y\partial t}, \quad q = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^3 w_k}{\partial x\partial y\partial z},$$

$$r = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{w_k}\frac{\partial^4 w_k}{\partial x\partial y\partial z\partial t} + \chi(x)\varphi(y)\psi(z)\theta(t),$$

$$\begin{gathered} w_k = p_1(x) + p_2(y) + p_3(z) + p_4(t) + p_{12}(x,y) + p_{13}(x,z) + \\ + p_{14}(x,t) + p_{23}(y,z) + p_{24}(y,t) + p_{34}(z,t) + p_{123}(x,y,z) + \\ + p_{124}(x,y,t) + p_{134}(x,z,t) + p_{234}(y,z,t) + p_{1234}(x,y,z,t) \neq 0, \end{gathered}$$

то при выполнении условий (3.33), (3.46) функция Римана для (3.1) имеет вид

$$v = {}_0F_3(1,1,1,\sigma)\prod_{k=1}^{m}\frac{w_k(x,y,z)}{w_k(x_0,y_0,z_0)},$$

где σ та же, что и в (3.44).

2. Пространство любого конечного числа измерений

Здесь рассматривается уравнение (2), которое запишем более подробно:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{(q_1,\dots,q_k)} a_{q_1\dots q_k}(x) \frac{\partial^{n-k} u}{\partial x_{r_1} \dots \partial x_{r_{n-k}}} + a(x)u = 0,$$

где n — произвольное натуральное число, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка евклидова пространства R^n, внутренняя сумма берется по всем наборам $(q_1, \dots, q_k)$, удовлетворяющим неравенствам $1 \leqslant q_1 < \dots < q_k \leqslant n$. При этом набор индексов $(r_1, \dots, r_{n-k})$, $r_1 < \dots < r_{n-k}$ дополняет $(q_1, \dots, q_k)$ до полного набора $(1, \dots, n)$.

Вычисления, связанные с данным уравнением (1), имеют достаточно большой объем, если записывать их в обычном виде. В работах [31], [64] предложена специальная система теоретико-множественных обозначений, которая позволила существенно сократить объем выкладок. Суть указанной системы состоит в следующем.

Определяется совокупность множеств, которые пробегают различные наборы индексов. Индексы этих индексов также могут пробегать какое-то множество и т.д. Этот язык множеств позволяет без дополнительных комментариев записывать довольно сложные выражения и операции над ними. При таком подходе усложнение записи проявляется лишь в появлении дополнительных уровней индексов.

В описанной системе обозначений обсуждаемое уравнение можно записать следующим образом:

$$L(u) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{Q_n^k} a_{q_1\dots q_k} u_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}} = 0, \quad a = 1, \tag{3.47}$$

где

$$Q_n^k = \{(q_1, \dots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = M,\ q_1 < \dots < q_k,$$
$$q_{k+1} < \dots < q_n\}, \qquad M = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant n\}.$$

Очевидно, первый символ $\sum$ означает суммирование по различным порядкам производных, а второй — перебор всевозможных некратных производных фиксированного порядка. Для обеспечения единственности каждого слагаемого в уравнении (3.47) обе группы индексов $(q_1, \dots, q_k)$ и $(q_{k+1}, \dots, q_n)$, на которые разбивается полный набор

$(q_1, \dots, q_n)$, упорядочены. Ясно, что при $k = 0$ коэффициент не имеет индекса и по условию $a = 1$. При $k = n$ получаем член без производных $a_{12\dots n}u$ уравнения (3.47). Определим функцию Римана уравнения (3.47) как решение интегрального уравнения, аналогичного (1.17), (2.15), (3.6). Для записи такого уравнения определяется множество упорядоченных наборов

$$Q_{k,n} = \{(q_1, \dots, q_k) \mid 1 \leqslant q_1 < \dots < q_k \leqslant n\},$$

где $q_1, \dots, q_k$ — натуральные числа. В этих обозначениях интегральное уравнение можно коротко записать в виде:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{Q_{k,n}} \int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} a_{q_1\dots q_k} v(x_1, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots ,$$
$$x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_n)\, d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1} = 1. \quad (3.48)$$

Здесь суммирование по $Q_{k,n}$ означает, что берутся всевозможные интегралы кратности k. Причем в этой записи очевидно, что переменные в пределах интегралов упорядочены.

Функция Римана на характеристических плоскостях уравнения (3.47) удовлетворяет тождествам (пишем только первые n аргументов)

$$A_{q_1\dots q_k}(x^0_1, \dots, x^0_{q_1-1}, x_{q_1}, x^0_{q_1+1}, \dots, x^0_{q_k-1}, x_{q_k}, x^0_{q_k+1}, \dots, x^0_n) \equiv 0, \quad (3.49)$$
$$(q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}, \quad k = \overline{1, n},$$

где

$$A_{q_1\dots q_k}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{k}(-1)^m \sum_{H^m_k}(a_{h_1\dots h_m}R)(x_1, \dots, x_n)_{x_{h_{m+1}}\dots x_{h_k}}, \quad (3.50)$$

$$(q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}, \quad k = \overline{0, n},$$
$$H^m_k = \{(h_1, \dots, h_k) \mid \{h_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k\} = \{q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\},$$
$$h_1 < \dots < h_m, h_{m+1} < \dots < h_k\}.$$

Тождества легко получаются из (3.48) фиксированием $x_1 = x^0_1, \dots,$ $x_{q_1-1} = x^0_{q_1-1}$, $x_{q_1+1} = x^0_{q_1+1}, \dots$, $x_{q_k-1} = x^0_{q_k-1}$, $x_{q_k+1} = x^0_{q_k+1}, \dots$, $x_n = x^0_n$ с последующим дифференцированием по $x_{q_1}, \dots, x_{q_k}$.

В частности, функция Римана удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{Q_n^k}(-1)^k(a_{q_1\ldots q_k}v)_{x_{q_{k+1}}\ldots x_{q_n}}=0. \qquad (3.51)$$

Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем:

$$R_{n-k}^v=\{(r_1,\ldots,r_{n-k})\mid\{r_j\mid 1\leqslant j\leqslant n-k\}=$$
$$=\{q_i\mid k+1\leqslant i\leqslant n\},r_1<\ldots<r_v,r_{v+1}<\ldots<r_{n-k}\},$$
$$Q_n^{m,m+k}=\{(q_1,\ldots,q_n)\mid\{q_j\mid 1\leqslant j\leqslant n\}=M,$$
$$q_1<\ldots<q_m,q_{m+1}<\ldots<q_{m+k},q_{m+k+1}<\ldots<q_n\},$$
$$T_v^m=\{(t_1,\ldots,t_v)\mid\{t_j\mid 1\leqslant j\leqslant v\}=$$
$$=\{r_i\mid 1\leqslant i\leqslant v\},\ t_1<\ldots<t_m,t_{m+1}<\ldots<t_v\},$$
$$W_l^r=\{(w_1,\ldots,w_l)\mid\{w_i\mid 1\leqslant i\leqslant l\}=$$
$$=\{q_j\mid n-l\leqslant j\leqslant n\}\setminus\{q_r\},w_1<\ldots<w_l\},\ r=\overline{n-l,n},$$
$$G_l^m=\{(g_1,\ldots,g_l)\mid\{g_i\mid 1\leqslant i\leqslant l\}=$$
$$=\{w_j\mid 1\leqslant j\leqslant l\},\ g_1<\ldots<g_m,g_{m+1}<\ldots<g_l\},$$
$$V_m^k=\{(v_1,\ldots,v_m)\mid\{v_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}=$$
$$=\{g_j\mid 1\leqslant j\leqslant m\},\ v_1<\ldots<v_k,v_{k+1}<\ldots<v_m\},$$
$$Z_{n-v-1}^k=\{(z_1,\ldots,z_{n-v-1})\mid\{z_i\mid 1\leqslant i\leqslant n-v-1\}=$$
$$=\{r_j\mid v+1\leqslant j\leqslant n-1\},\ z_1<\ldots<z_k,z_{k+1}<\ldots<z_{n-v-1}\},$$
$$D_{n-m-2}^b=\{(d_1,\ldots,d_{n-m-2})\mid\{d_i\mid 1\leqslant i\leqslant n-m-2\}=$$
$$=\{g_j\mid m+1\leqslant j\leqslant n-2\},\ d_1<\ldots<d_b,d_{b+1}<\ldots<d_{n-m-2}\}.$$

2.1. Задача Гурса. Рассмотрим задачу: *найти решение уравнения (3.47), принимающее на характеристических плоскостях $x_i=x_i^0$, $i=\overline{1,n}$ заданные значения*

$$u(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\ldots,x_n)=\varphi_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), \qquad (3.52)$$

при условиях согласования

$$F_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\ldots,x_n)=F_i(x_1,\ldots,$$
$$x_{j-1},x_j^0,x_{j+1},\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\quad j<i.$$

Считаем, что граничные условия $\varphi_i \in C^{(1,1,\dots,1)}$.

Справедливо тождество

$$(uR)_{x_1 x_2 \dots x_n} \equiv RL(u) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \times$$
$$\times \sum_{Q_n^k} \left[u \left(\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{H_k^m} (a_{h_1 \dots h_m} R)_{x_{h_{m+1}} \dots x_{h_k}} \right) \right]_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}}, \quad (3.53)$$

являющееся многомерным аналогом тождеств (1.19), (2.16), (3.7).

Действительно, перенося все в одну сторону, получим

$$-\sum_{k=0}^{n} \sum_{Q_n^k} R_{x_{q_1} \dots x_{q_k}} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} + R \sum_{k=0}^{n} \sum_{Q_n^k} a_{q_1 \dots q_k} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{Q_n^k} \sum_{v=0}^{n-k} \sum_{R_{n-k}^v} \sum_{m=0}^{k} \sum_{H_k^m} (-1)^{k+m+1} \times$$
$$\times (a_{h_1 \dots h_m} R)_{x_{h_{m+1}} \dots x_{h_k} x_{r_1} \dots x_{r_v}} u_{x_{r_{v+1}} \dots x_{r_{n-k}}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-m} \left(\sum_{v=0}^{k} (-1)^{v+1} C_k^v \sum_{Q_n^{m,m+k}} (a_{q_1 \dots q_m} R)_{x_{q_{m+1}} \dots x_{q_{m+k}}} u_{x_{q_{m+k+1}} \dots x_{q_n}} \right) +$$

$$+ R \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{Q_n^k} a_{q_1 \dots q_k} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} - R \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{Q_n^k} a_{q_1 \dots q_k} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} +$$

$$+ (-1)^n u \left[R_{x_1 \dots x_n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{Q_n^k} (a_{q_1 \dots q_k} R)_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} + (-1)^n R a_{1 \dots n} \right] \equiv 0.$$

Будем искать решение задачи в области $D = \{x_1^1 < x_1 < x_1^2, \dots, x_n^1 < x_n < x_n^2\}$. Пусть коэффициенты уравнения (3.47) удовлетворяют условиям гладкости $a_{q_1 \dots q_k} \in C^{(r_1, \dots, r_n)}(\overline{D})$, $r_i = 1$, если $r_i \neq q_j$, $r_i = 0$, если $r_i = q_j$, $j = \overline{1, k}$.

Считая в тождестве (3.53) u решением уравнения (3.47), полагая $x_i = \alpha_i$, $x_i^0 = x_i$, $i = \overline{1, n}$, вычисляя n-кратный интеграл по $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ в пределах $x_i^1 \leqslant \alpha_i \leqslant x_i$, $i = \overline{1,n}$, и используя тождества (3.49), получим

$$u(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1}^1}^{x_{q_1}} \dots \int_{x_{q_k}^1}^{x_{q_k}} \left(\sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{m+1} \times \right.$$

$$\times \sum_{H_{m,n}} (uA_{q_1 \dots q_k})(x_1, \dots, x_{h_1-1}, x_{h_1}^1, x_{h_1+1}, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots,$$

$$\left. x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_{h_m-1}, x_{h_m}^1, x_{h_m+1}, \dots, x_n) \right) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1}. \quad (3.54)$$

Формула (3.54) дает решение задачи Гурса.

Если, интегрируя (3.53), не считать, что $L(u) \equiv 0$, то в (3.54) добавится слагаемое

$$\int_{x_1^1}^{x_1} \dots \int_{x_n^1}^{x_n} R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) L\bigl(u(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\bigr)\, d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

Положим

$$u(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \int_{x_1^1}^{x_1} \dots \int_{x_n^1}^{x_n} R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, d\alpha_n \dots d\alpha_1, \quad (3.55)$$

где $F \in C$. Тогда получим тождество

$$\int_{x_1^1}^{x_1} \dots \int_{x_n^1}^{x_n} R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) \Bigl(F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) -$$

$$- L\bigl(u(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\bigr)\Bigr)\, d\alpha_n \dots d\alpha_1 \equiv 0.$$

Откуда $L\bigl(u(x_1, \dots, x_n)\bigr) = F(x_1, \dots, x_n)$ (следует из единственности решения однородного уравнения Вольтерра, получаемого дифференцированием тождества по $x_1, \dots, x_n$).

Следовательно (3.55) — частное решение неоднородного уравнения $L(u) = F$. А так как (3.54) дает представление всех решений однородного уравнения $L(u) = 0$, то известно общее представление решений неоднородного уравнения, равное их сумме.

2.2. Задача Коши. В ориентированном системой координат $(x_1, \dots, x_n)$ пространстве R^n рассмотрим поверхность S, заданную уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 \ = \ x_1(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n \ = \ x_n(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}), \end{cases} \quad \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n-1,$$

где $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in G^{n-1} \subset R^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость не параллельную ни одной из координатных осей, например $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} < 0$, $\dfrac{\partial x_2}{\partial x_3} < 0, \ldots,$ $\dfrac{\partial x_{n-1}}{\partial x_n} < 0$. Через точку $M(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ проведем плоскости $x_1 = x_1^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$. Обозначим S^0 участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, Ω — конечную область пространства R^n, ограниченную $x_1 = x_1^0, \ldots,$ $x_n = x_n^0$ и S^0, $\partial\Omega$ — край Ω. Считаем ориентацию области Ω положительной. Полностью аналогично четырехмерному случаю рассмотрим совокупность ориентированных многообразий, обозначаемых символами S^0, Ω и $\partial\Omega$ с индексами из $1, \ldots, n-1$ различных цифр $1, \ldots, n$. S^0 и Ω-многообразия определим как пересечения соответственно S^0 и Ω с соответствующими плоскостями, а $\partial\Omega$-многообразия — как края соответствующих Ω-многообразий. Например S^0_{12} — множество точек поверхности S^0, лежащих в плоскостях $x_1 = x_1^0$ и $x_2 = x_2^0$. Как было показано в п. 1, S^0-многообразия содержатся в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами, а Ω-многообразия — в $\partial\Omega$-многообразиях с теми же индексами без последней переменной. Например S^0_2 — часть $\partial\Omega_2$, Ω_{312} — часть $\partial\Omega_{31}$. Пусть ориентации $\partial\Omega$-областей и входящих в них названных многообразий совпадают. Ориентации $\partial\Omega$-многообразий считаем согласованными с ориентациями соответствующих Ω-многообразий.

В результате все названные ориентированные многообразия индуктивно определены.

Как и в R^4, два из рассмотренных как Ω, так и S^0-многообразий совпадают геометрически, если их индексы образованы одним и тем же набором цифр. При этом, если индексы одного из них получаются четной перестановкой индексов другого, то ориентации этих многообразий совпадают, в случае нечетной перестановки ориентации противоположны.

Рассмотрим уравнение с правой частью

$$L(u) = F, \tag{3.56}$$

соответствующее (3.47).

Задача: *найти регулярное в* Ω *решение уравнения* (3.56) *по условиям*

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial l^k}\right|_S = \psi_k,\ k = \overline{0, n-1}, \tag{3.57}$$

$\psi_k \in C^{n-k}(\overline{S})$, *а* l *— заданное на* S *некасательное к этой поверхности поле направлений.*

Для этого достаточно найти решение уравнения (3.56) класса $C^n(\overline{\Omega})$ в точке M.

При решении задачи Коши используется общая формула Стокса [43, с. 246]

$$\int\limits_S \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k =$$
$$= \int\limits_{\partial S} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} A_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_k. \tag{3.58}$$

Пусть поле направлений l задано вектором

$$\vec{l}\Big(l_1(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}), \ldots, l_n(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})\Big), \quad \vec{l} \in C^n(G^{n-1}),$$

причем $|\,\vec{l}\,| \equiv 1$. Введем систему координат, связанную с поверхностью S:

$$x_i = x_i(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) + l_i(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})\mu_n, \tag{3.59}$$

где $i = \overline{1, n}$, $\mu_n \in R$.

Аналогично п. 4 § 2 и п. 1.2 § 3 существует обратное преобразование координат $\mu_i = \mu_i(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^n в окрестности поверхности S.

Пусть $a_{q_1 \ldots q_k} \in C^n(\overline{\Omega})$, $(q_1, \ldots, q_k) \in Q_{k,n}$, $k = \overline{1, n}$; $F \in C(\overline{\Omega})$.

Запишем тождество (3.53) в несколько ином виде:

$$RL(u) \equiv \sum_{Q_n^1} \frac{\partial}{\partial x_{q_1}} \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{n-v} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{R_{n-1}^v} \left[u \left(\sum_{m=0}^{v} (-1)^m \sum_{T_v^m} (a_{t_1 \ldots t_m} R)_{x_{t_{m+1}} \ldots x_{t_v}} \right) \right]_{x_{r_{v+1}} \ldots x_{r_{n-1}}} \right\}. \tag{3.60}$$

Пусть u — решение уравнения (3.56). Тогда, интегрируя (3.60) по области Ω и применяя общую формулу Стокса (3.58) при $k = n$, получим:

$$\int\limits_{\Omega} RF\,dx_1\dots dx_n = \int\limits_{\partial\Omega}\sum_{Q_n^1}(-1)^{q_1-1}\Bigg\{\sum_{v=0}^{n-1}\frac{(-1)^v}{n-v}\times$$
$$\times\sum_{R_{n-1}^v}\left[u\left(\sum_{m=0}^{v}(-1)^m\sum_{T_v^m}(a_{t_1\dots t_m}R)_{x_{t_{m+1}}\dots x_{t_v}}\right)\right]_{x_{r_{v+1}}\dots x_{r_{n-1}}}\Bigg\}\times$$
$$\times\,dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}. \quad (3.61)$$

Заменим в (3.61) интеграл по области $\partial\Omega$ суммой интегралов по ее составляющим. При этом учтем тождества (3.49) при $k = n-1$. Так же как и в (3.60), представим подынтегральные выражения интегралов по Ω-областям в дивергентном виде, а в подынтегральном выражении интеграла по S^0 откроем скобки. В результате получим:

$$\int\limits_{\Omega} RF\,dx_1\dots dx_n =$$
$$=\sum_{Q_n^1}(-1)^{q_1-1}\int\limits_{\Omega_{q_1}}\Bigg\{\sum_{W_{n-2}^r}\frac{\partial}{\partial x_{q_r}}\Bigg[\sum_{m=0}^{n-2}\frac{(-1)^m}{(n-m)(n-m-1)}\times$$
$$\times\sum_{G_{n-2}^m}\left[u\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum_{V_m^k}(a_{v_1\dots v_k}R)_{x_{v_{k+1}}\dots x_{v_m}}\right)\right]_{x_{g_{m+1}}\dots x_{g_{n-2}}}\Bigg]\Bigg\}\times$$
$$\times dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n} + \int\limits_{S^0}\sum_{Q_n^1}(-1)^{q_1-1}\Bigg\{\sum_{v=0}^{n-1}\sum_{R_{n-1}^v}\sum_{k=0}^{n-v-1}$$
$$\sum_{Z_{n-v-1}^k}\sum_{m=0}^{v}\sum_{T_v^m}\frac{(-1)^{v+m}}{n-v}u_{x_{z_1}\dots x_{z_k}}(a_{t_1\dots t_m}R)_{x_{t_{m+1}}\dots x_{t_v}x_{z_{k+1}}\dots x_{z_{n-v-1}}}\Bigg\}\times$$
$$\times dx_{q_2}\wedge\dots\wedge dx_{q_n}. \quad (3.62)$$

К интегралам по областям Ω_i, $i = \overline{1,n}$ снова применим формулу Стокса (3.58) при $k = n-1$, а в подынтегральном выражении интеграла по поверхности S^0 приведем подобные члены. Для этого воспользуемся формулой:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i C_k^i}{n-i} = \frac{(-1)^k k!\,(n-k-1)!}{n!}, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{3.63}$$

которую легко получить, вычисляя неопределенный интеграл

$$\int x^{n-k-1}(x-1)^k\,dx$$

сначала последовательно по частям, а затем предварительно посчитав подынтегральное выражение, после чего полагая $x = 1$.

В результате (3.62) перепишется

$$\int\limits_{\Omega} RF\,dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \sum_{Q_n^1} (-1)^{q_1-1} \int\limits_{\partial\Omega_{q_1}} \sum_{W_{n-2}^r} (-1)^r \left\{ \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m}{(n-m)(n-m-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{G_{n-2}^m} \left[u \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{V_m^k} (a_{v_1 \ldots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \ldots x_{v_m}} \right) \right]_{x_{g_{m+1}} \ldots x_{g_{n-2}}} \right\} \times$$

$$\times dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-2}} + \int\limits_{S^0} \sum_{Q_n^1} (-1)^{q_1-1} \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{R_{n-1}^v} \left[\sum_{m=0}^{v} \sum_{T_v^m} \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{(-1)^{v+m}(v-m)!\,(n-v-1)!}{(n-m)!} (a_{t_1 \ldots t_m} R)_{x_{t_{m+1}} \ldots x_{t_v}} \right] u_{x_{r_{v+1}} \ldots x_{r_{n-1}}} \right\} \times$$

$$\times dx_{q_2} \wedge \ldots \wedge dx_{q_n}. \tag{3.64}$$

Идея дальнейших рассуждений заключается в том, что мы будем заменять интегралы по областям $\partial\Omega_{q_1 \ldots q_p}$ суммами интегралов по их составляющим, учитывая тождества (3.49) при $k = \overline{1, n-2}$. Далее будем снова представлять подынтегральные выражения интегралов по областям $\Omega_{q_1 \ldots q_{p+1}}$ в дивергентном виде и упрощать вид интегралов по поверхностям $S^0_{q_1 \ldots q_p}$. Опять применяем формулу Стокса при

$k = n - p - 1$ и т. д. Следуя такой методике, первое слагаемое правой части (3.64) I преобразуем к виду:

$$I = \sum_{Q_n^2} (-1)^{\beta_2} \int\limits_{\Omega_{q_1 q_2}} \left\{ \sum_{W_{n-3}^r} \frac{\partial}{\partial x_{q_r}} \left[\sum_{m=0}^{n-3} \frac{(-1)^m}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sum_{G_{n-3}^m} \left[u \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{V_m^k} (a_{v_1 \dots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \dots x_{v_m}} \right) \right]_{x_{g_{m+1}} \dots x_{g_{n-3}}} \right] \right\} \times$$

$$\times dx_{q_3} \wedge \ldots \wedge dx_{q_n} + \sum_{Q_n^1} (-1)^{q_1 - 1} \int\limits_{S_{q_1}^0} \sum_{W_{n-2}^r} (-1)^r \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{G_{n-2}^m} \sum_{b=0}^{n-m-2} \sum_{D_{n-m-2}^b} \sum_{k=0}^{m} \sum_{V_m^k} \frac{(-1)^{m+k}}{(n-m)(n-m-1)} \times \right.$$

$$\left. \times u_{x_{d_1} \dots x_{d_b}} (a_{v_1 \dots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \dots x_{v_m} x_{d_{b+1}} \dots x_{d_{n-m-2}}} \right\} dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-2}}, \qquad (3.65)$$

где

$$\beta_2 = \begin{cases} q_1 + q_2, \ q_1 > q_2, \\ q_1 + q_2 - 1, \ q_1 < q_2. \end{cases}$$

Как было показано, области Ω_{ij} и Ω_{ji} совпадают как множества и имеют противоположные ориентации. Другими словами, в процессе нахождения решения поставленной задачи будут появляться одинаковые интегралы по одной области с точностью до ее ориентации. Например, при фиксированном множестве $\{q_i \mid 1 \leqslant \ i \leqslant k\}$ будет $k!$ интегралов от одного выражения по областям $\Omega_{h_1 \dots h_k}$, где $(h_1, \dots, h_k)$ — всевозможные перестановки $(q_1, \dots, q_k)$. Нетрудно усмотреть, что с учетом знаков все эти члены оказываются равными. Для дальнейших вычислений с коэффициентом $k!$ будем оставлять интеграл по области Ω с упорядоченным набором индексов. Из логики применяемого метода следует, что знак этого интеграла можно записать, например, $(-1)^{\alpha_k(q)}$, где

$$\alpha_k(q) = \sum_{i=1}^{k} (q_i - i).$$

Учитывая сказанное, применим формулу Стокса при $k=n-2$ к первому слагаемому правой части (3.65), а в подынтегральных выражениях интегралов по поверхностям $S^0_{q_1}$, как и раньше, приведем подобные члены. Для этого воспользуемся формулой:

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i C_k^i}{(n-i)(n-i-1)}=\frac{(-1)^k(k+1)!\,(n-k-2)!}{n!},\quad k=\overline{0,n-2},$$

которую можно получить аналогично (3.63), дважды вычисляя неопределенный интеграл $\int x^{n-k-2}(x-1)^k\,dx$. В результате получим:

$$I=2!\sum_{Q_n^2}(-1)^{\alpha_2(q)}\int\limits_{\partial\Omega_{q_1q_2}}\sum_{W^r_{n-3}}(-1)^{r-1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{n-3}\frac{(-1)^m}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{G^m_{n-3}}\left[u\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum_{V_m^k}(a_{v_1\ldots v_k}R)_{x_{v_{k+1}}\ldots x_{v_m}}\right)\right]_{x_{g_{m+1}}\ldots x_{g_{n-3}}}\right\}\times$$

$$\times dx_{w_1}\wedge\ldots\wedge dx_{w_{n-3}}+\sum_{Q_n^1}(-1)^{\alpha_1(q)}\int\limits_{S^0_{q_1}}\sum_{W^r_{n-2}}(-1)^r\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{n-2}\sum_{G^m_{n-2}}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{V_m^k}\frac{(-1)^{m+k}(m-k+1)!\,(n-m-2)!}{(n-k)!}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(a_{v_1\ldots v_k}R)_{x_{v_{k+1}}\ldots x_{v_m}}\right]u_{x_{g_{m+1}}\ldots x_{g_{n-2}}}\right\}dx_{w_1}\wedge\ldots\wedge dx_{w_{n-2}}.\qquad(3.66)$$

Для выявления закономерности процесса решения сделаем еще один шаг. Снова разбиваем области $\partial\Omega_{q_1q_2}$, используем тождества (3.49) при $k=n-3$, интегралы по Ω-областям преобразуем к дивергентному виду, применяем формулу Стокса (3.58) при $k=n-3$, а интегралы по поверхностям $S^0_{q_1q_2}$, как и раньше, упрощаем, используя формулу

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i C_k^i}{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}=\frac{(-1)^k(k+2)!\,(n-k-3)!}{2!\,n!},$$

$k = \overline{0, n-3}$, получаемую аналогично предыдущим случаям из $\int x^{n-k-3}(x-1)^k\,dx$. Тогда для первого слагаемого правой части (3.66) I_1 получаем выражение:

$$I_1 = 3! \sum_{Q_n^3} (-1)^{\alpha_3(q)} \int\limits_{\partial\Omega_{q_1 q_2 q_3}} \sum_{W_{n-4}^r} (-1)^r \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{n-4} \frac{(-1)^m}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{G_{n-4}^m} \left[u \left(\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{V_m^k} (a_{v_1 \ldots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \ldots x_{v_m}} \right) \right]_{x_{g_{m+1}} \ldots x_{g_{n-4}}} \right\} \times$$

$$\times dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-4}} + \sum_{Q_n^2} (-1)^{\alpha_2(q)} \int\limits_{S_{q_1 q_2}^0} \sum_{W_{n-3}^r} (-1)^{r-1} \left\{ \sum_{m=0}^{n-3} \right.$$

$$\sum_{G_{n-3}^m} \left[\sum_{k=0}^{m} \sum_{V_m^k} \frac{(-1)^{m+k} (m-k+2)!\,(n-m-3)!}{(n-k)!} \times \right.$$

$$\left. \left. \times (a_{v_1 \ldots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \ldots x_{v_m}} \right] u_{x_{g_{m+1}} \ldots x_{g_{n-3}}} \right\} dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-3}}.$$

Здесь при вычислении интегралов по $S_{q_1 q_2}^0$ произошло сокращение на 2!.

На данном этапе закономерность в процессе получения членов конечной формулы достаточно хорошо видна. Можно убедиться, что следующим членом будет

$$\sum_{Q_n^3} (-1)^{\alpha_3(q)} \int\limits_{S_{q_1 q_2 q_3}^0} \sum_{W_{n-4}^r} (-1)^r \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=0}^{n-4} \sum_{G_{n-4}^m} \left[\sum_{k=0}^{m} \sum_{V_m^k} \frac{(-1)^{m+k} (m-k+3)!\,(n-m-4)!}{(n-k)!} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (a_{v_1 \ldots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \ldots x_{v_m}} \right] u_{x_{g_{m+1}} \ldots x_{g_{n-4}}} \right\} dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-4}}.$$

Здесь применена формула

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i C_k^i}{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)(n-i-3)} =$$
$$= \frac{(-1)^k (k+3)!\,(n-k-4)!}{3!\,n!}, \quad k = \overline{0, n-4},$$

и сделано сокращение на 3!.

Доказательство формулы

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i C_k^i (n-i-m)!}{(n-i)!} = \frac{(-1)^k (k+m-1)!\,(n-k-m)!}{(m-1)!\,n!},$$

$m = \overline{4, n}$, $k = \overline{0, n-m}$, можно провести индукцией. В результате, для интегралов по областям $S^0_{q_1 \dots q_p}$ при любом $p = \overline{0, n-2}$ получаем:

$$\sum_{Q_n^p} (-1)^{\alpha_p(q)} \int\limits_{S^0_{q_1 \dots q_p}} \sum_{W^r_{n-p-1}} (-1)^{r-p-1} \left\{ \sum_{m=0}^{n-p-1} \sum_{G^m_{n-p-1}} \left[\sum_{k=0}^{m} \right.\right.$$
$$\sum_{V^k_m} \frac{(-1)^{m+k} (m-k+p)!\,(n-m-p-1)!}{(n-k)!} \times$$
$$\left.\left. \times (a_{v_1 \dots v_k} R)_{x_{v_{k+1}} \dots x_{v_m}} \right] u_{x_{g_{m+1}} \dots x_{g_{n-p-1}}} \right\} dx_{w_1} \wedge \ldots \wedge dx_{w_{n-p-1}}. \quad (3.67)$$

Это также можно обосновать индукцией.

Для завершения решения остается лишь выяснить, каким образом оканчивается изложенный процесс вычислений. Нетрудно понять, что последним шагом является вычисление одномерных интегралов

$$\sum_{Q_n^1} (-1)^{n-q_1} (n-1)! \int\limits_{\Omega_{q_2 \dots q_n}} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial x_{q_1}} (uR)\, dx_{q_1} =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (uR)(M) - \frac{1}{n} \sum_{Q_{n-1,n}} (uR)(S^0_{q_1 \dots q_{n-1}}).$$

Так как $R(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1^0, \dots, x_n^0) = 1$, то можем записать окончательную формулу решения задачи (3.56) – (3.57):

$$u(x_1^0, \dots, x_n^0) = \frac{1}{n} \sum_{Q_{n-1,n}} (uR)(S^0_{q_1 \dots q_{n-1}}) -$$

$$
-\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{Q_n^p}(-1)^{\alpha_p(q)}\int\limits_{S^0_{q_1\ldots q_p}}\sum_{W^r_{n-p-1}}(-1)^{r-p-1}\left\{\sum_{m=0}^{n-p-1}\sum_{G^m_{n-p-1}}\right.
$$

$$
\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{V_m^k}\frac{(-1)^{m+k}(m-k+p)!\,(n-m-p-1)!}{(n-k)!}\times\right.
$$

$$
\left.\left.\times(a_{v_1\ldots v_k}R)_{x_{v_{k+1}}\ldots x_{v_m}}\right]u_{x_{g_{m+1}}\ldots x_{g_{n-p-1}}}\right\}dx_{w_1}\wedge\ldots\wedge dx_{w_{n-p-1}}+
$$

$$
+\int\limits_{\Omega}RF\,dx_1\ldots dx_n.
$$

Здесь частные производные решения u на поверхности S по $x_1,\ldots,x_n$ находятся дифференцированием

$$
u=U\big(\mu_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\mu_n(x_1,\ldots,x_n)\big)
$$

как сложной функции. При этом

$$
\left.\frac{\partial^k u}{\partial\mu_1^{r_1}\partial\mu_2^{r_2}\ldots\partial\mu_n^{r_n}}\right|_S=\frac{\partial^{k-r_n}\psi_{r_n}}{\partial\mu_1^{r_1}\partial\mu_2^{r_2}\ldots\partial\mu_{n-1}^{r_{n-1}}},\quad k=\sum_{i=1}^{n}r_i,\quad k=\overline{1,n-1}.
$$

Очевидно,что производные μ_i по x_j нетрудно найти из (3.59) аналогично п. 4 § 2 и п. 1.2 § 3.

Изложенные в данном пункте результаты взяты из работы В.А. Севастьянова [64].

2.3. Функция Римана для расщепляющихся уравнений. Результаты, касающиеся построения функций Римана в явном виде для трех- и четырехмерных уравнений естественно обобщаются на n-мерный случай.

В дальнейшем используются конструкции

$$
h_{q_1\ldots q_{k-1},q_k}=(a_{q_1\ldots q_{k-1}})_{x_{q_k}}+a_{q_1\ldots q_{k-1}}a_{q_k}-a_{q_1\ldots q_k},\tag{3.68}
$$

взятые по всем упорядоченным наборам $(q_1,\ldots,q_k)$, причем считаем, что $a_{q_1\ldots q_k}=a_{p_1\ldots p_k}$, если $\{q_i\mid 1\leqslant i\leqslant k\}=\{p_j\mid 1\leqslant j\leqslant k\}$. Они являются аналогами h_i, $i=\overline{1,9}$, из п. 1 § 2.

Покажем, что всего имеется $n(2^{n-1}-1)$ конструкций вида (3.68). Обозначим число таких конструкций через N. Тогда $N=\sum\limits_{k=2}^{n}N_k$, где

N_k — число конструкций из (3.68), соответствующих всем наборам $(q_1, \dots, q_k)$ длины k. Непосредственно из самой записи конструкций видно, что $N_k = C_n^{k-1}(n-k+1)$. Следовательно

$$N = \sum_{k=2}^{n} C_n^{k-1}(n-k+1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!}(n-k+1) =$$
$$= n\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = n\sum_{k=2}^{n} C_{n-1}^{k-1} = n(2^{n-1}-1).$$

Докажем, что при условии

$$a_{q_1\dots q_k} = (a_{q_1\dots q_{k-1}})_{x_{q_k}} + a_{q_1\dots q_{k-1}}a_{q_k}, \quad (q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}, \quad k = \overline{2,n}, \tag{3.69}$$

сопряженное к уравнению

$$u_{x_1x_2\dots x_n} + L(u) = 0, \quad L(u) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_n^k} a_{q_1\dots q_k}u_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}, \tag{3.70}$$

уравнение

$$v_{x_1x_2\dots x_n} + L^*(v) = 0, \tag{3.71}$$

$$L^*(v) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\sum_{Q_n^k}(a_{q_1\dots q_k}v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{Q_n^k} a^*_{q_1\dots q_k}v_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}},$$

запишется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{r_1}} - a_{r_1}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_{r_n}} - a_{r_n}\right)v = 0. \tag{3.72}$$

В этом можно убедиться с помощью индукции по порядку l дифференциального оператора L^*. Не нарушая общности, будем считать, что $(r_1, \dots, r_n) = (n, \dots, 1)$.

Действительно, при $l = 1, 2$ формула (3.72) верна (см. п. 3 § 1 и п. 5 § 2). Пусть (3.72) справедлива и при $l = n-2$, то есть, если

$$h_{r_{q_1}\dots r_{q_{k-1}}, r_{q_k}} \equiv 0, \quad (q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n-1}, \quad k = \overline{2, n-2},$$

то

$$v_{x_1x_2\dots x_{n-1}} + L^*(v) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum_{Q_{n-1}^k}(a_{q_1\dots q_k}v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} - a_{n-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-2}} - a_{n-2}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1\right)v.$$

Докажем (3.72) при $l = n-1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - a_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} - a_{n-1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-2}} - a_{n-2}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1\right) v =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - a_n\right)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{n-1}^k}(a_{q_1\dots q_k} v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{n-1}^k}(a_{q_1\dots q_k} v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{n-1}^k} a_n (a_{q_1\dots q_k} v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{n-1}^k}(a_{q_1\dots q_k} v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{n-1}^k}\Bigl(\sum_{H_k^m} a_{n\,x_{h_1}\dots x_{h_m}} a_{h_{m+1}\dots h_k} v\Bigr)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_{n-1}}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{Q_n^k}(a_{q_1\dots q_k} v)_{x_{q_{k+1}}\dots x_{q_n}}.$$

Формула (3.72) доказана.

Наконец, приступим к доказательству основного для данного пункта утверждения [64]: если выполняется (3.69), то функция Римана уравнения (3.47) записывается следующим образом

$$R(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) =$$
$$= \exp\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)\, d\alpha_i. \quad (3.73)$$

Докажем это утверждение индукцией по числу p переменных x_i отличных от x_i^0.

Для $p = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что оно верно и при $p = r-1$ и докажем его справедливость при $p = r$.

Зафиксируем $(q_1, \dots, q_r) \in Q_{r,n}$. Для нахождения $R(x_1^0, \dots,$ $x_{q_1-1}^0, x_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_r-1}^0, x_{q_r}, x_{q_r+1}^0, \dots, x_n^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ положим в (3.48)

$x_1 = x_1^0, \dots,\ x_{q_1-1} = x_{q_1-1}^0,\ x_{q_1+1} = x_{q_1+1}^0, \dots,\ x_{q_r-1} = x_{q_r-1}^0,\ x_{q_r+1} = x_{q_r+1}^0, \dots,\ x_n = x_n^0$ и продифференцируем полученное равенство по $x_{q_1}, \dots, x_{q_r}$.

В результате получим:

$$\sum_{m=0}^{r}(-1)^m \sum_{H_r^m} \frac{\partial(a_{h_1\dots h_m}v)}{\partial x_{h_{m+1}}\dots\partial x_{h_r}}(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0, x_{q_1},$$
$$x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_r-1}^0, x_{q_r}, x_{q_r+1}^0, \dots, x_n^0) = 0. \quad (3.74)$$

В силу условий теоремы это уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{q_1}} - a_{q_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_{q_2}} - a_{q_2}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_{q_r}} - a_{q_r}\right)v = 0. \quad (3.75)$$

Очевидно, что (3.75) может быть разрешено в квадратурах. Для этого перепишем его в виде равносильной системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_{q_r}} - a_{q_r}v & = & v_1, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_{q_{r-1}}} - a_{q_{r-1}}v_1 & = & v_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \dfrac{\partial v_{r-2}}{\partial x_{q_2}} - a_{q_2}v_{r-2} & = & v_{r-1}, \\ \dfrac{\partial v_{r-1}}{\partial x_{q_1}} - a_{q_1}v_{r-1} & = & 0. \end{cases}$$

Последовательно разрешая, начиная с конца, уравнения системы, находим общее решение (3.74):

$$v(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0, x_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_r-1}^0, x_{q_r}, x_{q_r+1}^0, \dots, x_n^0) =$$
$$= R(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0, x_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_r-1}^0, x_{q_r}, x_{q_r+1}^0, \dots, x_n^0, x_1^0, \dots, x_n^0) =$$
$$= \exp\left(\int_{x_{q_r}^0}^{x_{q_r}} a_{q_r}\,d\alpha_{q_r}\right)\left[\int_{x_{q_r}^0}^{x_{q_r}} \exp\left(-\int_{x_{q_r}^0}^{\beta_{q_r}} a_{q_r}\,d\alpha_{q_r} +\right.\right.$$
$$+\left.\int_{x_{q_{r-1}}^0}^{x_{q_{r-1}}} a_{q_{r-1}}\,d\alpha_{q_{r-1}}\right)\left[\int_{x_{q_{r-1}}^0}^{x_{q_{r-1}}} \exp\left(-\int_{x_{q_{r-1}}^0}^{\beta_{q_{r-1}}} a_{q_{r-1}}\,d\alpha_{q_{r-1}} +\right.\right.$$
$$+\left.\int_{x_{q_{r-2}}^0}^{x_{q_{r-2}}} a_{q_{r-2}}\,d\alpha_{q_{r-2}}\right)\left[\dots\left[\int_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \exp\left(-\int_{x_{q_2}^0}^{\beta_{q_2}} a_{q_2}\,d\alpha_{q_2} + \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} a_{q_1}\,d\alpha_{q_1}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\varphi_1(\beta_{q_2},\ldots,\beta_{q_r})\,d\beta_{q_2}+\varphi_2(x_{q_1},\beta_{q_3},\ldots,\beta_{q_r})\Big]\,d\beta_{q_3}+$$

$$+\varphi_3(x_{q_1},x_{q_2},\beta_{q_4},\ldots,\beta_{q_r})\Big]\,d\beta_{q_4}+\ldots+\varphi_{r-1}(x_{q_1},\ldots,x_{q_{r-2}},\beta_{q_r})\Big]\times$$

$$\times d\beta_{q_r}+\varphi_r(x_{q_1},\ldots,x_{q_{r-1}})\Big]. \tag{3.76}$$

Осталось только определить функции φ_i, входящие в (3.76). Положим $x_{q_r}=x^0_{q_r}$. Тогда

$$\varphi_r(x_{q_1},\ldots,x_{q_{r-1}})=R(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{r-1}-1},x_{q_{r-1}},$$
$$x^0_{q_{r-1}+1},\ldots,x^0_n,x^0_1,\ldots,x^0_n)=\exp\sum_{i=1}^{r-1}\int_{x^0_{q_i}}^{x_{q_i}}a_{q_i}(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},$$
$$x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{i-1}-1},x_{q_{i-1}},x^0_{q_{i-1}+1},\ldots,x^0_{q_i-1},\alpha_{q_i},x^0_{q_i+1},\ldots,x^0_n)\,d\alpha_{q_i}$$

по предположению индукции.

Подставим найденное значение φ_r в (3.76). Полагая $x_{q_{r-1}}=x^0_{q_{r-1}}$, аналогично предыдущему случаю получаем:

$$\exp\Big(\int_{x^0_{q_r}}^{x_{q_r}}a_{q_r}(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{r-2}-1},x_{q_{r-2}},x^0_{q_{r-2}+1},\ldots$$
$$\ldots,x^0_{q_r-1},\alpha_{q_r},x^0_{q_r+1},\ldots,x^0_n)\,d\alpha_{q_r}\Big)\Big[\int_{x^0_{q_r}}^{x_{q_r}}\exp\Big(-\int_{x^0_{q_r}}^{\beta_{q_r}}a_{q_r}(x^0_1,\ldots$$
$$\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{r-2}-1},x_{q_{r-2}},x^0_{q_{r-2}+1},\ldots,x^0_{q_r-1},\alpha_{q_r},$$
$$x^0_{q_r+1},\ldots,x^0_n)\,d\alpha_{q_r}\Big)\varphi_{r-1}(x_{q_1},\ldots,x_{q_{r-2}},\beta_{q_r})\,d\beta_{q_r}+$$
$$+\exp\sum_{i=1}^{r-2}\int_{x^0_{q_i}}^{x_{q_i}}a_{q_i}(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{i-1}-1},x_{q_{i-1}},$$
$$x^0_{q_{i-1}+1},\ldots,x^0_{q_i-1},\alpha_{q_i},x^0_{q_i+1},\ldots,x^0_n)\,d\alpha_{q_i}\Big]=R(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},$$
$$x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{r-2}-1},x_{q_{r-2}},x^0_{q_{r-2}+1},\ldots,x^0_{q_r-1},x_{q_r},x^0_{q_r+1},\ldots,x^0_n,$$
$$x^0_1,\ldots,x^0_n)=\exp\Big(\sum_{i=1}^{r-2}\int_{x^0_{q_i}}^{x_{q_i}}a_{q_i}(x^0_1,\ldots,x^0_{q_1-1},x_{q_1},x^0_{q_1+1},\ldots,x^0_{q_{i-1}-1},$$

$$x_{q_{i-1}}, x^0_{q_{i-1}+1}, \dots, x^0_{q_i-1}, \alpha_{q_i}, x^0_{q_i+1}, \dots, x^0_n)\, d\alpha_{q_i} + \int_{x^0_{q_r}}^{x_{q_r}} a_{q_r}(x^0_1, \dots$$

$$\dots, x^0_{q_1-1}, x_{q_1}, x^0_{q_1+1}, \dots, x^0_{q_{r-2}-1}, x_{q_{r-2}}, x^0_{q_{r-2}+1}, \dots, x^0_{q_r-1}, \alpha_{q_r},$$

$$x^0_{q_r+1}, \dots, x^0_n)\, d\alpha_{q_r}\Big).$$

Отсюда

$$\int_{x^0_{q_r}}^{x_{q_r}} \exp\Big(-\int_{x^0_{q_r}}^{\beta_{q_r}} a_{q_r}\, d\alpha_{q_r}\Big)\varphi_{r-1} d\beta_{q_r} = 0.$$

Так как это равенство справедливо при любом значении верхнего предела внешнего интеграла, то его подынтегральное выражение равно нулю. Экспонента в нуль не обращается, следовательно $\varphi_{r-1} \equiv 0$.

Полагая последовательно $x_{q_{r-2}} = x^0_{q_{r-2}}, \dots,\ x_{q_1} = x^0_{q_1}$ аналогичным образом найдем $\varphi_i \equiv 0$, $i = \overline{1, r-2}$. В результате, подставляя функции φ_i, $i = \overline{1, r}$, в (3.76), получаем формулу (3.73) при $x_1 = x^0_1, \dots,$ $x_{q_1-1} = x^0_{q_1-1}$, $x_{q_1+1} = x^0_{q_1+1}, \dots,$ $x_{q_r-1} = x^0_{q_r-1}$, $x_{q_r+1} = x^0_{q_r+1}, \dots,$ $x_n = x^0_n$. Так как набор $(q_1, \dots, q_r)$ был выбран произвольно, то (3.73) верна для $p = r$. Следовательно, по индукции (3.73) справедлива и для $p = n$.

Утверждение доказано.

Как и в пространствах размерности 3 и 4, можно выделить еще $n! - 1$ аналогичных случаев явного построения функции Римана. Покажем, как это можно сделать [64].

Обозначим $(h_1, \dots, h_n)$ некоторую перестановку $(1, \dots, n)$.

Если

$$a_{h_{q_1}\dots h_{q_k}} = (a_{h_{q_1}\dots h_{q_{k-1}}})_{x_{h_{q_k}}} + a_{h_{q_1}\dots h_{q_{k-1}}} a_{h_{q_k}}, \quad (q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}, \quad k = \overline{2, n},$$

то функция Римана уравнения (3.47) имеет вид

$$R(x_1, \dots, x_n, x^0_1, \dots, x^0_n) = \exp \sum_{i=1}^{n} \int_{x^0_{h_i}}^{x_{h_i}} a_{h_i}\Big|_{\substack{x_{h_i}=\alpha_{h_i} \\ x_{h_j}=x^0_{h_j},\, j=\overline{i+1,n}}} d\alpha_{h_i}.$$

Доказательство проводится индукцией по числу k переменных x_j, отличных от x^0_j. Для этого в уравнении (3.48) фиксируются $x_{p_i} = x^0_{p_i}$, $\{p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n-k\} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant n\} \setminus \{h_{q_j} \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ для всех $Q_{k,n}$ и полученные уравнения дифференцируются по $x_{h_{q_1}}, \dots,\ x_{h_{q_k}}$. Каждое из этих уравнений имеет вид

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_{h_{q_1}}} - a_{h_{q_1}}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x_{h_{q_2}}} - a_{h_{q_2}}\Big) \dots \Big(\frac{\partial}{\partial x_{h_{q_k}}} - a_{h_{q_k}}\Big) v = 0$$

и, следовательно, решается в квадратурах.

2.4. Об интегральных уравнениях для функции Римана. Пусть $(r_1, \dots, r_n)$ — некоторая перестановка $(1, \dots, n)$ и

$$h_{r_{q_1}\dots r_{q_{k-1}}, r_{q_k}} \equiv 0, \quad (q_1, \dots, q_k) \in Q_{k,n}, \quad k = \overline{2, n-1}. \tag{3.77}$$

Тогда интегральное уравнение для функции Римана имеет вид [48]:

$$\begin{gathered} v(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) = R_{r_1\dots r_n}(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n) + \\ + (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \dots \int_{x_n^0}^{x_n} R_{r_1\dots r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) \times \\ \times h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) v(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1^0, \dots, x_n^0) d\alpha_n \dots d\alpha_1, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} R_{r_1\dots r_n}(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) = \exp\Bigg(\sum_{i=1}^n \int_{x_{r_i}}^{x_{r_i}^0} a_{r_i}(x_1, \dots, \\ x_{r_i - 1}, \alpha_{r_i}, x_{r_i+1}, \dots, x_n)\Big|_{x_{r_{i+1}} = x_{r_{i+1}}^0} \dots \Big|_{x_{r_n} = x_{r_n}^0} d\alpha_{r_i}\Bigg). \end{gathered} \tag{3.78}$$

Покажем это. При условии (3.77) сопряженное к (3.70) уравнение записывается в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{r_1}} - a_{r_1}\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{r_n}} - a_{r_n}\right) v = (-1)^n h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n} v.$$

Это доказывается так же, как и формула (3.72).

Функция Римана для (3.72) при условии $h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n} \equiv 0$ известна (см. п. 2.3):

$$\begin{gathered} R = R_{r_1\dots r_n}(x_1, \dots, x_n, x_1^0, \dots, x_n^0) = \exp \sum_{i=1}^n \int_{x_{r_i}}^{x_{r_i}^0} a_{r_i}(x_1, \dots, \\ x_{r_i - 1}, \alpha_{r_i}, x_{r_i+1}, \dots, x_n)\Big|_{x_{r_{i+1}} = x_{r_{i+1}}^0} \dots \Big|_{x_{r_n} = x_{r_n}^0} d\alpha_{r_i}. \end{gathered}$$

Видим, что она совпадает с (3.78). Запишем решение уравнения (3.72), считая это уравнение неоднородным с правой частью $(-1)^n h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n} v$:

$$v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \dots \int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} \Bigg(\sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{m+1} \times$$

$$\times \sum_{H_{m,n}} v(x_1, \dots, x_{h_1-1}, x^0_{h_1}, x_{h_1+1}, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots,$$

$$x_{q_k-1}, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_{h_m-1}, x^0_{h_m}, x_{h_m+1}, \dots, x_n)\times$$

$$\times A_{q_1\dots q_k}(x_1, \dots, x_{h_1-1}, x^0_{h_1}, x_{h_1+1}, \dots, x_{q_1-1}, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}, \dots, x_{q_k-1},$$

$$\alpha_{q_k}, x_{q_k+1}, \dots, x_{h_m-1}, x^0_{h_m}, x_{h_m+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n)\Big) d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1} +$$

$$+(-1)^n \int_{x^0_1}^{x_1} \dots \int_{x^0_n}^{x_n} R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\times$$

$$\times v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_1, \tag{3.79}$$

$$A_{q_1\dots q_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{H_k^m} (a^*_{h_1\dots h_m}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n))_{\alpha_{h_{m+1}}\dots\alpha_{h_k}}.$$

Введем обозначение

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\Big|_{x^0_1}^{x_1} \dots \Big|_{x^0_n}^{x_n} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{Q_{k,n}} (-1)^k f(x_1, \dots, x_n)\Big|_{x_{q_1}=x^0_{q_1}} \dots \Big|_{x_{q_k}=x^0_{q_k}}.$$

Освободимся теперь в (3.79) от производных функции R с помощью интегрирования по частям. Например, для слагаемого, соответствующего некоторому элементу из $H_{m,n}$ (аргументы в записи опускаем), это делается так

$$\int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} A_{q_1\dots q_k} v d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1} =$$

$$= \Big[Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} - \int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} Rv_{\alpha_{q_1}}\Big|_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \Big|_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} d\alpha_{q_1} - \dots -$$

$$- \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} Rv_{\alpha_{q_k}}\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}}\Big|_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \Big|_{x^0_{q_{k-1}}}^{x_{q_{k-1}}} d\alpha_{q_k} + \dots +$$

$$+(-1)^k \int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \int_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} Rv_{\alpha_{q_1}\dots\alpha_{q_k}} d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1}\Big] -$$

$$- \int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \Big[a^*_{q_1} Rv\Big|_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} \dots \Big|_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} - \int_{x^0_{q_2}}^{x_{q_2}} a^*_{q_1} Rv_{\alpha_{q_2}}\Big|_{x^0_{q_3}}^{x_{q_3}} \dots \Big|_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} d\alpha_{q_2} - \dots -$$

$$-\int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} a_{q_1}^* R v_{\alpha_{q_k}}\Big|_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \dots \Big|_{x_{q_{k-1}}^0}^{x_{q_{k-1}}} d\alpha_{q_k} + \ldots +$$

$$+(-1)^k \int_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \int_{x_{q_3}^0}^{x_{q_3}} \dots \int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} a_{q_1}^* R v_{\alpha_{q_2}\dots\alpha_{q_k}} d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_3} d\alpha_{q_2}\Big] d\alpha_{q_1} - \ldots -$$

$$-\int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} \Big[a_{q_k}^* R v\Big|_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x_{q_{k-1}}^0}^{x_{q_{k-1}}} - \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} a_{q_k}^* R v_{\alpha_{q_1}}\Big|_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \dots \Big|_{x_{q_{k-1}}^0}^{x_{q_{k-1}}} d\alpha_{q_1} - \ldots -$$

$$-\int_{x_{q_{k-1}}^0}^{x_{q_{k-1}}} a_{q_k}^* R v_{\alpha_{q_{k-1}}}\Big|_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x_{q_{k-2}}^0}^{x_{q_{k-2}}} d\alpha_{q_{k-1}} + \ldots +$$

$$+(-1)^k \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \int_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \dots \int_{x_{q_{k-1}}^0}^{x_{q_{k-1}}} a_{q_k}^* R v_{\alpha_{q_1}\dots\alpha_{q_{k-1}}} d\alpha_{q_{k-1}} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1}\Big] d\alpha_{q_k} + \ldots +$$

$$+(-1)^k \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \int_{x_{q_2}^0}^{x_{q_2}} \dots \int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} a_{q_1\dots q_k}^* R v d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_2} d\alpha_{q_1}. \tag{3.80}$$

Подставив (3.80) в (3.79), получаем формулу для v:

$$v(x_1, \dots, x_n) = R(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n) v(x_1^0, \dots, x_n^0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{Q_{k,n}} \int_{x_{q_1}^0}^{x_{q_1}} \dots \int_{x_{q_k}^0}^{x_{q_k}} R(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0, \alpha_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_k-1}^0,$$

$$\alpha_{q_k}, x_{q_k+1}^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n)\Big\{\sum_{m=0}^{k} \sum_{H_k^m} a_{h_1\dots h_m}^*(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0,$$

$$\alpha_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_k-1}^0, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}^0, \dots, x_n^0) v_{\alpha_{h_{m+1}}\dots\alpha_{h_k}}(x_1^0, \dots, x_{q_1-1}^0,$$

$$\alpha_{q_1}, x_{q_1+1}^0, \dots, x_{q_k-1}^0, \alpha_{q_k}, x_{q_k+1}^0, \dots, x_n^0)\Big\} d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1} +$$

$$+(-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \dots \int_{x_n^0}^{x_n} R(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x_1, \dots, x_n) \times$$

$$\times h_{r_1\dots r_{n-1}, r_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) v(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \dots d\alpha_1. \tag{3.81}$$

Покажем это. Условимся не записывать аргументы функций R, u, поскольку, в соответствии с (3.79), элементы из $H_{m,n}$, по которым производится суммирование, вполне определяют эти аргументы. Найдем внеинтегральный член в (3.81), исходя из (3.79) с учетом (3.80):

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sum_{Q_{k,n}} \sum_{m=1}^{n-k}(-1)^{m+1} \sum_{H_{m,n}} Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{Q_{n-1,n}} \sum_{H_{m,n}} Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x^0_{q_{n-1}}}^{x_{q_{n-1}}} +$$

$$+(-1)^{n-2} \sum_{Q_{n-2,n}} \sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1} \sum_{H_{m,n}} Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x^0_{q_{n-2}}}^{x_{q_{n-2}}} +$$

$$+(-1)^{n-3} \sum_{Q_{n-3,n}} \sum_{m=1}^{3}(-1)^{m+1} \sum_{H_{m,n}} Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \Big|_{x^0_{q_{n-3}}}^{x_{q_{n-3}}} + \dots -$$

$$- \sum_{Q_{1,n}} \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m+1} \sum_{H_{m,n}} Rv\Big|_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} + \sum_{Q_{0,n}} \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1} \sum_{H_{m,n}} Rv. \qquad (3.82)$$

Воспользуемся формулой (3.82) для подсчета числа слагаемых N_0 вида $R(x_1^0, \dots, x_n^0, x_1, \dots, x_n)v(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Число таких слагаемых в сумме (3.82) при $k = n-1$ будет C_n^{n-1}, при $k = n-2$ — C_n^{n-2} и так далее. С учетом знака получаем

$$N_0 = (-1)^{2n}C_n^{n-1} + (-1)^{2n-1}C_n^{n-2} + (-1)^{2n-2}C_n^{n-3} + \dots + \\ + (-1)^{n-2}C_n^1 + (-1)^{n+1}C_n^0 = 1. \quad (3.83)$$

Формула (3.83) является известным выражением для биномиальных коэффициентов, которое может быть получено из суммы $(1-1)^n$.

Подсчитаем теперь с учетом знака число N_r слагаемых вида $R(X, x_1, \dots, x_n)v(X)$, $X = (x_1, \dots, x_{p_1-1}, x^0_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_{n-r}-1}, x^0_{p_{n-r}}, x_{p_{n-r}+1}, \dots, x_n)$, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $1 \leqslant p_i \leqslant n$:

$$N_r = (-1)^{2n}(C_n^{n-1} - C_r^1) + (-1)^{2n-1}(C_n^{n-2} - C_r^2) + \dots + \\ + (-1)^{2n+1-r}(C_n^{n-r} - C_r^r) + (-1)^{2n-r}C_n^{n-r-1} + \dots + (-1)^{n+1}C_n^0 = 0.$$

Совершенно аналогично находим число элементов $N_{k,r}$ вида

$$\int_{x^0_{q_1}}^{x_{q_1}} \dots \int_{x^0_{q_k}}^{x_{q_k}} a^*_{q_1 \dots q_t}(X_1)R(X, x_1, \dots, x_n)v_{\alpha_{q_{t+1}} \dots \alpha_{q_k}}(X_1)d\alpha_{q_k} \dots d\alpha_{q_1},$$

$$X_1 = X\Big|_{x_{q_1}=\alpha_{q_1}} \ldots \Big|_{x_{q_k}=\alpha_{q_k}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

которое равно

$$\begin{gathered}(-1)^{2n}(C_{n-k}^{n-k-1} - C_r^1) + (-1)^{2n-1}(C_{n-k}^{n-k-2} - C_r^2) + \ldots + \\ + (-1)^{2n+1-r}(C_{n-k}^{n-k-r} - C_r^r) + (-1)^{2n-r}C_{n-k}^{n-k-r-1} + \\ + \ldots + (-1)^{n+k+1}C_{n-k}^0 = \begin{cases} 1, \ r = 0, \\ 0, \ r \neq 0. \end{cases} \qquad (3.84)\end{gathered}$$

Формула (3.84) означает, что не входящие в (3.81) интегральные слагаемые взаимно уничтожаются. Тем самым формула (3.81) доказана.

Сравнивая интегральное уравнение для функции Римана (3.48) и (3.81), видим, что все выражения в фигурных скобках в (3.81) тождественно равны нулю. Таким образом, при условиях (3.77) получаем интегральное уравнение для v вида

$$\begin{gathered}v(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0) = R(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1, \ldots, x_n) + \\ + (-1)^n \int_{x_1^0}^{x_1} \ldots \int_{x_n^0}^{x_n} R(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times h_{r_1 \ldots r_{n-1}, r_n}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) v(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x_1^0, \ldots, x_n^0) d\alpha_n \ldots d\alpha_1. \qquad (3.85)\end{gathered}$$

При записи (3.85) учтено, что $v(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = 1$. Таких уравнений $n!$, каждому из них соответствует своя $R = R_{r_1 \ldots r_n}$.

Используем полученный результат для построения функций Римана в явном виде.

1. Если выполняются условия (3.77), коэффициенты a_i имеют структуру

$$a_i = a_i^0(x_i) + \lambda \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n, \\ j \neq i}} x_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad \lambda = const, \qquad (3.86)$$

и

$$h_{r_1 \ldots r_{n-1}, r_n} = (-1)^n \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \theta_j(x_j), \qquad (3.87)$$

то функция Римана для (3.70) имеет вид

$$v(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0) = \\ = {}_0F_{n-1}\Big(1,\dots,1;(-1)^n\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\int_{x_j^0}^{x_j}\theta_j(\alpha_j)d\alpha_j\Big)\times \\ \times\exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i}a_i^0(\alpha_i)d\alpha_i+\lambda\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}x_j-\prod_{1\leqslant j\leqslant n}x_j^0\Big)\Big), \quad (3.88)$$

$${}_0F_{n-1}(1,\dots,1;\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[(1)_k]^{n-1}}\frac{\sigma^k}{k!}.$$

Действительно, если выполняется (3.86), то функция $R_{r_1\dots r_n}$ из (3.78) записывается в форме

$$R_{r_1\dots r_n}(x_1,\dots,x_n,x_1^0,\dots,x_n^0) = \\ = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_i^0}a_i^0(\alpha_i)d\alpha_i+\lambda\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant n}x_j^0-\prod_{1\leqslant j\leqslant n}x_j\Big)\Big).$$

Обозначим

$$\omega = Tv,\quad T(x_1,\dots,x_n)=\exp\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{0}a_i^0(\alpha_i)d\alpha_i-\lambda\prod_{1\leqslant j\leqslant n}x_j\Big).$$

При этом (3.85) принимает вид

$$\omega(x_1,\dots,x_n)=T(x_1^0,\dots,x_n^0)+ \\ +(-1)^n\int_{x_1^0}^{x_1}\dots\int_{x_n^0}^{x_n}h_{r_1\dots r_{n-1},r_n}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\omega(\alpha_1,\dots,\alpha_n)d\alpha_n\dots d\alpha_1.$$

Данное уравнение эквивалентно задаче Гурса для уравнения

$$\omega_{x_1\dots x_n}-(-1)^n h_{r_1\dots r_{n-1},r_n}\omega=0 \quad (3.89)$$

с условиями

$$\omega\mid_{x_1=x_1^0}=\omega\mid_{x_2=x_2^0}=\dots=\omega\mid_{x_n=x_n^0}=T(x_1^0,\dots,x_n^0).$$

При условии (3.87) функция Римана для (3.89) известна [16, с. 10–12]. Вычислив ω и возвратившись снова к функции v, получим (3.88).

2. Если коэффициенты a_i имеют структуру

$$a_i = \frac{\partial \ln w}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad w = \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_{k,n}} p_{q_1 \ldots q_k}(x_{q_1}, \ldots, x_{q_k}) \neq 0, \tag{3.90}$$

и

$$h_{r_1 \ldots r_{n-1}, r_n} = (-1)^n \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \theta_j(x_j), \tag{3.91}$$

то функция Римана для (3.70) имеет вид

$$v(x_1, \ldots, x_n, x_1^0, \ldots, x_n^0) = \\ = {}_0F_{n-1}\left(1, \ldots, 1; (-1)^n \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \int_{x_j^0}^{x_j} \theta_j(\alpha_j) d\alpha_j\right) \frac{w(x_1, \ldots, x_n)}{w(x_1^0, \ldots, x_n^0)}. \tag{3.92}$$

Очевидно, что условия (3.77) выполняются, функция Римана строится по схеме случая 1.

Глава 2. Характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях

Здесь для уравнения (2) исследуются задачи, отличающиеся от задачи Гурса тем, что вместо искомой функции u на характеристиках (или их части) задаются значения нормальных производных от u.

§ 4. Задачи на плоскости и в трехмерном пространстве

В данном параграфе рассматриваются задачи с нормальными производными на характеристиках для уравнения (2) при $n = 2, 3$. Первой известной авторам публикацией, где встречается подобное граничное условие, является работа Л.М. Невоструева [53]. Однако речь там идет о задаче для уравнения смешанного типа, а ситуация с нормальной производной на характеристике носит вспомогательный характер и исследуется лишь в той мере, в которой это необходимо для основной задачи из [53]. Имеется также цикл работ С.С. Харибегашвили [78] – [84], в которых для уравнения (4), в том числе векторно-матричного, изучаются задачи в характеристических и нехарактеристических областях с граничными условиями вида

$$\alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = f. \tag{4.1}$$

Очевидно, если (4.1) задано на характеристике $x = const$, и (например) $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, то это есть граничное условие обсуждаемого вида, представляющее собой как бы предельный случай общей постановки задачи. С.С. Харибегашвили применяет к исследованию задач методы функционального анализа, выделяя лишь случаи однозначной разрешимости (существование единственного решения в определенном функциональном классе).

Таким образом указанные граничные условия в упомянутых работах играют эпизодическую или вспомогательную роль. Предметом специального изучения эта задача стала в работе [130], в которой для (4) предложен метод редукции рассматриваемых задач к задаче Гурса. Этот метод позволяет более полно исследовать задачи: не только доказать существование решения, но и записать его либо с помощью резольвент интегральных уравнений Вольтерра (в общем случае), либо в явном виде (в ряде частных случаев). При этом устанавливаются условия не только однозначной разрешимости, но и разрешимости с точностью до определенного количества произвольных констант.

Отметим, что такие задачи не всегда содержательны. В качестве примера рассмотрим трехмерное уравнение

$$u_{xyz} = 0. \tag{4.2}$$

Поставим для него задачу Гурса следующим образом: найти в параллелепипеде $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1\}$ непрерывно продолжимое на границу D решение, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_X = \varphi_1(y,z), \quad u\big|_Y = \varphi_2(x,z), \quad u\big|_Z = \varphi_3(x,y)\,, \tag{4.3}$$

где X, Y, Z — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ соответственно. Проинтегрировав (4.2) с учетом (4.3), получим

$$u = \varphi_1(y,z) + \varphi_2(x,z) + \varphi_3(x,y) - \varphi_1(y,0) - \varphi_2(0,z) - \varphi_3(x,0) + \varphi_1(0,0). \tag{4.4}$$

При произвольных φ_k можно рассматривать здесь правую часть в качестве структурной формулы решений нашего уравнения подобно тому, как это делается в [2, с. 66] для уравнения $u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$. Теперь поставим для (4.2) задачу с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_X = \psi_1(y,z), \quad u\big|_Y = 0, \quad u\big|_Z = 0. \tag{4.5}$$

Если, пользуясь (4.4), попытаться добиться для u выполнения (4.5), то придем к требованию $\psi_1(y,z) \equiv 0$, делающему задачу обсуждаемого типа тривиальной. Подобные случаи далее исключаются из рассмотрения.

Заметим, что появление только что указанных случаев зависит от характера коэффициентов рассматриваемого уравнения. Таким образом, речь идет о выявлении условий на эти коэффициенты, которые обеспечивали бы определенный уровень содержательности рассматриваемых задач.

1. Плоский случай

Речь идет об уравнении

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0, \tag{4.6}$$

которое мы будем рассматривать в характеристическом прямоугольнике $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1\}$. Стороны D при $x = 0$, $y = 0$ обозначим X, Y соответственно. Будем рассматривать задачи, получаемые из задачи Гурса заменой хотя бы одного из граничных значений u значением ее нормальной производной из набора

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\overline{X}} = \psi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\overline{Y}} = \psi_2(x). \tag{4.7}$$

Здесь, как обычно, $\overline{X}$ означает замыкание множества X. Условия типа Гурса обозначим через Γ, а типа (4.7) — через N. Если не считать варианты задач, получающихся переменой ролей носителей, то, очевидно, получим две задачи, которые естественно обозначить ΓN, NN.

Конечно, мы считаем искомую функцию непрерывно продолжимой на $\overline{X} \cup \overline{Y}$, а участвующие в граничных условиях производные первого порядка непрерывно продолжимыми на ту часть границы D, на которой задано граничное значение этой производной.

Обозначим

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y), \quad u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x). \tag{4.8}$$

Сформулируем задачи с нормальными производными.

Задача ΓN**:** *найти решение уравнения* (4.6), *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\overline{Y}} = \psi_2(x).$$

Задача NN**:** *найти решение уравнения* (4.6), *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x).$$

Решения ищутся в классе $C^{(1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$. При этом гладкость коэффициентов определяется условиями

$$a \in C^{(1,0)}, \quad b \in C^{(0,1)}, \quad c \in C^{(0,0)}, \tag{4.9}$$

имеющими место в замкнутой области $\overline{D}$. Здесь, как уже указывалось ранее, класс $C^{(k,l)}$ означает существование непрерывных производных $\dfrac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}$ для всех $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant l$.

Также считаем, что

$$\varphi_1 \in C^1(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^1(\overline{Y}), \quad \psi_1 \in C^1(\overline{X}), \quad \psi_2 \in C^1(\overline{Y}). \tag{4.10}$$

Далее предлагается метод редукции рассматриваемых задач с нормальными производными к задаче Гурса.

Рассмотрим множество X. Проинтегрировав (4.6) по y в пределах (ε_2, y), $\varepsilon_2 > 0$, и перейдя затем к пределу при $\varepsilon_2 \to 0$, получим

$$b(0,y)\varphi_1(y) - \int_0^y [b_\beta(0,\beta) - c(0,\beta)]\varphi_1(\beta)d\beta = \Omega_1(y), \tag{4.11}$$

$$\Omega_1(y) = b(0,0)\varphi_1(0) - \psi_1(y) + \psi_1(0) - \int_0^y a(0,\beta)\psi_1(\beta)d\beta.$$

Очевидно, при известной ψ_1 можно (4.11) рассматривать как интегральное уравнение для $\varphi_1(y)$. Ясно, что значение $\varphi_1(0)$ не может быть определено исходя из (4.11) (при $y = 0$ (4.11) обращается в тождество), и в дальнейшем, если не представится возможности определить его из других соображений, $\varphi_1(0)$ рассматривается как произвольная постоянная.

Условия гладкости позволяют продифференцировать (4.11) и получить уравнение

$$b(0,y)\varphi_1'(y) + c(0,y)\varphi_1(y) = A(y), \tag{4.12}$$

$$A(y) = -\psi_1'(y) - a(0,y)\psi_1(y).$$

Выделим следующие два случая.

1) $b(0,y) \neq 0$. Тогда

$$\varphi_1(y) = \exp\left(\int_y^0 \frac{c(0,\beta)}{b(0,\beta)}d\beta\right)\varphi_1(0) -$$
$$-\int_0^y \exp\left(\int_\beta^y \frac{c(0,\beta_1)}{b(0,\beta_1)}d\beta_1\right)\left(\frac{\psi_1'(\beta)+a(0,\beta)\psi_1(\beta)}{b(0,\beta)}\right)d\beta. \quad (4.13)$$

Функция $\varphi_1(y)$ определяется с точностью до одной произвольной постоянной.

2) $b(0,y) \equiv 0$, $c(0,y) \neq 0$. В этом случае сразу получаем однозначно определяемую функцию $\varphi_1(y) = A(y)/c(0,y)$. При этом следует потребовать, чтобы было ψ_1', a, $c \in C^1(\overline{X})$.

Перейдем теперь к множеству Y. Роль (4.12) играет

$$a(x,0)\varphi_2'(x) + c(x,0)\varphi_2(x) = B(x), \quad (4.14)$$

$$B(x) = -\psi_2'(x) - b(x,0)\psi_2(x).$$

Варианты 1) – 2) имеют следующий вид.

1) $a(x,0) \neq 0$. В этом случае

$$\varphi_2(x) = \exp\left(\int_x^0 \frac{c(\alpha,0)}{a(\alpha,0)}d\alpha\right)\varphi_2(0) -$$
$$-\int_0^x \exp\left(\int_\alpha^x \frac{c(\alpha_1,0)}{a(\alpha_1,0)}d\alpha_1\right)\left(\frac{\psi_2'(\alpha)+b(\alpha,0)\psi_2(\alpha)}{a(\alpha,0)}\right)d\alpha. \quad (4.15)$$

Функция $\varphi_2(x)$ определяется с точностью до одной произвольной постоянной.

2) $a(x,0) \equiv 0$, $c(x,0) \neq 0$. Получаем однозначно определяемую функцию $\varphi_2(x) = B(x)/c(x,0)$. Требуем выполнения условий ψ_2', b, $c \in C^1(\overline{Y})$.

Вернемся к задачам ΓN и NN с целью выяснить возможность и характер их редукции к задаче Гурса для (4.6). Определив по нормальной производной граничное значение искомой функции на характеристике, можно записать решение с помощью формулы (1.20). При рассмотрении задач используем варианты 1) – 2). Упоминание соответствующего случая означает выполнение всех содержащихся в нем требований.

1. В задаче ΓN известны φ_1, ψ_2. Если на Y выполняется 1), то решение задачи ΓN при выполнении условия согласования $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$

определяется однозначно. Если же имеет место 2), то решение определяется однозначно, и, кроме того, возникает дополнительное условие согласования $\varphi_1(0) = B(0)/c(0,0)$.

2. Задача NN. Заданы ψ_1, ψ_2. Будем комбинировать варианты на множествах X и Y. Если на X и на Y имеет место 1), то решение определяется с точностью до одной произвольной постоянной. Если на X реализуется 1), а на Y — 2), то решение определяется однозначно. Если же 2) имеет место и на X и на Y, то при $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ решение также определяется однозначно. Во всех этих случаях никаких дополнительных условий согласования не возникает.

2. Переход в трехмерное пространство

Здесь речь пойдет о задачах для уравнения

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0, \tag{4.16}$$

которое будет рассматриваться в характеристическом параллелепипеде $D = \{0 < x < x_1,\ 0 < y < y_1,\ 0 < z < z_1\}$. Грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ обозначим X, Y, Z соответственно. Целью данного параграфа является рассмотрение задач, получаемых из задачи Гурса заменой хотя бы одного из граничных значений u значением ее нормальной производной из набора

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y,z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y). \tag{4.17}$$

Здесь $\overline{X}$ означает замыкание множества X. Условия типа Гурса обозначим через Γ, а типа (4.17) — через N, причем носители этих условий всегда будем брать в последовательности X, Y, Z. Если не считать варианты задач, получающихся переменой ролей носителей, то, очевидно, получим три задачи, которые обозначим $\Gamma\Gamma N$, ΓNN, NNN.

Считаем искомую функцию непрерывно продолжимой на $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}$, а участвующие в граничных условиях производные первого порядка непрерывно продолжимыми на ту часть границы D, на которой задано граничное значение этой производной. При этом гладкость коэффициентов определяется включениями

$$\begin{gathered} a \in C^{(1,1,0)}, \qquad b \in C^{(0,1,1)}, \qquad c \in C^{(1,0,1)}, \qquad d \in C^{(1,0,0)}, \\ e \in C^{(0,1,0)}, \qquad f \in C^{(0,0,1)}, \qquad g \in C^{(0,0,0)}, \end{gathered} \tag{4.18}$$

имеющими место в замкнутой области $\overline{D}$. Здесь, как обычно, класс $C^{(k,l,m)}$ означает существование непрерывных производных $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}}$ для всех $r_1 \leqslant k$, $r_2 \leqslant l$, $r_3 \leqslant m$.

Обозначим

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u\big|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y)\,. \tag{4.19}$$

Сформулируем задачи с нормальными производными.

Задача $\Gamma\Gamma N$**:** *найти решение уравнения* (4.16), *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y).$$

Задача ΓNN**:** *найти решение уравнения* (4.16), *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y).$$

Задача NNN**:** *найти решение уравнения* (4.16), *удовлетворяющее условиям*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{\overline{X}} = \psi_1(y,z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y).$$

Принадлежность решения задачи Гурса классу $C^{(1,1,1)}(D) \cap C(\overline{D})$ обеспечивается, если

$$\varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z}), \tag{4.20}$$

и выполняются условия согласования на ребрах D:

$$\varphi_2(x,0) = \varphi_3(x,0), \quad \varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y), \quad \varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z). \tag{4.21}$$

Общие значения функций из (4.21) далее обозначаем $\lambda(y), \mu(x), \nu(z)$.

При постановке задач $\Gamma\Gamma N$, ΓNN, NNN подразумевается выполнение условий гладкости (4.18) и (4.20). Кроме того, требуем, чтобы

$$\psi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \psi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z}).$$

Далее предлагается метод редукции рассматриваемых задач с нормальными производными к задаче Гурса.

2.1. Интегральные уравнения для граничных значений Гурса. Сначала займемся ситуацией на X. Проинтегрировав (4.16) по второму и третьему аргументам в пределах (ε_2, y), (ε_3, z), $\varepsilon_i > 0$, и перейдя затем к пределу при $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$ с учетом (4.17), (4.19), получим

$$b(0,y,z)\varphi_1(y,z) - \int_0^y [b_\eta - f](0,\eta,z)\varphi_1(\eta,z)d\eta -$$
$$- \int_0^z [b_\zeta - e](0,y,\zeta)\varphi_1(y,\zeta)d\zeta +$$
$$+ \int_0^y \int_0^z [b_{\eta\zeta} - e_\eta - f_\zeta + g](0,\eta,\zeta)\varphi_1(\eta,\zeta)d\zeta d\eta = \Omega_1(y,z), \quad (4.22)$$

$$\Omega_1(y,z) = b(0,y,0)\lambda(y) + b(0,0,z)\nu(z) - \delta b(0,0,0) -$$
$$- \int_0^y [b_\eta - f](0,\eta,0)\lambda(\eta)d\eta - \int_0^z [b_\zeta - e](0,0,\zeta)\nu(\zeta)d\zeta -$$
$$-\psi_1(y,z) + \psi_1(y,0) + \psi_1(0,z) - \psi_1(0,0) - \int_0^y [c(0,\eta,z)\psi_1(\eta,z) -$$
$$-c(0,\eta,0)\psi_1(\eta,0)]d\eta - \int_0^z [a(0,y,\zeta)\psi_1(y,\zeta) - a(0,0,\zeta)\psi_1(0,\zeta)]d\zeta +$$
$$+ \int_0^y \int_0^z [a_\eta(0,\eta,\zeta) + c_\zeta(0,\eta,\zeta) - d(0,\eta,\zeta)]\psi_1(\eta,\zeta)d\zeta d\eta.$$

Здесь $\delta = \lambda(0) = \mu(0) = \nu(0)$.

Очевидно, при известной ψ_1 можно (4.22) рассматривать как интегральное уравнение для $\varphi_1(y,z)$. Непосредственно усматривается, что $\lambda(y)$ и $\nu(z)$ не могут быть найдены из (4.22) и в дальнейшем, если не представится возможности их определить из других соображений, должны рассматриваться как произвольные функции.

Предположения (4.18) и $\psi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$ позволяют продифференцировать (4.22) и получить уравнение

$$b(0,y,z)\varphi_{1yz} + e(0,y,z)\varphi_{1y} + f(0,y,z)\varphi_{1z} + g(0,y,z)\varphi_1 = A(y,z), \quad (4.23)$$

$$A(y,z) = -\psi_{1yz}(y,z) - c(0,y,z)\psi_{1z}(y,z) -$$
$$- a(0,y,z)\psi_{1y}(y,z) - d(0,y,z)\psi_1(y,z).$$

Вместе с условиями $\varphi_1(y,0)=\lambda(y)$, $\varphi_1(0,z)=\nu(z)$ (4.23) представляет собой обычную задачу Гурса на плоскости (y,z). Выпишем следующие варианты ее решения.

1) $b(0,y,z)\neq 0$. При отсутствии других предположений единственное решение в терминах функции Римана уравнения (4.23) можно записать по формуле (1.20).

2) Пусть имеют место представления

$$\begin{gathered}\frac{e}{b}=p(z)+\sigma y,\quad \frac{f}{b}=q(y)+\sigma z,\\ \frac{g}{b}-\frac{ef}{b^2}-\sigma=m(y)n(z),\quad \sigma=const,\end{gathered}\tag{4.24}$$

или выполняется хоть одно из тождеств

$$e_yb-eb_y+ef-bg\equiv 0,\quad f_zb-fb_z+ef-bg\equiv 0.\tag{4.25}$$

Коэффициенты (4.16) в (4.24) – (4.25) зависят от $(0,y,z)$, причем $b\neq 0$. Здесь $\varphi_1(y,z)$ записывается через $\lambda(y)$, $\nu(z)$ в явном виде. В случае (4.24) это делается опять по формуле (1.20), но уже с известной (см. (1.41)) функцией Римана

$$R(y,z,\tau,\theta)=v(y,z,\tau,\theta)J_0\biggl(2\Bigl[\int_\tau^y m(\eta)d\eta\int_\theta^z n(\zeta)d\zeta\Bigr]^{\frac{1}{2}}\biggr),\tag{4.26}$$

$$v=\exp\biggl(\int_\tau^y q(\eta)d\eta+\int_\theta^z p(\zeta)d\zeta+\sigma(yz-\tau\theta)\biggr),$$

а при (4.25) обращается в нуль хоть один из инвариантов уравнения (4.23), и задача Гурса для него решается в квадратурах даже без использования функции Римана (см. п. 3.1 § 1). Функции $\lambda(y)$, $\nu(z)$ в условиях 1) – 2) являются произвольными.

Результаты п. 3 § 1 позволяют аналогично выделить и другие случаи, когда φ_1 может быть найдена в явном виде.

3) $b(0,y,z)\equiv f(0,y,z)\equiv 0$, $e(0,y,z)\neq 0$. Уравнение (4.23) интегрируется непосредственно, причем для обеспечения первого условия из (4.20) следует дополнительно к (4.18) наложить требования ψ_{1yz}, a, d, e, $g\in C^{(0,1)}(\overline{X})$ при $x=0$. Функция $\varphi_1(y,z)$ определяется лишь через $\nu(z)$, а

$$\begin{aligned}\lambda(y)=\biggl\{\nu(0)+\int_0^y\frac{A(\eta,0)}{e(0,\eta,0)}\biggl[\exp\int_0^\eta\frac{g(0,\eta_1,0)}{e(0,\eta_1,0)}d\eta_1\biggr]d\eta\biggr\}\times\\ \times\exp\int_y^0\frac{g(0,\eta,0)}{e(0,\eta,0)}d\eta.\end{aligned}\tag{4.27}$$

Таким образом, φ_1 определяется на $\overline{X}$ с точностью до одной произвольной функции $\nu(z)$.

4) $b(0,y,z) \equiv e(0,y,z) \equiv 0,\ f(0,y,z) \neq 0$. Этот случай совершенно аналогичен предыдущему. Мы его выделяем лишь потому, что это требуется далее при рассмотрении граничных задач. $\varphi_1(y,z)$ определяется с точностью до одной произвольной функции $\lambda(y)$, при этом роль (4.27) играет

$$\nu(z) = \left\{\lambda(0) + \int_0^z \frac{A(0,\zeta)}{f(0,0,\zeta)}\left[\exp\int_0^\zeta \frac{g(0,0,\zeta_1)}{f(0,0,\zeta_1)}d\zeta_1\right]d\zeta\right\} \times \\ \times \exp\int_z^0 \frac{g(0,0,\zeta)}{f(0,0,\zeta)}d\zeta. \quad (4.28)$$

Функции ψ_{1yz}, c, d, f, $g \in C^{(1,0)}(\overline{X})$ при $x=0$.

5) $b(0,y,z) \equiv e(0,y,z) \equiv f(0,y,z) \equiv 0,\ g(0,y,z) \neq 0$. Тогда из (4.23) сразу имеем однозначно определяемую функцию $\varphi_1(y,z) = A(y,z)/g(0,y,z)$, при этом следует требовать, чтобы для $x=0$ было ψ_{1yz}, a, c, d, $g \in C^{(1,1)}(\overline{X})$.

Перейдем теперь к ситуации на Y. Роль (4.23) играет

$$c(x,0,z)\varphi_{2xz} + d(x,0,z)\varphi_{2x} + f(x,0,z)\varphi_{2z} + g(x,0,z)\varphi_2 = B(x,z), \quad (4.29)$$

$$B(x,z) = -\psi_{2xz}(x,z) - a(x,0,z)\psi_{2x}(x,z) - \\ - b(x,0,z)\psi_{2z}(x,z) - e(x,0,z)\psi_2(x,z). \quad (4.30)$$

Варианты 1) – 5) здесь следующие.

1) $c(x,0,z) \neq 0$. $\varphi_2(x,z)$, зависящая от произвольных функций $\mu(x)$, $\nu(z)$, определяется в терминах функции Римана уравнения (4.29).

2) Пусть при $y=0$ $c \neq 0$,

$$\frac{d}{c} = p(z) + \sigma x, \quad \frac{f}{c} = q(x) + \sigma z, \quad \frac{g}{c} - \frac{df}{c^2} - \sigma = m(x)n(z),$$

где σ — постоянная, или имеет место хоть одно из тождеств

$$d_x c - dc_x + df - cg \equiv 0, \quad f_z c - fc_z + df - cg \equiv 0.$$

Тогда $\varphi_2(x,z)$ записывается через произвольные $\mu(x)$, $\nu(z)$ в явном виде.

3) $c(x,0,z) \equiv d(x,0,z) \equiv 0$, $f(x,0,z) \neq 0$. Если при $y=0$ функции ψ_{2xz}, b, e, f, $g \in C^{(1,0)}(\overline{Y})$, то $\varphi_2(x,z)$ явно определяется через произвольную $\mu(x)$, а

$$\nu(z) = \left\{ \mu(0) + \int_0^z \frac{B(0,\zeta)}{f(0,0,\zeta)} \left[\exp \int_0^\zeta \frac{g(0,0,\zeta_1)}{f(0,0,\zeta_1)} d\zeta_1 \right] d\zeta \right\} \times \\ \times \exp \int_z^0 \frac{g(0,0,\zeta)}{f(0,0,\zeta)} d\zeta. \quad (4.31)$$

4) $c(x,0,z) \equiv f(x,0,z) \equiv 0$, $d(x,0,z) \neq 0$ и ψ_{2xz}, a, d, e, $g \in C^{(0,1)}(\overline{Y})$ при $y=0$. $\varphi_2(x,z)$ явно записывается через произвольную $\nu(z)$, а роль (4.31) играет

$$\mu(x) = \left\{ \nu(0) + \int_0^x \frac{B(\xi,0)}{d(\xi,0,0)} \left[\exp \int_0^\xi \frac{g(\xi_1,0,0)}{d(\xi_1,0,0)} d\xi_1 \right] d\xi \right\} \times \\ \times \exp \int_x^0 \frac{g(\xi,0,0)}{d(\xi,0,0)} d\xi. \quad (4.32)$$

5) Для $y=0$ имеют место условия $c \equiv d \equiv f \equiv 0$, $g \neq 0$, ψ_{2xz}, a, b, e, $g \in C^{(1,1)}(\overline{Y})$. Имеем единственную $\varphi_2(x,z) = B(x,z)/g(x,0,z)$.

Наконец, на Z уравнение для φ_3 есть

$$a(x,y,0)\varphi_{3xy} + d(x,y,0)\varphi_{3x} + e(x,y,0)\varphi_{3y} + g(x,y,0)\varphi_3 = C(x,y), \quad (4.33)$$

$$C(x,y) = -\psi_{3xy}(x,y) - b(x,y,0)\psi_{3x}(x,y) - \\ - c(x,y,0)\psi_{3y}(x,y) - f(x,y,0)\psi_3(x,y),$$

со следующими вариантами разрешимости.

1) $a(x,y,0) \neq 0$. $\varphi_3(x,y)$, записывается в терминах функции Римана уравнения (4.33) через произвольные $\mu(x)$, $\lambda(y)$.

2) Пусть при $z=0$ $a \neq 0$,

$$\frac{d}{a} = p(y) + \sigma x, \quad \frac{e}{a} = q(x) + \sigma y,$$
$$\frac{g}{a} - \frac{de}{a^2} - \sigma = m(x)n(y), \quad \sigma = const,$$

или выполняется хоть одно из тождеств

$$d_x a - d a_x + de - ag \equiv 0, \quad e_y a - e a_y + de - ag \equiv 0.$$

Тогда $\varphi_3(x,y)$ определяется через произвольные $\mu(x)$, $\lambda(y)$ в явном виде.

3) При $z=0$ $a\equiv d\equiv 0$, $e\neq 0$, ψ_{3xy}, b, e, f, $g\in C^{(1,0)}(\overline{Z})$. $\varphi_3(x,y)$ записывается явно через произвольную $\mu(x)$, и

$$\lambda(y)=\left\{\mu(0)+\int_0^y \frac{C(0,\eta)}{e(0,\eta,0)}\left[\exp\int_0^\eta \frac{g(0,\eta_1,0)}{e(0,\eta_1,0)}d\eta_1\right]d\eta\right\}\times \\ \times\exp\int_y^0 \frac{g(0,\eta,0)}{e(0,\eta,0)}d\eta. \quad (4.34)$$

4) При $z=0$ $a\equiv e\equiv 0$, $d\neq 0$, ψ_{3xy}, c, d, f, $g\in C^{(0,1)}(\overline{Z})$. $\varphi_3(x,y)$ явно выражается через произвольную $\lambda(y)$, и

$$\mu(x)=\left\{\lambda(0)+\int_0^x \frac{C(\xi,0)}{d(\xi,0,0)}\left[\exp\int_0^\xi \frac{g(\xi_1,0,0)}{d(\xi_1,0,0)}d\xi_1\right]d\xi\right\}\times \\ \times\exp\int_x^0 \frac{g(\xi,0,0)}{d(\xi,0,0)}d\xi. \quad (4.35)$$

5) Для $z=0$ $a\equiv d\equiv e\equiv 0$, $g\neq 0$, ψ_{3xy}, b, c, f, $g\in C^{(1,1)}(\overline{Z})$. Полностью известна $\varphi_3(x,y)=C(x,y)/g(x,y,0)$.

2.2. Условия и характер разрешимости задач. Обратимся теперь к задачам ГГN, ГNN, NNN с целью выяснить возможность и характер их редукции к задаче Гурса для (4.16). При рассмотрении задач используются варианты 1) – 5). Упоминание соответствующего случая означает выполнение всех содержащихся в нем требований: тождества, неравенства, утверждения, формулы типа (4.27), (4.28), (4.31), (4.32), (4.34), (4.35), условия гладкости.

1. Задача ГГN. Известны $\varphi_1,\varphi_2,\psi_3$. Перебирая все варианты на Z, убеждаемся, что справедливы следующие выводы. Решение задачи ГГN во всех вариантах 1) – 5) при выполнении условия согласования $\varphi_1(0,z)=\varphi_2(0,z)$ определяется однозначно. В первом варианте решение записывается в терминах функции Римана, в остальных — в явном виде. В условиях 3) и 4) возникает по одному дополнительному условию согласования, вытекающему из (4.34) и (4.35). В случае 5) к согласованию на $(0,z_1)$ добавятся еще два:

$$\varphi_2(x,0)=C(x,0)/g(x,0,0),\quad \varphi_1(0,y)=C(0,y)/g(0,y,0).$$

2. Задача ГNN. Заданы φ_1,ψ_2,ψ_3. Здесь требуется комбинировать варианты 1) – 5) на Y и Z. Всего их тринадцать: 11, 12, 13, 14,

15, 22, 23, 24, 25, 33, 35, 44, 55 (пишем номера вариантов подряд без скобок и отбрасываем комбинации, получающиеся переменой ролей соответствующих случаев на Y, Z). Отметим особо, что варианты 34, 45 неосуществимы (возникает противоречие с непрерывностью коэффициентов; например, в случае 34 $d \neq 0$ при $z = 0$ и $d \equiv 0$ при $y = 0$). Каждый из реализуемых вариантов 11, ... , 55 характеризуют наличие произвольных функций и условий согласования при редукции к задаче Гурса. Выпишем эти особенности, характеризующие случаи 11, ... , 55, в виде таблицы.

Комбинации	Произвольные функции	Условия согласования
11	$\mu(x)$	отсутствуют
12	$\mu(x)$	отсутствуют
13	$\mu(x)$	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$
14	однозначная редукция	отсутствуют
15	однозначная редукция	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$
22	$\mu(x)$	отсутствуют
23	$\mu(x)$	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$
24	однозначная редукция	отсутствуют
25	однозначная редукция	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$
33	$\mu(x)$	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$ $\varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z)$
35	однозначная редукция	$\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$ $\varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z)$
44	однозначная редукция	$\varphi_2(x,0) = \varphi_3(x,0)$
55	однозначная редукция	$\varphi_2(x,0) = \varphi_3(x,0)$ $\varphi_1(y,0) = \varphi_3(0,y)$ $\varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z)$

Приходим к следующим выводам. Если в комбинации участвует “1”, то редукция к задаче Гурса осуществляется в терминах функций Римана, если не участвует — в явной форме.

3. Задача NNN. По известным ψ_1, ψ_2, ψ_3 нужно найти φ_1, φ_2,

φ_3. Имеем 35 комбинаций: 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, ... , 555. Из них может быть реализовано 22 комбинации: 111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 135, 144, 155, 222, 223, 224, 225, 233, 235, 244, 245, 255, 444, 555. Остальные 13 комбинаций неосуществимы.

Снова, как и в случае задачи ΓNN, путем перебора всех комбинаций получаем таблицу, характеризующую каждый из 22 осуществимых вариантов 111, 112, ... , 555.

Комбинации	Произвольные функции	Условия согласования
111	$\mu(x)$, $\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
112	$\mu(x)$, $\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
113	$\mu(x)$, $\nu(z)$	отсутствуют
114	$\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
115	$\nu(z)$	отсутствуют
122	$\mu(x)$, $\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
123	$\mu(x)$, $\nu(z)$	отсутствуют
124	$\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
125	$\nu(z)$	отсутствуют
133	$\mu(x)$	отсутствуют
135	однозначная редукция	отсутствуют
144	$\lambda(y)$, $\nu(z)$	$\varphi_2(x,0)=\varphi_3(x,0)$
155	однозначная редукция	$\varphi_2(x,0)=\varphi_3(x,0)$
222	$\mu(x)$, $\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
223	$\mu(x)$, $\nu(z)$	отсутствуют
224	$\lambda(y)$, $\nu(z)$	отсутствуют
225	$\nu(z)$	отсутствуют
233	$\mu(x)$,	отсутствуют
235	однозначная редукция	отсутствуют
244	$\lambda(y)$, $\nu(z)$	$\varphi_2(x,0)=\varphi_3(x,0)$
255	однозначная редукция	$\varphi_2(x,0)=\varphi_3(x,0)$

Комбинации	Произвольные функции	Условия согласования
555	однозначная редукция	$\varphi_2(x,0)=\varphi_3(x,0)$ $\varphi_1(y,0)=\varphi_3(0,y)$ $\varphi_1(0,z)=\varphi_2(0,z)$

Очевидно, и здесь участие "1" приводит к редукции в терминах функций Римана, а отсутствие "1" — к явной редукции. Характер определения φ_k колеблется от однозначного до наличия в них трех произвольных функций (с дополнительными условиями в начале координат, либо без них). При этом на ребрах D, исходящих из начала координат, может потребоваться до трех условий согласования.

В заключение отметим, что несимметричность таблиц по отношению к λ, μ, ν объясняется тем, что были отброшены комбинации, получаемые из перечисленных перестановкой чисел в соответствующих тройках.

§ 5. Распространение результатов на случай любого конечного числа измерений

1. Четырехмерное пространство

Рассмотрим теперь характеристические задачи с нормальными производными первого порядка для уравнения четвертого порядка

$$u_{xyzt}+au_{xyz}+bu_{xyt}+cu_{xzt}+du_{yzt}+eu_{xy}+fu_{xz}+gu_{xt}+ \\ +hu_{yz}+ku_{yt}+su_{zt}+mu_x+nu_y+pu_z+qu_t+ru=0, \quad (5.1)$$

которое мы будем рассматривать в области $D=\{0<x<x_1, 0<y<y_1, 0<z<z_1, 0<t<t_1\}$. Рассуждения в этом параграфе излагаются аналогично тому, как это делалось в § 4. Здесь рассматриваются задачи, получающиеся из задачи Гурса заменой хотя бы одного из граничных значений u значением ее нормальной производной из на-

бора

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y,z,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z,t),\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z),
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

где X, Y, Z, T — грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ соответственно.

Снова условия типа Гурса обозначим через Γ, а типа (5.2) — через N, причем носители этих условий всегда будем брать в последовательности X, Y, Z, T. Если не считать варианты задач, получающихся переменой ролей носителей, то, очевидно, получим четыре задачи, которые естественно обозначить $\Gamma\Gamma\Gamma N$, $\Gamma\Gamma NN$, ΓNNN, $NNNN$. Как и в § 4, считаем, что искомая функция непрерывно продолжима на $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z} \cup \overline{T}$, а участвующие в граничных условиях производные первого порядка непрерывно продолжимыми на ту часть границы D, на которой задано граничное значение этой производной. Дадим формулировки этих задач.

Задача $\Gamma\Gamma\Gamma N$: *найти решение уравнения* (5.1), *удовлетворяющее условиям*

$$
\begin{aligned}
&u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t),\\
&u\big|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Задача $\Gamma\Gamma NN$: *найти решение уравнения* (5.1), *удовлетворяющее условиям*

$$
\begin{aligned}
&u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t),\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Задача ΓNNN: *найти решение уравнения* (5.1), *удовлетворяющее условиям*

$$
\begin{aligned}
&u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z,t),\\
&\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Задача $NNNN$. *Найти решение уравнения* (5.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\overline{X}} = \psi_1(y,z,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\overline{Y}} = \psi_2(x,z,t),$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\overline{Z}} = \psi_3(x,y,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\overline{T}} = \psi_4(x,y,z).$$

В процессе исследования мы будем редуцировать эти задачи к задаче Гурса.

Условия Гурса имеют вид

$$u\big|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t),\ u\big|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t),\ u\big|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y,t),\ u\big|_{\overline{T}} = \varphi_4(x,y,z). \tag{5.3}$$

Решение задачи Гурса отыскивается в классе $C^{(1,1,1,1)}(D)\cap C(\overline{D})$, при этом коэффициенты (5.1) должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{array}{lll}
a \in C^{(1,1,1,0)}(\overline{D}), & b \in C^{(1,1,0,1)}(\overline{D}), & c \in C^{(1,0,1,1)}(\overline{D}), \\
d \in C^{(0,1,1,1)}(\overline{D}), & e \in C^{(1,1,0,0)}(\overline{D}), & f \in C^{(1,0,1,0)}(\overline{D}), \\
g \in C^{(1,0,0,1)}(\overline{D}), & h \in C^{(0,1,1,0)}(\overline{D}), & k \in C^{(0,1,0,1)}(\overline{D}), \\
s \in C^{(0,0,1,1)}(\overline{D}), & m \in C^{(1,0,0,0)}(\overline{D}), & n \in C^{(0,1,0,0)}(\overline{D}), \\
p \in C^{(0,0,1,0)}(\overline{D}), & q \in C^{(0,0,0,1)}(\overline{D}), & r \in C^{(0,0,0,0)}(\overline{D}).
\end{array} \tag{5.4}$$

Кроме того, требуем, чтобы выполнялись условия гладкости

$$\varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \varphi_4 \in C^{(1,1,1)}(\overline{T}), \tag{5.5}$$

и условия согласования

$$\begin{array}{c}
\varphi_1(0,z,t) = \varphi_2(0,z,t) = \lambda_{12}(z,t), \\
\varphi_1(y,0,t) = \varphi_3(0,y,t) = \lambda_{13}(y,t), \\
\varphi_1(y,z,0) = \varphi_4(0,y,z) = \lambda_{14}(y,z), \\
\varphi_2(x,0,t) = \varphi_3(x,0,t) = \lambda_{23}(x,t), \\
\varphi_2(x,z,0) = \varphi_4(x,0,z) = \lambda_{24}(x,z), \\
\varphi_3(x,y,0) = \varphi_4(x,y,0) = \lambda_{34}(x,y).
\end{array} \tag{5.6}$$

При постановке задач ГГГN, ГГNN, ГNNN, $NNNN$ считаем, что выполняются условия гладкости (5.4), (5.5). Помимо этого ψ_k должны удовлетворять условиям

$$\psi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \psi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi_4 \in C^{(1,1,1)}(\overline{T}).$$

1. Выведем интегральное уравнение, связывающее φ_k и ψ_k. Рассмотрим грань X. Проинтегрировав (5.1) по второму, третьему и четвертому аргументам в пределах (ε_2, y), (ε_3, z), (ε_4, t), $\varepsilon_i > 0$, и перейдя затем к пределу при $\varepsilon_2 \to 0$, $\varepsilon_3 \to 0$, $\varepsilon_4 \to 0$ с учетом (5.2), (5.3), получим

$$d(0,y,z,t)\varphi_1(y,z,t) + \int_0^y [s - d_\beta](0,\beta,z,t)\varphi_1(\beta,z,t)d\beta+$$

$$+\int_0^z [k - d_\gamma](0,y,\gamma,t)\varphi_1(y,\gamma,t)d\gamma + \int_0^t [h - d_\delta](0,y,z,\delta)\varphi_1(y,z,\delta)d\delta+$$

$$+\int_0^y\int_0^z [q - k_\beta - h_\gamma + d_{\beta\gamma}](0,\beta,\gamma,t)\varphi_1(\beta,\gamma,t)d\gamma d\beta+$$

$$+\int_0^y\int_0^t [p - h_\beta - s_\delta + d_{\beta\delta}](0,\beta,z,\delta)\varphi_1(\beta,z,\delta)d\delta d\beta+$$

$$+\int_0^z\int_0^t [n - h_\gamma - k_\delta + d_{\gamma\delta}](0,y,\gamma,\delta)\varphi_1(y,\gamma,\delta)d\delta d\gamma+$$

$$+\int_0^y\int_0^z\int_0^t [r - n_\beta - p_\gamma - q_\delta + h_{\beta\gamma} + k_{\beta\delta}+$$

$$+s_{\gamma\delta} - d_{\beta\gamma\delta}](0,\beta,\gamma,\delta)\varphi_1(\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta = \Omega_1(y,z,t), \tag{5.7}$$

$$\Omega_1(y,z,t) = d(0,0,z,t)\lambda_{12}(z,t) + d(0,y,0,t)\lambda_{13}(y,t)+$$

$$+d(0,y,z,0)\lambda_{14}(y,z) + d(0,0,0,t)\lambda_{12}(0,t)-$$

$$-d(0,0,z,0)\lambda_{12}(z,0) - d(0,y,0,0)\lambda_{13}(y,0) + d(0,0,0,0)\omega+$$

$$+\int_0^y [(s(0,\beta,z,0) - d_\beta(0,\beta,z,0))\lambda_{14}(\beta,z) + (s(0,\beta,0,t)-$$

$$-d_\beta(0,\beta,0,t))\lambda_{13}(\beta,t) - (s(0,\beta,0,0) - d_\beta(0,\beta,0,0))\lambda_{13}(\beta,0)]d\beta+$$

$$+\int_0^z [(k(0,y,\gamma,0) - d_\gamma(0,y,\gamma,0))\lambda_{14}(y,\gamma) + (k(0,0,\gamma,t)-$$

$$-d_\gamma(0,0,\gamma,t))\lambda_{12}(\gamma,t) - (k(0,0,\gamma,0) - d_\gamma(0,0,\gamma,0))\lambda_{12}(\gamma,0)]d\gamma+$$

$$+\int_0^t [(h(0,y,0,\delta) - d_\delta(0,y,0,\delta))\lambda_{13}(y,\delta) + (h(0,0,z,\delta)-$$

$$-d_\delta(0,0,z,\delta))\lambda_{12}(z,\delta) - (h(0,0,0,\delta) - d_\delta(0,0,0,\delta))\lambda_{12}(0,\delta)]d\delta+$$

$$+\int_0^y\int_0^z [q(0,\beta,\gamma,0) - k_\beta(0,\beta,\gamma,0) - s_\gamma(0,\beta,\gamma,0)+$$

$$+d_{\beta\gamma}(0,\beta,\gamma,0)]\lambda_{14}(\beta,\gamma)d\gamma d\beta+\int_0^y\int_0^t[p(0,\beta,0,\delta)-h_\beta(0,\beta,0,\delta)-$$
$$-s_\delta(0,\beta,0,\delta)+d_{\beta\delta}(0,\beta,0,\delta)]\lambda_{13}(\beta,\delta)d\delta d\beta+\int_0^z\int_0^t[n(0,0,\gamma,\delta)-$$
$$-h_\gamma(0,0,\gamma,\delta)-k_\delta(0,0,\gamma,\delta)+d_{\gamma\delta}(0,0,\gamma,\delta)]\lambda_{12}(\gamma\delta)d\delta d\gamma-$$
$$-\psi_1(y,z,t)+\psi_1(0,z,t)+\psi_1(y,0,t)+\psi_1(y,z,0)-\psi_1(0,0,t)-$$
$$-\psi_1(0,z,0)-\psi_1(y,0,0)+\psi_1(0,0,0)-\int_0^y[c(0,\beta,z,t)\psi_1(\beta,z,t)-$$
$$-c(0,\beta,0,t)\psi_1(\beta,0,t)-c(0,\beta,z,0)\psi_1(\beta,z,0)+c(0,\beta,0,0)\psi_1(\beta,0,0)]d\beta-$$
$$-\int_0^z[b(0,y,\gamma,t)\psi_1(y,\gamma,t)-b(0,0,\gamma,t)\psi_1(0,\gamma,t)-b(0,y,\gamma,0)\psi_1(y,\gamma,0)+$$
$$+b(0,0,\gamma,0)\psi_1(0,\gamma,0)]d\gamma-\int_0^t[a(0,y,z,\delta)\psi_1(y,z,\delta)-$$
$$-a(0,0,z,\delta)\psi_1(0,z,\delta)-a(0,y,0,\delta)\psi_1(y,0,\delta)+a(0,0,0,\delta)\psi_1(0,0,\delta)]d\delta-$$
$$-\int_0^y\int_0^z[(g(0,\beta,\gamma,t)-b_\beta(0,\beta,\gamma,t)-c_\gamma(0,\beta,\gamma,t))\psi_1(\beta,\gamma,t)-$$
$$-(g(0,\beta,\gamma,0)-b_\beta(0,\beta,\gamma,0)-c_\gamma(0,\beta,\gamma,0))\psi_1(\beta,\gamma,0)]d\gamma d\beta-$$
$$-\int_0^y\int_0^t[(f(0,\beta,z,\delta)-a_\beta(0,\beta,z,\delta)-c_\delta(0,\beta,z,\delta))\psi_1(\beta,z,\delta)-$$
$$-(f(0,\beta,0,\delta)-a_\beta(0,\beta,0,\delta)-c_\delta(0,\beta,0,\delta))\psi_1(\beta,0,\delta)]d\delta d\beta-$$
$$-\int_0^z\int_0^t[(e(0,y,\gamma,\delta)-a_\gamma(0,y,\gamma,\delta)-b_\delta(0,y,\gamma,\delta))\psi_1(y,\gamma,\delta)-$$
$$-(e(0,0,\gamma,\delta)-a_\gamma(0,0,\gamma,\delta)-b_\delta(0,0,\gamma,\delta))\psi_1(0,\gamma,\delta)]d\delta d\gamma-$$
$$-\int_0^y\int_0^z\int_0^t[m(0,\beta,\gamma,\delta)-e_\beta(0,\beta,\gamma,\delta)-f_\gamma(0,\beta,\gamma,\delta)-g_\delta(0,\beta,\gamma,\delta)+$$
$$+a_{\beta\gamma}(0,\beta,\gamma,\delta)+b_{\beta\delta}(0,\beta,\gamma,\delta)+c_{\gamma\delta}(0,\beta,\gamma,\delta)]\psi_1(0,\beta,\gamma,\delta)d\delta d\gamma d\beta.$$

Здесь $\omega=\lambda_{ij}(0,0,0)$ — одна и та же постоянная для любого набора i,j.

Далее мы не будем рассматривать интегральное уравнение, а воспользовавшись тем, что предположения относительно гладкости коэффициентов уравнения (5.1) и условие $\psi_1\in C^{(1,1,1)}(\overline{X})$ позволяют продифференцировать (5.7), перейдем к дифференциальному уравнению

$$d\varphi_{1yzt}+h\varphi_{1yz}+k\varphi_{1yt}+s\varphi_{1zt}+n\varphi_{1y}+p\varphi_{1z}+q\varphi_{1t}+r\varphi_1=B_1, \quad (5.8)$$

$$B_1 = -\psi_{1yzt} - a\psi_{1yz} - b\psi_{1yt} - c\psi_{1zt} - e\psi_{1y} - f\psi_{1z} - g\psi_{1t} - m\psi_1,$$

коэффициенты в (5.8) и в записи B_1 зависят от $(0, y, z, t)$.

Уравнение (5.8) вместе с условиями

$$\varphi_1(0, z, t) = \lambda_{12}(z, t), \quad \varphi_1(y, 0, t) = \lambda_{13}(y, t), \quad \varphi_1(y, z, 0) = \lambda_{14}(y, z), \tag{5.9}$$

представляет собой трехмерную задачу Гурса. Выпишем ряд вариантов ее разрешимости.

1) Пусть $d \neq 0$ в $\overline{X}$. Тогда решение (5.8) можно, следуя п. 3 § 2, записать в терминах функции Римана.

Заметим, что о построении функции Римана в трехмерном пространстве в явном виде говорится в п. 5 § 2. Остановимся лишь на одном таком случае.

Пусть выполняются условия

$$\frac{h}{d} = \mu(t) + \rho yz, \quad \frac{k}{d} = \nu(z) + \rho yt,$$
$$\frac{s}{d} = \eta(y) + \rho zt, \quad \rho = const,$$

и

$$h_y d - h d_y + hs - pd \equiv 0, \qquad h_z d - h d_z + hk - nd \equiv 0,$$
$$k_y d - k d_y + ks - qd \equiv 0, \quad n_y d - n d_y + sn - rd = d^2\theta_1(y)\theta_2(z)\theta_3(t).$$

Тогда функция Римана $R(y, z, t, y_0, z_0, t_0)$ для (5.8) запишется в явном виде:

$$R(y, z, t, y_0, z_0, t_0) = \exp\left(\int_{y_0}^{y} \eta(\beta)d\beta + \int_{z_0}^{z} \nu(\gamma)d\gamma + \right.$$
$$\left. + \int_{t_0}^{t} \mu(\delta)d\delta + \rho(yzt - y_0z_0t_0)\right) {}_0F_2(1, 1; \sigma),$$

$$\sigma = -\int_{y_0}^{y} \theta_1(\beta)d\beta \int_{z_0}^{z} \theta_2(\gamma)d\gamma \int_{t_0}^{t} \theta_3(\delta)d\delta.$$

Тем самым мы получаем по заданным λ_{1j}, $j = \overline{2, 4}$, функцию φ_1 в явном виде.

2) $d \equiv h \equiv k \equiv n \equiv 0$, $s \neq 0$. В этом случае единственное решение уравнения (5.8) можно записать в терминах функции Римана по формуле (1.20). Роль данных Гурса играют $\lambda_{13}(y, t)$ и $\lambda_{14}(y, z)$.

Пусть имеют место представления

$$
\begin{gathered}
\frac{p}{s} = \mu(y,t) + \sigma z, \quad \frac{q}{s} = \nu(y,z) + \sigma t, \\
\frac{r}{s} - \frac{pq}{s^2} - \sigma = \eta(y,z)\rho(y,t), \quad \sigma = \sigma(y),
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

или выполняется хоть одно из тождеств

$$
p_z s - p s_z + pq - sr \equiv 0, \quad q_t s - q s_t + pq - sr \equiv 0. \tag{5.11}
$$

Коэффициенты в (5.10), (5.11) зависят от $(0, y, z, t)$.

Тогда φ_1 записывается через $\lambda_{13}(y,t)$ и $\lambda_{14}(y,z)$ в явном виде (см. п. 3 § 1). В случае (5.10) это делается по формуле (1.20) с известной функцией Римана

$$
R(y,z,t,\zeta,\tau) = v(y,z,t,\zeta,\tau) J_0\biggl(2\Bigl[\int_\zeta^z \eta(y,\gamma)d\gamma \int_\tau^t \rho(y,\delta)d\delta\Bigr]^{\frac{1}{2}}\biggr),
$$

$$
v = \exp\biggl(\int_\zeta^z \nu(y,\gamma)d\gamma + \int_\tau^t \mu(y,\delta)d\delta + \sigma(y)(zt - \zeta\tau)\biggr),
$$

а при выполнении (5.11) двумерная задача Гурса для (5.8) будет решаться в квадратурах.

Случаи

3) $d \equiv h \equiv s \equiv p \equiv 0$, $k \neq 0$;

4) $d \equiv k \equiv s \equiv q \equiv 0$, $h \neq 0$;

аналогичны рассмотренному выше 2). При этом для 3) произвольными функциями являются $\lambda_{12}(z,t)$, $\lambda_{14}(y,z)$, а для 4) таковыми будут $\lambda_{12}(z,t)$, $\lambda_{13}(y,t)$. Очевидно, что ψ_{1yzt}, a, b, c, e, f, g, m должны принадлежать классу $C^{(1,0,0)}(\overline{X})$ в случае 2), классу $C^{(0,1,0)}(\overline{X})$ в случае 3), и, наконец, классу $C^{(0,0,1)}(\overline{X})$ в случае 4).

5) $d \equiv h \equiv k \equiv s \equiv n \equiv p \equiv 0$, $q \neq 0$. Уравнение (5.8) интегрируется непосредственно, причем для того, чтобы имело место первое из условий (5.5), следует потребовать, чтобы ψ_{1yzt}, a, b, c, e, f, g, m были из $C^{(1,1,0)}(\overline{X})$. Функция $\varphi_1(y,z,t)$ определяется через $\lambda_{14}(y,z)$, а λ_{12} и λ_{14} однозначно находятся, исходя из полученной φ_1.

Совершенно аналогичны 5) случаи 6) и 7).

6) $d \equiv h \equiv k \equiv s \equiv n \equiv q \equiv 0$, $p \neq 0$. Здесь ψ_{1yzt}, a, b, c, e, f, g, m из $C^{(1,0,1)}(\overline{X})$, $\varphi_1(y,z,t)$ определяется через $\lambda_{13}(y,t)$, а λ_{12} и λ_{14} известны.

7) $d \equiv h \equiv k \equiv s \equiv p \equiv q \equiv 0$, $n \neq 0$. Функции ψ_{1yzt}, a, b, c, e, f, g, m берутся из $C^{(0,1,1)}(\overline{X})$; φ_1 зависит от $\lambda_{12}(z,t)$, а λ_{13} и λ_{14} известны.

8) $d \equiv h \equiv k \equiv s \equiv n \equiv p \equiv q \equiv 0$, $r \neq 0$. В этом случае из (5.8) сразу получаем однозначно определяемую функцию $\varphi_1(y,z,t) = B_1(y,z,t)/r(0,y,z,t)$. При этом требуем, чтобы ψ_{1yzt}, a, b, c, e, f, g, m принадлежали классу $C^{(1,1,1)}(\overline{X})$.

Перейдем к описанию ситуации на Y. Роль (5.8) здесь играет

$$c\varphi_{2xzt} + f\varphi_{2xz} + g\varphi_{2xt} + s\varphi_{2zt} + m\varphi_{2x} + p\varphi_{2z} + q\varphi_{2t} + r\varphi_2 = B_2, \quad (5.12)$$

$$B_2 = -\psi_{2xzt} - a\psi_{2xz} - b\psi_{2xt} - d\psi_{2zt} - e\psi_{2x} - h\psi_{2z} - k\psi_{2t} - n\psi_2.$$

Для (5.12) имеют место аналоги записанных нами для (5.8) вариантов разрешимости 1) – 8). Мы ограничимся лишь тем, что выпишем в виде таблицы характеризующие каждый из этих вариантов условия равенства и неравенства нулю коэффициентов (5.12). Все остальные условия, налагаемые на (5.12) в каждом из этих случаев, могут быть записаны по аналогии с уже рассмотренным уравнением (5.8) и поэтому опускаются.

Условия, определяющие характер разрешимости уравнения (5.12)	Произвольные функции, от которых зависит $\varphi_2(x,z,t)$
1) $c \neq 0$	$\lambda_{12}(z,t)$, $\lambda_{23}(x,t)$, $\lambda_{24}(x,z)$
2) $c \equiv f \equiv g \equiv m \equiv 0$, $s \neq 0$	$\lambda_{23}(x,t)$, $\lambda_{24}(x,z)$
3) $c \equiv f \equiv s \equiv p \equiv 0$, $g \neq 0$	$\lambda_{12}(z,t)$, $\lambda_{24}(x,z)$
4) $c \equiv g \equiv s \equiv q \equiv 0$, $f \neq 0$	$\lambda_{12}(z,t)$, $\lambda_{23}(x,t)$
5) $c \equiv f \equiv g \equiv s \equiv m \equiv p \equiv 0$, $q \neq 0$	$\lambda_{24}(x,z)$
6) $c \equiv f \equiv g \equiv s \equiv m \equiv q \equiv 0$, $p \neq 0$	$\lambda_{23}(x,t)$
7) $c \equiv f \equiv g \equiv s \equiv p \equiv q \equiv 0$, $m \neq 0$	$\lambda_{12}(z,t)$
8) $c \equiv f \equiv g \equiv s \equiv m \equiv p \equiv q \equiv 0$, $r \neq 0$	φ_2 определяется однозначно

Для плоскостей Z и T изложение построим так же, как и для Y. Уравнение, связывающее на Z $\varphi_3(x,y,t)$ и $\psi_3(x,y,t)$ имеет вид

$$b\varphi_{3xyt} + e\varphi_{3xy} + g\varphi_{3xt} + k\varphi_{3yt} + m\varphi_{3x} + n\varphi_{3y} + q\varphi_{3t} + r\varphi_3 = B_3, \quad (5.13)$$

$$B_3 = -\psi_{3xyt} - a\psi_{3xy} - c\psi_{3xt} - d\psi_{3yt} - f\psi_{3x} - h\psi_{3y} - s\psi_{3t} - p\psi_3.$$

Таблица, описывающая условия разрешимости (5.13) выглядит следующим образом:

Условия, определяющие характер разрешимости уравнения (5.13)	Произвольные функции, от которых зависит $\varphi_3(x,y,t)$
1) $b \neq 0$	$\lambda_{13}(y,t)$, $\lambda_{23}(x,t)$, $\lambda_{34}(x,y)$
2) $b \equiv e \equiv g \equiv m \equiv 0$, $k \neq 0$	$\lambda_{23}(x,t)$, $\lambda_{34}(x,y)$
3) $b \equiv e \equiv k \equiv n \equiv 0$, $g \neq 0$	$\lambda_{13}(y,t)$, $\lambda_{34}(x,y)$
4) $b \equiv g \equiv k \equiv q \equiv 0$, $e \neq 0$	$\lambda_{13}(y,t)$, $\lambda_{23}(x,t)$
5) $b \equiv e \equiv g \equiv k \equiv m \equiv n \equiv 0$, $q \neq 0$	$\lambda_{34}(x,y)$
6) $b \equiv e \equiv g \equiv k \equiv m \equiv q \equiv 0$, $n \neq 0$	$\lambda_{23}(x,t)$
7) $b \equiv e \equiv g \equiv k \equiv n \equiv q \equiv 0$, $m \neq 0$	$\lambda_{13}(y,t)$
8) $b \equiv e \equiv g \equiv k \equiv m \equiv n \equiv q \equiv 0$, $r \neq 0$	φ_3 определяется однозначно

Наконец, запишем аналог (5.8) для плоскости T:

$$a\varphi_{4xyz} + e\varphi_{4xy} + f\varphi_{4xz} + h\varphi_{4yz} + m\varphi_{4x} + n\varphi_{4y} + p\varphi_{4z} + r\varphi_4 = B_4, \tag{5.14}$$

$$B_4 = -\psi_{4xyz} - b\psi_{4xy} - c\psi_{4xz} - d\psi_{4yz} - g\psi_{4x} - k\psi_{4y} - s\psi_{4z} - q\psi_4.$$

Соответствующая таблица, описывающая варианты разрешимости (5.14), такова:

Условия, определяющие характер разрешимости уравнения (5.14)	Произвольные функции, от которых зависит $\varphi_4(x,y,z)$
1) $a \neq 0$	$\lambda_{14}(y,z)$, $\lambda_{24}(x,z)$, $\lambda_{34}(x,y)$
2) $a \equiv e \equiv f \equiv m \equiv 0$, $h \neq 0$	$\lambda_{24}(x,z)$, $\lambda_{34}(x,y)$
3) $a \equiv e \equiv h \equiv n \equiv 0$, $f \neq 0$	$\lambda_{14}(y,z)$, $\lambda_{34}(x,y)$
4) $a \equiv f \equiv h \equiv p \equiv 0$, $e \neq 0$	$\lambda_{14}(y,z)$, $\lambda_{24}(x,z)$
5) $a \equiv e \equiv f \equiv h \equiv m \equiv n \equiv 0$, $p \neq 0$	$\lambda_{34}(x,y)$
6) $a \equiv e \equiv f \equiv h \equiv m \equiv p \equiv 0$, $n \neq 0$	$\lambda_{24}(x,z)$
7) $a \equiv e \equiv f \equiv h \equiv n \equiv p \equiv 0$, $m \neq 0$	$\lambda_{14}(y,z)$
8) $a \equiv e \equiv f \equiv h \equiv m \equiv n \equiv p \equiv 0$, $r \neq 0$	φ_4 определяется однозначно

2. Обратимся теперь к задачам с нормальными производными с целью указать характер их редукции к задаче Гурса для (5.1). В целях удобства дальнейшего изложения объединим условия разрешимости уравнений, связывающих значения φ_i и ψ_i из пункта 2.1 (их мы

обозначили 1) – 8)), в группы следующим образом: группа 1 — вариант 1); группа 2 — варианты 2) – 4); группа 3 — 5) – 7); группа 4 — 8). Упоминание соответствующей группы означает, что реализуется один из подслучаев, входящих в нее (со всеми содержащимися в нем требованиями).

При рассмотрении задач с нормальными производными возникают условия согласования на тех же двумерных многообразиях, что и у задачи Гурса. Если задача из числа описываемых ниже не редуцируется однозначно к задаче Гурса, то редукция осуществляется с участием произвольных функций из числа λ_{ij}, $i < j$.

Задача ГГГN. Известны φ_1, φ_2, φ_3, ψ_4. Перебирая все варианты условий 1) – 8) на T, убеждаемся, что решение задачи ГГГN при всех вариантах групп условий 1 – 4 определяется однозначно. При этом возникает в случае 1 — три условия согласования, в случае 2 — четыре, 3 — пять, 4 — шесть условий согласования.

Задача ГГNN. Заданы φ_1, φ_2, ψ_3, ψ_4. Будем комбинировать варианты на Z и T. Всего их 10: 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44 (пишем номера групп условий и отбрасываем комбинации, получающиеся переменой ролей случаев на Z и T). Число произвольных функций, задаваемых в процессе редукции к задаче Гурса, и число условий согласования дает таблица

Число произвольных функций	Комбинации вариантов (число условий согласования)
Однозначная редукция (произвольных функций нет)	12(1), 13(2), 14(3), 22(2), 23(3), 24(4), 33(4), 34(5), 44(6).
Одна	11(1), 12(2), 13(3), 22(3), 23(4), 33(5).

Видим, что одна и та же комбинация, например 12, может дать различные картины разрешимости задачи ГГNN. Это связано с наличием подслучаев внутри каждой группы 1 – 4.

Задача ГNNN. Задаются функции φ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Имеем 19 комбинаций групп условий, которые могут быть реализованы: 111, 112, 113, 114, 122, 123, 124, 133, 134, 144, 222, 223, 224, 233, 234, 244, 333, 334, 444. Картина разрешимости задачи ГNNN дается таблицей

Число произвольных функций	Комбинации вариантов (число условий согласования)
Однозначная редукция (произвольных функций нет)	123(0), 124(1), 133(1), 134(2), 144(3), 223(1), 224(2), 234(3), 244(4), 333(3), 334(4), 444(6).
Одна	113(0), 114(1), 122(0), 123(1) 124(2), 133(2), 224(3), 233(3).
Две	112(0), 113(1), 122(1), 123(2), 133(3), 222(2), 223(3), 233(4).
Три	111(0), 112(1), 122(2), 222(3).

Задача $NNNN$. Заданы ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Все реализуемые комбинации для этой задачи указаны в таблице

Число произвольных функций	Комбинации вариантов (число условий согласования)
Однозначная редукция (произвольных функций нет)	1234(0), 1244(1), 1334(1), 1444(3), 2234(1), 3334(3), 2244(2), 4444(6).
Одна	1134(0), 1144(1), 1224(0), 1233(0), 2233(1).
Две	1124(0), 1133(0), 1223(0), 1233(1), 1224(1).
Три	1114(0), 1123(0), 1133(1), 1222(0), 1223(1), 1333(3).
Четыре	1113(0), 1122(0), 1222(1), 2222(2).
Пять	1112(0), 1122(1).
Шесть	1111(0).

2. Размерность $n > 4$

В области $D = \{x_1^0 < x_1 < x_1^1, \dots, x_n^0 < x_n < x_n^1\}$ рассматривается уравнение

$$u_{x_1 x_2 \dots x_n} + L(u) = u_{x_1 x_2 \dots x_n} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{Q_n^k} a_{q_1 \dots q_k} u_{x_{q_{k+1}} \dots x_{q_n}} = 0, \qquad (5.15)$$

$$Q_n^k = \{(q_1, \dots, q_n) \mid \{q_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\} = \{p \mid 1 \leqslant p \leqslant n\},$$
$$q_1 < \dots < q_k, \ q_{k+1} < \dots < q_n\}.$$

Введем следующее обозначение. Символом $[\alpha]$ будем обозначать число компонент вектора $\alpha = (p_1, \dots, p_k)$, то есть $[\alpha] = k$.

В § 3 получено решение задачи Гурса в терминах функции Римана для (5.15) с условиями

$$u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (5.16)$$

заданными на гранях

$$\Pi_i = [x_1^0, x_1^1] \times \ldots \times [x_{i-1}^0, x_{i-1}^1] \times \{x_i^0\} \times [x_{i+1}^0, x_{i+1}^1] \times \times \ldots \times [x_n^0, x_n^1],$$
$$i = \overline{1, n}.$$

При этом коэффициенты удовлетворяют условиям гладкости

$$a_{q_1 \dots q_k} \in C^{\alpha}(D), \;\; \alpha = (p_1, \dots, p_n), \quad (5.17)$$

где $p_i = 0$, если $i \in \{q_j \mid j = \overline{1, k}\}$, $p_i = 1$, если $i \notin \{q_j \mid j = \overline{1, k}\}$, и выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} &\varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k^0, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ &\quad = \varphi_k(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), \quad j < k. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Общие значения функций из (5.18) далее обозначим $\lambda_{jk}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$.

Принадлежность решения задачи Гурса для (5.15) классу $C^{(1,1,\dots,1)}(D) \cap C(\overline{D})$ обеспечивается, если

$$\varphi_i \in C^{\beta}(\Pi_i), \quad [\beta] = n - 1, \quad \beta = (1, 1, \dots, 1), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.19)$$

Здесь мы будем исследовать характер разрешимости задач, получаемых заменой в (5.16) хотя бы одного значения функции u значением ее нормальной производной из набора

$$\begin{aligned} &u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ &\qquad = \psi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5.20) \end{aligned}$$

Иначе говоря, требуется найти решение уравнения (5.15), удовлетворяющее на характеристических многообразиях Π_i условиям

$$u\Big|_{x_i = x_i^0} = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{x_i = x_i^0} = \psi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = \overline{k+1, n}.$$

С точностью до перестановки порядка носителей краевых условий на Π_i получаем n различных вариантов подобных задач. Мы считаем искомую функцию непрерывно продолжимой на $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Pi_i$, а участвующие в граничных условиях производные первого порядка непрерывно продолжимыми на ту часть границы D, на которой задано граничное значение этой производной (то есть каждая из производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,k}$, непрерывно продолжима на соответствующую характеристику Π_i).

При этом ψ_i задаются на Π_i, удовлетворяют тем же условиям гладкости, что и φ_i в (5.19), решение ищется в классе $C^\omega(D)\cap C(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Pi_i\cup D)$, $\omega=(1,1,\dots,1)$, $[\omega]=n$.

Введем обозначения, сокращающие дальнейшее изложение. Нам понадобятся множества

$$A=\{(q_1,\dots,q_k)\mid k=\overline{0,n},\ 1\leqslant q_1<q_2<\ldots<q_k\leqslant n\},$$
$$A_\alpha=\{(q_1,\dots,q_k)\mid (q_1,\dots,q_k)\in A,\ k=\overline{0,n-[\alpha]},$$
$$q_i\neq p_j,\ i=\overline{1,k},\ j=\overline{1,[\alpha]}\},\quad \alpha=(p_1,\dots,p_{[\alpha]})\in A.$$

Все множества A_α содержат пустую строку (при $k=0$). Определим сумму мультииндексов $\alpha=(p_1,\dots,p_k)\in A$, $\beta=(q_1,\dots,q_l)\in A$. А именно, $\alpha+\beta=\gamma$, $\gamma=(r_1,\dots,r_m)\in A$, $m=k+l$, $r_i\in\{p_s\mid s=\overline{1,k}\}\cup\{q_t\mid t=\overline{1,l}\}$, $i=\overline{1,m}$. При этом должно выполняться условие $\{p_s\mid s=\overline{1,k}\}\cap\{q_t\mid t=\overline{1,l}\}=\varnothing$. Теперь определим операции, в записи которых участвует $\alpha=(p_1,\dots,p_k)$:

$$D^\alpha f(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial^k f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\dots\partial x_{p_k}},$$

$$I^\alpha f(x_1,\dots,x_n)=\int_{x^0_{p_1}}^{x_{p_1}}\int_{x^0_{p_2}}^{x_{p_2}}\dots\int_{x^0_{p_k}}^{x_{p_k}} f(x_1,\dots,x_{p_1-1},\xi_{p_1},x_{p_1+1}\dots,$$
$$x_{p_2-1},\xi_{p_2},x_{p_2+1},\dots,x_{p_k-1},\xi_{p_k},x_{p_k+1},\dots,x_n)d\xi_{p_k}\dots d\xi_{p_2}d\xi_{p_1}.$$

Вектор $X_\alpha=(y_1,\dots,y_{m-1},y_{m+1},\dots,y_n)$, $\alpha\in A_{(m)}$, определим так: $y_i=x_i^0$, если $i=p_t$; $y_i=x_i$, если $i\neq p_t$; $t=\overline{1,[\alpha]}$. Считая, что коэффициент $a_{q_1\dots q_k}$ в записи (5.15) определяется мультииндексом $(q_1,\dots,q_k)$, перепишем это уравнение в виде

$$\sum_{\alpha\in A}\sum_{\substack{\beta\in A_\alpha\\ [\alpha+\beta]=n}} a_\alpha D^\beta u=0,\quad a\equiv 1. \tag{5.21}$$

Далее мы не будем делать различий в записи индексов и мультииндексов там, где это не вызывает путаницы.

Выясним связь между φ_i и ψ_i. Проделаем это для Π_1. Проинтегрировав (5.21) по всем аргументам, кроме первого, в пределах $(x_i^0+\varepsilon_i, x_i)$, $\varepsilon_i > 0$, $i=\overline{2,n}$, перейдя затем к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим

$$I^{(2,\dots,n)}\sum_{\alpha\in A}\sum_{\substack{\beta\in A_\alpha,\\ [\alpha+\beta]=n}} a_\alpha D^\beta u =$$

$$=\sum_{\substack{\alpha\in A_{(1)},\,\beta\in A_{(1)+\alpha},\\ \gamma\in A_{(1)+\alpha+\beta}}}(-1)^{[\beta]+[\gamma]}I^{\alpha+\beta}\Big(D^\beta[a_{(1)+\alpha}(x_1^0,X_\gamma)]u(x_1^0,X_\gamma)\Big)+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\in A_{(1)},\,\beta\in A_{(1)+\alpha},\\ \gamma\in A_{(1)+\alpha+\beta}}}(-1)^{[\beta]+[\gamma]}I^{\alpha+\beta}\Big(D^\beta[a_{\alpha}(x_1^0,X_\gamma)]u_{x_1}(x_1^0,X_\gamma)\Big).$$

С учетом (5.16) и (5.20) можем записать

$$a_1\,|_{x_1=x_1^0}\,\varphi_1+\sum_{\alpha\in A_{(1)}}I^\alpha(b_\alpha\varphi_1)=\Omega_1(x_2,\dots,x_n), \tag{5.22}$$

$$b_\alpha=\sum_{\beta+\gamma=(1)+\alpha}(-1)^{[\gamma]}D^\gamma a_\beta\,|_{x_1=x_1^0},\ \alpha,\gamma\in A_{(1)},\ [\alpha]\neq 0,$$

$$\Omega_1(x_2,\dots,x_n)=\sum_{\substack{\alpha\in A_{(1)},\\ \beta\in A_{(1)+\alpha}}}(-1)^{[\beta]+[\gamma]+1}\times$$

$$\times I^{\alpha+\beta}\Bigg(\sum_{\gamma\in A_{(1)+\alpha+\beta}}D^\beta\Big[a_\alpha(x_1^0,X_\gamma)\Big]\psi_1(X_\gamma)\Bigg)+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha\in A_{(1)},\,[\alpha]<n-1,\\ \beta\in A_{(1)+\alpha}}}(-1)^{[\beta]+[\gamma]+1}\times$$

$$\times I^{\alpha+\beta}\Bigg(\sum_{\substack{\gamma\in A_{(1)+\alpha+\beta},\\ [\gamma]\neq 0}}D^\beta\Big[a_{(1)+\alpha}(x_1^0,X_\gamma)\Big]\varphi_1(X_\gamma)\Bigg).$$

В более подробной записи (5.22) имеет вид

$$(a_1u)(x_1^0,x_2,\dots,x_n)+\int_{x_2^0}^{x_2}(b_2u)(x_1^0,\xi_2,x_3,\dots,x_n)d\xi_2+$$

$$+\ldots+\int_{x_n^0}^{x_n}(b_n u)(x_1^0,x_2,\ldots,x_{n-1},\xi_n)d\xi_n+$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2}\int_{x_3^0}^{x_3}(b_{23}u)(x_1^0,\xi_2,\xi_3,x_4,\ldots,x_n)d\xi_3 d\xi_2+\ldots+$$

$$+\int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}}\int_{x_n^0}^{x_n}(b_{n-1\,n}u)(x_1^0,x_2,\ldots,x_{n-2},\xi_{n-1},\xi_n)d\xi_n d\xi_{n-1}+\ldots+$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2}\int_{x_3^0}^{x_3}\ldots\int_{x_n^0}^{x_n}(b_{23\ldots n}u)(x_1^0,\xi_2,\ldots,\xi_n)d\xi_n\ldots d\xi_3 d\xi_2=\Omega_1(x_2,\ldots,x_n).$$

Коэффициенты (5.22) выписываются следующим образом:

$$b_2=-a_{1x_2}+a_{12},\;\; b_3=-a_{1x_3}+a_{13},\;\;\ldots,\;\; b_n=-a_{1x_n}+a_{1n},$$

$$b_{23}=a_{1x_2x_3}-a_{12x_3}-a_{13x_2}+a_{123},\;\;\ldots,\;\; b_{n-1\,n}=a_{1x_{n-1}x_n}-$$

$$-a_{1\,n-1\,x_n}-a_{1nx_{n-1}}+a_{1n-1\,n},\;\;\ldots,\;\; b_{23\ldots n}=(-1)^{n-1}(a_{1x_2\ldots x_n}-$$

$$-a_{12x_3\ldots x_n}-a_{13x_2x_4\ldots x_n}-\ldots-a_{1nx_2\ldots x_{n-1}}+\ldots+(-1)^{n-1}a_{12\ldots n}).$$

Очевидно, (5.22) представляет собой интегральное уравнение для определения φ_1, если ψ_1 задана. Функции λ_{1i}, $i=\overline{2,n}$, не могут быть определены из (5.22), и, если нет возможности определить их из других соображений, рассматриваются как произвольные.

Отметим, что условия гладкости, налагаемые на ψ_1 и коэффициенты (5.15), позволяют рассматривать не интегральное уравнение (5.22), а получающееся из него последовательным дифференцированием по $x_2,\ldots,x_n$ дифференциальное уравнение. Вместе с условиями

$$\varphi_1\,|_{x_i=x_i^0}=\lambda_{1i},\quad i=\overline{2,n},$$

это дифференциальное уравнение дает задачу Гурса. Здесь мы будем все же рассматривать именно интегральные уравнения, непосредственно получающиеся из (5.22).

Выпишем ряд вариантов разрешимости уравнения (5.22).

1) $a_1\neq 0$ в Π_1. Тогда решение (5.22) зависит от $n-1$ произвольной функции λ_{1i}, $i=\overline{2,n}$.

2) $a_1\equiv 0$, $a_{1n}\neq 0$, $b_\alpha\equiv 0$ для всех $\alpha\in A_{(1,n)}$, $[\alpha]>0$, в Π_1. Эти условия равносильны следующим: $a_1\equiv 0$, $a_{1n}\neq 0$, $a_{(1)+\alpha}\equiv 0$ для всех $\alpha\in A_{(1,n)}$, $[\alpha]>0$. В этом случае получаем из (5.22) уравнение

$$a_{1n}\,|_{x_1=x_1^0}\,\varphi_1+\sum_{\alpha\in A_{(1,n)}}I^\alpha(b_{\alpha+(n)}\varphi_1)=\Omega_{1x_n}. \tag{5.23}$$

Исходя из записи Ω_1, видим, что (5.23) имеет решение, зависящее от $n-2$ произвольных функций λ_{1i}, $i=\overline{2,n-1}$.

Аналогичным образом рассматриваются еще $n-2$ случая, соответствующих условиям $a_1\equiv 0$, $a_{1i}\neq 0$, $a_{(1)+\alpha}\equiv 0$ для всех $\alpha\in A_{(1,i)}$, $[\alpha]>0$, $i=\overline{2,n-1}$, в Π_1. В каждом из этих случаев решение интегрального уравнения зависит от λ_{1j}, $j\in M\setminus\{i\}$.

3) Положим теперь $a_1\equiv 0$, $b_{n-1\,n}\neq 0$, $b_\alpha\equiv 0$ при $[\alpha]=1$, $b_\beta\equiv 0$ для всех $\beta\in A_{(1,n-1,n)}$, $[\beta]>1$, в Π_1. В терминах коэффициентов (5.15) это условие перепишется так: $a_{1n-1\,n}\neq 0$, $a_{(1)+\alpha}\equiv 0$ для всех $[\alpha]\leqslant 1$, $a_{(1)+\beta}\equiv 0$ для всех $\beta\in A_{(1,n-1,n)}$, $[\beta]>1$. Уравнение (5.22) тогда преобразуется к виду

$$a_{1n-1\,n}\,|_{x_1=x_1^0}\,\varphi_1+\sum_{\alpha\in A_{(1,n-1,n)}} I^\alpha(b_{\alpha+(n-1,n)}\varphi_1)=\Omega_{1x_nx_{n-1}}.$$

Теперь φ_1 зависит от $n-3$ произвольных функций λ_{1i}, $i=\overline{2,n-2}$. Аналогичных вышеизложенному случаев, соответствующих условиям $a_{1k_1k_2}\neq 0$, $(k_1,k_2)\in A_{(1)}$, $a_{(1)+\alpha}\equiv 0$, для всех $[\alpha]\leqslant 1$, $a_{(1)+\beta}\equiv 0$, при $\beta\in A_{(1,k_1,k_2)}$, $[\beta]>1$, заданным на Π_1, будет еще $C^2_{n-1}-1$. Соответствующее уравнение имеет вид

$$a_{1k_1k_2}\,|_{x_1=x_1^0}\,\varphi_1+\sum_{\alpha\in A_{(1,k_1,k_2)}} I^\alpha(b_{\alpha+(k_1,k_2)}\varphi_1)=\Omega_{1x_{k_2}x_{k_1}}.$$

Его решение зависит от λ_{1j}, $j\in M\setminus\{k_1,k_2\}$.

Продолжая рассуждения в соответствии с обозначенной выше схемой получения вариантов разрешимости (5.22), получим в пункте k), $3<k\leqslant n$, следующую картину. Зафиксируем $\gamma\in A_{(1)}$, $[\gamma]=k-1$. Тогда, если

$$a_{(1)+\gamma}\neq 0,\ a_{(1)+\alpha}\equiv 0,\quad \alpha\in A_{(1)},\ [\alpha]<k-1,$$

$$a_{(1)+\beta}\equiv 0,\ \beta\in A_{(1)+\gamma},\quad [\beta]\geq k-1,$$

то (5.22) приводится к виду

$$a_{(1)+\gamma}\,|_{x_1=x_1^0}\,\varphi_1+\sum_{\delta\in A_\gamma} I^\delta(b_{\delta+\gamma}\varphi_1)=D^\gamma\Omega_1. \tag{5.24}$$

Здесь имеет место зависимость φ_1 от $n-k$ произвольных функций, а именно, от $\lambda_{(1)+\varepsilon}$, $\varepsilon\in A_\gamma$, $[\varepsilon]=1$. Число различных вариантов (5.24) — C^{k-1}_{n-1}.

Отметим, что при $k = n$ получаем

$$a_{123\ldots n}\varphi_1 = \Omega_{1x_2x_3\ldots x_n}.$$

Это уравнение однозначно определяет φ_1.

Пункты 1) – n) объединяют в общей сложности 2^{n-1} различных уравнений для φ_1.

Совершенно аналогичным образом могут быть рассмотрены уравнения для определения φ_i на гранях Π_i, $i = \overline{2,n}$.

Возвращаясь к задачам с нормальными производными, видим, что они могут быть редуцированы к задаче Гурса. Например, решение задачи, получающейся заменой всех условий (5.16) на (5.20), может зависеть от всех произвольных функций λ_{jk}, $j < k$, $j = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{2,n}$, вместе с тем оно может вовсе не зависеть ни от одной из λ_{jk}. Число произвольных функций λ_{jk}, $j < k$, равно $C_n^{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Следовательно число произвольных функций ν, от которых зависит решение задачи (5.15), (5.20), удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Глава 3. Более сложные уравнения

В этой главе изучаются уравнения вида (2), но при этом оператор D, определяемый формулой (1), заменяется производной от него по одной или двум независимым переменным. Рассматриваются также полилинейные уравнения (подобные полигармоническим, поливолновым, поликалорическим) с итерациями операторов (1) или других, в определенном смысле близких к D по своим свойствам.

§ 6. Уравнения с кратным дифференцированием

Мы ограничимся здесь случаями лишь двух и трех независимых переменных. Следующий пункт посвящен наиболее простому представителю указанных уравнений.

1. Уравнение третьего порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = 0. \tag{6.1}$$

Частным его случаем является уравнение Аллера

$$u_t = (\alpha u_x + \beta u_{xt})_x,$$

встречающееся при моделировании процесса переноса почвенной влаги в зоне аэрации [52]. Уравнение (6.1) изучалось в работах Д. Колтона [101], У. Ранделла и М. Стечера [122], У. Ранделла [123] – [125], М.Х. Шханукова [91] – [93], А.П. Солдатова, М.Х. Шханукова [66], В.А. Водаховой [12] – [13], О.М. Джохадзе [18].

Остановимся сначала на **задаче Гурса:** *найти в прямоугольнике* $D = \{x_0 < x < x_1,\, y_0 < y < y_1\}$ *решение уравнения* (6.1), *удовлетворяющее условиям:*

$$
\begin{gathered}
u(x_0, y) = \varphi(y), \quad u_x(x_0, y) = \varphi_1(y), \\
y \in p = [y_0, y_1], \quad \varphi,\, \varphi_1 \in C^1(p), \\
u(x, y_0) = \psi(x), \quad x \in q = [x_0, x_1], \quad \psi \in C^2(q),
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

где φ, φ_1, ψ *— известные функции, удовлетворяющие в точке* (x_0, y_0) *условиям согласования*

$$
\varphi(y_0) = \psi(x_0), \quad \psi'(x_0) = \varphi_1(y_0). \tag{6.3}
$$

На коэффициенты уравнения (6.1) налагаются условия гладкости $a \in C^{(2,0)}(D)$, $b \in C^{(1,1)}(D)$, $c \in C^{(1,0)}(D)$, $d \in C^{(0,1)}(D)$, $e \in C^{(0,0)}(D)$, где класс $C^{(k,l)}$ определяется по аналогии с п. 1 § 2: существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s}$ $(r = 0, \dots, k;\ s = 0, \dots, l)$. Решение класса $C^{(2,1)}$ называется регулярным.

В перечисленных выше работах рассматривалась, в частности, и сформулированная задача. При построении решения там используется вариант метода Римана, в котором функция Римана $v(x, y, \xi, \eta)$ определяется [92] тоже как решение задачи Гурса:

$$
L^*(u) \equiv v_{xxy} - (av)_{xx} - (bv)_{xy} + (cv)_x + (dv)_y - ev = 0, \tag{6.4}
$$

$$
v\big|_{x=\xi} = 0, \quad v_x\big|_{x=\xi} = \exp\left(\int_\eta^y a(\xi, \beta)\, d\beta\right), \quad v\big|_{y=\eta} = \omega(x, \eta). \tag{6.5}
$$

В свою очередь $\omega(x, \eta)$ есть решение задачи Коши:

$$
\omega_{xx} - b(x, \eta)\omega_x + d(x, \eta)\omega = 0, \quad \omega(\xi, \eta) = 0, \quad \omega_x(\xi, \eta) = 1. \tag{6.6}
$$

Доказаны существование и единственность v. Вопрос о явном построении функции Римана не рассматривался.

Ниже предлагается другой вариант метода Римана [36], основанный на развитии идеи из §§ 1 – 3. А именно, функцией Римана будем называть решение интегрального уравнения

$$
\begin{aligned}
v(x, y) - \int_\eta^y a(x, \beta) v(x, \beta)\, d\beta - \int_\xi^x [b(\alpha, y) - (x - \alpha) d(\alpha, y)] v(\alpha, y)\, d\alpha + \\
+ \int_\xi^x \int_\eta^y [c(\alpha, \beta) - (x - \alpha) e(\alpha, \beta)] v(\alpha, \beta)\, d\beta d\alpha = 1.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Его решение существует и единственно (см. п. 1 § 1). Как функцию четырех переменных обозначим v через $R(x, y, \xi, \eta)$. Заметим, что v, определяемая из (6.4) – (6.6), отличается от v из (6.7). А именно, из (6.7) следует, что $R(x, y, x, y) = 1$, а из (6.4) – (6.6) — $R(x, y, x, y) = 0$ (см. предпоследнюю формулу (6.6)). В это же время $v(x, y)$ остается решением сопряженного к (6.1) уравнения (6.4).

Будем искать решение сформулированной задачи в классе $C^{(2,1)}(D) \cap C^{(1,0)}(D \cup p) \cap C^{(0,0)}(D \cup q)$. Для любой функции $u(x, y)$ из этого класса имеет место тождество:

$$\begin{aligned}(uR)_{xxy} \equiv RL(u) + [u(R_x - bR)]_{xy} + [u(R_y - aR)]_{xx} - \\ - \{u[R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR]\}_x - \\ - \{u[R_{xx} - (bR)_x + dR]\}_y + [u_y R_x + u(aR)_x]_x. \quad (6.8)\end{aligned}$$

Оно проверяется непосредственно. При этом используется, что R удовлетворяет уравнению (6.4).

Обозначим

$$\begin{gathered} M = R_x - bR, \qquad N = R_y - aR, \\ P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR, \quad Q = R_{xx} - (bR)_x + dR, \end{gathered} \quad (6.9)$$

где аргументами у a, b, c, d являются (x, y), а у R и ее производных — (x, y, ξ, η). Из (6.7) легко усматривается, что

$$M(x, y, x, y) \equiv N(x, y, x, \eta) \equiv P(x, y, x, \eta) \equiv Q(x, y, \xi, y) \equiv 0. \quad (6.10)$$

Поменяем в (6.8) ролями переменные x с ξ, y с η и вычислим от правой и левой части двойной интеграл в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$, считая при этом $u(x, y)$ решением уравнения (6.1). Учитывая формулу

$$\int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} d\eta d\xi = \omega(x, y) - \omega(x_0, y) - \omega(x, y_0) + \omega(x_0, y_0),$$

граничные условия (6.2) и соотношения (6.7), (6.10), находим

$$\begin{aligned}u_x(x, y) = R(x, y_0, x, y)\psi'(x) + R(x_0, y, x, y)\varphi_1(y) - M(x, y_0, x, y)\psi(x) - \\ - M(x_0, y, x, y)\varphi(y) + M(x_0, y_0, x, y)\psi(x_0) - R(x_0, y_0, x, y)\psi'(x) + \\ + \int_{y_0}^{y} [P(x_0, \beta, x, y)\varphi(\beta) - N(x_0, \beta, x, y)\varphi_1(\beta)] d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x} Q(\alpha, y_0, x, y)\psi(\alpha) d\alpha. \quad (6.11)\end{aligned}$$

Отсюда решение задачи (6.1) – (6.2) получается в виде

$$u(x,y)=\varphi(y)+\int_{x_0}^{x}h(\alpha,y)d\alpha, \tag{6.12}$$

где $h(x,y)$ есть правая часть (6.11).

Если бы мы рассматривали неоднородное уравнение $L(u) = f(x,y)$, то в правой части (6.12) добавилось бы слагаемое

$$u_0(x,y)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\int_{y_0}^{y}R(\alpha,\beta,\xi,y)f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha d\xi.$$

Очевидно, формулы (6.11) – (6.12) дают решение задачи (6.1) – (6.2) в квадратурах, если известен явный вид функции R. Приведем некоторые такие случаи, полученные путем непосредственного решения интегрального уравнения (6.7).

а) $a\equiv c\equiv e\equiv b+xd\equiv 0$, $d\neq 0$,

$$R=1-x\int_{\xi}^{x}d(\alpha,y)\left[\exp\int_{x}^{\alpha}\alpha_1 d(\alpha_1,y)d\alpha_1\right]d\alpha;$$

б) $a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv 0$, $e(x,y)=e(y)\neq 0$,

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\int_{\eta}^{y}e(\beta)d\beta\right]^{k}\frac{(x-\xi)^{2k}}{(2k)!};$$

в) $a\equiv b\equiv d\equiv 0$, $c(x,y)\equiv xe(x,y)\equiv m(x)n(y)$,

$$R=1-J_0\left(2\left[\int_{\xi}^{x}m(\alpha)d\alpha\int_{\eta}^{y}n(\beta)d\beta\right]^{\frac{1}{2}}\right)-$$
$$-\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}J_0\left(2\left[\int_{\alpha}^{x}m(\alpha_1)d\alpha_1\int_{\beta}^{y}n(\beta_1)d\beta_1\right]^{\frac{1}{2}}\right)m(\alpha)n(\beta)d\beta d\alpha;$$

г) $d\equiv e\equiv 0$, $a=a_1(y)+\lambda x$, $b=b_1(x)+\lambda y$, $c-ab-\lambda=m(x)n(y)$, $\lambda=const$,

$$R=J_0\left(2\left[\int_{\xi}^{x}m(\alpha)d\alpha\int_{\eta}^{y}n(\beta)d\beta\right]^{\frac{1}{2}}\right)\times$$
$$\times\exp\left(\int_{\xi}^{x}b_1(\alpha)d\alpha+\int_{\eta}^{y}a_1(\beta)d\beta+\lambda(xy-\xi\eta)\right).$$

При получении R в случаях в) – г) использованы результаты из п. 3 § 1.

Другой подход к выявлению случаев явного решения задачи Гурса может быть основан на расщеплениях оператора, стоящего в левой части уравнения (6.1).

Путем непосредственного вычисления нетрудно убедиться, что при условиях

$$\begin{gathered} b_x + ab - a^2 - a_x - d \equiv 0, \\ c_x + ac - a_{xx} - 3aa_x - a^3 - e \equiv 0 \end{gathered} \tag{6.13}$$

указанный оператор можно представить в форме

$$L(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + a\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 u\right),$$

где $a = a_1$, $b_1 = b - a$, $c_1 = c - a_x - a^2$. Поэтому задача (6.1) – (6.2) распадается на две последовательно решаемые задачи:

$$w_x + aw = 0, \qquad w(x_0, y) = \varphi_*(y), \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} \varphi_*(y) = \varphi_1'(y) + a(x_0, y)\varphi_1(y) + [b(x_0, y) - a(x_0, y)]\varphi'(y) + \\ + [c(x_0, y) - a_x(x_0, y) - a^2(x_0, y)]\varphi(y); \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} u_{xy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u = w, \\ u(x_0, y) = \varphi(y), \quad u(x, y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0). \end{gathered} \tag{6.15}$$

Задача (6.14) решается, очевидно, в квадратурах, а (6.15) есть случай, изученный в § 1 (о явном решении см. п. 3).

Аналогично при условиях

$$\begin{gathered} a_x + ab - a^2 - d \equiv 0, \\ a_{xy} + aa_x - a_y b - 2aa_y + ac - a^3 - e \equiv 0 \end{gathered}$$

рассматриваемая задача расщепляется на две:

$$\begin{gathered} w_{xy} + a_1 w_x + b_1 w_y + c_1 w = 0, \\ w(x_0, y) = \varphi_1(y) + a(x_0, y)\varphi(y), \quad w(x, y_0) = \psi'(x) + a(x, y_0)\psi(x), \end{gathered}$$

и

$$u_x + au = w, \qquad u(x_0, y) = \varphi(y).$$

Для отыскания вариантов эффективного решения снова следует использовать результаты п. 3 § 1.

Подобным же образом можно использовать расщепления вида

$$L(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + b\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} - (a_x + ab - c)u\right),$$

$$L(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial}{\partial x} - (b_y + ab - c)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + bu\right).$$

Первое имеет место при

$$d \equiv 0, \quad b(a_x + ab - c) - (a_x + ab - c)_x - e \equiv 0,$$

а второе — при

$$b_x - d \equiv 0, \quad d_y + ad - e - b(b_y + ab - c) \equiv 0.$$

Уделим еще некоторое внимание аналогам ситуаций главы 2, связанных с повышением порядка нормальных производных в граничных условиях. Речь идет о задачах, получающихся заменой в (6.1) – (6.2) по крайней мере одного граничного условия на его нормальную производную. Как и задача из § 4, они при определенных условиях могут быть редуцированы к задаче Гурса. Остановимся на одной из них.

Задача: *найти функцию* $u \in C^{(2,1)}(D) \cap C^{(1,0)}(D \cup p) \cap C^{(0,1)}(D \cup q)$, *являющуюся в* D *регулярным решением уравнения* (6.1), *удовлетворяющую первым двум соотношениям* (6.2) *и условию*

$$u_y(x, y_0) = \psi_0(x), \quad \psi_0 \in C^2(q).$$

Проинтегрируем (6.1) дважды по x в пределах от x_* до x ($(x_*, x) \in D$), затем в полученном соотношении устремим x_* к x_0, а y — к y_0. Учитывая граничные условия, получим интегральное уравнение

$$a(x, y_0)\psi(x) + \int_{x_0}^{x} [(x - \alpha)A(\alpha) + B(\alpha)]\psi(\alpha)d\alpha = r(x), \tag{6.16}$$

$$A(x) = a_{xx}(x, y_0) - c_x(x, y_0) + e(x, y_0), \quad B(x) = c(x, y_0) - 2a_x(x, y_0),$$

$$r(x) = \int_{x_0}^{x} \{(x - \alpha)[b_\alpha(\alpha, y_0) - d(\alpha, y_0)] - b(\alpha, y_0)\}d\alpha - \psi_0(x) +$$
$$+ (x - x_0)[a(x_0, y_0)\varphi_1(y_0) + b(x_0, y_0)\varphi'(y_0) + c(x_0, y_0)\varphi(y_0) +$$
$$+ a_x(x_0, y_0)\varphi(y_0)] + \varphi'(y_0) + a(x_0, y_0)\varphi(y_0).$$

Здесь $\psi(x)$ — функция из третьего условия в (6.2). Из уравнения (6.16) непосредственно усматривается, что *если коэффициенты уравнения* (6.1) *принадлежат классу искомых решений и, кроме того,* $a(x, y_0) \neq 0$, $a \in C^{(2,0)}(D \cup q)$, b, $c \in C^{(1,0)}(D \cup q)$, *то рассматриваемая задача однозначно редуцируется к задаче Гурса.* При этом $\psi(x)$ записывается через резольвенту уравнения (6.16).

Если к предыдущим условиям добавить любое из тождеств $A(x) \equiv 0$, $B(x) - xA(x) \equiv 0$, то $\psi(x)$ записывается в квадратурах.

В случае первого тождества

$$\psi(x) = \frac{r(x)}{a(x, y_0)} - \frac{1}{a(x, y_0)} \int_{x_0}^{x} \frac{B(\alpha) r(\alpha)}{a(\alpha, y_0)} \left[\exp \int_{x}^{\alpha} \frac{B(\alpha_1)}{a(\alpha_1, y_0)} d\alpha_1 \right] d\alpha,$$

а в случае второго —

$$\psi(x) = \frac{r(x)}{a(x, y_0)} - \frac{x}{a(x, y_0)} \int_{x_0}^{x} \frac{A(\alpha) r(\alpha)}{a(\alpha, y_0)} \left[\exp \int_{x}^{\alpha} \frac{\alpha_1 A(\alpha_1)}{a(\alpha_1, y_0)} d\alpha_1 \right] d\alpha.$$

При $a(x, y_0) \equiv 0$ тоже имеются две возможности явного решения (6.16). Первый вариант получается, если $c(x, y_0) \neq 0$, $d \in C^{(1,0)}(D \cup q)$, $b, c \in C^{(2,0)}(D \cup q)$, $\psi_0 \in C^3(q)$. Тогда

$$\psi(x) = \frac{1}{c(x, y_0)} \left\{ r'(x) - \int_{x_0}^{x} T(\alpha, y_0) r'(\alpha) \left[\exp \int_{x}^{\alpha} T(\alpha_1, y_0) d\alpha_1 \right] d\alpha \right\}.$$

Вторая возможность обеспечивается требованиями: $c(x, y_0) \equiv 0$, $e(x, y_0) \neq 0$, $b \in C^{(3,0)}(D \cup q)$, $d, e \in C^{(2,0)}(D \cup q)$, $\psi_0 \in C^4(q)$. Здесь $\psi(x) = r''(x)/e(x, y_0)$.

Условия принадлежности всех коэффициентов уравнения (6.1) классу искомых решений должны сохраняться.

Аналогично устанавливаются условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задач, получающихся заменой в (6.1) – (6.2) первого или второго граничного значения на

$$u_{xx}(x_0, y) = \varphi_2(y), \quad \varphi_2(y) \in C^1(p).$$

При этом интегральные уравнения для функций $\varphi(y)$ и $\varphi_1(y)$ оказываются разрешимыми в явном виде. Если в (6.2) заменяются два условия, то либо $\varphi(y)$, либо $\varphi_1(y)$ могут определяться с точностью до произвольной постоянной. Подробное исследование указанных и ряда других вариантов проведено Е.А. Уткиной [73].

2. Об одном плоском уравнении четвертого порядка

Здесь мы остановимся на уравнении

$$L(u) \equiv u_{xxyy} + a_{21}u_{xxy} + a_{12}u_{xyy} + a_{11}u_{xy} + a_{20}u_{xx} + a_{02}u_{yy} + \\ + a_{10}u_x + a_{01}u_y + a_{00}u = 0, \quad a_{ij} \in C^{(i,j)}(\overline{D}). \quad (6.17)$$

К этому виду относится уравнение Буссинеска — Лява

$$u_{ttxx} + u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

описывающее продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов инерции [66, формула (20)]. Частные случаи (6.17) исследовались Д. Манжероном и М. Огюсторели [110], [113], [119], С. Еасвараном [104], [105], В. Радочовой [120], Р.С. Жамаловым [21], общий случай рассматривался А.П. Солдатовым и М.Х. Шхануковым [66].

Задача Гурса в данном случае состоит в отыскании функции $u(x,y)$ класса $C^{(2,2)}(D) \cap C^{(1,0)}(D \cup p) \cap C^{(0,1)}(D \cup q)$, являющейся в D решением (6.17) и удовлетворяющей условиям

$$\begin{gathered} u(x_0,y) = \varphi(y), \quad u_x(x_0,y) = \varphi_1(y), \quad y \in p, \quad \varphi,\, \varphi_1 \in C^2(p), \\ u(x,y_0) = \psi(x), \quad u_y(x,y_0) = \psi_1(x), \quad x \in q, \quad \psi,\, \psi_1 \in C^2(q), \\ \varphi'(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0), \\ \psi'(x_0) = \varphi_1(y_0), \quad \psi_1'(x_0) = \varphi_1'(y_0). \end{gathered} \quad (6.18)$$

В указанной выше работе [66] предложен вариант распространения методики из [92] на данный случай. Нашей же целью является развитие идей предыдущего пункта, так как получаемые при этом результаты и здесь оказываются предпочтительными с точки зрения отыскания решения в явном виде.

Функцию Римана определим как решение интегрального уравнения

$$v(x,y) - \int_\eta^y [a_{21}(x,\beta) - (y-\beta)a_{20}(x,\beta)]v(x,\beta)d\beta - \\ - \int_\xi^x [a_{12}(\alpha,y) - (x-\alpha)a_{02}(\alpha,y)]v(\alpha,y)d\alpha + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y [a_{11}(\alpha,\beta) - (x-\alpha)a_{01}(\alpha,\beta) - (y-\beta)a_{10}(\alpha,\beta) + \\ + (x-\alpha)(y-\beta)a_{00}(\alpha,\beta)]v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1. \quad (6.19)$$

Как и (6.7) это уравнение есть частный случай (1.1). Поэтому $v(x,y)$ существует и единственна. Очевидно, $v(x,y)$ удовлетворяет сопряженному с (6.17) уравнению

$$\begin{aligned} L^*(v) \equiv v_{xxyy} - (a_{21}v)_{xxy} - (a_{12}v)_{xyy} + (a_{11}v)_{xy} + (a_{20}v)_{xx} + \\ + (a_{02}v)_{yy} - (a_{10}v)_x - (a_{01}v)_y + a_{00}v = 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Как функцию четырех переменных обозначаем решение (6.19) $R(x,y,\xi,\eta)$.

Аналогом тождества (6.8) здесь является

$$\begin{gathered} (uR)_{xxyy} \equiv RL(u) + [u(R_y - a_{21}R)]_{xxy} + [u(R_x - a_{12}R)]_{xyy} - \\ -\{u[R_{yy} - (a_{21}R)_y + a_{20}R]\}_{xx} - \{u[R_{xx} - (a_{12}R)_x + a_{02}R]\}_{yy} - \\ -\{u[R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R]\}_{xy} + \\ +\{u[R_{xyy} - (a_{21}R)_{xy} - (a_{12}R)_{yy} + (a_{11}R)_y + (a_{20}R)_x - a_{01}R]\}_x + \\ +\{u[R_{xxy} - (a_{21}R)_{xx} - (a_{12}R)_{xy} + (a_{11}R)_x + (a_{02}R)_y - a_{01}R]\}_y + \\ +[u_y(a_{21}R)_x]_x + [u_x(a_{12}R)_y]_y + [u(a_{20}R)_x]_x + \\ +[u(a_{02}R)_y]_y + (u_xR_y)_{xy} + (u_{yy}R_x)_x + (uR_{xxy})_y. \end{gathered} \quad (6.21)$$

При этом $u(x,y)$ — любая функция из $C^{(2,2)}(D)$. Соотношение (6.21) можно проверить непосредственно, учитывая, что v удовлетворяет уравнению (6.20).

Введем обозначения

$$\begin{gathered} N = R_x - a_{12}R, \quad P = R_y - a_{21}R, \quad K = N_x + a_{02}R, \\ Q = P_y + a_{20}R, \quad T = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R, \\ F_1 = T_y + (a_{20}R)_x - a_{10}R, \ F_2 = T_x + (a_{02}R)_y - a_{01}R. \end{gathered} \quad (6.22)$$

Из (6.19) следуют тождества

$$\begin{gathered} N(x,y,x,y) \equiv P(x,y,x,y) \equiv T(x,y,x,y) \equiv 0, \\ K(x,y,\xi,y) \equiv Q(x,y,x,\eta) \equiv F_1(x,y,x,\eta) \equiv F_2(x,y,\xi,y) \equiv 0. \end{gathered} \quad (6.23)$$

В обозначениях (6.22) соотношение (6.21) приобретает вид

$$\begin{aligned} (uR)_{xxyy} \equiv RL(u) + (uP)_{xxy} + (uN)_{xyy} - (uQ)_{xx} - (uK)_{yy} - (uT)_{xy} + \\ + (uF_1)_x + (uF_2)_y + (uR_y)_{xxy} + (uR_x)_{xyy} - (uR_{xy})_{xy} - \\ - (uP_x)_{xy} - (uN_y)_{xy} + (uQ_x)_x + (uK_y)_y. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Перейдем непосредственно к вычислению $u(x,y)$, считая эту функцию решением уравнения (6.17). Поменяем в (6.24) ролями переменные x с ξ, y с η и вычислим от правой и левой части двойной интеграл в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$:

$$
\begin{gathered}
(uR)_{xy}(x,y) - (uR)_{xy}(x,y_0) - (uR)_{xy}(x_0,y) + (uR)_{xy}(x_0,y_0) = \\
= (uP)_x(x,y) - (uP)_x(x_0,y) - (uP)_x(x,y_0) + (uP)_x(x_0,y_0) + \\
+ (uN)_y(x,y) - (uN)_y(x_0,y) - (uN)_y(x,y_0) + (uN)_y(x_0,y_0) - \\
- \int_{y_0}^{y} (uQ)_x(x,\beta)d\beta + \int_{y_0}^{y} (uQ)_x(x_0,\beta)d\beta - \\
- \int_{x_0}^{x} (uK)_y(\alpha,y)d\alpha + \int_{x_0}^{x} (uK)_y(\alpha,y_0)d\alpha + \\
+ (uT)(x_0,y) + (uT)(x,y_0) - (uT)(x_0,y_0) - \\
- \int_{y_0}^{y} (uF_1)(x_0,\beta)d\beta - \int_{x_0}^{x} (uF_2)(\alpha,y_0)d\alpha + \\
+ (uR_y)_x(x,y) - (uR_y)_x(x_0,y) - (uR_y)_x(x,y_0) + (uR_y)_x(x_0,y_0) + \\
+ (uR_x)_y(x,y) - (uR_x)_y(x_0,y) - (uR_x)_y(x,y_0) + (uR_x)_y(x_0,y_0) + \\
- uR_{xy}(x,y) + uR_{xy}(x_0,y) + uR_{xy}(x,y_0) - uR_{xy}(x_0,y_0) - \\
- uP_x(x,y) + uP_x(x_0,y) + uP_x(x,y_0) - uP_x(x_0,y_0) - \\
- uN_y(x,y) + uN_y(x_0,y) + uN_y(x,y_0) - uN_y(x_0,y_0) + \\
+ \int_{y_0}^{y} (uQ_x)(x,\beta)d\beta - \int_{y_0}^{y} (uQ_x)(x_0,\beta)d\beta + \\
+ \int_{x_0}^{x} (uK_y)(\alpha,y)d\alpha - \int_{x_0}^{x} (uK_y)(\alpha,y_0)d\alpha.
\end{gathered}
\tag{6.25}
$$

Здесь выписаны лишь первые два аргумента из четырех (вторая пара есть всегда x, y). Указанное дифференцирование тоже проводится только по первым аргументам, например

$$
(uR)_{xy}(x_0,y) = \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}[u(\xi,\eta)R(\xi,\eta,x,y)]\Big|_{\substack{\xi=x_0,\\ \eta=y}}.
$$

Кроме того учтено, что $T(x,y,x,y) \equiv 0$.

Используя тождества (6.23) и подставляя граничные значения из (6.18), перепишем (6.25) в форме

$$
\begin{gathered}
u_{xy}(x,y) = \psi_1'(x)R(x,y_0) + \varphi_1'(y)R(x_0,y) - \varphi_1'(y_0)R(x_0,y_0) - \\
-\varphi_1(y)P(x_0,y) - \psi'(x)P(x,y_0) + \varphi_1(y_0)P(x_0,y_0) - \\
-\varphi'(y)N(x_0,y) - \psi_1(x)N(x,y_0) + \psi_1(x_0)N(x_0,y_0) + \\
+\varphi(y)T(x_0,y) + \psi(x)T(x,y_0) - \varphi(y_0)T(x_0,y_0) - \\
-\int_{y_0}^{y}[\varphi(\beta)F_1(x_0,\beta) - \varphi_1(\beta)Q(x_0,\beta)]d\beta - \\
-\int_{x_0}^{x}[\psi(\alpha)F_2(\alpha,y_0) - \psi_1(\alpha)K(\alpha,y_0)]d\alpha.
\end{gathered}
$$

Здесь тоже выписаны лишь первые два аргумента. Добавляя остающуюся пару, обозначим правую часть как $h(x,y,x,y)$. После этого непосредственным интегрированием получим решение задачи Гурса:

$$
u(x,y) = \varphi(y) + \psi(x) - \varphi(y_0) + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} h(\alpha,\beta,\alpha,\beta)d\beta d\alpha. \tag{6.26}
$$

В случае неоднородного уравнения $L(u) = f(x,y)$ к правой части (6.26) следует добавить слагаемое

$$
\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{\alpha}\int_{y_0}^{\beta} R(\alpha_1,\beta_1,\alpha,\beta)f(\alpha_1,\beta_1)d\beta_1 d\alpha_1 d\beta d\alpha.
$$

Когда $R(x,y,\xi,\eta)$ известна в явном виде, формула (6.26) дает решение рассматриваенмой задачи в квадратурах. Некоторые такие случаи можно получить путем непосредственного решения интегрального уравнения (6.19). Ряд случаев решения задачи в квадратурах указан Е.А. Уткиной [73]. Ею исследованы также задачи с заданием на границе D нормальных производных искомого решения второго и более высокого порядка.

3. Трехмерные уравнения

3.1. Сначала в параллелепипеде $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим трехмерный аналог уравнения (6.1):

$$L(u) \equiv u_{xxyz} + a_{210}u_{xxy} + a_{201}u_{xxz} + a_{111}u_{xyz} + a_{200}u_{xx} + a_{110}u_{xy} + \\ + a_{101}u_{xz} + a_{011}u_{yz} + a_{100}u_x + a_{010}u_y + a_{001}u_z + a_{000}u = 0, \quad (6.27)$$

$$a_{klm} \in C^{(k,l,m)}(\overline{D}).$$

Пусть X, Y, Z — грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно.

Задача (Гурса): *найти в классе* $C^{(2,1,1)}(D) \cap C^{(1,0,0)}(D \cup X) \cap C^{(0,0,0)}(D \cup Y) \cap C^{(0,0,0)}(D \cup Z)$ *решение уравнения* (6.27), *удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_X = \varphi(y,z), \quad u\big|_Y = \psi(x,z), \quad u\big|_Z = \theta(x,y), \quad u_x\big|_X = \varphi_1(y,z). \quad (6.28)$$

Полагаем, что φ, ψ, $\theta \in C^{(2,1)}$ на $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ соответственно, $\varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X})$, а на ребрах D эти функции непрерывно склеиваются:

$$\varphi(y_0,z) = \psi(x_0,z), \quad \varphi(y,z_0) = \theta(x_0,y), \quad \psi(x,z_0) = \theta(x,y_0),$$

причем их общие значения непрерывно дифференцируемы.

Предлагаемое решение задачи основано на развитии метода предыдущих пунктов. А именно, назовем функцией Римана $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ решение интегрального уравнения

$$v(x,y,z) - \int_\zeta^z a_{210}(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)d\gamma - \int_\eta^y a_{201}(x,\beta,z)v(x,\beta,z)d\beta -$$

$$- \int_\xi^x [a_{111}(\alpha,y,z) - (x-\alpha)a_{011}(\alpha,y,z)]v(\alpha,y,z)d\alpha +$$

$$+ \int_\eta^y \int_\zeta^z a_{200}(x,\beta,\gamma)v(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta +$$

$$+ \int_\xi^x \int_\zeta^z [a_{110}(\alpha,y,\gamma) - (x-\alpha)a_{010}(\alpha,y,\gamma)]v(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha +$$

$$+ \int_\xi^x \int_\eta^y [a_{101}(\alpha,\beta,z) - (x-\alpha)a_{001}(\alpha,\beta,z)]v(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha -$$

$$-\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}\int_{\zeta}^{z}[a_{100}(\alpha,\beta,\gamma)-(x-\alpha)a_{000}(\alpha,\beta,\gamma)]v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha=1. \tag{6.29}$$

Решение (6.29) существует и единствено (см. п. 1 § 2).

Имеет место следующий аналог тождеств (6.8), (6.21):

$$(uR)_{xxyz}\equiv RL(u)+[u(R_z-a_{210}R)]_{xxy}+[u(R_y-a_{201}R)]_{xxz}+$$
$$+[u(R_x-a_{111}R)]_{xyz}-\{u[R_{yz}-(a_{210}R)_y-(a_{201}R)_z+a_{200}R]\}_{xx}-$$
$$-\{u[R_{xz}-(a_{210}R)_x-(a_{111}R)_z+a_{110}R]\}_{xy}-$$
$$-\{u[R_{xy}-(a_{201}R)_x-(a_{111}R)_y+a_{101}R]\}_{xz}-$$
$$-\{u[R_{xx}-(a_{111}R)_x+a_{011}R]\}_{yz}+$$
$$+\{u[R_{xyz}-(a_{210}R)_{xy}-(a_{201}R)_{xz}-(a_{111}R)_{yz}+(a_{200}R)_x+$$
$$+(a_{110}R)_y+(a_{101}R)_z-a_{100}R]\}_x+\{u[R_{xxz}-(a_{210}R)_{xx}-$$
$$-(a_{111}R)_{xz}+(a_{110}R)_x+(a_{011}R)_z-a_{010}R]\}_y+\{u[R_{xxy}-$$
$$-(a_{201}R)_{xx}-(a_{111}R)_{xy}+(a_{101}R)_x+(a_{011}R)_y-a_{001}R]\}_z+$$
$$+[u_{yz}R_x+u_y(a_{210}R)_x+u_z(a_{201}R)_x+u(a_{200}R)_x]_x. \tag{6.30}$$

Проще всего (хоть и несколько утомительно) убедиться в выполнении записанного тождества непосредственной проверкой.

Введем обозначения:

$$P_1=R_z-a_{210}R,\quad P_2=R_y-a_{201}R,\quad P_3=R_x-a_{111}R,$$
$$Q_1=R_{yz}-(a_{210}R)_y-(a_{201}R)_z+a_{200}R,$$
$$Q_2=R_{xz}-(a_{210}R)_x-(a_{111}R)_z+a_{110}R,$$
$$Q_3=R_{xy}-(a_{201}R)_x-(a_{111}R)_y+a_{101}R,$$
$$Q_4=R_{xx}-(a_{111}R)_x+a_{011}R, \tag{6.31}$$
$$S_1=R_{xyz}-(a_{210}R)_{xy}-(a_{201}R)_{xz}-(a_{111}R)_{yz}+$$
$$+(a_{200}R)_x+(a_{110}R)_y+(a_{101}R)_z-a_{100}R,$$
$$S_2=R_{xxz}-(a_{210}R)_{xx}-(a_{111}R)_{xz}+(a_{110}R)_x+(a_{011}R)_z-a_{010}R,$$
$$S_3=R_{xxy}-(a_{201}R)_{xx}-(a_{111}R)_{xy}+(a_{101}R)_x+(a_{011}R)_y-a_{001}R.$$

Из интегрального уравнения (6.29) нетрудно вывести тождества:

$$
\begin{gathered}
P_1(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv P_2(x,\eta,z,x,y,z) \equiv P_3(x,y,z,x,y,z) \equiv \\
\equiv Q_1(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv Q_2(x,y,\zeta,x,y,z) \equiv Q_3(x,\eta,z,x,y,z) \equiv \\
\equiv Q_4(\xi,y,z,x,y,z) \equiv S_1(x,\eta,\zeta,x,y,z) \equiv S_2(\xi,y,\zeta,x,y,z) \equiv \\
\equiv S_3(\xi,\eta,z,x,y,z) \equiv 0, \quad R(x,y,z,x,y,z) \equiv 1
\end{gathered} \tag{6.32}
$$

Меняя местами переменные (x,ξ), (y,η), (z,ζ) и принимая во внимание обозначения (6.31), перепишем (6.30) в виде

$$
\begin{aligned}
(uR)_{\xi\xi\eta\zeta} \equiv (P_1u)_{\xi\xi\eta} + (P_2u)_{\xi\xi\zeta} + (P_3u)_{\xi\eta\zeta} - (Q_1u)_{\xi\xi} - (Q_2u)_{\xi\eta} - \\
- (Q_3u)_{\xi\zeta} - (Q_4u)_{\eta\zeta} + (S_1u)_{\xi} + (S_2u)_{\eta} + (S_3u)_{\zeta} + \\
+ [R_\xi u_{\eta\zeta} + (a_{210}R)_\xi u_\eta + (a_{201}R)_\xi u_\zeta + (a_{200}R)_\xi u]_\xi.
\end{aligned} \tag{6.33}
$$

При этом мы еще считаем, что $u(x,y,z)$ является решением уравнения (6.27).

Интегрируя (6.33) в пределах $x_0 \leqslant \xi \leqslant x$, $y_0 \leqslant \eta \leqslant y$, $z_0 \leqslant \zeta \leqslant z$ и учитывая при этом граничные значения (6.28) и тождества (6.32), получаем

$$
\begin{gathered}
u_x(x,y,z) = R(x_0,y,z)\varphi_1(y,z) - R(x_0,y_0,z)\varphi_1(y_0,z) - \\
-R(x_0,y,z_0)\varphi_1(y,z_0) + R(x_0,y_0,z_0)\varphi_1(y_0,z_0) + R(x,y_0,z)\psi_x(x,z) - \\
-R(x,y_0,z_0)\psi_x(x,z_0) + R(x,y,z_0)\theta_x(x,y) - P_3(x_0,y,z)\varphi(y,z) - \\
-P_3(x,y,z_0)\theta(x,y) - P_3(x,y_0,z)\psi(x,z) + P_3(x_0,y,z_0)\varphi(y,z_0) + \\
+P_3(x,y_0,z_0)\psi(x,z_0) + P_3(x_0,y_0,z)\varphi(y_0,z) - P_3(x_0,y_0,z_0)\varphi(y_0,z_0) + \\
+\int_{x_0}^{x}[Q_4(\alpha,y_0,z)\psi(\alpha,z) + Q_4(\alpha,y,z_0)\theta(\alpha,y) - Q_4(\alpha,y_0,z_0)\psi(\alpha,z_0)]d\alpha + \\
+\int_{y_0}^{y}[P_2(x_0,\beta,z_0)\varphi_1(\beta,z_0) - P_2(x_0,\beta,z)\varphi_1(\beta,z) - P_2(x,\beta,z_0)\theta_x(x,\beta) + \\
+Q_3(x_0,\beta,z)\varphi(\beta,z) + Q_3(x,\beta,z_0)\theta(x,\beta) - Q_3(x_0,\beta,z_0)\varphi(\beta,z_0)]d\beta + \\
+\int_{z_0}^{z}[P_1(x_0,y_0,\gamma)\varphi_1(y_0,\gamma) - P_1(x_0,y,\gamma)\varphi_1(y,\gamma) - P_1(x,y_0,\gamma)\psi_x(x,\gamma) + \\
+Q_2(x_0,y,\gamma)\varphi(y,\gamma) + Q_2(x,y_0,\gamma)\psi(x,\gamma) - Q_2(x_0,y_0,\gamma)\varphi(y_0,\gamma)]d\gamma - \\
-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} S_3(\alpha,\beta,z_0)\theta(\alpha,\beta)d\beta d\alpha - \int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z} S_2(\alpha,y_0,\gamma)\psi(\alpha,\gamma)d\gamma d\alpha -
\end{gathered}
$$

$$-\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[S_1(x_0,\beta,\gamma)\psi(\beta,\gamma)-Q_1(x_0,\beta,\gamma)\varphi_1(\beta,\gamma)]d\gamma d\beta.$$

Здесь у R, $P_1,\ldots,S_3$ выписана лишь первая тройка аргументов, вторая всегда (x,y,z). Обозначая правую часть данной формулы с добавленной второй тройкой как функцию шести аргументов $H(x,y,z,x,y,z)$ и интегрируя затем по x, находим решение задачи

$$u(x,y,z)=\varphi(y,z)+\int_{x_0}^{x}H(\alpha,y,z,\alpha,y,z)d\alpha. \tag{6.34}$$

Если бы вместо однородного уравнения (6.27) рассматривалось неоднородное $L(u)=f(x,y,z)$, то в правой части (6.34) появилось бы дополнительное слагаемое

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}R(\alpha,\beta,\gamma,\xi,y,z)f(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha d\xi.$$

Формула (6.34) дает решение задачи (6.27) – (6.28) в явном виде, если функция R известна. Ряд случаев записи R в замкнутой форме можно выделить путем непосредственного решения интегрального уравнения (6.29).

Например, пусть все коэффициенты уравнения (6.27) равны нулю, кроме a_{100}, который представляет собой произведение вида $\lambda(x)\mu(y)\nu(z)$. Преобразуя интегральное уравнение (6.29) с помощью подстановок

$$\tilde{x}=\int_{x_0}^{x}\lambda(\alpha)d\alpha,\quad \tilde{y}=\int_{y_0}^{y}\mu(\beta)d\beta,\quad \tilde{z}=\int_{z_0}^{z}\nu(\gamma)d\gamma$$

и решая его затем обычным образом с помощью ряда, получим после возвращения к исходным переменным

$$v={}_0F_2\Big(1,1;\int_{\xi}^{x}\lambda(\alpha)d\alpha\int_{\eta}^{y}\mu(\beta)d\beta\int_{\zeta}^{z}\nu(\gamma)d\gamma\Big),$$

где ${}_0F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция [1, с. 183]. Другой пример: среди коэффициентов в (6.27) отличен от нуля лишь $a_{000}=\mu(y)\nu(z)$. Только что указанным способом (при этом достаточно заменить лишь y, z) функция Римана вычисляется в виде

$$v=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-\xi)}{(k!)^3(k+1)}\left[(x-\xi)\int_{\eta}^{y}\mu(\beta)d\beta\int_{\zeta}^{z}\nu(\gamma)d\gamma\right]^k.$$

Еще более просто получаются следующие формулы (в каждом случае указываем лишь вид единственного отличного от нуля коэффициента уравнения (6.27) и функцию Римана):

1) $a_{101} = \lambda(x,z)\mu(y,z), \quad v = J_0\Big(2\Big[\int_\xi^x \lambda(\alpha,z)d\alpha \int_\eta^y \mu(\beta,z)d\beta\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)$, J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

2) $a_{001} = \mu(y,z), \quad v = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(x-\xi)}{(k!)^2(k+1)}\Big[x-\xi\int_\eta^y \mu(\beta,z)d\beta\Big]^k$;

3) $a_{110} = \lambda(x,y)\nu(y,z), \quad v = J_0\Big(2\Big[\int_\xi^x \lambda(\alpha,y)d\alpha \int_\zeta^z \nu(y,\gamma)d\gamma\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)$;

4) $a_{200} = \mu(x,y)\nu(x,z), \quad v = J_0\Big(2\Big[\int_\eta^y \mu(x,\beta)d\beta \int_\zeta^z \nu(x,\gamma)d\gamma\Big]^{\frac{1}{2}}\Big)$;

5) $a_{010} = \nu(y,z), \quad v = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x-\xi}{(k!)^2(k+1)}\Big[(x-\xi)\int_\zeta^z \nu(y,\gamma)d\gamma\Big]^k$;

6) $a_{011} = a_{011}(y,z), \quad v = \exp[(x-\xi)a_{011}(y,z)]$;

7) $a_{111} \not\equiv 0, \quad v = \exp\displaystyle\int_\xi^x a_{111}(\alpha,y,z)d\alpha$;

8) $a_{201} \not\equiv 0, \quad v = \exp\displaystyle\int_\eta^y a_{201}(x,\beta,z)d\beta$;

9) $a_{210} \not\equiv 0, \quad v = \exp\displaystyle\int_\zeta^z a_{210}(x,y,\gamma)d\gamma$.

Кроме того, можно использовать результаты главы 1. Если среди коэффициентов отличны от нуля лишь три: либо a_{201}, a_{111}, a_{101}, либо a_{210}, a_{201}, a_{200}, либо a_{210}, a_{111}, a_{110}, следует воспользоваться материалом из п. 3 § 1. Например, пусть (см. формулы (1.33) и далее)

$$a_{111} = B(x,z) + \lambda(z)y, \quad a_{201} = A(y,z) + \lambda(z)x,$$
$$a_{101} - a_{210}a_{111} - \lambda(z) = \varphi(x,z)\psi(y,z),$$

где A, B, λ, φ, ψ — некоторые функции указанных аргументов. Тогда

$$v = \Omega(x,y,z,\xi,\eta)\exp\left(\int_\xi^x B(\alpha,z)d\alpha + \int_\eta^y A(\beta,z)d\beta + \lambda(z)(xy-\xi\eta)\right),$$
$$\Omega = J_0\Big(2\Big[\int_\xi^x \varphi(\alpha,z)d\alpha \int_\eta^y \psi(\beta,z)d\beta\Big]^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Естественно, что можно применить и более общие варианты типа формул (1.44) – (1.48). Если же в (6.27) тождественными нулями являются только a_{011}, a_{010}, a_{001}, a_{000}, нужно обратиться к результатам п. 5 § 2.

Наконец, явные формулы решения задачи Гурса могут быть получены при расщеплении оператора в левой части уравнения (6.27). Например, пусть $\chi(x, y, z)$ — дифференцируемая по x функция, а операторы L_x, L_{xyz} определяются формулами:

$$L_x(w) \equiv w_x + \chi w,$$

$$L_{xyz}(w) \equiv w_{xyz} + a_1 w_{xy} + b_1 w_{yz} + c_1 w_{xz} + d_1 w_x + e_1 w_y + f_1 w_z + g_1 w = 0,$$

$$a_1 = a_{210}, \quad b_1 = a_{111} - \chi, \quad c_1 = a_{201}, \quad d_1 = a_{200},$$

$$e_1 = a_{110} - (a_{210})_x - \chi a_{210}, \quad f_1 = a_{101} - (a_{201})_x - \chi a_{201},$$

$$g_1 = a_{100} - (a_{200})_x - \chi a_{200}.$$

Тогда непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при условиях

$$b_{1x} + \chi b_1 - a_{011} \equiv 0, \quad e_{1x} + \chi e_1 - a_{010} \equiv 0,$$

$$f_{1x} + \chi f_1 - a_{001} \equiv 0, \quad g_{1x} + \chi g_1 - a_{000} \equiv 0,$$

исходное уравнение представляется в форме

$$L_x L_{xyz}(u) = 0.$$

Чтобы коэффициенты операторов L_x, L_{xyz} записывались в терминах коэффициентов исходного уравнения, удобно полагать, например, χ равной a_{210}, a_{201} или a_{111}. Рассматриваемая ситуация редуцируется к двум последовательно решаемым задачам:

$$L_x(w) = 0, \quad w|_X = \omega(y, z); \tag{6.35}$$

$$L_{xyz}(u) = w, \quad u|_X = \varphi(y, z), \quad u|_Y = \psi(x, z), \quad u|_Z = \theta(x, y). \tag{6.36}$$

Граничное условие $\omega(y, z)$ очевидным образом вычисляется с помощью (6.28). Задача Коши (6.35) решается непосредственным интегрированием уравнения по x, а (6.36) есть задача Гурса из § 2, где, в частности, указан ряд случаев ее решения в явном виде.

Очевидно, можно аналогичным образом использовать запись исходного уравнения в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + a_{210}\right)\left(u_{xxy} + a_{201} u_{xx} + a_{111} u_{xy} + a_{101} u_x + a_{011} u_y + a_{000} u\right) = 0,$$

имеющей место при выполнении тождеств

$$\begin{gathered}(a_{210})_z+a_{210}a_{201}-a_{200}\equiv 0,\quad (a_{111})_z+a_{210}a_{111}-a_{110}\equiv 0,\\ (a_{101})_z+a_{210}a_{101}-a_{100}\equiv 0,\quad (a_{011})_z+a_{210}a_{011}-a_{010}\equiv 0,\\ (a_{001})_z+a_{210}a_{001}-a_{000}\equiv 0.\end{gathered}\tag{6.37}$$

В этом случае вместо материала из § 2 нужно использовать результаты из п. 1 настоящего параграфа. Нетрудно также найти тождества, играющие роль (6.37) в расщеплении L на оператор $\dfrac{\partial}{\partial y}+a_{201}$ и оператор третьего порядка по x, z.

3.2. Остановимся кратко еще на уравнении

$$\sum_{k,l=0}^{2}\sum_{m=0}^{1}a_{klm}(x,y,z)\frac{\partial^{k+l+m}u}{\partial x^k\partial y^l\partial z^m}=0,\tag{6.38}$$

$$a_{221}\equiv 1,\quad a_{klm}\in C^{(k,l,m)}(\overline{D}),$$

где D — тот же параллелепипед, что и для (6.27).

Задача Гурса в данном случае получается путем добавления к (6.28) еще одного значения:

$$u_y\big|_Y=\psi_1(x,y).\tag{6.39}$$

Решение в классе $C^{(2,2,1)}$ строится по только что изложенной схеме. Интегральным уравнением для функции Римана является

$$v(x,y,z)-\int_\zeta^z[a_{220}v](x,y,\gamma)d\gamma-\int_\eta^y\{[a_{211}-(y-\beta)a_{201}]v\}(x,\beta,z)d\beta-$$
$$-\int_\xi^x\{[a_{121}-(x-\alpha)a_{021}]v\}(\alpha,y,z)d\alpha+\int_\xi^x\int_\eta^y\{[a_{111}-(y-\beta)a_{101}-$$
$$-(x-\alpha)a_{011}+(x-\alpha)(y-\beta)a_{001}]v\}(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha+$$
$$+\int_\xi^x\int_\zeta^z\{[a_{120}-(x-\alpha)a_{020}]v\}(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha+$$
$$+\int_\eta^y\int_\zeta^z\{[a_{210}-(y-\beta)a_{200}]v\}(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta-$$
$$-\int_\xi^x\int_\beta^y\int_\zeta^z\{[a_{110}-(y-\beta)a_{100}-(x-\alpha)a_{010}+$$

$$+(x-\alpha)(y-\beta)a_{000}]v\}(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha = 1. \tag{6.40}$$

Здесь аргументы относятся ко всем a_{klm} в соответствующих скобках, например, $\{[a_{120} - (x-\alpha)a_{020}]v\}(\alpha,y,\gamma) \equiv [a_{120}(\alpha,y,\gamma) - (x-\alpha)a_{020}(\alpha,y,\gamma)]v(\alpha,y,\gamma)$. Далее обозначаем $v = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$. Аналогом (6.8), (6.21) будет тождество

$$(uR)_{xxyyz} \equiv RL(u) + (A_1u)_{xxyy} + (A_2u)_{xxyz} + (A_3u)_{xyyz} -$$
$$-(B_1u)_{xxy} - (B_2u)_{xxz} - (B_3u)_{xyy} - (B_4u)_{xyz} - (B_5u)_{yyz} +$$
$$+(C_1u)_{xy} + (C_2u)_{xz} + (C_3u)_{yz} + (C_4u)_{xx} + (C_5u)_{yy} -$$
$$-(D_1u)_x - (D_2u)_y - (D_3u)_z + [u(a_{020}R)_y + u_z(a_{021}R)_y +$$
$$+u_x(a_{120}R)_y + u_{xz}(a_{121}R)_y + u_{xx}(a_{220}R)_y + u_{xxz}R_y]_y +$$
$$+[u(a_{200}R)_x + u_z(a_{201}R)_x + u_y(a_{210}R)_x + u_{yz}(a_{211}R)_x +$$
$$+u_{yy}(a_{220}R)_x + u_{yyz}R_x]_x + [u(a_{220}R)_{xy} + u_zR_{xy}]_{xy}, \tag{6.41}$$

где обозначено

$$A_1 = R_z - a_{220}R, \quad A_2 = R_y - a_{211}R, \quad A_3 = R_x - a_{121}R,$$
$$B_1 = R_{yz} - (a_{220}R)_y - (a_{211}R)_z + a_{210}R, \quad B_2 = R_{yy} - (a_{211}R)_y + a_{201}R,$$
$$B_3 = R_{xz} - (a_{220}R)_x - (a_{121}R)_z + a_{120}R,$$
$$B_4 = R_{xy} - (a_{211}R)_x - (a_{121}R)_y + a_{111}R, \quad B_5 = R_{xx} - (a_{121}R)_x + a_{021}R,$$
$$C_1 = R_{xyz} - (a_{220}R)_{xy} - (a_{211}R)_{xz} - (a_{121}R)_{yz} +$$
$$+(a_{210}R)_x + (a_{120}R)_y + (a_{111}R)_z - a_{110}R,$$
$$C_2 = R_{xyy} - (a_{211}R)_{xy} - (a_{121}R)_{yy} + (a_{201}R)_x + (a_{111}R)_y - a_{101}R,$$
$$C_3 = R_{xxy} - (a_{211}R)_{xx} - (a_{121}R)_{xy} + (a_{111}R)_x + (a_{021}R)_y - a_{011}R,$$
$$C_4 = R_{yyz} - (a_{220}R)_{yy} - (a_{211}R)_{yz} + (a_{210}R)_y + (a_{201}R)_z - a_{200}R,$$
$$C_5 = R_{xxz} - (a_{220}R)_{xx} - (a_{121}R)_{xz} + (a_{120}R)_x + (a_{021}R)_z - a_{020}R,$$
$$D_1 = R_{xyyz} - (a_{220}R)_{xyy} - (a_{211}R)_{xyz} - (a_{121}R)_{yyz} +$$
$$+(a_{210}R)_{xy} + (a_{201}R)_{xz} + (a_{120}R)_{yy} + (a_{111}R)_{yz} -$$
$$-(a_{110}R)_y - (a_{101}R)_z - (a_{200}R)_x + a_{100}R,$$
$$D_2 = R_{xxyz} - (a_{220}R)_{xxy} - (a_{211}R)_{xxz} - (a_{121}R)_{xyz} +$$
$$+(a_{210}R)_{xx} + (a_{120}R)_{xy} + (a_{111}R)_{xz} + (a_{021}R)_{yz} -$$

$$-(a_{110}R)_x-(a_{011}R)_z-(a_{020}R)_y+a_{010}R,$$

$$D_3=R_{xxyy}-(a_{211}R)_{xxy}-(a_{121}R)_{xyy}-(a_{201}R)_{xx}+$$

$$+(a_{111}R)_{xy}+(a_{021}R)_{yy}-(a_{101}R)_x-(a_{011}R)_y-a_{001}R.$$

Роль (6.32) играют тождества (здесь, как и в следующей формуле (6.42), не пишем для краткости у R, $A_1,\ldots,$ D_3 вторую тройку аргументов, которая всюду есть (x,y,z)):

$$A_1(x,y,\zeta)\equiv A_2(x,\eta,z)\equiv A_3(\xi,y,z)\equiv B_1(x,\eta,\zeta)\equiv$$

$$\equiv B_2(x,\eta,z)\equiv B_3(\xi,y,\zeta)\equiv B_4(\xi,\eta,z)\equiv B_5(\xi,y,z)\equiv$$

$$\equiv C_1(\xi,\eta,\zeta)\equiv C_2(x,y,z)\equiv C_3(x,y,z)\equiv C_4(x,y,z)\equiv$$

$$\equiv C_5(x,y,z)\equiv D_1(x,y,z)\equiv D_2(x,y,z)\equiv D_3(x,y,z)\equiv 0,$$

$$R(x,y,z)\equiv 1.$$

Записывая аналог тождества (6.33) и последовательно интегрируя его по ξ, η, ζ в пределах (x_0,x), (y_0,y), (z_0,z) соответственно, считая при этом $u(x,y,z)$ решением уравнения (6.38) и учитывая граничные условия (6.28), (6.39), придем к формуле

$$u_{xy}=\varphi_{1y}(y,z)R(x_0,y,z)+\psi_{1x}(x,z)R(x,y_0,z)-$$

$$-\varphi_{1y}(y_0,z)R(x_0,y_0,z)+\theta_{xy}(x,y)R(x,y,z_0)-\varphi_{1y}(y,z_0)R(x_0,y,z_0)-$$

$$-\psi_{1x}(x,z_0)R(x,y_0,z_0)+\varphi_{1y}(y_0,z_0)R(x_0,y_0,z_0)-\varphi_1(y,z)A_2(x_0,y,z)-$$

$$-\psi_x(x,z)A_2(x,y_0,z)+\varphi_1(y_0,z)A_2(x_0,y_0,z)-\theta_x(x,y)A_2(x,y,z_0)+$$

$$+\varphi_1(y,z_0)A_2(x_0,y,z_0)+\theta_x(x,y_0)A_2(x,y_0,z_0)-\varphi_1(y_0,z_0)A_2(x_0,y_0,z_0)-$$

$$-\varphi_y(y,z)A_3(x_0,y,z)-\psi_1(x,z)A_3(x,y_0,z)+\psi_1(x_0,z)A_3(x_0,y_0,z)-$$

$$-\theta_y(y,z)A_3(x,y,z_0)+\varphi_y(y,z_0)A_3(x_0,y,z_0)+\psi_1(x,z_0)A_3(x,y_0,z_0)-$$

$$-\psi_1(x_0,z_0)A_3(x_0,y_0,z_0)+\varphi(y,z)B_4(x_0,y,z)+\psi(x,z)B_4(x,y_0,z)-$$

$$-\varphi(y_0,z)B_4(x_0,y_0,z)+\theta(x,y)B_4(x,y,z_0)-\varphi(y,z_0)B_4(x_0,y,z_0)-$$

$$-\theta(x,y_0)B_4(x,y_0,z_0)+\varphi(y_0,z_0)B_4(x_0,y_0,z_0)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}[\psi_1(\xi,z)B_5(\xi,y_0,z)+\theta_y(\xi,y)B_5(\xi,y,z_0)-\psi_1(\xi,z_0)B_5(\xi,y_0,z_0)-$$

$$-\psi(\xi,z)C_3(\xi,y_0,z)-\theta(\xi,y)C_3(\xi,y,z_0)+\psi(\xi,z_0)C_3(\xi,y_0,z_0)]d\xi+$$

$$+\int_{y_0}^{y}[\varphi_1(\eta,z)B_2(x_0,\eta,z)+\theta_x(x,\eta)B_2(x,\eta,z_0)-\psi_1(\eta,z_0)B_2(x_0,\eta,z_0)-$$

$$-\theta(x,\eta)C_2(x,\eta,z_0)-\varphi_1(\eta,z)C_2(x_0,\eta,z)+\psi(\xi,z_0)C_2(x_0,\eta,z_0)]d\eta+$$

$$+\int_{z_0}^{z}[-\varphi_{1y}(y,\zeta)A_1(x_0,y,\zeta)-\psi_{1x}(x,\zeta)A_1(x,y_0,\zeta)+\varphi_{1y}(y_0,\zeta)A_1(x_0,y_0,\zeta)+$$

$$+\varphi_1(y,\zeta)B_1(x_0,y,\zeta)+\psi_x(x,\zeta)B_1(x,y_0,\zeta)-\varphi_1(y_0,\zeta)B_1(x_0,y_0,\zeta)+$$

$$+\varphi_y(y,\zeta)B_3(x_0,y,\zeta)+\psi_1(x,\zeta)B_3(x,y_0,\zeta)-\psi_1(x_0,\zeta)B_3(x_0,y_0,\zeta)-$$

$$-\varphi(y,\zeta)C_1(x_0,y,\zeta)-\psi(x,\zeta)C_1(x,y_0,\zeta)+\varphi(y_0,\zeta)C_1(x_0,y_0,\zeta)]d\zeta+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\theta(\xi,\eta)D_3(\xi,\eta,z_0)d\eta d\xi+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{z_0}^{z}[-\psi_1(\xi,\zeta)C_5(\xi,y_0,\zeta)+\psi(\xi,\zeta)D_2(\xi,y_0,\zeta)]d\zeta d\xi+$$

$$+\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z}[-\varphi_1(\eta,\zeta)C_4(x_0,\eta,\zeta)+\varphi(\eta,\zeta)D_1(x_0,\eta,\zeta)]d\zeta d\eta. \tag{6.42}$$

Обозначив правую часть (6.42) с добавленной второй тройкой аргументов как $H(x,y,z,x,y,z)$ и взяв двойной интеграл, приходим к решению рассматриваемой задачи (6.38), (6.28), (6.39):

$$u(x,y,z)=\varphi(y,z)+\psi(x,z)-\varphi(y_0,z)+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}H(\alpha,\beta,z,\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha. \tag{6.43}$$

Если бы уравнение (6.38) было неоднородным с правой частью $f(x,y,z)$, то к функции $u(x,y,z)$, определяемой (6.43), добавилось бы слагаемое

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\alpha}\int_{y_0}^{y}\int_{y_0}^{\beta}\int_{z_0}^{z}R(t_1,t_2,\gamma,\alpha,\beta,\gamma)f(t_1,t_2,\gamma)d\gamma dt_2 d\beta dt_1 d\alpha.$$

Подобно тому, как это было сделано для уравнения (6.27), можно указать целый ряд возможностей записать функцию $R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ в явном виде. Ограничимся для примера лишь одним случаем, когда в (6.38) все коэффициенты, кроме $a_{000}=a_{000}(z)$ и $a_{221}\equiv 1$, равны тождественно нулю. Тогда

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,[(2k)!]^2}\left[(x-\xi)^2(y-\eta)^2\int_{\zeta}^{z}a_{000}(\gamma)d\gamma\right].$$

Изложенное исследование уравнений (6.27), (6.38) проведено первым из авторов книги совместно с Е.А. Уткиной.

§ 7. Уравнения с итерациями некоторых операторов

Здесь мы будем рассматривать уравнения

$$L^n u + a_1 L^{n-1} u + \ldots + a_n u = 0, \tag{7.1}$$

$$L^k \equiv L(L^{k-1}), \quad L^0 u \equiv u, \quad a_k = const.$$

Линейный оператор L будем называть *образующим.* В случаях, когда L совпадает с эллиптическим оператором Лапласа, оператором теплопроводности, или волновым, данное уравнение изучалось И.Н. Векуа [10], М. Николеску [117], М.Н. Олевским [54], Г.Н. Сулханишвили [69], Я.В. Быковым, А.И. Боташевым, Р. Назаровым [8] – [9], и др. В соответствии с образующим оператором авторы называли (7.1) n-метагармоническим, поликалорическим, или поливолновым уравнением. Когда L является поливибрационным оператором вида (1) или получается из него дополнительным дифференцированием (в последнем случае будем называть оператор *обобщенным поливибрационным*), уравнение (7.1) было предметом исследования в работах Р.М. Бреневой [7], Б.А. Бондаренко, Д. Манжерона, М.Н. Огюсторели и др. [96] – [100], [111] – [115], [118], [44], [30]. Операторы других видов встречаются в работах Н.Р. Раджабова [59] – [60], А.Б. Шабата [90] и др. [22] – [26], [55].

В некоторых из процитированных работ уравнения вида (7.1) назывались *полилинейными* [96] – [98], [100].

Нашей основной целью является получение структурных формул для решений рассматриваемых уравнений. При этом мы существенно опираемся на идеи статьи И.Н. Векуа [10].

1. Случай обобщенного поливибрационного образующего оператора

Полагаем в уравнении (7.1)

$$L \equiv \frac{\partial^p}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}}, \tag{7.2}$$

$$p = p_1 + \ldots + p_m, \quad p_s \geqslant 1.$$

Мы покажем, что любое решение уравнения (7.1) можно записать через решения уравнений вида

$$Lu + \lambda u = 0 \tag{7.3}$$

с различными значениями числового параметра λ. Решение уравнения (7.3) будем обозначать $u(x, \lambda)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а решение (7.1) — $u(x, A)$, где под A понимается совокупность коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$.

Поскольку в левой части (7.1) стоит операторный полином, то это уравнение можно записать в виде

$$L^k (L + \lambda_1)^{k_1} \ldots (L + \lambda_\varkappa)^{k_\varkappa} u = 0. \tag{7.4}$$

Очевидно, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa$ — корни уравнения

$$\lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = 0 \tag{7.5}$$

с кратностями $k_1, \ldots, k_\varkappa$ соответственно, k — кратность корня $\lambda = 0$.

Рассмотрим последовательно три возможности.

1) $k = 0$, $k_s = 1$, $s = 1, \ldots, n$, то есть (7.5) имеет лишь простые ненулевые корни. Уравнение тогда имеет вид

$$(L + \lambda_1) \ldots (L + \lambda_n) u = 0. \tag{7.6}$$

Так как $(L + \lambda_k) u_k(x, \lambda_k) \equiv 0$ и скобки в (7.6) можно менять местами, то сумма

$$u = u_1(x, \lambda_1) + \ldots + u_n(x, \lambda_n) \tag{7.7}$$

удовлетворяет уравнению (7.6). Покажем, что любое решение дается формулой (7.7), если под $u(x, \lambda_k)$ понимать общее решение уравнения $Lu + \lambda_k u = 0$. Используем индукцию по числу множителей в (7.6). Для $n = 1$ соотношение (7.7), очевидно, справедливо. Пусть это имеет место для $n = k$, и рассмотрим уравнение

$$(L + \lambda_1) \ldots (L + \lambda_{k+1}) u = 0, \tag{7.8}$$

эквивалентное системе

$$(L + \lambda_1) \ldots (L + \lambda_k) u = v, \tag{7.9}$$

$$Lv + \lambda_{k+1} v = 0. \tag{7.10}$$

Обозначая $v(x, \lambda_{k+1})$ общее решение (7.10), перепишем (7.9) так

$$(L + \lambda_1) \dots (L + \lambda_k)u = v(x, \lambda_{k+1}). \tag{7.11}$$

Общее решение (7.11) есть сумма некоторого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Последнее, по предположению индукции, есть

$$u_1(x, \lambda_1) + \dots + u_k(x, \lambda_k).$$

Частное же решение будем искать в виде

$$u_* = cv(x, \lambda_{k+1}), \quad c = const.$$

Подставляя u_* в (7.11) и пользуясь тем, что

$$(L + \lambda_s)u_* \equiv cLv + \lambda_s cv \equiv c(\lambda_s - \lambda_{k+1})v,$$

получим

$$c\prod_{s=1}^{k}(\lambda_s - \lambda_{k+1})v = v.$$

Это значит, при $c = \prod\limits_{s=1}^{k}(\lambda_s - \lambda_{k+1})^{-1}$ функция u_* действительно есть решение (7.11). В силу произвольности решения $v(x, \lambda_{k+1})$ u_* тоже является произвольным решением (7.3) при $\lambda = \lambda_{k+1}$. Таким образом, общее представление решений для (7.11) имеет вид

$$u_1(x, \lambda_1) + \dots + u_{k+1}(x, \lambda_{k+1}).$$

Отсюда по индукции заключаем о справедливости представления (7.7) для любого n.

Покажем еще, что функции u_k в (7.7) однозначно определяются, если известна функция $u(x, A)$. Мы можем, очевидно, считать, что в левой части (7.7) стоит как раз $u(x, A)$. Применяя к левой и правой части этого равенства операторы L, $L^2, \dots$, L^{n-1}, получаем

$$L^k u = (-1)^k(\lambda_1^k u_1 + \dots + \lambda_n^k u_n), \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{7.12}$$

Вместе с (7.7) эти соотношения дают систему алгебраических уравнений для определения $u_1, \dots$, u_n. Ее определитель с точностью до знака совпадает с определителем Вандермонда, который равен $w =$

$(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_{n-1})$. Так как все λ_k различны, то $w\neq 0$. По формулам Крамера однозначно вычисляются

$$u_k=\alpha_{k0}u+\alpha_{k1}Lu+\ldots+\alpha_{k,n-1}L^{n-1}u,\quad k=1,\dots,n. \tag{7.13}$$

Нетрудно, поступив несколько иначе, записать (7.13) с фактически явными значениями α_{ks}. А именно, применив к левой и правой части (7.7) операцию

$$(L+\lambda_1)\dots(L+\lambda_{s-1})(L+\lambda_{s+1})\dots(L+\lambda_n),$$

найдем

$$u_k=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}\frac{L+\lambda_j}{\lambda_j-\lambda_k}u(x,A). \tag{7.14}$$

Очевидно, все приведенные рассуждения сохраняются, если одно из λ_k равно нулю. Этот случай исключен по чисто формальным соображениям, ибо его более удобно включить в вариант 3), излагаемый далее. Ясно также, что структура (7.2) в данном случае не использовалась, в силу чего результат имеет гораздо более общий характер.

2) $k=0$, $k_1,\dots,k_\varkappa$ — произвольные натуральные числа, лишь бы их сумма равнялась n. Уравнение имеет вид

$$(L+\lambda_1)^{k_1}\dots(L+\lambda_\varkappa)^{k_\varkappa}u=0. \tag{7.15}$$

Здесь существенную роль играют операторы

$$D_\alpha\equiv\sum\frac{\alpha!\,x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}\,\partial^\alpha}{\alpha_1!\dots\alpha_m!\,\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}},\quad \alpha=1,2,\dots, \tag{7.16}$$

где символ $\sum$ понимается как в обобщенной формуле бинома Ньютона: нужно взять сумму всевозможных слагаемых указанного вида, причем $\alpha_1+\ldots+\alpha_m=\alpha$. Полагаем D_0 равным оператору тождественного преобразования, $D_{-\alpha}u\equiv 0$. Непосредственной проверкой могут быть установлены тождества

$$D_\alpha\equiv(D_1-\alpha+1)D_{\alpha-1},\quad LD_1\equiv(D_1+p)L. \tag{7.17}$$

Применяя первую из этих формул к самой себе, получим

$$D_\alpha\equiv D_1(D_1-1)\dots(D_1-\alpha+1), \tag{7.18}$$

откуда следует, что

$$D_1^\alpha \equiv D_\alpha + \gamma_1 D_{\alpha-1} + \ldots + \gamma_{n-1} D_1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots . \tag{7.19}$$

Очевидно, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ — вполне определенные постоянные. Пусть теперь $v(x, \lambda)$ — решение уравнения (7.3). С учетом (7.17) – (7.19) вычисляем

$$\begin{aligned}(L+\lambda)D_\alpha v(x,\lambda) \equiv \lambda[D_1(D_1-1)\ldots(D_1-\alpha+1) - \\ - (D_1+p)(D_1+p-1)\ldots(D_1+p-\alpha+1)]v(x,\lambda) \equiv \\ \equiv (-\lambda p\alpha D_{\alpha-1} + \omega_2 D_{\alpha-2} + \ldots + \omega_{\alpha-1} D_1 + \omega_\alpha) v(x,\lambda),\end{aligned} \tag{7.20}$$

где постоянные ω_s определяются однозначно. Применяя последнее соотношение α раз, приходим к формуле

$$(L+\lambda)^\alpha D_\alpha v(x,\lambda) \equiv (-p\lambda)^\alpha \alpha!\, v(x,\lambda). \tag{7.21}$$

Перейдем теперь к доказательству общего представления решений, которое в данном случае имеет вид

$$u(x, A) = \sum_{r=1}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{k_r-1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r), \tag{7.22}$$

где u_{rj} удовлетворяют уравнениям

$$Lu + \lambda_r u = 0, \quad r = 1, \ldots, \varkappa. \tag{7.23}$$

Опять рассуждаем методом индукции. Согласно случаю 1), представление (7.22) имеет место при всех $k_r = 1$. Пусть оно верно для $r_s = \beta_s$, $s = 1, \ldots, \varkappa$. Возьмем $r_1 = \beta_1 + 1$, $r_s = \beta_s$, $s = 2, \ldots, \varkappa$. Очевидно, (7.1) эквивалентно уравнению

$$(L+\lambda_1)^{\beta_1} \ldots (L+\lambda_\varkappa)^{\beta_\varkappa} u = v(x, \lambda_1), \tag{7.24}$$

где $v(x, \lambda_1)$ — произвольное решение (7.23) при $r = 1$. Ищем частное решение для (7.24) в виде $cD_{\beta_1} v(x, \lambda_1)$ с подлежащей определению постоянной "c". Подстановка этой функции в (7.24) с учетом (7.21) показывает, что при

$$c = [(-p\lambda_1)^{\beta_1} \beta_1!\, (\lambda_2 - \lambda_1)^{\beta_2} \ldots (\lambda_\varkappa - \lambda_1)^{\beta_\varkappa}]^{-1}$$

она действительно удовлетворяет данному уравнению. Обозначив $cv = u_{1,\beta_1}(x, \lambda_1)$ и приняв во внимание наше предположение относительно

$r_s = \beta_s$, получим решение вида (7.22) при $k_1 = \beta_1 + 1$, $k_r = \beta_r$, $r = 2, \ldots, \varkappa$. Отсюда по индукции заключаем, что (7.22) верно для любых натуральных $k_1, \ldots, k_\varkappa$.

Как и в случае 1), функции u_{rj} в формуле (7.22) однозначно определяются через $u(x, A)$. Для этой цели нужно к обеим частям (7.22) применить операторы

$$F_{rs}(L) \equiv \frac{(L+\lambda_r)^s}{(-\lambda_r p)^s s!} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma\neq r}}^{\varkappa} \left(\frac{L+\lambda_\sigma}{\lambda_\sigma - \lambda_r}\right)^{k_\sigma}. \tag{7.25}$$

Учитывая (7.20) и получающиеся оттуда тождества

$$(L+\lambda)^{\alpha+l} D_\alpha v(x, \lambda) \equiv 0, \quad l \geqslant 1,$$

находим

$$u_{rs}(x, \lambda_r) = F_{rs}(L) u(x, A) - F_{rs}(L) \sum_{\sigma=s+1}^{k_r-1} D_\sigma u_{r\sigma}(x, \lambda_r), \tag{7.26}$$

$$r = 1, \ldots, \varkappa; \quad s = 0, \ldots, k_r - 1.$$

Полагая здесь $s = k_r - 1$, имеем

$$u_{r,k_r-1}(x, \lambda_r) = F_{r,k_r-1}(L) u(x, A). \tag{7.27}$$

Затем при $r = k_r - 2$ получим

$$u_{r,k_r-2}(x, \lambda_r) = F_{r,k_r-2}(L) u(x, A) - F_{r,k_r-2}(L) u_{r,k_r-1}(x, \lambda_r).$$

Второе слагаемое известно из (7.27), поэтому u_{r,k_r-2} тоже определяются через $u(x, A)$. Продолжая процесс ($s = k_r - 3, \ldots, 0$), найдем последовательно все $u_{rj}(x, \lambda_r)$.

3) Общий случай: k, $k_1, \ldots, k_\varkappa$ — любые натуральные, отличные от нуля числа. Уравнение имеет вид (7.4). Относительно $L^k u$ это есть уравнение (7.15). Поэтому (см. (7.22))

$$L^k u = \sum_{r=1}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{k_r-1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r). \tag{7.28}$$

Докажем, что (7.28) имеет частное решение того же вида, что и его правая часть. Отсюда в силу свойств линейных уравнений будет следовать, что общее представление решений рассматриваемого уравнения дается формулой

$$u(x, A) = v(x) + \sum_{r=1}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{k_r - 1} D_j u_{rj}(x, \lambda_r). \tag{7.29}$$

где $v(x)$ есть решение для

$$L^k v = 0. \tag{7.30}$$

Итак, будем искать частное решение (7.28) в виде его правой части. Очевидно, достаточно рассмотреть частный случай, когда эта правая часть есть

$$\sum_{j=0}^{k-1} D_j u_j(x, \lambda), \quad \lambda \neq 0. \tag{7.31}$$

Следовательно, речь идет о частном решении вида

$$u_* = \sum_{j=0}^{k-1} D_j u_j(x, \lambda).$$

Для подстановки в (7.28) вычисляем $L^k u_*$. Так как (см. (7.20))

$$\begin{gathered}
LD_j v_j \equiv -\lambda D_j v_j + \beta_{11} D_{j-1} v_j + \ldots + \beta_{1j} v_j, \\
L^2 D_j v_j \equiv \lambda^2 D_j v_j + \beta_{21} D_{j-1} v_j + \ldots + \beta_{2j} v_j, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L^k D_j v_j \equiv (-\lambda)^k D_j v_j + \beta_{k1} D_{j-1} v_j + \ldots + \beta_{kj} v_j,
\end{gathered}$$

то

$$\begin{gathered}
L^k u_* \equiv L^k v_0 + L^k D_1 v_1 + \ldots + L^k D_{k-1} v_{k-1} \equiv \\
\equiv (-\lambda)^k v_0 + (-\lambda)^k D_1 v_1 + \gamma_{k1}^1 v_1 + (-\lambda)^k D_2 v_2 + \gamma_{k1}^2 D_1 v_2 + \\
+ \gamma_{k2}^2 v_2 + \ldots + (-\lambda)^k D_{k-2} v_{k-2} + \gamma_{k1}^{k-2} D_{k-3} v_{k-2} + \ldots + \\
+ \gamma_{k,k-2}^{k-2} v_{k-2} + (-\lambda)^k D_{k-1} v_{k-1} + \gamma_{k,1}^{k-1} D_{k-2} v_{k-1} + \ldots + \gamma_{k,k-1}^{k-1} v_{k-1},
\end{gathered}$$

при этом над γ стоят не степени, а индексы. Для того, чтобы выписанное выражение равнялось (7.31), достаточно

$$\begin{aligned}
(-\lambda)^k v_0 + \gamma_{k1}^1 v_1 + \gamma_{k2}^2 v_2 + \ldots + \gamma_{k,k-1}^{k-1} v_{k-1} &= u_0, \\
(-\lambda)^k v_1 + \gamma_{k1}^2 v_2 + \ldots + \gamma_{k,k-2}^{k-1} v_{k-1} &= u_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(-\lambda)^k v_{k-2} + \gamma_{k1}^{k-1} v_{k-1} &= u_{k-2}, \\
(-\lambda)^k v_{k-1} &= u_{k-1}.
\end{aligned}$$

Так как $\lambda \neq 0$, отсюда все v_s определяются. Итак, действительно, общее представление решений имеет вид (7.29).

Как и в предыдущих случаях, нетрудно показать, что v и u_{rj} в формуле (7.29) однозначно определяются, если известна $u(x, A)$. Для этого следует применить к обеим частям операторы

$$\frac{L^k}{(-\lambda_r)^k} F_{rs}(L),$$

где F_{rs} определяются формулами (7.25). В результате получим

$$u_{rs} = \frac{L^k}{(-\lambda_r)^k} F_{rs}(L) u(x, A) - \frac{L^k}{(-\lambda_r)^k} F_{rs}(L) \sum_{\sigma=s+1}^{k_r-1} D_\sigma u_{r\sigma}(x, \lambda_r),$$
$$r = 1, \ldots, \varkappa; \ s = 0, \ldots, k_r - 1.$$

Полагая последовательно $s = k_r - 1,\ k_r - 2, \ldots,\ 0$, вычислим все u_{rs}. После того как все они найдены, из формулы (7.29) определим $v(x)$.

Итак, доказан следующий результат: *любое регулярное решение уравнений* (7.1) – (7.2) *имеет вид* (7.29)*, где v, u_{rj} удовлетворяют соответственно уравнениям* (7.30)*,* (7.23) *и однозначно определяются через* $u(x, A)$.

Данный результат позволяет расщеплять некоторые граничные задачи на более простые. Например, возьмем задачу Гурса об отыскании в области $x_k^0 < x_k < x_k^1$ $(k = 1, \ldots, m)$ функции u, удовлетворяющей уравнению (7.1) – (7.2) и условиям

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial x_k^s}\right|_{x_k = x_k^0} = \gamma_{ks}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m), \qquad k = 1, \ldots, m; \quad s = 0, \ldots, np_k - 1. \tag{7.32}$$

Указанная процедура определения u_{rj}, v по $u(x, A)$ позволяет редуцировать эту задачу к серии задач для более простых уравнений (7.23) и одной задаче для уравнения (7.30). Граничные условия получаемых задач тоже будут относиться к виду (7.32).

Задача для (7.30) решается непосредственным интегрированием. Формальное же интегрирование уравнения (7.23) с учетом граничных условий приводит к уравнению

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) -$$
$$- \lambda_r \int_{x_1^0}^{x_1} \cdots \int_{x_m^0}^{x_m} \prod_{k=1}^{m} \frac{(x_k - t_k)^{p_k - 1}}{(p_k - 1)!} \varphi(t_1, \ldots, t_m) dt_m \ldots dt_1,$$

где f — известная функция. Резольвента данного уравнения получается с помощью стандартной процедуры и имеет вид

$$\lambda_r \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda_r)^i \prod_{k-1}^{m} \frac{(x_k - t_k)^{ip_k + p_k - 1}}{(ip_k + p_k - 1)!}.$$

Если все $p_k = 1$, это есть умноженная на λ_r обобщенная гипергеометрическая функция

$${}_1F_m\Big(1; 1, \ldots, 1; -\lambda_r \prod_{k=1}^{m} (x_k - t_k)\Big)$$

в обозначениях из [1, с. 183].

Предыдущий текст представляет собой изложение статьи [30]. Работа в данном направлении была продолжена автором. В частности обнаружилось, что аналогичные рассуждения могут быть проведены в пространстве E_{m+s} с координатами $(x, t) = (x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_s)$, при этом оператор L вместо (7.2) дается формулой

$$Lu \equiv \sum c_{p_1 \ldots p_m}(t) L_{p_1 \ldots p_m} \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_m^{p_m}}, \quad p \geqslant 1. \tag{7.33}$$

Символ $\sum$ здесь означает сумму всевозможных слагаемых указанного вида при фиксированном значении p, $L_{p_1 \ldots p_m}$ — линейные дифференциальные операторы конечного порядка по переменным $t_1, \ldots, t_s$, функции $c_{p_1 \ldots p_m}(t)$ принадлежат классу гладкости регулярных решений уравнения (7.1). В процессе рассуждений изменятся лишь вычисления при выводе второго тождества (7.17). Представление же решений (7.29) и оператор D_α остаются без изменений. Сохраняются и формулы, позволяющие выделять v, u_{rj} по известной функции u. Естественно, что u, v, u_{rj} будут здесь зависеть от t, а не только от x. Затем Ю.В. Малышев предложил распространение полученных результатов на случай уравнения

$$L^n u + \sum_{k=1}^{n} a_k L^{n-k} M^k u = 0, \tag{7.34}$$

где L дается формулой (7.33), а M определяется аналогично:

$$Mu \equiv \sum b_{q_1 \ldots q_m}(t) M_{q_1 \ldots q_m} \frac{\partial^q u}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_m^{q_m}}. \tag{7.35}$$

Вместо $p \geqslant 1$ требуется $p+q \geqslant 1$. Вместо соотношений (7.4), (7.17_2) и (7.21) следует использовать соответственно

$$L^k(L+\lambda_1 M)^{k_1}\dots(L+\lambda_\varkappa M)^{k_\varkappa}u = 0,$$

$$(L+\lambda M)D_1 \equiv (D_1+p)L + \lambda(D_1+q)M,$$

$$(L+\lambda M)^\alpha D_\alpha v(x,t,\lambda) \equiv [\lambda(q-p)]^\alpha \alpha!\, M^\alpha v(x,t,\lambda),$$

где $v(x,t,\lambda)$ — решение уравнения $Lv+\lambda Mv = 0$, а λ_k — те же самые, что в (7.4). Правая часть (7.29), где v по-прежнему удовлетворяет $L^k v = 0$, а u_{rj} — уравнениям

$$Lu_{rj} + \lambda_r M u_{rj} = 0, \tag{7.36}$$

будет решением уравнения (7.34), (7.33), (7.35).

К сожалению, вопрос об однозначном определении u_{rj}, v через $u(x,t,A)$ удалось решить лишь в случаях, когда u_{rj} наряду с (7.36) удовлетворяют еще уравнениям

$$M^\beta u_{rj} - \mu_r u_{rj} = 0$$

с константами β, μ_r, определяемыми через p, q, λ_r [33].

2. Образующий оператор фуксова типа

Пусть L — линейный оператор вида

$$L \equiv t^{\alpha+\nu}\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} + t^{\alpha+\nu-1}L_1\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}} + \ldots + t^{\alpha+1}L_{\nu-1}\frac{\partial}{\partial t} + t^\alpha L_\nu, \tag{7.37}$$

действующий в некоторой области $(m+1)$-мерного пространства с координатами $(x,t) = (x_1,\dots,x_m,t)$, $\alpha = const$, L_k $(k = 1,\dots,\nu)$ — произвольные линейные операторы по переменным $x_1,\dots,x_m$, коэффициенты которых не зависят от t. Некоторые авторы [121], [127], [128] называют конструкции, подобные (7.37), операторами фуксова типа.

Речь идет об уравнении (7.1) с оператором L вида (7.37). Уравнение по-прежнему можно записать в форме (7.4) и рассуждать по схеме предыдущего пункта. Будем при этом различать два случая: $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$.

Пусть $\alpha \neq 0$ и рассматриваются варианты 1) – 3) для λ_k. Все рассуждения варианта 1) проходят без каких-либо изменений, приводя к представлению вида (7.7). В варианте 2) вместо оператора (7.16) следует взять

$$D_j \equiv t^j \frac{\partial^j}{\partial t^j} \; (j = 1, 2, \dots), \quad D_0 u \equiv u, \quad D_{-j} u \equiv 0. \tag{7.38}$$

Подобно (7.17), имеют место тождества

$$D_j \equiv (D_1 - j + 1) D_{j-1}, \quad L D_1 \equiv (D_1 - \alpha) L,$$

с помощью которых приходим к аналогу (7.21):

$$(L + \lambda)^j D_j v(x, t, \lambda) \equiv (\alpha\lambda)^j j!\, v(x, t, \lambda),$$

где $v(x, t, \lambda)$ — решение уравнения $Lv + \lambda v = 0$. Все остальное в рассуждениях и этого, и следующего варианта 3), остается в силе и приводит к формуле

$$u(x, t, A) = v(x, t) + \sum_{r=1}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{k_r - 1} t^j \frac{\partial^j u_{rj}(x, t, \lambda_r)}{\partial t^j},$$

причем v, u_{rj} удовлетворяют уравнениям $L^k v = 0$, $L u_{rj} + \lambda_r u_{rj} = 0$ и однозначно вычисляются через $u(x, t, A)$ [23] по тем же формулам с операторами $F_{rs}(L)$, что и в предыдущем пункте, только следует вместо $-p$ положить α и считать L, D_σ заданными с помощью (7.37), (7.38).

В случае $\alpha = 0$ оператор (7.37) имеет по переменной t структуру дифференциального оператора из уравнения Эйлера, который с помощью подстановки $t = e^\tau$ приводится к виду

$$\frac{\partial^\nu}{\partial \tau^\nu} + L_1^* \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial \tau^{\nu-1}} + \ldots + L_\nu^*,$$

L_k^* — операторы по x. Далее снова обозначим τ через t и уберем звездочки над L_k. Иначе говоря, будем рассматривать уравнение (7.1) с оператором

$$L \equiv \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} + L_1 \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}} + \ldots + L_\nu. \tag{7.39}$$

Здесь нет особого смысла выделять в рассуждениях корень $\lambda = 0$ уравнения (7.5), поэтому сразу будем считать, что среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa$ может оказаться и равный нулю. Если все эти корни простые, то, как и в предыдущих аналогичных случаях,

$$\begin{aligned} u(x,t,A) &= \sum_{k=1}^{n} u(x,t,\lambda_k), \quad Lu_k + \lambda_k u_k \equiv 0, \\ u(x,t,\lambda_k) &= \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)^{-1} (L+\lambda_j) u(x,t,A). \end{aligned} \tag{7.40}$$

Пусть теперь корни λ_k могут быть кратными, но $\nu = 1$. Общее представление решений имеет в этом случае вид

$$u(x,t,A) = \sum_{r=1}^{\varkappa} \sum_{j=0}^{k_r-1} t^j u_{rj}(x,t,\lambda_r), \quad (L+\lambda_r)u_{rj} \equiv 0. \tag{7.41}$$

Для доказательства опять используется метод индукции. На основании (7.40) формула (7.41) верна при $k_s = 1$ $(s = 1, \dots, \varkappa)$. Пусть она имеет место для $k_s = \beta_s$ $(s = 1, \dots, \varkappa - 1)$, $k_\varkappa = \beta_\varkappa + 1$. Соответствующее уравнение можно записать в форме

$$(L+\lambda_1)^{\beta_1} \dots (L+\lambda_\varkappa)^{\beta_\varkappa} u = v(x,t,\lambda_\varkappa), \quad (L+\lambda_\varkappa)v \equiv 0. \tag{7.42}$$

Как и в случае уравнения (7.24) убеждаемся, что существует частное решение (7.42) вида $ct^{\beta_\varkappa} v(x,t,\lambda_\varkappa)$, где

$$c = [\beta_\varkappa!\, (\lambda_1 - \lambda_\varkappa)^{\beta_1} \dots (\lambda_{\varkappa-1} - \lambda_\varkappa)^{\beta_{\varkappa-1}}]^{-1}.$$

Отсюда, на основании свойств линейных уравнений и в силу индукции заключаем о справедливости представления (7.41) для любых натуральных k_s.

Применяя к обеим частям (7.41) несколько более простые, чем (7.25), операторы

$$F_{rs}(L) \equiv \frac{(L+\lambda_r)^s}{s!} \prod_{\substack{\sigma=1 \\ \sigma\neq r}}^{\varkappa} (\lambda_\sigma - \lambda_r)^{-k_\sigma} (L+\lambda_\sigma)^{k_\sigma},$$

получим

$$u_{rs} = F_{rs}(L)u(x,t,A) - F_{rs}(L) \sum_{\sigma=s+1}^{k_r-1} t^\sigma u_{r\sigma}(x,t,\lambda_r). \tag{7.43}$$

Полагая $s = k_r - 1,\ k_r - 2, \ldots, 0$, найдем последовательно все функции u_{rj}, если известна $u(x, t, A)$.

Остановимся, наконец, на общем случае, когда $k_1,\ k_\varkappa, \ldots, \nu$ — произвольные натуральные числа. Покажем, что представление (7.41) имеет место, если операторы L_k в (7.39) коммутируют между собой, а уравнение

$$Tu \equiv \nu \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial t^{\nu-1}} + (\nu - 1) L_1 \frac{\partial^{\nu-2} u}{\partial t^{\nu-2}} + \ldots + L_{\nu-1} u = f, \tag{7.44}$$

где f удовлетворяет уравнению $Lf + \lambda f = 0$, допускает решение, тоже являющееся решением уравнения для f.

Получим сначала одну вспомогательную формулу. Пусть $u(x, t, \lambda)$ есть решение уравнения $Lu + \lambda u = 0$. Вычисляем

$$\begin{gathered}
(L + \lambda) t^k u = t^k \frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} + k C_\nu^1 t^{k-1} \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial t^{\nu-1}} + \ldots + \\
+ L_1 \left(t^k \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial t^{\nu-1}} + k C_{\nu-1}^1 t^{k-1} \frac{\partial^{\nu-2} u}{\partial t^{\nu-2}} + \ldots \right) + L_\nu (t^k u) + \lambda t^k u = \\
= t^k (L + \lambda) u + k t^{k-1} \left(\nu \frac{\partial^{\nu-1} u}{\partial t^{\nu-1}} + (\nu - 1) L_1 \frac{\partial^{\nu-2} u}{\partial t^{\nu-2}} \ldots + L_{\nu-1} u \right) + \\
+ k(k-1) t^{k-2} \left(C_\nu^2 \frac{\partial^{\nu-2} u}{\partial t^{\nu-2}} + C_{\nu-1}^2 L_1 \frac{\partial^{\nu-3} u}{\partial t^{\nu-3}} + \ldots + L_{\nu-2} u \right) + \\
+ \ldots + k(k-1) \ldots (k - s + 1) t^{k-s} \left(C_\nu^s \frac{\partial^{\nu-s} u}{\partial t^{\nu-s}} + \right. \\
\left. + C_{\nu-1}^s L_1 \frac{\partial^{\nu-s-1} u}{\partial t^{\nu-s-1}} + \ldots + L_{\nu-s} u \right) + \ldots .
\end{gathered} \tag{7.45}$$

При $k \geqslant \nu$ последнее слагаемое в правой части соотношения (7.45) есть $k(k-1) \ldots (k - \nu + 1) t^{k-\nu} u$, а при $\nu > k$

$$k! \left(C_\nu^k \frac{\partial^{\nu-k} u}{\partial t^{\nu-k}} + C_{\nu-1}^k L_1 \frac{\partial^{\nu-k-1} u}{\partial t^{\nu-k-1}} + \ldots + L_{\nu-k} u \right).$$

Обозначив операторы при степенях t^s $(s = 0, \ldots, k-2)$ через $L_{s,1}$ и приняв во внимание, что оператор при t^{k-1} есть kT (см. (7.44)), перепишем (7.45) так

$$(L + \lambda) t^k u = k t^{k-1} T u + t^{k-2} L_{k-2,1} u + \ldots + L_{0,1} u. \tag{7.46}$$

Очевидно, при $k > \nu$ имеем $L_{s,1}u \equiv 0$ $(s = 0, \ldots, k - \nu - 1)$. Ясно также, что T, L_k $(k = 1, \ldots, \nu)$ и $L_{s,1}$ $(s = 0, \ldots, k-2)$ перестановочны с L и друг с другом, и что все они принадлежат к виду (7.39). Отсюда, в частности следует, что если $Lu + \lambda u \equiv 0$, то Tu и $L_{s,1}u$ тоже удовлетворяют этому уравнению. Учитывая это, получаем из (7.46)

$$(L+\lambda)^2 t^k u = k(k-1)t^{k-2}T^2 u + t^{k-3}L_{k-3,2}u + \ldots + L_{0,2}u,$$

где $L_{s,2}$ обладают теми же свойствами, что $L_{s,1}$. Поэтому мы можем продолжить процесс вычисления $(L+\lambda)^\sigma t^k u$. На k-ом шаге найдем

$$(L+\lambda)^k t^k u(x,t,\lambda) = k!\, T^k u(x,t,\lambda). \tag{7.47}$$

С помощью этой формулы непосредственной проверкой убеждаемся, что правая часть равенства (7.41) действительно является решением уравнения (7.1). Заметим, что до сих пор мы использовали лишь коммутативность L_k. Докажем теперь. что все решения даются формулой (7.41). Как в предыдущем варианте, рассуждаем методом индукции. При этом до получения уравнения (7.42) все повторяется. Будем искать частное решение этого уравнения в виде

$$t^{\beta_\varkappa} u^*(x,t,\lambda_\varkappa).$$

Учитывая соотношение (7.47), возможность перестановки операторов-сомножителей в левой части (7.42), а также тот факт, что $R^{\beta_\varkappa}u^*$ является решением для $Lu + \lambda_\varkappa u = 0$, находим

$$R^{\beta_\varkappa}u^* = v_0(x,t,\lambda_\varkappa),$$

причем v_0 отличается от v лишь числовым множителем. Пусть решение уравнения (7.44), удовлетворяющее уравнению для f, записывается с помощью операции Q_λ, применяемой к f. Тогда легко видеть, что функция $u^* = Q_\lambda^{\beta_\varkappa} v_0$ будет одновременно удовлетворять (7.44) и уравнению для f, то есть обладает нужными нам свойствами. Отсюда на основании индукции и свойств линейных уравнений снова делаем вывод о справедливости представления (7.41).

В том, что (7.44) может иметь решение, удовлетворяющее одновременно уравнению для f, можно убедиться на частном случае

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial}{\partial t} + M, \tag{7.48}$$

где $b = const$, M — линейный дифференциальный оператор по x. К этому случаю относятся наиболее известные уравнения математической физики. В данном случае

$$T \equiv 2\frac{\partial}{\partial t} + 2b,$$

и уравнение (7.44) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + bu = \frac{1}{2}v(x,t,\lambda).$$

Его общее решение дается формулой

$$u = e^{-bt}\left[c(x) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{b\tau}v(x,\tau,\lambda)d\tau\right],$$

где $c(x)$ — произвольная функция. Требуя, чтобы $u(x,t)$ удовлетворяла уравнению $Lv + \lambda v = 0$, получаем

$$(M + \lambda - b^2)\left[c(x) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{b\tau}v(x,\tau,\lambda)d\tau\right] + \\ + \frac{e^{bt}}{2}\left[\frac{\partial v(x,t,\lambda)}{\partial t} + bv(x,t,\lambda)\right] = 0. \quad (7.49)$$

В силу уравнения для v и линейности M по x имеем

$$(M+\lambda)\int_0^t e^{b\tau}v(x,\tau,\lambda)d\tau = -\int_0^t e^{b\tau}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2b\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)d\tau = \\ = -e^{bt}\left[\frac{\partial v(x,t,\lambda)}{\partial t} + bv(x,t,\lambda)\right] + \frac{\partial v(x,0,\lambda)}{\partial t} + \\ + bv(x,0,\lambda) + b^2\int_0^t e^{bt}v(x,\tau,\lambda)d\tau.$$

Поэтому соотношение (7.49) переходит в

$$(M + \lambda - b^2)c(x) + \frac{1}{2}\frac{\partial v(x,0,\lambda)}{\partial t} + \frac{b}{2}v(x,0,\lambda) = 0. \quad (7.50)$$

Таким образом, вопрос о существовании оператора Q_λ свелся к решению уравнения (7.50) относительно функции $c(x)$.

Существование оператора Q_λ дает возможность вычислять функции $u_{rj}(x,t,\lambda_r)$ через $u(x,t,A)$. Соответствующие формулы (аналогичные формулам (7.43)) и с теми же F_{rs} имеют вид

$$u_{rs} = Q^s_{\lambda r}F_{rs}(L)u(x,t,A) - Q^s_{\lambda r}F_{rs}(L)\sum_{\sigma=s+1}^{k_r-1} t^\sigma u_{r\sigma}(x,t,\lambda_r),$$

$$r = 1, \dots, \varkappa; \quad s = 0, \dots, k_r.$$

Но однозначности определения u_{rs} здесь гарантировать в общем случае нельзя, так как этот вопрос связан с однозначностью определения операции Q_λ.

Изложенные результаты позволяют расщеплять некоторые граничные задачи для уравнения (7.1) на задачи для более простых уравнений подобно тому, как это указано в п. 1 в случае условий (7.32).

Глава 4. Общая характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка

§ 8. Система двух уравнений на плоскости

1. Постановка задачи и ее редукция к интегральным уравнениям. Условия однозначной разрешимости

1.1. Постановка задачи. В прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$, где x, y — декартовы координаты, рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= a_{11}(x,y)u_1 + a_{12}(x,y)u_2 + f_1(x,y), \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} &= a_{21}(x,y)u_1 + a_{22}(x,y)u_2 + f_2(x,y), \end{aligned} \tag{8.1}$$

с непрерывными в $\overline{D}$ коэффициентами. Решение класса $u_1, u_2, u_{1x}, u_{2y} \in C(D)$ будем называть регулярным в D.

Задача 1. *Требуется найти регулярное в D решение системы* (8.1), *непрерывно продолжимое на ∂D и удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{gathered} \alpha_{11}(y)u_1(x_0,y) + \alpha_{12}(y)u_2(x_0,y) = m_1(y), \\ \alpha_{21}(x)u_1(x,y_0) + \alpha_{22}(x)u_2(x,y_0) = m_2(x), \\ x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_1. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Предполагаем, что выполняются условия гладкости α_{11}, α_{12}, $m_1 \in C[y_0, y_1]$, α_{21}, α_{22}, $m_2 \in C[x_0, x_1]$, причем

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 \neq 0. \tag{8.3}$$

Очевидно, неравенства (8.3) обеспечивают содержательность соотношений (8.2), ибо в противном случае эти граничные условия просто исчезают.

В случае $\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 1$, $\alpha_{12} \equiv \alpha_{21} \equiv 0$ мы будем записывать (8.2) в виде

$$u_1(x_0, y) = \phi_1(y), \quad u_2(x, y_0) = \phi_2(x). \tag{8.4}$$

Задача Гурса (8.1), (8.4), исследованная в работах [87] – [88], является однозначно разрешимой. В общей же постановке задача (8.1), (8.2), как это уже указано в предисловии, является некорректной вплоть до появления в ее решении произвольных функций. Одна из основных целей данного параграфа — получение условий, обеспечивающих либо однозначную разрешимость данной задачи, либо ее разрешимость с точностью до одной произвольной постоянной. Другая цель — выделение случаев решения задачи в явном виде.

Линейное преобразование искомых функций (см. [87]) приводит (8.1) к случаю, когда

$$a_{11} \equiv a_{22} \equiv 0. \tag{8.5}$$

Поэтому далее будем считать эти не нарушающие общности рассуждений тождества выполненными.

1.2. Редукция задачи к интегральным уравнениям. Условия ее однозначной разрешимости. Решение задачи Гурса с условиями (8.4) имеет вид [88, с. 15–22]:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = \phi_1(y) + \int_{y_0}^{y} \phi_1(\tau) L(x, y, x_0, \tau) d\tau + \\ + \int_{x_0}^{x} \phi_2(t) K(x, y, t, y_0) dt + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y) dt + \\ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} [L(x, y, t, \tau) f_1(t, \tau) + K(x, y, t, \tau) f_2(t, \tau)] d\tau dt, \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) = \phi_2(x) + \int_{y_0}^{y} \phi_1(\tau) M(x, y, x_0, \tau) d\tau + \\ + \int_{x_0}^{x} \phi_2(t) N(x, y, t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y} f_2(x, \tau) d\tau + \\ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} [M(x, y, t, \tau) f_1(t, \tau) + N(x, y, t, \tau) f_2(t, \tau)] d\tau dt, \end{aligned} \tag{8.7}$$

где L, K, M, N определяются через коэффициенты a_{12}, a_{21} в виде равномерно сходящихся рядов и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} K(x,y,t,\tau) &= a_{12}(t,y) + \int_t^x a_{12}(\xi,y)N(\xi,y,t,\tau)d\xi, \\ L(x,y,t,\tau) &= \int_t^x a_{12}(\xi,y)M(\xi,y,t,\tau)d\xi, \\ M(x,y,t,\tau) &= a_{21}(x,\tau) + \int_t^y a_{21}(x,\eta)L(x,\eta,t,\tau)d\eta, \\ N(x,y,t,\tau) &= \int_\tau^y a_{21}(x,\eta)K(x,\eta,t,\tau)d\eta. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Считая теперь ϕ_1, ϕ_2 произвольными функциями, мы можем рассматривать (8.6) – (8.7) как общее представление решений нашей системы уравнений. Требуя для (8.6) – (8.7) удовлетворения граничных условий (8.2), получаем

$$\begin{gathered} \alpha_{11}(y)\phi_1(y) + \alpha_{12}(y)\Big[\phi_2(x_0) + \\ + \int_{y_0}^y \phi_1(\tau)M(x_0,y,x_0,\tau)d\tau + \int_{y_0}^y f_2(x_0,\tau)d\tau\Big] = m_1(y), \\ \alpha_{21}(x)\Big[\phi_1(y_0) + \int_{x_0}^x \phi_2(t)K(x,y_0,t,y_0)dt + \\ + \int_{x_0}^x f_1(t,y_0)dt\Big] + \alpha_{22}(x)\phi_2(x) = m_2(x). \end{gathered} \tag{8.9}$$

Полагая в (8.2) $x = x_0$, $y = y_0$, придем к системе алгебраических уравнений для $\phi_1(y_0)$, $\phi_2(x_0)$, которая при выполнении неравенства

$$\det \|\alpha_{ik}(x_0,y_0)\| \neq 0 \tag{8.10}$$

однозначно разрешима. Вследствие этого (8.9) превращаются в два интегральных уравнения

$$\begin{gathered} \alpha_{11}(y)\phi_1(y) + \alpha_{12}(y)\int_{y_0}^y \phi_1(\tau)M(x_0,y,x_0,\tau)d\tau = \omega_1(y), \\ \alpha_{22}(x)\phi_2(x) + \alpha_{21}(x)\int_{x_0}^x \phi_2(t)K(x,y_0,t,y_0)dt = \omega_2(x) \end{gathered} \tag{8.11}$$

с известными правыми частями

$$\omega_1(y) = m_1(y) - \alpha_{12}(y)\Big[\phi_2(x_0) + \int_{y_0}^{y} f_2(x_0,\tau)d\tau\Big],$$

$$\omega_2(x) = m_2(x) - \alpha_{21}(x)\Big[\phi_1(y_0) + \int_{x_0}^{x} f_1(t,y_0)dt\Big].$$

Это есть уравнения Вольтерра, однозначно разрешимые при условиях $\alpha_{11}(y) \neq 0$, $\alpha_{22}(x) \neq 0$. Их решения нетрудно получить в явном виде.

Действительно, рассмотрим первое из этих уравнений, предполагая

$$\alpha_{11}(y) \neq 0. \tag{8.12}$$

Обозначив

$$\theta(y) = \int_{y_0}^{y} \phi_1(\tau)M(x_0,y,x_0,\tau)d\tau \tag{8.13}$$

и приняв во внимание вытекающее из (8.8) соотношение

$$M(x_0,y,x_0,y) = a_{21}(x_0,y), \tag{8.14}$$

найдем

$$\theta'(y) = a_{21}(x_0,y)\phi_1(y). \tag{8.15}$$

Поэтому первое уравнение (8.11) после его умножения на $a_{21}(x_0,y)$ и деления на $\alpha_{11}(y)$ принимает вид

$$\theta'(y) + \frac{\alpha_{12}(y)}{\alpha_{11}(y)}a_{21}(x_0,y)\theta(y) = \frac{a_{21}(x_0,y)}{\alpha_{11}(y)}\omega_1(y).$$

Учитывая получающееся из (8.13) условие $\theta(y_0) = 0$, находим

$$\theta(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{a_{21}(x_0,\eta)}{\alpha_{11}(\eta)}\omega_1(\eta)\exp\Big[\int_{y}^{\eta} \frac{\alpha_{12}(\tau)a_{21}(x_0,\tau)}{\alpha_{11}(\tau)}d\tau\Big]d\eta.$$

Продифференцировав теперь это соотношение и сравнив результат с правой частью (8.15), определим $\phi_1(y)$:

$$\phi_1(y) = \frac{\omega_1(y)}{\alpha_{11}(y)} - \\ - \frac{\alpha_{12}(y)}{\alpha_{11}(y)}\int_{y_0}^{y} \frac{\omega_1(\eta)}{\alpha_{11}(y)}a_{21}(x_0,\eta)\exp\Big[\int_{y}^{\eta} \alpha_{12}(\tau)a_{21}(x_0,\tau)\frac{d\tau}{\alpha_{11}(\tau)}\Big]d\eta. \tag{8.16}$$

Если же

$$\alpha_{11}(y) \equiv 0, \tag{8.17}$$

то в силу (8.3) $\alpha_{12}(y) \neq 0$, и первое соотношение превращается в уравнение Вольтерра первого рода. Дифференцируя его и используя (8.14), найдем

$$\phi_1(y)a_{21}(x_0, y) = \left[\frac{\omega_1(y)}{\alpha_{12}(y)}\right]'.$$

При условии

$$a_{21}(x_0, y) \neq 0 \tag{8.18}$$

отсюда следует

$$\phi_1(y) = [a_{21}(x_0, y)]^{-1}\left[\frac{\omega_1(y)}{\alpha_{12}(y)}\right]'. \tag{8.19}$$

Ясно, что дифференцирование в (8.19) возможно при дополнительных предположениях (см. формулы для правых частей (8.11))

$$m_1(y), \quad \alpha_{12}(y) \in C^1[y_0, y_1]. \tag{8.20}$$

Аналогично решается второе уравнение (8.11). Там вместо (8.13) следует обозначить

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} \phi_2(t)K(x, y_0, t, y_0)dt,$$

а вместо (8.14) использовать вытекающее из (8.8) условие

$$K(x, y_0, x, y_0) = a_{12}(x, y_0).$$

В результате при

$$\alpha_{22}(x) \neq 0 \tag{8.21}$$

найдем

$$\phi_2(x) = \frac{\omega_2(x)}{\alpha_{22}(x)} - \\ - \frac{\alpha_{21}(x)}{\alpha_{22}(x)} \int_{x_0}^{x} \frac{\omega_2(t)}{\alpha_{22}(t)} a_{12}(t, y_0) \exp\Big[\int_{x}^{t} \frac{\alpha_{21}(\xi)}{\alpha_{22}(\xi)} a_{12}(\xi, y_0)d\xi\Big]dt. \tag{8.22}$$

Если же

$$\alpha_{22}(x) \equiv 0, \quad a_{12}(x, y_0) \neq 0, \tag{8.23}$$

то при дополнительном предположении

$$m_2(x), \quad \alpha_{21}(x) \in C^1[x_0, x_1] \tag{8.24}$$

получим

$$\phi_2(x) = \Big[a_{12}(x, y_0)\Big]^{-1} \left[\frac{\omega_2(x)}{\alpha_{21}(x)}\right]'. \tag{8.25}$$

На основании вышеизложенного сформулируем выводы.

Плоская задача (8.1), (8.2), (8.5) однозначно разрешима при выполнении неравенств (8.3), (8.10) с добавлением к ним любого из четырех вариантов условий:

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha_{11}(y)\alpha_{22}(x) \neq 0; \\ 2) & \alpha_{11}(y) \equiv 0, \quad a_{21}(x_0, y)\alpha_{22}(x) \neq 0; \\ 3) & \alpha_{22}(x) \equiv 0, \quad \alpha_{11}(y)a_{12}(x, y_0) \neq 0; \\ 4) & \alpha_{11}(y) \equiv \alpha_{22}(x) \equiv 0, \quad a_{21}(x_0, y)a_{12}(x, y_0) \neq 0. \end{array} \tag{8.26}$$

При этом она редуцируется к задаче Гурса, граничные значения ϕ_1, ϕ_2 которой даются в порядке следования вариантов (8.26) парами формул (8.16), (8.22); (8.19), (8.22); (8.16), (8.25); (8.19), (8.25). В случаях, когда используются формулы (8.19), (8.25), требуется еще дополнительная гладкость исходных данных, определяемая из (8.20) и (8.24) соответственно. Окончательное решение задачи получается по формулам (8.6) – (8.7).

Очевидно, варианты (8.26) отражают требования соотношений (8.12), (8.17), (8.18), (8.21) и (8.23).

Заметим еще, что неравенства (8.3) можно заменить добавлением к 2) – 4) в (8.26) соответственно условий

$$\alpha_{12}(y) \neq 0, \quad \alpha_{21}(x) \neq 0, \quad \alpha_{12}(y)\alpha_{21}(x) \neq 0.$$

2. Связь с одним уравнением второго порядка

Речь по-прежнему идет о задаче (8.1), (8.2) в предположениях (8.3) и (8.5). Дополнительно будем еще считать, что в (8.1) $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$. Это не нарушает общности рассуждений: они все проходят и при отличных от нуля f_1, f_2. Данное предположение лишь несколько упрощает формулы.

Здесь при решении задачи используется связь системы (8.1) с уравнением вида

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0. \tag{8.27}$$

Задача из § 1 редуцируется к задаче Гурса для уравнения (8.27). Имеется два варианта такой редукции. Рассмотрим их последовательно.

2.1. Уравнение для u_1**.** Если продифференцировать первое уравнение (8.1) по y и заменить в полученном соотношении u_2, u_{2y} на их значения, найденные из исходной системы, то получим для $u = u_1(x,y)$ уравнение (8.27) с коэффициентами

$$a = -\frac{a_{12y}}{a_{12}}, \quad b \equiv 0, \quad c = -a_{12}a_{21}. \tag{8.28}$$

Естественно, для обеспечения указанных действий мы полагаем, что

$$a_{12}(x,y) \neq 0, \quad a_{12},\ a_{12y} \in C(\overline{D}). \tag{8.29}$$

Пусть

$$u(x_0,y) = \varphi(y), \quad u(x,y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0) \tag{8.30}$$

есть граничные условия задачи Гурса для уравнения (8.27). Решение такой задачи дается формулой (1.20) из § 1:

$$\begin{aligned} u(x,y) = R(x,y_0,x,y)\psi(x) + R(x_0,y,x,y)\varphi(y) - R(x_0,y_0,x,y)\psi(x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x}\left[b(\alpha,y_0)R(\alpha,y_0,x,y) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y)\right]\psi(\alpha)d\alpha + \\ + \int_{y_0}^{y}\left[a(x_0,\beta)R(x_0,\beta,x,y) - \frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y)\right]\varphi(\beta)d\beta + \\ + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} R(\alpha,\beta,x,y)f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Здесь R — функция Римана рассматриваемого уравнения (8.27). Поэтому для определенных выводов, связанных с отысканием функции $u(x, y)$, нам следует выяснить возможности получения функций φ и ψ из соотношений (8.2), которые можно переписать в форме

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}(y)\varphi(y) + \frac{\alpha_{12}(y)}{a_{12}(x_0, y)}\nu(y) = m_1(y), \\
\alpha_{21}(x)\psi(x) + \frac{\alpha_{22}(x)}{a_{12}(x, y_0)}\psi'(x) = m_2(x).
\end{aligned} \tag{8.32}$$

При записи (8.32) мы воспользовались уравнениями системы (8.1), формулами (8.30) и ввели обозначение $\nu(y) = u_{1x}(x_0, y)$. Очевидно, в силу первого уравнения (8.1) и сделанных выше предположений u_{1x} непрерывно продолжима на характеристику $x = x_0$.

Таким образом, для $\psi(x)$ мы имеем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. При $\alpha_{22}(x) \neq 0$, его решение записывается так:

$$\psi(x) = \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{m_2(t) a_{12}(t, y_0)}{\alpha_{22}(t)} \left[\exp \int_{x_0}^{t} \frac{\alpha_{21}(\xi) a_{12}(\xi, y_0)}{\alpha_{22}(\xi)} d\xi \right] dt + \right.$$
$$\left. + \psi(x_0) \right\} \exp\left[- \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha_{21}(t) a_{12}(t, y_0)}{\alpha_{22}(t)} dt \right]. \tag{8.33}$$

Значение $\psi(x_0)$ следует рассматривать как произвольную постоянную. Если же $\alpha_{22}(x) \equiv 0$, то в силу (8.3) $\alpha_{21} \neq 0$, и $\psi(x)$ определяется из (8.32) однозначно:

$$\psi(x) = \frac{m_2(x)}{\alpha_{21}(x)}. \tag{8.34}$$

Для преобразования первого уравнения (8.32) воспользуемся связью между $\varphi(y)$ и $\nu(y)$. О таких связях говорится в п. 1 § 4. С учетом (8.28) имеем

$$\varphi(y) = \frac{\nu'(y) - \{\ln[a_{12}(x_0, y)]\}_y \nu(y)}{a_{21}(x_0, y) a_{12}(x_0, y)}. \tag{8.35}$$

При этом дополнительно полагаем

$$a_{21}(x_0, y) \neq 0. \tag{8.36}$$

Производная $\nu'(y) = u_{1xy}(x_0, y)$ существует, поскольку u_1 удовлетворяет уравнению вида (8.27) с непрерывными в $\overline{D}$ коэффициентами и $b \equiv 0$. Непрерывность же входящей в уравнение (8.27) функции u_{1x} в области $\overline{D}$ следует из первого соотношения (8.1). Подставляя (8.35) в (8.32), опять приходим к линейному уравнению для $\nu(y)$, решение которого при $\alpha_{11}(y) \neq 0$ есть

$$\nu(y) = \left\{ \int_{y_0}^{y} \frac{m_1(\tau)a_{21}(x_0,\tau)}{\alpha_{11}(\tau)} \left[\exp \int_{y_0}^{\tau} \frac{\alpha_{12}(\eta)a_{21}(x_0,\eta)}{\alpha_{11}(\eta)} d\eta \right] d\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu(y_0)}{a_{12}(x_0,y_0)} \right\} a_{12}(x_0,y) \exp\left[- \int_{y_0}^{y} \frac{\alpha_{12}(\tau)a_{21}(x_0,\tau)}{\alpha_{11}(\tau)} d\tau \right]. \quad (8.37)$$

Здесь $\nu(y_0)$ при $\alpha_{12}(y_0) \neq 0$ вычисляется из (8.32) по формуле

$$\nu(y_0) = \frac{a_{12}(x_0,y_0)}{\alpha_{12}(y_0)} [m_1(y_0) - \alpha_{11}(y_0)\varphi(y_0)],$$

то есть правая часть (8.37) зависит от произвольной постоянной $\varphi(y_0)$. Когда же $\alpha_{12}(y_0) = 0$, из (8.32) получается

$$\varphi(y_0) = \frac{m_1(y_0)}{\alpha_{11}(y_0)}.$$

Но в этом случае $\nu(y_0)$ остается неопределенной величиной, и ее следует рассматривать как произвольную константу. Итак, в любом случае, связанном с предположением $\alpha_{11}(y) \neq 0$, результат подстановки (8.37) в (8.35) определяет $\varphi(y)$ с точностью до одной произвольной постоянной. Наконец, при $\alpha_{11} \equiv 0$ мы сразу из (8.32) имеем

$$\nu(y) = \frac{m_1(y)a_{12}(x_0,y)}{\alpha_{12}(y)},$$

где знаменатель отличен от нуля в силу (8.3). В этом случае $\varphi(y)$ определяется из (8.35) однозначно.

Нам еще следует учесть равенство $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$ из (8.30), обеспечивающее непрерывность граничных значений $u_1(x,y)$ в точке (x_0, y_0). Подставляя в него функции из (8.33) и (8.35), (8.37), мы определим $\psi(x_0)$ через $\varphi(y_0)$ или $\nu(y_0)$. Таким образом, $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ при $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq 0$ определяются с точностью до одной произвольной постоянной, общей для обеих этих функций. Она войдет и в формулу вида (8.31) для $u_1(x,y)$. В случаях же $\alpha_{11} \equiv 0$, $\alpha_{22} \neq 0$ и $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} \equiv 0$

условие $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$ приводит просто к вычислению указанной постоянной, и, следовательно, к однозначности определения $u_1(x, y)$ по формуле (8.31). Наконец, при $\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 0$ это же третье равенство из (8.30) приводит к определенному равенству, связывающему исходные данные задачи при $x = x_0$, $y = y_0$. Его естественно назвать условием согласования.

После того как $u_1(x, y)$ вычислено, вторая искомая функция дается формулой

$$u_2(x, y) = \frac{u_{1x}(x, y)}{a_{12}(x, y)}.$$

Получаем следующий вывод: при условиях (8.29), (8.36) задача (8.1) – (8.3) разрешима с точностью до одной произвольной постоянной, если $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq 0$. В случаях $\alpha_{11} \equiv 0$, $\alpha_{22} \neq 0$ и $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} \equiv 0$ она разрешима безусловно и однозначно. В случае $\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 0$ эта задача однозначно разрешима при выполнении дополнительного условия согласования.

2.2. Аналогичный вариант для u_2. С помощью дифференцирования второго уравнения (8.1) по x получается соответствующее уравнение вида (8.27) для $u = u_2(x, y)$, коэффициенты которого вместо (8.28) записываются в виде

$$a \equiv 0, \quad b = -\frac{a_{21x}}{a_{21}}, \quad c \equiv -a_{12}a_{21}. \tag{8.38}$$

Роль соотношений (8.32) играют равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_{11}(y)}{a_{21}(x_0, y)}\varphi'(y) + \alpha_{12}(y)\varphi(y) = m_1(y), \\ &\frac{\alpha_{21}(x)}{a_{21}(x, y_0)}\mu(x) + \alpha_{22}(x)\psi(x) = m_2(x). \end{aligned} \tag{8.39}$$

Решение первого из этих уравнений дается при $\alpha_{11}(y) \neq 0$ формулой

$$\varphi(y) = \left\{ \int_{y_0}^{y} \frac{m_1(\tau)a_{21}(x_0, \tau)}{\alpha_{11}(\tau)} \left[\exp \int_{y_0}^{\tau} \frac{a_{21}(x_0, \eta)\alpha_{12}(\eta)}{\alpha_{11}(\eta)} d\eta \right] d\tau + \right.$$
$$\left. + \varphi(y_0) \right\} \exp\left[-\int_{y_0}^{y} \frac{\alpha_{12}(\tau)a_{21}(x_0, \tau)}{\alpha_{11}(\tau)} d\tau \right],$$

где $\varphi(y_0)$ играет роль произвольной постоянной. Вместо (8.35) для подстановки во второе уравнение (8.39) используется соотношение из п. 1 § 4, имеющее в данном случае вид

$$\psi(x) = \frac{\mu'(x) - \{\ln[a_{21}(x, y_0)]\}_x \mu(x)}{a_{21}(x, y_0) a_{12}(x, y_0)}, \quad \mu(x) = u_{2y}(x, y_0). \tag{8.40}$$

После этого второе уравнение (8.39) решается при $\alpha_{22}(x) \neq 0$ по формуле

$$\mu(x) = \left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{m_2(t) a_{12}(t, y_0)}{\alpha_{22}(t)} \left[\exp \int_{x_0}^{t} \frac{a_{21}(\xi) a_{12}(\xi, y_0) d\xi}{\alpha_{22}(\xi)} \right] dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu(x_0)}{a_{21}(x_0, y_0)} \right\} a_{21}(x, y_0) \exp \Big[- \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\alpha_{21}(t) a_{12}(t, y_0)}{\alpha_{22}(t)} dt \Big].$$

Здесь $\mu(x_0)$, как и $\nu(y_0)$ в п. 2.1, либо определяется через $\psi(x_0)$, либо нет. Функция же $\psi(x)$ в (8.40) в любом из этих случаев зависит от одной произвольной постоянной.

Когда же $\alpha_{11} \equiv 0$ ($\alpha_{22} \equiv 0$), то $\varphi(\mu)$ определяется однозначно. В комбинациях $\alpha_{11} \equiv 0$, $\alpha_{22} \neq 0$ и $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} \equiv 0$ это ведет к однозначности определения φ и ψ, а при $\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 0$ к однозначности φ и ψ добавляется дополнительное условие согласования. Вместо (8.29), (8.36) для обоснования проводимых рассуждений достаточно требовать выполнения условий:

$$a_{12}(x_1, x_{20}) a_{21}(x, y) \neq 0, \quad a_{21},\ a_{21x} \in C(\overline{D}). \tag{8.41}$$

Для отыскания u_1 по u_2 можно использовать формулу

$$u_1(x, y) = \frac{u_{2y}(xy)}{a_{21}(x, y)}.$$

Из вышеизложенного следует, что в предположениях (8.41) задача (8.1) – (8.3) разрешима при тех же комбинациях требований на α_{11}, α_{22}, что и в п. 2.1. Характер разрешимости тоже совпадает с указанным в п. 2.1.

Замечание. При добавлении к условиям (8.1) – (8.3) требования

$$\det \|\alpha_{ik}\| \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \neq 0 \tag{8.42}$$

во всех отмеченных выше случаях решение задачи может быть лишь единственным. Справедливость этого замечания следует из того, что при (8.42) $\varphi(y_0)$, $\psi(x_0)$ всегда оказываются известными.

Отметим еще, что в случае $\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 0$ неравенство (8.42) в силу (8.3) всегда имеет место.

3. О разрешимости в явном виде

Обратим теперь внимание на то, что функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ определяются в пп. 2.1 – 2.2 через исходные данные рассматриваемой задачи в явном виде. Поэтому во всех случаях, когда задача Гурса для уравнения (8.27) решается в явном виде, в явном же виде решается и задача (8.1) – (8.2).

3.1. Расщепление уравнений вида (8.27). Наиболее простые из таких случаев связаны с обращением в нуль инвариантов

$$h = a_x + ab - c, \quad k = b_y + ab - c \tag{8.43}$$

указанного уравнения (см. п. 3.1 § 1). При этом понятно, что в нашей ситуации достаточно найти в явном виде лишь одну из функций u_1, u_2, поскольку другая тогда может быть вычислена из уравнений (8.1), как это делалось в пп. 2.1 – 2.2.

Для уравнения (8.27), (8.28)

$$h_1 = a_{12}a_{21} - (\ln a_{12})_{xy}, \quad k_1 = a_{12}a_{21}.$$

Из (8.29), (8.36) следует, что возможен лишь вариант $h_1 \equiv 0$. Тогда уравнение для u_1 можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \left[\frac{\partial}{\partial y}\ln a_{12}(x,y)\right]u_1\right) = 0,$$

откуда непосредственным интегрированием при условиях (8.30) находим

$$u_1(x,y) = \varphi(y) + \frac{a_{12}(x,y)}{a_{12}(x,y_0)}[\psi(x) - \psi(x_0)] + \\ + a_{12}(x,y)\int_{y_0}^{y} \frac{\varphi(\tau)}{a_{12}(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\ln\frac{a_{12}(x_0,\tau)}{a_{12}(x,\tau)}\right]d\tau. \tag{8.44}$$

В случае уравнения (8.27), (8.38) формулы (8.43) дают

$$h_2 = a_{12}a_{21}, \quad k_2 = a_{12}a_{21} - (\ln a_{21})_{xy}.$$

В силу (8.41) здесь имеем вариант $k_2 \equiv 0$, когда решение уравнения для $u_2(x,y)$ записывается в виде

$$u_2(x,y) = \psi(x) + \frac{a_{21}(x,y)}{a_{21}(x_0,y)}[\varphi(y) - \varphi(y_0)] + \\ + a_{21}(x,y)\int_{x_0}^{x} \frac{\psi(t)}{a_{21}(t,y)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\ln \frac{a_{21}(t,y_0)}{a_{21}(t,y)}\right] dt. \quad (8.45)$$

Можно указать некоторые структурные представления для a_{12}, a_{21}, обеспечивающие выполнение условий $h_1 \equiv 0$ или $k_2 \equiv 0$. Так, первое из них имеет место, если, например,

$$a_{12} = p(x) + q(y), \quad a_{21} = -\frac{p'(x)q'(y)}{[p(x)+q(y)]^3},$$

а для второго достаточно

$$a_{21} = p_1(x) + q_1(y), \quad a_{12} = -\frac{p_1'(x)q_1'(y)}{[p_1(x)+q_1(y)]^3},$$

В этом можно убедиться непосредственной подстановкой в уравнения $h_1 = 0$ и $k_2 = 0$ соответственно.

Существуют и другие представления, в том числе и более общие, чем только что указанные. Например, тоже непосредственным вычислением можно убедиться, что коэффициенты вида

$$\begin{gathered} a_{12} = p(x) + q(y) + r(x)s(y), \\ a_{21} = \frac{r's'}{[p+q+rs]^2} - \frac{[p'+r's][q'+rs']}{[p+q+rs]^3} \end{gathered} \quad (8.46)$$

обеспечивают выполнение условия $h_1 = 0$, а

$$\begin{gathered} a_{21} = p_1(x) + q_1(y) + r_1(x)s_1(y), \\ a_{12} = \frac{r_1's_1'}{[p_1+q_1+r_1s_1]^2} - \frac{[p_1'+r_1's_1][q_1'+r_1s_1']}{[p_1+q_1+r_1s_1]^3} \end{gathered} \quad (8.47)$$

дают $k_2 = 0$.

Сопоставляя содержание пп. 1 – 2 и только что полученные результаты, приходим к следующему утверждению.

При комбинациях требований на α_{11}, α_{22}, указанных в п. 2.1, исходная задача разрешима в явном виде, если выполнен любой из двух наборов условий:

$$\begin{gathered} 1)\;\; h_1 = a_{12}(x,y)a_{21}(x,y) - [\ln a_{12}(x,y)]_{xy} \equiv 0, \\ a_{12}(x,y)a_{21}(x_0,y) \neq 0, \quad a_{12},\; a_{12y} \in C(\overline{D}); \end{gathered} \tag{8.48}$$

$$\begin{gathered} 2)\;\; k_2 = a_{12}(x,y)a_{21}(x,y) - [\ln a_{21}(x,y)]_{xy} \equiv 0, \\ a_{12}(x,y_0)a_{21}(x,y) \neq 0, \quad a_{21},\; a_{21x} \in C(\overline{D}). \end{gathered} \tag{8.49}$$

Характер разрешимости совпадает с сформулированным в п. 1. Тождества (8.48), (8.49) обеспечиваются, соответственно, представлениями коэффициентов в видах (8.46), (8.47) с произвольными непрерывно дифференцируемыми функциями p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1.

3.2. Использование каскадного интегрирования. Можно продолжить только что проведенные рассуждения, используя методику процесса каскадного интегрирования [71, с. 174]. А именно, если $h_1 \neq 0$, то уравнение для $u_1(x,y)$ перепишется так:

$$[u_{1y} - (\ln a_{12})_y u_1]_x = h_1 u_1. \tag{8.50}$$

Обозначая

$$u_1^* = u_{1y} - (\ln a_{12})_y u_1, \tag{8.51}$$

найдем из (8.51)

$$u_1(x,y) = \frac{u_{1x}^*}{h_1}. \tag{8.52}$$

Исключая из двух последних соотношений u_1 с помощью дифференцирования (8.52) по y, придем к уравнению

$$u_{1xy}^* - (\ln a_{12}h_1)_y u_{1x}^* - h_1 u_1^* = 0. \tag{8.53}$$

Записав для него инвариант типа h из (8.43), найдем

$$h_1^* = h_1 - (\ln h_1 a_{12})_{xy}.$$

Если $h_1^* = 0$, то (8.53) превращается в

$$\frac{\partial}{\partial x}[u_{1y}^* - (\ln h_1 a_{12})_y u_1^*] = 0. \tag{8.54}$$

Условия $u_1(x_0, y) = \varphi(y)$, $u_1(x, y_0) = \psi(x)$ в соответствии с формулой (8.51) перейдут в

$$\begin{gathered} u_1^*(x_0, y) = \varphi'(y) - [\ln a_{12}(x_0, y)]_y \varphi(y) = \varphi^*(y), \\ u_1^*(x, y_0) = \mu(x) - \left[\frac{\partial}{\partial y} \ln a_{12}(x, y)\right]_{y=y_0} \psi(x) = \psi^*(x). \end{gathered} \tag{8.55}$$

При этом $\mu(x) = u_{1y}(x, y_0)$ вычисляется с помощью (8.31):

$$\mu(x) = \psi(x)\left[\frac{\partial R}{\partial y}(x, y_0; x, y)\right]_{y=y_0} + \varphi(y_0)\left[\frac{\partial}{\partial y} R(x_0, y; x, y)\right]_{y=y_0} +$$

$$+R(x_0, y_0; x, y_0)\varphi'(y_0) - \varphi(y_0)\left[\frac{\partial}{\partial y} R(x_0, y_0; x, y)\right]_{y=y_0} +$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left\{b(t, y_0)\left[\frac{\partial}{\partial y} R(t, y_0; x, y)\right]_{y=y_0} - \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial y} R(t, y_0; x, y)\right]_{y=y_0}\right\}\psi(t)dt+$$

$$+\left\{a(x_0, y_0)R(x_0, y_0; x, y_0) - \left[\frac{\partial}{\partial \tau} R(x_0, \tau; x, y)\right]_{\tau=y=y_0}\right\}\varphi(y). \tag{8.56}$$

Из интегрального уравнения для функции Римана (формула (1.17)) имеем

$$R(t, y_0; x, y) = \int_x^t b(\xi, y_0)R(\xi, y_0; x, y)d\xi - \int_{y_0}^{y} a(t, \eta)R(t, \eta; x, y)d\eta -$$

$$- \int_t^x \int_{y_0}^{y} c(\xi, \eta)R(\xi, \eta; x, y)d\eta d\xi + 1.$$

Поэтому

$$\frac{\partial R(t, y_0; x, y)}{\partial t} = b(t, y_0)R(t, y_0; x, y) - \int_{y_0}^{y}\Big[a_t(t, \eta)R(t, \eta; x, y)+$$

$$+a(t, \eta)\frac{\partial R}{\partial t}(t, \eta; x, y)\Big]d\eta + \int_{y_0}^{y} c(t, \eta)R(t, \eta; x, y)d\eta,$$

$$\left[\frac{\partial^2 R(t, y_0; x, y)}{\partial t \partial y}\right]_{y=y_0} = b(t, y_0)\left[\frac{\partial R(t, y_0; x, y_0)}{\partial y}\right]_{y=y_0} -$$

$$- a_t(t, y_0)R(t, y_0; x, y_0) - a(t, y_0)\frac{\partial R(t, y_0; x, y_0)}{\partial t} + +c(t, y_0)R(t, y_0; x, y_0). \tag{8.57}$$

Отсюда следует, что коэффициент при $\psi(t)$ в (8.56) равен

$$[a_t(t, y_0) + a(t, y_0)b(t, y_0) - c(t, y_0)] \exp\Big[\int_x^t b(\xi, y_0)d\xi\Big] = \\ = h(t, y_0) \exp\Big[\int_x^t b(\xi, y_0)d\xi\Big]. \quad (8.58)$$

При этом в (8.57) предварительно сделана замена

$$\frac{\partial R(t, y_0; x, y_0)}{\partial t} = b(t, y_0)R(t, y_0; x, y_0) = b(t, y_0) \exp\Big[\int_x^t b(\xi, y_0)d\xi\Big]$$

на основании формул (41), (44) из [3, с. 170–171]. Учитывая (8.58) и еще некоторые соотношения для функции R из [3, с. 170–171], можем переписать (8.56) в виде

$$\mu(x) = -a(x, y_0)\psi(x) + \Big\{\int_{x_0}^x h(t, y_0)\Big[\exp\int_{x_0}^t b(\xi, y_0)d\xi\Big]\psi(t)dt + \\ + a(x_0, y_0)\psi(x_0) + \varphi'(y_0)\Big\} \exp\Big[\int_{x_0}^x b(\xi, y_0)d\xi\Big].$$

Остается вспомнить, что коэффициенты уравнения берутся из (8.28) и $h = h_1$. Итак,

$$\mu(x) = -\Big[\frac{\partial}{\partial y} \ln a_{12}(x, y)\Big]_{y=y_0} \psi(x) + \int_{x_0}^x \Big\{a_{12}(t, y_0)a_{21}(t, y_0) - \\ - \Big[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln a_{12}(x, y)\Big]_{y=y_0} \psi(t)\Big\}dt - \Big[\frac{\partial}{\partial y} \ln a_{12}(x, y)\Big]_{y=y_0} \psi(x_0) + \varphi'(y_0).$$

Подставляя это значение во вторую формулу (8.55), определим окончательно $\psi^*(x)$. Теперь можно проинтегрировать (8.54) с условиями (8.55). Решение $u_1^*(x, y)$ получается с помощью (8.44), если положить там $\varphi = \varphi^*$, $\psi = \psi^*$ и a_{12} заменить на $h_1 a_{12}$. После этого $u_1(x, y)$ вычисляется из (8.52).

Если взять для (8.53) инвариант типа k из (8.43), то будет $k_1^* = h_1$. Следовательно, требование $k_1^* = 0$ лишь повторяет вариант из п. 3.1, и ничего нового здесь не получается.

В соответствии с каскадным методом можно преобразовать уравнение u_1 еще одним способом. Так как $k_1 \neq 0$, то, переписав это уравнение в форме

$$u_{1xy} - (\ln a_{12})_y u_{1x} = k_1 u_1,$$

и взяв вместо (8.51), (8.52) соотношения

$$\tilde{u}_1 = u_{1x}, \quad u_1 = \frac{\tilde{u}_{1y} - (\ln a_{12})_y \tilde{u}_1}{k_1},$$

после исключения из них u_1 найдем

$$\tilde{u}_{1xy} - (\ln a_{12})_y \tilde{u}_{1x} - \\ - (\ln k_1)_x \tilde{u}_{1y} + [(\ln k_1)_x (\ln a_{12})_y - (\ln a_{12})_{xy} - k_1]\tilde{u}_1 = 0.$$

Инварианты этого уравнения есть

$$\tilde{h}_1 = k_1, \quad \tilde{k}_1 = k_1 - \left(\frac{k_1}{a_{12}}\right)_{xy}.$$

Если во второе равенство подставить значение k_1, то получится $\tilde{k}_1 = k_2$. Следовательно, условия $\tilde{h}_1 = 0$ и $\tilde{k}_1 = 0$ возвращают нас к ситуациям п. 3.1, и новым по сравнению с п. 3.1 случаем является лишь уже рассмотренное нами предположение $h_1^* = 0$. В исходных данных оно имеет вид

$$a_{12}a_{21} - (\ln a_{12})_{xy} - \{\ln a_{12}[a_{12}a_{21} - (\ln a_{12})_{xy}]\}_{xy} = 0. \tag{8.59}$$

Все рассуждения, проведенные здесь с уравнением для $u_1(x, y)$, можно совершенно аналогично осуществить для уравнения с функцией $u_2(x, y)$. В уравнении типа (8.53) искомую функцию можно обозначить $u_2^*(x, y)$. Вместо (8.44) придется использовать (8.45), а роль (8.59) будет играть равенство:

$$a_{12}a_{21} - (\ln a_{21})_{xy} - \{\ln a_{21}[a_{12}a_{21} - (\ln a_{21})_{xy}]\}_{xy} = 0. \tag{8.60}$$

Описанный процесс можно продолжать и далее по схеме каскадного метода, получая на каждом шаге новые пары условий типа $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ и (8.59), (8.60).

Мы видим, что пара (8.59) – (8.60) имеет более сложный характер, чем первая. Тем не менее, нетрудно и здесь указать варианты структуры коэффициентов a_{12}, a_{21}, при которых эти условия выполняются. Остановимся на (8.59). Пусть a_{12} есть произведение функции, зависящей лишь от x, на функцию, зависящую лишь от y:

$$a_{12} = r(x)s(y).$$

Так как $\ln a_{12} = \ln r(x) + \ln s(y)$, то $(\ln a_{12})_{xy} \equiv 0$, вследствие чего $h_1 = rsa_{21}$, и (8.59) принимает вид

$$(\ln h_1)_{xy} = h_1.$$

Полагая $h_1 = e^w$, приходим к уравнению

$$w_{xy} = e^w.$$

Это есть известное уравнение Лиувилля. Оно имеет решение (см. [3], формула (164) на с. 322)

$$e^w = \frac{2X'(x)Y'(y)}{[X(x) + Y(y)]^2},$$

где X, Y — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Таким образом, (8.59) выполняется, если a_{12}, a_{21} имеют структуру

$$a_{12} = r(x)s(y), \quad a_{21} = \frac{2X'(x)Y'(y)}{r(x)s(y)[X(x) + Y(y)]^2}, \tag{8.61}$$

Аналогично устанавливается, что выполнение (8.60) обеспечивается структурными формулами

$$a_{21} = r_1(x)s_1(y), \quad a_{12} = \frac{2X_1'(x)Y_1'(y)}{r_1(x)s_1(y)[X_1(x) + Y_1(y)]^2}. \tag{8.62}$$

Таким образом, если в условиях п. 2.1 или п. 2.2 коэффициенты системы (8.1) удовлетворяют соответственно тождеству (8.59) или (8.60), то исходная задача разрешима в явном виде. При этом для выполнения (8.59) достаточно, чтобы a_{12}, a_{21} имели структуру (8.61), а для осуществления (8.60) — (8.62). Характер разрешимости, указанный в пп. 2.1 – 2.2, сохраняется.

Напомним, что в правых частях (8.61) – (8.62) r, s, X, Y, r_1, s_1, X_1, Y_1 являются произвольными функциями класса C^1.

3.3. Варианты, связанные с построением функции Римана в явном виде. Для уравнения (1.26) в п. 3 § 1 приведены случаи, когда функция Римана в формуле (8.31) может быть записана явно через функцию Бесселя $J_0(z)$. Например для уравнения

$$u_{xy} + m(x)n(y)u = 0$$

функция Римана дается формулой

$$R(x,y;t,\tau) = J_0\biggl(2\Bigl[\int_t^x m(\xi)d\xi \int_\tau^y n(\eta)d\eta\Bigr]^{\frac{1}{2}}\biggr), \tag{8.63}$$

Данная ситуация получается в нашем случае, если коэффициенты системы (8.1) имеют представления

$$a_{12} = p(x), \quad a_{21} = r(x)q(y), \tag{8.64}$$

или

$$a_{21} = p_1(y), \quad a_{12} = q_1(x)r_1(y). \tag{8.65}$$

Формулы (8.64) позволяют найти в явном виде $u_1(x,y)$ по формуле (8.31), если положить в соответствии с (8.63)

$$R = J_0\biggl(2\Bigl[-\int_t^x p(\xi)r(\xi)d\xi \int_\tau^y q(\eta)d\eta\Bigr]^{\frac{1}{2}}\biggr).$$

В условиях же (8.65) найдем функцию $u_2(x,y)$, если положим в (8.31)

$$R = J_0\biggl(2\Bigl[-\int_t^x q_1(\xi)d\xi \int_\tau^y p_1(\eta)r_1(\eta)d\eta\Bigr]^{\frac{1}{2}}\biggr).$$

Функция Римана известна также тогда, когда для коэффициентов уравнения (8.27) выполнены условия

$$a = p(y) + \lambda x, \quad b = q(x) + \lambda y, \quad c - ab - \lambda = m(x)n(y), \quad \lambda = const. \tag{8.66}$$

Так как в уравнении для $u_1(x,y)$ $b \equiv 0$, то $q(x) \equiv 0$, $\lambda = 0$, и соотношения (8.66) приобретают вид

$$-\frac{a_{12y}}{a_{12}} = p(y), \quad -a_{12}a_{21} = m(x)n(y).$$

Если

$$a_{12} = M(x)N(y), \quad a_{21} = M_1(x)N_1(y), \tag{8.67}$$

то, очевидно, достаточно положить

$$p(y) = -\frac{N'(y)}{N(y)}, \quad m(x) = M(x)M_1(x), \quad n(y) = -N(y)N_1(y). \tag{8.68}$$

Остается воспользоваться формулой (1.41) из § 1 для (8.66):

$$R(x,y;t,\tau)=J_0\Big(2\Big[\int_t^x m(\xi)d\xi\int_\tau^y n(\eta)d\eta\Big]^{\frac12}\Big)\sigma(x,y;t,\tau),$$

$$\sigma=\exp\Big[\int_t^x q(\xi)d\xi+\int_\tau^y p(\eta)d\eta+\lambda(xy-t\tau)\Big].$$

С учетом (8.68) находим

$$R(x,y;t,\tau)=\frac{N(\tau)}{N(y)}J_0\Big(2\Big[-\int_t^x M(\xi)M_1(\xi)d\xi\int_\tau^y N(\eta)N_1(\eta)d\eta\Big]^{\frac12}\Big).$$

В случае же уравнения для $u_2(x,y)$ имеем

$$-\frac{a_{21x}}{a_{21}}=q(x),\quad -a_{12}a_{21}=m(x)n(y),\quad \lambda\equiv p(y)\equiv 0.$$

Поэтому для получения $u_2(x,y)$ достаточно положить

$$q(x)=-\frac{M_1'(x)}{M_1(x)},\quad m(x)=M(x)M_1(x),\quad n(y)=-N(y)N_1(y).$$

Тогда находим

$$R=\frac{M_1(t)}{M_1(x)}J_0\Big(2\Big[-\int_t^x M(\xi)M_1(\xi)d\xi\int_\tau^y N(\eta)N_1(\eta)d\eta\Big]^{\frac12}\Big).$$

Поскольку для решения задачи достаточно найти лишь одну из функций u_1, u_2 (см. пп. 2.1 – 2.2), то достаточно воспользоваться лишь одной из двух последних формул для R.

Попробуем теперь применить только что проведенные рассуждения к уравнению (8.53) для $u_1^*(x,y)$. Здесь $b\equiv 0$, $a=-(\ln h_1a_{12})_y$, $-c=h_1=a_{12}a_{21}-(\ln a_{12})_{xy}$. Условия (8.64) приобретают вид

$$h_1a_{12}=p(x),\quad h_1=r(x)q(y).$$

Вычисляя a_{12} с учетом второго соотношения, видим, что $(\ln a_{12})_{xy}\equiv 0$. Поэтому предыдущие соотношения принимают вид $a_{12}^2a_{21}=p(x)$, $a_{12}a_{21}=r(x)q(y)$. Отсюда

$$a_{12}=\frac{p(x)}{r(x)q(y)},\quad a_{21}=\frac{r^2(x)q^2(y)}{p(x)}.$$

Переобозначив $p(x)=C(x)$, $A(x)=\dfrac{p(x)}{r(x)}$, $B(y)=\dfrac{1}{q(y)}$, получим

$$a_{12}=A(x)B(y),\quad a_{21}=\frac{C(x)}{A^2(x)B^2(y)}.\tag{8.69}$$

Данная структура коэффициентов позволяет определить явно u_1^*, а, следовательно, и $u_1(x,y)$.

Если рассмотреть подобным образом уравнение для u_2^* (мы его не выписывали), то вместо (8.69) получим представления

$$a_{21} = A_1(x)B_1(y), \quad a_{12} = \frac{C_1(y)}{A_1^2(x)B_1^2(y)}. \tag{8.70}$$

Если мы попытаемся для уравнения (8.53) использовать условия (8.66), то получим

$$\lambda \equiv 0, \quad q \equiv 0, \quad (\ln h_1 a_{12})_y = p(y), \quad h_1 = m(x)n(y).$$

Отсюда легко вывести, что $a_{12} = \Phi(x)\Phi_1(y)$. В силу этого $h_1 = a_{12}a_{21}$, и, следовательно,

$$a_{21} = \frac{m(x)n(y)}{\Phi(x)\Phi_1(y)}.$$

Очевидно, последние представления есть просто несколько иная запись структурных формул (8.67). Таким образом, в данном случае мы возвращаемся к уже изученной ситуации.

На основании всего изложенного в настоящем п. 3.3 справедливы следующие утверждения.

1) Если в условиях п. 2.1 коэффициенты a_{12}, a_{21} имеют представления хотя бы одного из двух видов

$$\text{а) } a_{12} = p(x), \quad a_{21} = r(x)q(y),$$

$$\text{б) } a_{12} = A(x)B(y), \quad a_{21} = \frac{C(x)}{[A(x)B(y)]^2},$$

то задача (8.1) – (8.3) разрешима в явном виде.

2) Если в условиях п. 2.2 a_{12}, a_{21} записываются хотя бы в одном из двух видов

$$\text{а) } a_{21} = p_1(y), \quad a_{12} = q_1(x)r_1(y),$$

$$\text{б) } a_{21} = A_1(x)B_1(y), \quad a_{12} = \frac{C_1(y)}{[A_1(x)B_1(y)]^2},$$

то исходная задача разрешима в явном виде.

3) В условиях любого из пп. 1 – 2 исходная задача разрешима в явном виде, если имеют место структурные формулы

$$a_{12} = M(x)N(y), \quad a_{21} = M_1(x)N_1(y).$$

Характер разрешимости, указанный в пп. 1 – 2, сохраняется и для только что сформулированных утверждений.

В заключение обратим внимание на многовариантность условий разрешимости, содержащихся в утверждениях 1) – 3). Эта многовариантность порождается четырьмя случаями условий разрешимости, содержащимися в пп. 1 – 2. Таким образом, например, в каждом из утверждений 1) – 3) содержится по восемь вариантов разрешимости, из которых: 2 варианта разрешимости с точностью до одной произвольной постоянной, 4 варианта безусловной и однозначной разрешимости, 2 варианта разрешимости при одном дополнительном условии согласования. Очевидно, предложение 3) содержит четыре варианта разрешимости.

3.4. Примеры нарушения условий предыдущих теорем. Изложенные выше результаты получены в предположениях (8.29), (8.36) и (8.41), при этом из проведенных рассуждений следует, что содержащиеся в указанных формулах неравенства носят характер достаточных для применяемого метода условий. Здесь мы на частных случаях посмотрим, к чему может привести нарушение этих условий.

Пусть сначала $a_{12}(x,y) \equiv 0$, $a_{21}(x_0,y) \neq 0$. Тогда система (8.1) интегрируется непосредственно:

$$u_1 = F_1(y), \quad u_2 = F_2(x) + \int_{y_0}^{y} a_{21}(x,\tau)F_1(\tau)d\tau.$$

Поэтому соотношения (8.2) приобретают вид

$$\alpha_{11}(y)F_1(y) + \alpha_{12}(y)\left[\int_{y_0}^{y} a_{21}(x_0,\tau)F_1(\tau)d\tau + F_2(x_0)\right] = m_1(y),$$

$$\alpha_{21}(x)F_1(y_0) + \alpha_{22}(x)F_2(x) = m_2(x).$$

Задача состоит в том, чтобы отсюда определить функции F_1, F_2. Первое из записанных уравнений с помощью замены

$$\theta(y) = \int_{y_0}^{y} a_{21}(x_0,\tau)F_1(\tau)d\tau$$

приводится к линейному дифференциальному уравнению, и, следовательно, решается в явном виде. Нетрудно убедиться, что здесь получаются следующие результаты, в зависимости от предположений, перечисленных в пп. 1 – 2.

1) $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq 0$. Решение существует и зависит от одной произвольной постоянной.

2) $\alpha_{11} \equiv 0, \alpha_{22} \neq 0$. Решение определяется однозначно.

3) $\alpha_{22} \equiv 0$. Как при $\alpha_{11} \neq 0$, так и при $\alpha_{11} \equiv 0$ задача, вообще говоря, неразрешима. Для ее разрешимости требуется дополнительное предположение

$$\frac{m_2(x)}{\alpha_{21}(x)} = const. \tag{8.71}$$

Решение в этом случае содержит произвольную функцию $F_2(x)$.

4) Если же $a_{12}(x, y) \equiv a_{21}(x_0, y) \equiv 0$, то при $\alpha_{11}\alpha_{22} \neq 0$ задача продолжает оставаться разрешимой с точностью до одной произвольной постоянной.

В остальных случаях для разрешимости нужно требовать либо (8.71), либо подобного условия на $m_1(y)$, либо обоих этих условий. При этом решение содержит либо две произвольные функции F_1, F_2 ($\alpha_{11} \equiv \alpha_{22} \equiv 0$), либо одна из этих функций остается произвольной ($\alpha_{11} \equiv 0$, $\alpha_{22} \neq 0$ или $\alpha_{11} \neq 0$, $\alpha_{22} = 0$).

Во всех перечисленных здесь вариантах решение, если оно существует, записывается в явном виде.

§ 9. Задача в трехмерном пространстве

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $x = (x_1, x_2, x_3) \in D = \{x_{10} < x_1 < x_{11},\ x_{20} < x_2 < x_{21},\ x_{30} < x_3 < x_{31}\}$, а E_i — грани $x_i = x_{i0}$ параллелепипеда D. Рассмотрим в D аналог системы (8.1), имеющий вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(x)u_k + f_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \quad a_{ik},\ f_i \in C(\overline{D}). \tag{9.1}$$

Класс регулярных в D решений (9.1) определяется включениями

$$u_i,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \in C(D), \quad i = 1, 2, 3.$$

Как и в (8.1), не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$a_{kk}(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{9.2}$$

Задача 2. *Найти регулярное в D решение системы* (9.1) – (9.2), *непрерывно продолжимое на ∂D и удовлетворяющее условиям:*

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{3}\alpha_{1k}(x_2,x_3)u_k(x_{10},x_2,x_3)=m_1(x_2,x_3),\\&\sum_{k=1}^{3}\alpha_{2k}(x_1,x_3)u_k(x_1,x_{20},x_3)=m_2(x_1,x_3),\\&\sum_{k=1}^{3}\alpha_{3k}(x_1,x_2)u_k(x_1,x_2,x_{30})=m_3(x_1,x_2),\end{aligned}\tag{9.3}$$

$$\alpha_{ik},\, m_i\in C(\overline{E_i}),\quad i=1,2,3.$$

В случае единичной матрицы $\|\alpha_{ik}(x)\|$ условия (9.3) будем записывать в виде

$$\begin{gathered}u_1(x_{10},x_2,x_3)=\phi_1(x_2,x_3),\quad u_2(x_1,x_{20},x_3)=\phi_2(x_1,x_3),\\u_3(x_1,x_2,x_{30})=\phi_3(x_1,x_2).\end{gathered}\tag{9.4}$$

Этот частный случай (задача Гурса) исследован Т.В. Чекмаревым [87], результаты которого существенно используются в нижеследующих рассуждениях.

1. Редукция к задаче Гурса

1.1. Вывод системы нагруженных интегральных уравнений. Мы будем использовать решение задачи (9.1), (9.4) при произвольных ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 как общее представление решений рассматриваемой системы уравнений. Нам потребуется подробная запись указанного решения. Развернув формулы (24) из [87], имеем:

$$u_1(x)=\phi_1(x_2,x_3)+\int_{x_{10}}^{x_1}\phi_2(\xi_1,x_3)U_{12}^{(12)}(x;\xi_1,x_{20})d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\phi_3(\xi_1,x_2)U_{13}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_{30})d\xi_1+\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_1(\xi_2,x_3)U_{11}^{(12)}(x;x_{10},\xi_2)d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_1(x_2,\xi_3)U_{11}^{(13)}(x;x_{10},\xi_3)d\xi_3+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_1(\xi_2,\xi_3)U_{11}^{(123)}(x;x_{10},\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_3(\xi_1,\xi_2)U_{13}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,x_{30})d\xi_2 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_2(\xi_1,\xi_3)U_{12}^{(123)}(x;\xi_1,x_{20},\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}f_1(\xi_1,x_2,x_3)d\xi_1+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}f_1(\xi_1,\xi_2,x_3)U_{11}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}f_1(\xi_1,x_2,\xi_3)U_{11}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}f_2(\xi_1,\xi_2,x_3)U_{12}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}f_3(\xi_1,\xi_2,x_3)U_{13}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}[f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{11}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$
$$+f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{12}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{13}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1,$$
$$u_2(x)=\phi_2(x_1,x_3)+\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_1(\xi_2,x_3)U_{12}^{(12)}(x;x_{10},\xi_2)d\xi_2+$$
$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_3(x_1,\xi_2)U_{23}^{(23)}(x;\xi_2,x_{30})d\xi_2+\int_{x_{10}}^{x_1}\phi_2(\xi_1,x_3)U_{22}^{(12)}(x;\xi_1,x_{20})d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_2(x_1,\xi_3)U_{22}^{(23)}(x;x_{20},\xi_3)d\xi_3+$$
$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_1(\xi_1,\xi_3)U_{21}^{(123)}(x;x_{10},\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_3(\xi_1,\xi_2)U_{23}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,x_{30})d\xi_2 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_2(\xi_1,\xi_2)U_{22}^{(123)}(x;\xi_1,x_{20},\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{20}}^{x_2}f_2(x_1,\xi_2,x_3)d\xi_2+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}f_1(\xi_1,\xi_2,x_3)U_{21}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1+$$
$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}f_3(x_1,\xi_2,\xi_3)U_{23}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+ \tag{9.5}$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} f_2(\xi_1,\xi_2,x_3)U_{22}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3} f_2(x_1,\xi_2,\xi_3)U_{22}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}[f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{21}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{22}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{23}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1,$$

$$u_3(x)=\phi_3(x_1,x_2)+\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_1(x_2,\xi_3)U_{31}^{(13)}(x;x_{10},\xi_3)d\xi_3+$$

$$+\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_2(x_1,\xi_3)U_{32}^{(23)}(x;x_{20},\xi_3)d\xi_3+\int_{x_{10}}^{x_1}\phi_3(\xi_1,x_2)U_{33}^{(13)}(x;\xi_1,x_{30})d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_3(x_1,\xi_2)U_{33}^{(23)}(x;\xi_2,x_{30})d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_1(\xi_2,\xi_3)U_{31}^{(123)}(x;x_{10},\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}\phi_2(\xi_1,\xi_3)U_{32}^{(123)}(x;\xi_1,x_{20},\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\phi_3(\xi_1,\xi_2)U_{33}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,x_{30})d\xi_2 d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{30}}^{x_3} f_3(x_1,x_2,\xi_3)d\xi_3+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3} f_1(\xi_1,x_2,\xi_3)U_{31}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3} f_2(x_1,\xi_2,\xi_3)U_{32}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3} f_3(\xi_1,x_2,\xi_3)U_{33}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3)d\xi_3 d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3} f_3(x_1,\xi_2,\xi_3)U_{33}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3)d\xi_3 d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}[f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{31}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{32}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)U_{33}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1.$$

Здесь функции $U_\alpha^{(\beta)}$ с верхними и нижними наборами индексов удовлетворяют соотношениям, аналогичным (8.8), которые тоже понадобятся нам в подробной записи (см. формулы (20) – (21) из [87]):

$$U_{11}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_1}^{x_1}a_{12}(t_1,x_2,x_3)U_{21}^{(12)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_1,$$

$$U_{11}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_1}^{x_1}a_{13}(t_1,x_2,x_3)U_{31}^{(13)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_1,$$

$$U_{12}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)=a_{12}(\xi_1,x_2,x_3)+\int_{\xi_1}^{x_1}a_{12}(t_1,x_2,x_3)U_{22}^{(12)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_1,$$

$$U_{13}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3)=a_{13}(\xi_1,x_2,x_3)+\int_{\xi_1}^{x_1}a_{13}(t_1,x_2,x_3)U_{33}^{(13)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_3)dt_1,$$

$$U_{11}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\int_{\xi_1}^{x_1}[a_{12}(t_1,x_2,x_3)U_{21}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$
$$+a_{13}(t_1,x_2,x_3)U_{31}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_1,$$

$$U_{12}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=a_{12}(\xi_1,x_2,x_3)U_{22}^{(23)}(\xi_1,x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)+$$
$$+a_{13}(\xi_1,x_2,x_3)U_{32}^{(23)}(\xi_1,x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)+$$
$$+\int_{\xi_1}^{x_1}[a_{12}(t_1,x_2,x_3)U_{22}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$
$$+a_{13}(t_1,x_2,x_3)U_{32}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_1,$$

$$U_{13}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=a_{12}(\xi_1,x_2,x_3)U_{23}^{(23)}(\xi_1,x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)+$$
$$+a_{13}(\xi_1,x_2,x_3)U_{33}^{(23)}(\xi_1,x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)+$$
$$+\int_{\xi_1}^{x_1}[a_{12}(t_1,x_2,x_3)U_{23}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$
$$+a_{13}(t_1,x_2,x_3)U_{33}^{(123)}(t_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_1,$$

$$U_{21}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)=a_{21}(x_1,\xi_2,x_3)+$$
$$+\int_{\xi_2}^{x_2}a_{21}(x_1,t_2,x_3)U_{11}^{(12)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_2,$$

$$U_{22}^{(12)}(x;\xi_1,\xi_2)=\int_{\xi_2}^{x_2}a_{21}(x_1,t_2,x_3)U_{12}^{(12)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_2,$$

$$U_{22}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3)=\int_{\xi_2}^{x_2}a_{23}(x_1,t_2,x_3)U_{32}^{(23)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2)dt_2,$$

$$
\begin{aligned}
U_{23}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3) = a_{23}(x_1,\xi_2,x_3)+ \\
+\int_{\xi_2}^{x_2} a_{23}(x_1,t_2,x_3)U_{33}^{(23)}(x_1,t_2,x_3;\xi_2,\xi_3)dt_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{21}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a_{21}(x_1,\xi_2,x_3)U_{11}^{(13)}(x_1,\xi_2,x_3;\xi_1,\xi_3)+ \\
+a_{23}(x_1,\xi_2,x_3)U_{31}^{(13)}(x_1,\xi_2,x_3;\xi_1,\xi_3)+ \\
+\int_{\xi_2}^{x_2}[a_{23}(x_1,t_2,x_3)U_{31}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \qquad (9.6) \\
+a_{21}(x_1,t_2,x_3)U_{11}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{22}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \int_{\xi_2}^{x_2}[a_{21}(x_1,t_2,x_3)U_{12}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+ \\
+a_{23}(x_1,t_2,x_3)U_{32}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{23}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a_{21}(x_1,\xi_2,x_3)U_{13}^{(13)}(x_1,\xi_2,x_3;\xi_1,\xi_3)+ \\
+a_{23}(x_1,\xi_2,x_3)U_{33}^{(13)}(x_1,\xi_2,x_3;\xi_1,\xi_3)+ \\
+\int_{\xi_2}^{x_2}[a_{21}(x_1,t_2,x_3)U_{13}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+ \\
+a_{23}(x_1,t_2,x_3)U_{33}^{(123)}(x_1,t_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{31}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3) = a_{31}(x_1,x_2,\xi_3)+ \\
+\int_{\xi_3}^{x_3} a_{31}(x_1,x_2,t_3)U_{11}^{(13)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_3)dt_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{32}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3) = a_{32}(x_1,x_2,\xi_3)+ \\
+\int_{\xi_3}^{x_3} a_{32}(x_1,x_2,t_3)U_{22}^{(23)}(x_1,x_2,t_3;\xi_2,\xi_3)dt_3,
\end{aligned}
$$

$$
U_{33}^{(13)}(x;\xi_1,\xi_3) = \int_{\xi_3}^{x_3} a_{31}(x_1,x_2,t_3)U_{31}^{(13)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_3)dt_3,
$$

$$
U_{33}^{(23)}(x;\xi_2,\xi_3) = \int_{\xi_3}^{x_3} a_{32}(x_1,x_2,t_3)U_{23}^{(23)}(x_1,x_2,t_3;\xi_2,\xi_3)dt_3,
$$

$$
\begin{aligned}
U_{31}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3) = a_{31}(x_1,x_2,\xi_3)U_{11}^{(12)}(x_1,x_2,\xi_3;\xi_1,\xi_2)+ \\
+a_{32}(x_1,x_2,\xi_3)U_{21}^{(12)}(x_1,x_2,\xi_3;\xi_1,\xi_2)+
\end{aligned}
$$

$$+\int_{\xi_3}^{x_3}[a_{31}(x_1,x_2,t_3)U_{11}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+a_{32}(x_1,x_2,t_3)U_{21}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_3,$$

$$U_{32}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=a_{31}(x_1,x_2,\xi_3)U_{12}^{(12)}(x_1,x_2,\xi_3;\xi_1,\xi_2)+$$

$$+a_{32}(x_1,x_2,\xi_3)U_{22}^{(12)}(x_1,x_2,\xi_3;\xi_1,\xi_2)+$$

$$+\int_{\xi_3}^{x_3}[a_{31}(x_1,x_2,t_3)U_{12}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+a_{32}(x_1,x_2,t_3)U_{22}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_3,$$

$$U_{33}^{(123)}(x;\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\int_{\xi_3}^{x_3}[a_{31}(x_1,x_2,t_3)U_{13}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)+$$

$$+a_{32}(x_1,x_2,t_3)U_{23}^{(123)}(x_1,x_2,t_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)]dt_3.$$

Подставив теперь значения (9.5) в условия (9.3), получим

$$\alpha_{11}(x_2,x_3)\phi_1(x_2,x_3)+\alpha_{12}(x_2,x_3)\times$$

$$\times\Bigg[\int_{x_{20}}^{x_2}U_{21}^{(12)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_2)\phi_1(\xi_2,x_3)d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}U_{21}^{(123)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_2,\xi_3)\phi_1(\xi_2,\xi_3)d\xi_3d\xi_2\Bigg]+$$

$$+\alpha_{13}(x_2,x_3)\Bigg[\int_{x_{30}}^{x_3}U_{31}^{(13)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_3)\phi_1(x_2,\xi_3)d\xi_3+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}U_{31}^{(123)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_2,\xi_3)\phi_1(\xi_2,\xi_3)d\xi_3d\xi_2\Bigg]=\gamma_1(x_2,x_3),$$

$$\alpha_{22}(x_1,x_3)\phi_2(x_1,x_3)+\alpha_{21}(x_1,x_3)\times$$

$$\times\Bigg[\int_{x_{10}}^{x_1}U_{12}^{(12)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,x_{20})\phi_2(\xi_1,x_3)d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}U_{12}^{(123)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,x_{20},\xi_3)\phi_2(\xi_1,\xi_3)d\xi_3d\xi_1\Bigg]+$$

$$+\alpha_{23}(x_1,x_3)\Bigg[\int_{x_{30}}^{x_3}U_{32}^{(23)}(x_1,x_{20},x_3;x_{20},\xi_3)\phi_2(x_1,\xi_3)d\xi_3+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}U_{32}^{(123)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,x_{20},\xi_3)\phi_2(\xi_1,\xi_3)d\xi_3d\xi_1\Bigg]=\gamma_2(x_1,x_3),$$

$$\alpha_{33}(x_1,x_2)\phi_3(x_1,x_2)+\alpha_{31}(x_1,x_2)\times$$

$$
\begin{aligned}
&\times\Bigg[\int_{x_{10}}^{x_1} U_{13}^{(13)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,x_{30})\phi_3(\xi_1,x_2)d\xi_1+\\
&+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} U_{13}^{(123)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2,x_{30})\phi_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\Bigg]+\\
&+\alpha_{32}(x_1,x_2)\Bigg[\int_{x_{20}}^{x_2} U_{23}^{(23)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_2,x_{30})\phi_3(x_1,\xi_2)d\xi_2+\\
&+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} U_{23}^{(123)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2,x_{30})\phi_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\Bigg]=\gamma_3(x_1,x_2),\\
&\gamma_1(x_2,x_3)=m_1(x_2,x_3)-\alpha_{12}(x_2,x_3)\Bigg\{\phi_2(x_{10},x_3)+\\
&+\int_{x_{20}}^{x_2}[f_2(x_{10},\xi_2,x_3)+U_{23}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;\xi_2,\xi_{30})\phi_3(x_{10},\xi_2)]d\xi_2+\\
&+\int_{x_{30}}^{x_3} U_{22}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;x_{20},\xi_3)\phi_2(x_{10},\xi_3)d\xi_3+\\
&+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}[U_{23}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)f_3(x_{10},\xi_2,\xi_3)+\\
&+U_{22}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)f_2(x_{10},\xi_2,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_2\Bigg\}-\alpha_{13}(x_2,x_3)\Bigg\{\phi_3(x_{10},x_2)+\\
&+\int_{x_{30}}^{x_3}[f_3(x_{10},x_2,x_3)+U_{32}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;x_{20},\xi_3)\phi_2(x_{10},\xi_3)]d\xi_3+ \qquad (9.7)\\
&+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}[U_{33}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)f_3(x_{10},\xi_2,\xi_3)+\\
&+U_{32}^{(23)}(x_{10},x_2,x_3;\xi_2,\xi_3)f_2(x_{10},\xi_2,\xi_3)]d\xi_3 d\xi_2\Bigg\},\\
&\gamma_2(x_1,x_3)=m_2(x_1,x_3)-\alpha_{21}(x_1,x_3)\Bigg\{\phi_1(x_{20},x_3)+\\
&+\int_{x_{10}}^{x_1}[f_1(\xi_1,x_{20},x_3)+U_{13}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,x_{30})\phi_3(\xi_1,x_{20})]d\xi_1+\\
&+\int_{x_{30}}^{x_3} U_{11}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;x_{10},\xi_3)\phi_1(x_{20},\xi_3)d\xi_3+\\
&+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}[U_{11}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,\xi_2)f_1(\xi_1,x_{20},\xi_3)+
\end{aligned}
$$

$$+U_{13}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,\xi_2)f_3(\xi_1,x_{20},\xi_3)]d\xi_3 d\xi_1\Big\} - \alpha_{23}(x_1,x_3)\Big\{\phi_3(x_1,x_{20})+$$

$$+\int_{x_{30}}^{x_3}[f_3(x_1,x_{20},\xi_3)+U_{31}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;x_{10},\xi_3)\phi_1(x_{20},\xi_3)]d\xi_3+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}[U_{31}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,\xi_3)f_1(\xi_1,x_{20},\xi_3)+$$

$$+U_{33}^{(13)}(x_1,x_{20},x_3;\xi_1,\xi_3)f_3(\xi_1,x_{20},\xi_3)]d\xi_3 d\xi_1\Big\},$$

$$\gamma_3(x_1,x_2)=m_3(x_1,x_2)-\alpha_{31}(x_1,x_2)\Big\{\phi_1(x_2,x_{30})+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}[f_1(\xi_1,x_2,x_{30})+U_{12}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,x_{20})\phi_2(\xi_1,x_{30})]d\xi_1+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}U_{11}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};x_{10},\xi_2)\phi_1(\xi_2,x_{30})d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}[U_{11}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2)f_1(\xi_1,\xi_2,x_{30})+$$

$$+U_{12}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2)f_2(\xi_1,\xi_2,x_{30})]d\xi_2 d\xi_1\Big\} - \alpha_{32}(x_1,x_3)\Big\{\phi_2(x_1,x_{30})+$$

$$+\int_{x_{20}}^{x_2}[f_2(x_1,\xi_2,x_{30})+U_{21}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};x_{10},\xi_2)\phi_1(\xi_2,x_{30})]d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2}[U_{21}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2)f_1(\xi_1,\xi_2,x_{30})+$$

$$+U_{22}^{(12)}(x_1,x_2,x_{30};\xi_1,\xi_2)f_2(\xi_1,\xi_2,x_{30})]d\xi_2 d\xi_1\Big\}.$$

Мы видим, что γ_k содержат значения ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 при фиксированных компонентах вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$: таким образом, система интегральных уравнений (9.7) оказывается нагруженной.

1.2. Условия, обеспечивающие однозначное определение данных Гурса. Нетрудно получить ограничения на коэффициенты граничных условий (9.3), при которых указанные значения ϕ_k однозначно определяются. Сначала, положив в (9.3) $x_i=x_{i0}$ $(i=1,2,3)$, придем к системе алгебраических уравнений для отыскания значений ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 в точке $x_0=(x_{10},x_{20},x_{30})$. Требование

$$\det\|\alpha_{ik}(x_0)\|\neq 0 \tag{9.8}$$

обеспечивает однозначную разрешимость данной системы. Затем в каждом из соотношений (9.7) фиксируем лишь одну из входящих туда компонент x_0. В результате получим три пары уравнений:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}(x_{20},x_3)\phi_1(x_{20},x_3)+\alpha_{12}(x_{20},x_3)\phi_2(x_{10},x_3)=p_1(x_3),\\
&\alpha_{21}(x_{10},x_3)\phi_1(x_{20},x_3)+\alpha_{22}(x_{10},x_3)\phi_2(x_{10},x_3)=q_1(x_3),\\
&\alpha_{11}(x_2,x_{30})\phi_1(x_2,x_{30})+\alpha_{13}(x_2,x_{30})\phi_3(x_{10},x_2)=p_2(x_2),\\
&\alpha_{31}(x_{10},x_2)\phi_1(x_2,x_{30})+\alpha_{33}(x_{10},x_2)\phi_3(x_{10},x_2)=q_2(x_2),\\
&\alpha_{22}(x_1,x_{30})\phi_2(x_1,x_{30})+\alpha_{23}(x_1,x_{30})\phi_3(x_1,x_{20})=p_3(x_1),\\
&\alpha_{32}(x_1,x_{20})\phi_2(x_1,x_{30})+\alpha_{33}(x_1,x_{20})\phi_3(x_1,x_{20})=q_3(x_1).
\end{aligned}\tag{9.9}$$

Здесь p_k, q_k зависят от однократных интегралов с теми же функциями ϕ_k, которые уже имеются в соответствующих правых частях. Например, p_1, q_1 содержат слагаемые

$$\int_{x_{30}}^{x_3} q_{31}(x_{10},x_{20},\xi)\phi_1(x_{20},\xi)d\xi,\quad \int_{x_{30}}^{x_3} q_{32}(x_{10},x_{20},\xi)\phi_2(x_{10},\xi)d\xi.$$

В остальном при условии (9.8) p_k, q_k — полностью известные функции. Таким образом, (9.9) представляют собой три пары интегральных уравнений. Следовательно, для однозначного определения всех ϕ_k при одной фиксированной координате достаточно к (9.8) добавить требования:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}(x_{20},x_3)\alpha_{22}(x_{10},x_3)-\alpha_{12}(x_{20},x_3)\alpha_{21}(x_{10},x_3)\neq 0,\\
&\alpha_{11}(x_2,x_{30})\alpha_{33}(x_{10},x_2)-\alpha_{13}(x_2,x_{30})\alpha_{31}(x_{10},x_2)\neq 0,\\
&\alpha_{22}(x_1,x_{30})\alpha_{33}(x_1,x_{20})-\alpha_{23}(x_1,x_{30})\alpha_{32}(x_1,x_{20})\neq 0.
\end{aligned}\tag{9.10}$$

Отметим, что условия (9.8), (9.10), определяя полностью γ_k, одновременно превращают уравнения (9.7) в независимые друг от друга. Примечательным является также то, что функции $U_\alpha^{(\beta)}$ при указанных в левых частях (9.7) значениях своих аргументов можно явно выразить через коэффициенты исходной системы дифференциальных уравнений (9.1). Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (9.6). Например, в первом уравнении для $U_{21}^{(12)}$ имеем

$$\begin{aligned}
U_{21}^{(12)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_2)&=a_{21}(x_{10},\xi_2,x_3)+\\
&+\int_{\xi_2}^{x_2} a_{21}(x_{10},t_2,x_3)U_{11}^{(12)}(x_{10},t_2,x_3;x_{10},\xi_2)dt_2.
\end{aligned}$$

Второй сомножитель под интегралом есть, в свою очередь, тоже интеграл, но с совпадающими верхним и нижним пределами. Поэтому данная функция совпадает с первым слагаемым. Аналогично

$$U_{21}^{(123)}(x_{10},x_2,x_3;x_{10},\xi_2,\xi_3)=a_{21}(x_{10},\xi_2,x_3)U_{11}^{(13)}(x_{10},\xi_2,x_3;x_{10},\xi_3)+$$

$$+a_{23}(x_{10},\xi_2,x_3)\left[\int_{\xi_3}^{x_3}a_{31}(x_{10},\xi_2,t_3)U_{11}^{(13)}(x_{10},\xi_2,t_3;x_{10},\xi_3)dt_3+\right.$$

$$\left.+a_{31}(x_{10},\xi_2,\xi_3)\right]+\int_{\xi_2}^{x_2}[a_{23}(x_{10},t_2,x_3)U_{31}^{(123)}(x_{10},t_2,x_3;x_{10},\xi_2,\xi_3)+$$

$$+a_{21}(x_{10},t_2,x_3)U_{11}^{(123)}(x_{10},t_2,x_3;x_{10},\xi_2,\xi_3)]dt_2.$$

Все входящие сюда $U_\alpha^{(\beta)}$ оказываются на основании (9.6) равными нулю за счет совпадения пределов интегрирования, вследствие чего функция оказывается равной $a_{31}(x_{10},\xi_2,\xi_3)a_{23}(x_{10},\xi_2,x_3)$. Рассуждая подобным образом и далее, после простых вычислений перепишем уравнения (9.7) в форме:

$$\alpha_{11}(x_2,x_3)\phi_1(x_2,x_3)+\alpha_{12}(x_2,x_3)\left[\int_{x_{20}}^{x_2}a_{21}(x_{10},\xi_2,x_3)\phi_1(\xi_2,x_3)d\xi_2+\right.$$

$$\left.+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}a_{31}(x_{10},\xi_2,\xi_3)a_{23}(x_{10},\xi_2,x_3)\phi_1(\xi_2,\xi_3)d\xi_3d\xi_2\right]+$$

$$+\alpha_{13}(x_2,x_3)\left[\int_{x_{30}}^{x_3}a_{31}(x_{10},x_2,\xi_3)\phi_1(x_2,\xi_3)d\xi_3+\right.$$

$$\left.+\int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3}a_{21}(x_{10},\xi_2,\xi_3)a_{32}(x_{10},x_2,\xi_3)\phi_1(\xi_2,\xi_3)d\xi_3d\xi_2\right]=\gamma_1(x_2,x_3),$$

$$\alpha_{21}(x_1,x_3)\left[\int_{x_{10}}^{x_1}a_{12}(\xi_1,x_{20},x_3)\phi_2(\xi_1,x_3)d\xi_1+\right.$$

$$\left.+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}a_{13}(\xi_1,x_{20},x_3)a_{32}(\xi_1,x_{20},\xi_3)\phi_2(\xi_1,\xi_3)d\xi_3d\xi_1\right]+$$

$$+\alpha_{22}(x_1,x_3)\phi_2(x_1,x_3)+\alpha_{23}(x_1,x_3)\left[\int_{x_{30}}^{x_3}a_{32}(x_1,x_{20},\xi_3)\phi_2(x_1,\xi_3)d\xi_3+\right.\tag{9.11}$$

$$\left.+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3}a_{12}(\xi_1,x_{20},\xi_3)a_{31}(x_1,x_{20},\xi_3)\phi_2(\xi_1,\xi_3)d\xi_3d\xi_1\right]=\gamma_2(x_1,x_3),$$

$$\alpha_{31}(x_1,x_2)\left[\int_{x_{10}}^{x_1}a_{13}(\xi_1,x_2,x_{30})\phi_3(x_1,x_2)d\xi_1+\right.$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} a_{12}(\xi_1,x_2,x_{30})a_{23}(\xi_1,\xi_2,x_{30})\phi_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\Bigg]+$$

$$+\alpha_{32}(x_1,x_2)\Bigg[\int_{x_{20}}^{x_2} a_{23}(x_1,\xi_2,x_{30})\phi_3(x_1,\xi_2)d\xi_2+$$

$$+\int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} a_{21}(x_1,\xi_2,x_{30})a_{13}(\xi_1,\xi_2,x_{30})\phi_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1\Bigg]+$$

$$+\alpha_{33}(x_1,x_2)\phi_3(x_1,x_2)=\gamma_3(x_1,x_2).$$

Используя результаты п. 1 § 1, нетрудно убедиться, что для однозначной разрешимости, например, первого из этих уравнений, достаточно выполнения любой из семи групп условий:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\neq 0;\\
&2)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv a_{31}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{12}(x_2,x_3)a_{21}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad f_3,\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33},\ m_1,\ m_3\in C^1_{x_2};\\
&3)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv a_{21}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{13}(x_2,x_3)a_{31}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad f_2,\ \alpha_{12},\ \alpha_{21},\ \alpha_{13},\ \alpha_{22},\ \alpha_{33},\ m_1,\ m_2\in C^1_{x_3};\\
&4)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv \alpha_{13}(x_2,x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{12}(x_2,x_3)a_{21}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad m_1,\ \alpha_{12}\in C^1_{x_2};\\
&5)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv \alpha_{12}(x_2,x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{13}(x_2,x_3)a_{31}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad m_1,\ \alpha_{13}\in C^1_{x_3};\\
&6)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv \alpha_{13}(x_2,x_3)\equiv a_{21}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0,\\
&\quad \alpha_{12}(x_2,x_3)a_{31}(x_{10},x_2,x_3)a_{23}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad m_1,\alpha_{12}\in C^2_{x_2x_3},\quad f_2,\ a_{23},\ \alpha_{31},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23},\ m_2\in C^1_{x_3};\\
&7)\ \alpha_{11}(x_2,x_3)\equiv \alpha_{12}(x_2,x_3)\equiv a_{31}(x_{10},x_2,x_3)\equiv 0,\\
&\quad \alpha_{13}(x_2,x_3)a_{21}(x_{10},x_2,x_3)a_{32}(x_{10},x_2,x_3)\neq 0,\\
&\quad m_1,\ \alpha_{13}\in C^2_{x_2x_3},\quad f_3,\ a_{32},\ \alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33},\ m_3\in C^1_{x_2}.
\end{aligned}
\tag{9.12}
$$

Здесь включения $f\in C^1_{x_k}(f\in C^2_{x_kx_s})$ означают f, $\partial f/\partial x_k\in C$ (f, $\partial f/\partial x_k$, $\partial f/\partial x_s$, $\partial^2 f/\partial x_k\partial x_s\in C$). К указанным условиям гладкости приводит необходимость в соответствующих случаях дифференцировать уравнение, а, следовательно, и его правую часть γ_1, зависящую от значений ϕ_k, определяемых из (9.9).

Для второго уравнения (9.11) роль, аналогичную (9.12), играют группы требований:

1) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\neq 0$,

2) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv a_{32}(x_1,x_{20},x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{21}(x_1,x_3)a_{12}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0$,
f_3, α_{21}, α_{23}, α_{31}, α_{32}, α_{33}, m_2, $m_3\in C^1_{x_1}$;

3) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv a_{12}(x_1,x_{20},x_3)\equiv 0,\quad \alpha_{23}(x_1,x_3)a_{32}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0$,
f_1, α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{13}, α_{23}, m_1, $m_2\in C^1_{x_3}$;

4) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv\alpha_{23}(x_1,x_3)\equiv 0, \quad \alpha_{21}(x_1,x_3)a_{12}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0,$
$m_2,\ \alpha_{21}\in C^1_{x_1};$

5) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv\alpha_{21}(x_1,x_3)\equiv 0, \quad \alpha_{23}(x_1,x_3)a_{32}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0,$ (9.13)
$m_2,\ \alpha_{23}\in C^1_{x_3};$

6) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv\alpha_{23}(x_1,x_3)\equiv a_{12}(x_1,x_{20},x_3)\equiv 0,$
$\alpha_{21}(x_1,x_3)a_{13}(x_1,x_{20},x_3)a_{32}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0,$
$m_2,\ \alpha_{21}\in C^2_{x_1x_3}, \quad f_1,\ a_{13},\ \alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ m_1\in C^1_{x_3};$

7) $\alpha_{22}(x_1,x_3)\equiv\alpha_{21}(x_1,x_3)\equiv a_{32}(x_1,x_{20},x_3)\equiv 0,$
$\alpha_{23}(x_1,x_3)a_{12}(x_1,x_{20},x_3)a_{31}(x_1,x_{20},x_3)\neq 0$
$m_2,\ \alpha_{23}\in C^2_{x_1x_3}, \quad f_3,\ a_{31},\ \alpha_{31},\ \alpha_{32},\ \alpha_{33},\ m_3\in C^1_{x_1}.$

Аналогично для третьего уравнения (9.11) получим следующие условия однозначной разрешимости:

1) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\neq 0,$

2) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv a_{23}(x_1,x_2,x_{30})\equiv 0, \quad \alpha_{31}(x_1,x_2)a_{13}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$
$f_2,\ \alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23},\ \alpha_{31},\ \alpha_{32},\ m_2,\ m_3\in C^1_{x_1};$

3) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv a_{13}(x_1,x_2,x_{30})\equiv 0, \quad \alpha_{32}(x_1,x_2)a_{23}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$
$f_1,\ \alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{31},\ \alpha_{32},\ m_1,\ m_3\in C^1_{x_2};$

4) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv\alpha_{32}(x_1,x_2)\equiv 0, \quad \alpha_{31}(x_1,x_2)a_{13}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$
$m_3,\ \alpha_{31}\in C^1_{x_1};$

5) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv\alpha_{31}(x_1,x_2)\equiv 0, \quad \alpha_{32}(x_1,x_2)a_{23}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$ (9.14)
$m_3,\ \alpha_{32}\in C^1_{x_2};$

6) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv\alpha_{32}(x_1,x_2)\equiv a_{13}(x_1,x_2,x_{30})\equiv 0,$
$\alpha_{31}(x_1,x_2)a_{12}(x_1,x_2,x_{30})a_{23}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$
$m_3,\ \alpha_{31}\in C^2_{x_1x_2}, \quad f_1,\ a_{12},\ \alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ m_1\in C^1_{x_2};$

7) $\alpha_{33}(x_1,x_2)\equiv\alpha_{31}(x_1,x_2)\equiv a_{23}(x_1,x_2,x_{30})\equiv 0,$
$\alpha_{32}(x_1,x_2)a_{13}(x_1,x_2,x_{30})a_{21}(x_1,x_2,x_{30})\neq 0,$
$m_3,\ \alpha_{32}\in C^2_{x_1x_2}, \quad f_2,\ a_{21},\ \alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \alpha_{23},\ m_2\in C^1_{x_1}.$

Взяв в (9.12) – (9.14) по одной из указанных семи групп и объединив их друг с другом, получим 343 варианта условий однозначной разрешимости системы интегральных уравнений (9.11).

1.3. Замечания о проведенных рассуждениях и формулировка результатов. Очевидно, проведенные рассуждения имеют смысл и без предположений о выполнении условий (9.8), (9.10). Но, конечно, условия совместимости систем алгебраических уравнений для определения значений ϕ_k, входящих в правые части (9.11) (совпадение рангов основных и расширенных матриц) должны быть выполнены, иначе условия (9.3) будут взаимно противоречивыми. При этом часть значений ϕ_k, входящих в правые части (9.11), или даже все они, не определяются и должны рассматриваться как произвольные постоянные или функции. Таким образом, решения интегральных уравнений (9.11) могут содержать произвольные постоянные и произвольные функции, зависящие от одной из переменных x_1, x_2, x_3 (до шести функций).

Обратим внимание также на то, что требования на α_{ik} в (9.12) – (9.14), начиная с четвертых групп, находятся в противоречии с условиями (9.10). Для доведения изложенной схемы рассуждений до конца следует исключить из (9.10) те требования, которые противоречат условиям (9.12) – (9.14). Например, если вариант содержит четвертую группу из (9.12), второе условие из (9.10) не может иметь места. При этом (если указанные выше условия совместности выполнены) хотя бы одна из функций $\phi_1(x_2, x_{30})$, $\phi_3(x_{10}, x_2)$ должна оставаться произвольной. Следовательно, лишь комбинации групп 1) – 3) в (9.12) – (9.14) дают вместе с (9.8), (9.10) условия однозначной разрешимости исходной задачи. Всего таких вариантов будет 27. Решение же в остальных 316 случаях может быть лишь неединственным. В каждом конкретном случае неединственности процесс выяснения числа произвольных функций и констант не содержит принципиальных трудностей, поскольку все сводится к рассмотрению различных систем алгебраических линейных уравнений с двумя или тремя неизвестными.

Из вышеизложенного следует, что трехмерная задача 2 однозначно разрешима при выполнении неравенств (9.8), (9.10) с добавлением к ним любого из двадцати семи вариантов условий, каждый из которых представляет собой объединение по одной из первых трех групп требований в (9.12) – (9.14).

В заключение еще заметим, что нарушение условий вида 7) может сделать исходную задачу существенно более неопределенной, чем в указанных выше случаях. Например, при тождественном обращении в нуль хотя бы одной из трех функций, которые в данных условиях предполагаются отличными от нуля, происходит фактически исчезновение одного из уравнений (9.11), если остальные требования соответствующей группы 7) выполнены. Вследствие этого по крайней мере одна из функций $\phi_1(x_2, x_3)$, $\phi_2(x_1, x_3)$, $\phi_3(x_1, x_2)$ должна оставаться произвольной.

2. Частный случай

Очевидно, содержание п. 1 § 9 представляет собой распространение на трехмерный случай схемы рассуждений из п. 1 § 8. Естественно возникает вопрос о подобном же развитии идеи из пп. 2 – 3 § 8. Основой для рассуждений в п. 2 § 8 являются два обстоятельства: а) возможность редукции системы (8.1) к уравнению вида (8.27); б) возможность получения из соотношений (8.2) граничных значений задачи Гурса для (8.27). Если при $n = 2$ обе эти возможности были реализованы для общей постановки задачи 1, то в случае задачи 2 подобное удалось сделать лишь в весьма частном случае: во-первых, предполагается, что в (9.1) входят лишь коэффициенты a_{12}, a_{23}, a_{31}, а остальные тождественно равны нулю; во-вторых, берется лишь случай, когда соотношения (9.3) превращаются в условия (9.4) задачи Гурса для рассматриваемой системы уравнений.

2.1. Редукция к одному уравнению третьего порядка. Роль уравнения (8.27) при $n = 3$ играет

$$u_{x_1x_2x_3} + au_{x_1x_2} + bu_{x_2x_3} + cu_{x_1x_3} + du_{x_1} + eu_{x_2} + fu_{x_3} + gu = 0. \quad (9.15)$$

Попытки редуцировать к этому уравнению систему (9.1) лишь в предположениях (9.2) с помощью идеи из п. 2 § 8 привели к появлению бесконечно повторяющихся циклических преобразований. Возможно, это указывает на принципиальную неосуществимость обсуждаемой редукции в общем случае. Появления циклов удалось избежать, оставив из всех коэффициентов в (9.1) только a_{12}, a_{23}, a_{31}. Функции $f_i(x)$ можно было при этом сохранить, но мы их тоже будем считать далее нулями, чтобы не усложнять формулы. Итак, пусть

$$a_{12}a_{23}a_{31} \neq 0. \quad (9.16)$$

Исключая из (9.1) искомые функции u_2, u_3 с помощью дифференцирования первого уравнения по x_1, x_2, приходим для $u = u_1$ к уравнению (9.15) с коэффициентами

$$\begin{gathered} b \equiv e \equiv f \equiv 0, \quad a = -[\ln(a_{12}a_{23})]_{x_3}, \quad c = -(\ln a_{12})_{x_2}, \\ d = (\ln a_{12})_{x_2}[\ln(a_{12}a_{23})]_{x_3} - (\ln a_{12})_{x_2x_3}, \quad g = -a_{12}a_{23}a_{31}. \end{gathered} \quad (9.17)$$

Для обеспечения возможности указанных действий мы полагаем, что существуют производные

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}, \frac{\partial a_{12}}{\partial x_3}, \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3}, \frac{\partial^2 a_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} \in C(\overline{D}). \quad (9.18)$$

Аналогично получается, что для u_2 и u_3 коэффициенты уравнения (9.15) определяются соответственно формулами:

$$\begin{gathered} c \equiv d \equiv f \equiv 0, \quad a = -(\ln a_{23})_{x_3}, \quad b = -[\ln(a_{23}a_{31})]_{x_1}, \\ e = (\ln a_{23})_{x_3}[\ln(a_{23}a_{31})]_{x_1} - (\ln a_{23})_{x_1x_3}, \quad g = -a_{12}a_{23}a_{31}; \end{gathered} \tag{9.19}$$

$$\begin{gathered} a \equiv d \equiv e \equiv 0, \quad b = -(\ln a_{31})_{x_1}, \quad c = -[\ln(a_{12}a_{31})]_{x_2}, \\ f = (\ln a_{31})_{x_1}[\ln(a_{12}a_{31})]_{x_2} - (\ln a_{31})_{x_1x_2}, \quad g = -a_{12}a_{23}a_{31}. \end{gathered} \tag{9.20}$$

При этом в случае (9.19) существуют производные

$$\frac{\partial a_{23}}{\partial x_3}, \frac{\partial a_{31}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} \in C(\overline{D}), \tag{9.21}$$

а в случае (9.20)

$$\frac{\partial a_{31}}{\partial x_1}, \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}, \frac{\partial a_{31}}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 a_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} \in C(\overline{D}). \tag{9.22}$$

Заметим, что выполнение (9.16) гарантирует получение уравнения (9.15) для всех функций u_1, u_2, u_3. В то же время, нетрудно заметить, что в случае уравнения для $u = u_1$ достаточно, чтобы только $a_{12}a_{23} \neq 0$. Аналогично, уравнения только для u_2 и только для u_3 обеспечиваются соответственно неравенствами $a_{23}a_{31} \neq 0$ и $a_{12}a_{31} \neq 0$.

В соответствии со схемой рассуждений в п. 2 § 8 теперь нужно получить из (9.3) значения искомой функции в (9.15) при $x_k = x_{k0}$, $k = 1, 2, 3$. В п. 2 § 8 для этого были использованы связи между значениями решения (8.27) и его нормальной производной на характеристике.

Ограничимся случаем, когда (9.3) совпадают с (9.4). Итак, получим теперь для каждой из функций u_k условия задачи Гурса, относящиеся к уравнению (9.15). Это есть значения указанных функций при фиксировании одной из переменных. Из (9.4) известно, что

$$u_1(x_{10}, x_2, x_3) = \phi_1(x_2, x_3). \tag{9.23}$$

Интегрированием второго и третьего уравнений (9.1) находим

$$u_2(x_{10}, x_2, x_3) = \phi_2(x_{10}, x_3) + \int_{x_{20}}^{x_2} a_{23}(x_{10}, \xi_2, x_3) u_3(x_{10}, \xi_2, x_3) d\xi_2, \tag{9.24}$$

$$u_3(x_{10}, x_2, x_3) = \phi_3(x_{10}, x_2) + \int_{x_{30}}^{x_3} a_{31}(x_{10}, x_2, \xi_3) \phi_1(x_2, \xi_3) d\xi_3. \tag{9.25}$$

Подставляя (9.25) в (9.24), имеем:

$$u_2(x_{10}, x_2, x_3) = \phi_2(x_{10}, x_3) + \int_{x_{20}}^{x_2} a_{23}(x_{10}, \xi_2, x_3)\phi_3(x_{10}, \xi_2)d\xi_2 +$$
$$+ \int_{x_{20}}^{x_2}\int_{x_{30}}^{x_3} a_{23}(x_{10}, \xi_2, x_3)a_{31}(x_{10}, \xi_2, \xi_3)\phi_1(\xi_2, \xi_3)d\xi_3 d\xi_2. \quad (9.26)$$

Аналогично получаются условия типа (9.23) – (9.26) для фиксированных значений x_{20} и x_{30}:

$$u_1(x_1, x_{20}, x_3) = \phi_1(x_{20}, x_3) + \int_{x_{10}}^{x_1} a_{12}(\xi_1, x_{20}, x_3)\phi_2(\xi_1, x_3)d\xi_1,$$
$$u_2(x_1, x_{20}, x_3) = \phi_2(x_1, x_3), \quad (9.27)$$
$$u_3(x_1, x_{20}, x_3) = \phi_3(x_1, x_{20}) + \int_{x_{30}}^{x_3} a_{31}(x_1, x_{20}, \xi_3)\phi_1(x_{20}, \xi_3)d\xi_3 +$$
$$+ \int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{30}}^{x_3} a_{31}(x_1, x_{20}, \xi_3)a_{12}(\xi_1, x_{20}, \xi_3)\phi_2(\xi_1, \xi_3)d\xi_3 d\xi_1;$$

$$u_1(x_1, x_2, x_{30}) = \phi_1(x_2, x_{30}) + \int_{x_{10}}^{x_1} a_{12}(\xi_1, x_2, x_{30})\phi_2(\xi_1, x_{30})d\xi_1 +$$
$$+ \int_{x_{10}}^{x_1}\int_{x_{20}}^{x_2} a_{12}(\xi_1, x_2, x_{30})a_{23}(\xi_1, \xi_2, x_{30})\phi_3(\xi_1, \xi_2)d\xi_2 d\xi_1, \quad (9.28)$$
$$u_2(x_1, x_2, x_{30}) = \phi_2(x_1, x_{30}) + \int_{x_{20}}^{x_2} a_{23}(x_1, \xi_2, x_{30})\phi_3(x_1, \xi_2)d\xi_2,$$
$$u_3(x_1, x_2, x_{30}) = \phi_3(x_1, x_2).$$

Соотношения (9.23) – (9.28) можно записать более компактно:

$$u_k|_{x_i = x_{i0}} = \phi_{ki}(z_i); \quad k, i = 1, 2, 3. \quad (9.29)$$

Здесь z_i получается из (x_1, x_2, x_3) отбрасыванием координаты с номером i, а через ϕ_{ki} обозначены известные правые части предыдущих формул.

Заметим, что (9.29) содержат граничные условия задачи Гурса для трех функций. Для решения же исходной задачи в силу предположения (9.16) достаточно найти одну из них. Например, если мы найдем

u_1, то u_2 и u_3 даются формулами

$$u_2 = \frac{u_{1x_1}}{a_{12}}, \quad u_3 = \frac{u_{1x_1x_2} - (\ln a_{12})_{x_2} u_{1x_1}}{a_{12}a_{23}},$$

непосредственно следующими из (9.1).

В терминах функции Римана R соответствующих уравнений (2.15) функции u_1, u_2, u_3 можно записать по формуле (2.19).

Таким образом, полученный в данном п. 2.1 результат, можно рассматривать, как дополнение к статье Т.В.Чекмарева [87]: для одного случая системы (9.1) установлена возможность записать решение задачи Гурса в терминах функции Римана уравнения (9.15). Конечно, было бы более интересно найти случаи записи решения этой же задачи Гурса в явном виде. К этому мы и переходим.

2.2. О явном решении задачи Гурса. Первая возникающая здесь мысль: проверить условия расщепления оператора в левой части (9.15). Воспользуемся результатами из п. 5 § 2. А именно, пусть

$$\begin{array}{lll} h_1 = a_x + ab - e, & h_2 = a_y + ac - d, & h_3 = b_y + bc - f, \\ h_4 = b_z + ab - e, & h_5 = c_x + bc - f, & h_6 = c_z + ac - d, \\ h_7 = d_x + bd - g, & h_8 = e_y + ce - g, & h_9 = f_z + af - g. \end{array} \tag{9.30}$$

Если обозначить через M класс функций вида $m_1(x_1)m_2(x_2)m_3(x_3)$, то конструкции (9.15) порождают следующие шесть случаев явного построения функций Римана R:

$$\begin{array}{ll} 1)\ h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv 0,\ h_7 \in M; & 2)\ h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 0,\ h_8 \in M; \\ 3)\ h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0,\ h_9 \in M; & 4)\ h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0,\ h_7 \in M; \\ 5)\ h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0,\ h_8 \in M; & 6)\ h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0,\ h_9 \in M. \end{array} \tag{9.31}$$

При этом дополнительно предполагается, что коэффициенты при вторых производных в (9.15) имеют представления

$$\begin{array}{c} a = \alpha(x_3) + \delta x_1 x_2, \quad b = \beta(x_1) + \delta x_2 x_3, \\ c = \gamma(x_2) + \delta x_1 x_3, \quad \delta = const. \end{array} \tag{9.32}$$

Рассмотрим случаи (9.31) – (9.32) последовательно.

Возьмем уравнение для u_1. Непосредственно вычисляем с помощью (9.17) и (9.30):

$$\begin{array}{c} h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0, \quad h_8 \equiv h_9 \equiv a_{12}a_{23}a_{31}, \\ h_1 = -[\ln(a_{12}a_{23})]_{x_1x_3}, \quad h_2 = -(\ln a_{23})_{x_2x_3}, \quad h_5 = -(\ln a_{12})_{x_1x_2}, \\ h_7 = a_{12}a_{23}a_{31} - (\ln a_{12})_{x_1x_2x_3} + \{(\ln a_{12})_{x_2}[\ln(a_{12}a_{23})]_{x_3}\}_{x_1}. \end{array} \tag{9.33}$$

Рассмотрим первый набор (9.31). Из (9.33) видно, что он принимает вид

$$(\ln a_{12})_{x_1x_2} = 0, \quad (\ln a_{23})_{x_2x_3} = 0, \quad [\ln(a_{12}a_{23})]_{x_1x_3} = 0, \\ a_{12}a_{23}a_{31} \in M. \tag{9.34}$$

Из первых двух уравнений (9.34) получаем представления

$$a_{12} = F(x_1, x_3)Y(x_2, x_3), \quad a_{23} = \Phi(x_1, x_2)Q(x_1, x_3), \tag{9.35}$$

$$FY\Phi Q \neq 0, \tag{9.36}$$

где F, Y, Φ, Q — произвольные функции своих аргументов. Подставляя их в третье условие (9.34), получим

$$F(x_1, x_3)Q(x_1, x_3) = f_1(x_1)f_2(x_3) \neq 0 \tag{9.37}$$

с произвольными функциями f_1, f_2. Поэтому

$$a_{12}a_{23} = f_1(x_1)f_2(x_3)\Phi(x_1, x_2)Y(x_2, x_3). \tag{9.38}$$

Так как в (9.17) $b \equiv 0$, то в (9.32) $\beta \equiv 0$, $\delta = 0$, и

$$\ln f_2'(x_3) + [\ln Y(x_2, x_3)]_{x_3} = \alpha(x_3), \quad [\ln Y(x_2, x_3)]_{x_2} = \gamma(x_2).$$

Из последних условий следует, что Y имеет представление

$$Y(x_2, x_3) = A_2(x_2)A_3(x_3) \neq 0. \tag{9.39}$$

Из (9.35) – (9.39) выводим, что a_{12}, a_{23} должны иметь представления

$$a_{12} = F(x_1, x_3)A_2(x_2)A_3(x_3), \quad a_{23} = \Phi(x_1, x_2)\frac{f_1(x_1)f_2(x_3)}{F(x_1, x_3)}, \tag{9.40}$$

где справа все функции являются произвольными и не обращающимися в нуль. Из последнего же условия (9.34) следует, что при этом a_{31} должна иметь вид

$$a_{31} = \frac{\omega(x_1, x_2, x_3)}{\Phi(x_1, x_2)}, \quad \omega \in M. \tag{9.41}$$

Нетрудно видеть, что функции a_{12}, a_{23}, a_{31}, имеющие представления (9.40) – (9.41), существуют (например, если они все принадлежат классу M).

Обратимся теперь к второму набору (9.31), который в данном случае содержит лишь условия:

$$(\ln a_{23})_{x_2x_3} = 0, \quad a_{12}a_{23}a_{31} \in M. \tag{9.42}$$

Отсюда ясно, что представление для a_{23} дается формулой

$$a_{23} = \Phi(x_1, x_2)Q(x_1, x_3) \neq 0.$$

Представления (9.32) будут обеспечены, если дополнительно потребовать, чтобы $Q(x_1, x_3)$ зависела лишь от x_3, а $a_{12} = A_2(x_2)F(x_1, x_3)$. Таким образом, здесь достаточно, чтобы a_{12}, a_{23}, a_{31} представлялись в формах

$$\begin{gathered} a_{12} = A_2(x_2)F(x_1, x_3), \quad a_{23} = \Phi(x_1, x_2)Q_3(x_3), \\ a_{31} = \frac{\omega(x_1, x_2, x_3)}{F(x_1, x_3)\Phi(x_1, x_2)}, \quad \omega \in M. \end{gathered} \tag{9.43}$$

Требования (9.43) менее ограничительны, чем (9.40) – (9.41). Впрочем, это видно и из сравнения (9.42) и (9.34): условия (9.42) получаются из (9.34) отбрасыванием двух требований.

Указанным способом можно перебрать все шесть вариантов (9.31). При этом оказывается, что последний вариант будет наименее ограничительным, поскольку входящие в него тождества выполняются автоматически. На коэффициенты будут накладываться лишь требования (9.32) и последнее из (9.42). Таким образом, достаточно, чтобы коэффициенты системы (9.1) имели представления

$$\begin{gathered} a_{12} = H(x_1, x_3)h(x_2), \quad a_{23} = \frac{L(x_1, x_2)l(x_3)}{H(x_1, x_3)h(x_2)}, \\ a_{31} = \frac{\omega(x_1, x_2, x_3)}{L(x_1, x_2)}, \quad \omega \in M, \end{gathered} \tag{9.44}$$

где H, L, h, l — произвольные, не обращающиеся в нуль, функции.

Если при этом $\omega = m_1(x_1)m_2(x_2)m_3(x_3)$, то функция Римана R дается формулой

$$R(x_1, x_2, x_3, \lambda, \mu, \nu) = {}_0F_2(1, 1; \theta) \exp[h(x_2) + l(x_3) - h(\mu) - l(\nu)],$$

где ${}_0F_2$ — обобщенная гипергеометрическая функция [1, с. 183], а

$$\theta = \int_{x_1}^{\lambda} m_1(\xi_1)d\xi_1 \int_{x_2}^{\mu} m_2(\xi_2)h(\xi_2)d\xi_2 \int_{x_3}^{\nu} l(\xi_3)m_3(\xi_3)d\xi_3.$$

По изложенной выше схеме можно рассуждать и в случаях задач для u_2 и u_3.

Если говорить об уравнении (9.15) для u_2, то из (9.19) и (9.30) находим

$$h_1 \equiv h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0, \quad h_2 = -(\ln a_{23})_{x_2x_3},$$

$$h_3 = -[\ln(a_{23}a_{31})]_{x_1x_2}, \quad h_7 \equiv h_9 \equiv a_{12}a_{23}a_{31},$$

$$h_8 = \{(\ln a_{23})_{x_3}[\ln(a_{23}a_{31})]_{x_1} - (\ln a_{23})_{x_1x_3}\}_{x_2} + a_{12}a_{23}a_{31}.$$

Перебирая все случаи (9.31) – (9.32), получим в качестве наименее ограничительных условий (9.32) и $a_{12}a_{23}a_{31} \in M$. Отсюда выводятся представления, играющие роль (9.44):

$$\begin{gathered} a_{23} = H(x_1, x_2)h(x_3), \quad a_{31} = \frac{L(x_2, x_3)l(x_1)}{H(x_1, x_2)h(x_3)}, \\ a_{12} = \frac{\omega(x_1, x_2, x_3)}{L(x_2, x_3)}, \quad \omega \in M. \end{gathered} \tag{9.45}$$

По сравнению с (9.44), здесь изменились аргументы у произвольных функций в правых частях, а сами правые части определяют уже структуру других коэффициентов.

Аналогичная ситуация будет и для уравнения (9.15) при $u = u_3$. Мы ограничимся лишь указанием формул типа (9.44) – (9.45). Они имеют в данном случае вид

$$\begin{gathered} a_{31} = H(x_2, x_3)h(x_1), \quad a_{12} = \frac{L(x_1, x_3)l(x_2)}{H(x_2, x_3)h(x_1)}, \\ a_{23} = \frac{\omega(x_1, x_2, x_3)}{L(x_1, x_3)}, \quad \omega \in M. \end{gathered} \tag{9.46}$$

Отметим, что формула решения задачи Гурса получена при условии, что коэффициенты уравнения (9.15) удовлетворяют условиям гладкости (2.11).

Таким образом, решение рассматриваемой задачи Гурса может быть записано в явном виде при выполнении (9.16) и хотя бы одного из трех наборов условий: а) (9.18), (9.44); б) (9.21), (9.45); в) (9.22), (9.46).

3. Использование результатов предыдущего параграфа

Указанные результаты можно использовать в случаях, когда задача 2 расщепляется на задачу 1 для двух искомых функций и задачу Коши для третьей из этих функций.

Например, это происходит, если $a_{13} \equiv a_{23} \equiv 0$, $\alpha_{13} \equiv \alpha_{23} \equiv 0$. Тогда для u_1, u_2 мы имеем задачу 1, где коэффициенты системы (8.1) и соотношений (8.2) зависят от параметра x_3, при этом можно в формулах § 8 считать, что $x = x_1$, $y = x_2$. Когда u_1, u_2 из решения задачи 1 определены, их можно подставить в последнее соотношение (9.3), вычислив тем самым значение $u_3(x_1, x_2, x_{30})$. Очевидно, при этом следует еще предполагать, что $\alpha_{33}(x_2, x_3) \neq 0$. Подстановка же u_1, u_2 в третью строку (9.1) дает уравнение для u_3, которое вместе со значением $u_3(x_1, x_2, x_{30})$ представляет собой вышеупомянутую задачу Коши. Она решается непосредственным интегрированием уравнения для u_3.

При осуществлении только что указанной схемы рассуждений следует учитывать зависимость коэффициентов системы уравнений и граничных условий от компоненты x_3, которую на этапе решения задачи 1 можно рассматривать как параметр. В условиях п. 2 характер разрешимости задачи (однозначность) не меняется, но в рассуждениях пп. 2 – 3 вместо произвольной постоянной $\phi(x_{20}) = \psi(x_{10})$ появится произвольная функция $\psi(x_{20}, x_3) = \psi(x_{10}, x_3) = \theta_3(x_3)$. В окончательные формулы решения задачи 2 войдет еще значение $\theta_3(x_{30})$.

Приведем здесь утверждение, аналогичное тем выводам, которые были получены из п. 1.2.

При выполнении тождеств $a_{13} \equiv a_{23} \equiv \alpha_{13} \equiv \alpha_{23} \equiv 0$ и неравенств

$$\alpha_{11}^2(x_2, x_3) + \alpha_{12}^2(x_2, x_3) \neq 0, \quad \alpha_{21}^2(x_1, x_3) + \alpha_{22}^2(x_1, x_3) \neq 0,$$

$$\alpha_{11}(x_{20}, x_3)\alpha_{22}(x_{10}, x_3) - \alpha_{21}(x_{10}, x_3)\alpha_{12}(x_{20}, x_3) \neq 0$$

задача 2 однозначно разрешима, если добавить к ним любой из четырех наборов условий:

1) $\alpha_{11}(x_2, x_3)\alpha_{22}(x_1, x_3) \neq 0$;
2) $\alpha_{11}(x_2, x_3) \equiv 0, \quad \alpha_{22}(x_1, x_3)a_{21}(x_{10}, x_2, x_3) \neq 0$;
3) $\alpha_{22}(x_1, x_3) \equiv 0, \quad \alpha_{11}(x_2, x_3)a_{12}(x_1, x_{20}, x_3) \neq 0$;
4) $\alpha_{11}(x_2, x_3) \equiv \alpha_{22}(x_1, x_3) \equiv 0, \quad a_{21}(x_{10}, x_2, x_3)a_{12}(x_1, x_{20}, x_3) \neq 0$.

Подобным образом могут быть сформулированы утверждения, аналогичные заключительным выводам из пп. 2.1 – 2.2, 3.1 – 3.3. При этом, например, в п. 2.1 условия (8.29), (8.36) сводятся к требованиям

$$a_{21}(x_{10}, x_2, x_3) a_{12}(x_1, x_{20}, x_3) \neq 0, \quad a_{12},\, a_{12x_2} \in C(\overline{D}).$$

Структурные формулы типа (8.46), (8.47) и другие тоже будут содержать компоненту x_3. Так, например, роль представлений (8.61) будут играть формулы (с произвольными функциями в правых частях)

$$a_{12} = r(x_1, x_3) s(x_2, x_3),$$

$$a_{21} = \frac{2\dfrac{\partial X}{\partial x_1}(x_1, x_3)\dfrac{\partial Y}{\partial x_2}(x_2, x_3)}{r(x_1, x_3) s(x_2, x_3)[X(x_1, x_3) + Y(x_2, x_3)]^2}.$$

Нетрудно видеть, что, кроме указанных условий расщепления задачи 2, можно указать еще два набора подобных условий:

$$1) \quad a_{12} \equiv a_{32} \equiv \alpha_{12} \equiv \alpha_{32} \equiv 0, \quad \alpha_{22} \neq 0;$$

$$2) \quad a_{21} \equiv a_{31} \equiv \alpha_{21} \equiv \alpha_{31} \equiv 0, \quad \alpha_{11} \neq 0.$$

Очевидно, они получаются, если роль (x_1, x_2) играют соответственно (x_1, x_3), (x_2, x_3). В формулах из пп. 3.1 – 3.3 появятся произвольные функции $\theta_2(x_2)$ или $\theta_1(x_1)$ (в порядке следования вариантов 1) – 2)). Правые же части структурных формул для коэффициентов системы уравнений будут зависеть еще и от x_2, x_1 (в том же порядке).

Получены также определенные результаты по исследованию обсуждаемой задачи в четырехмерном пространстве [40] – [41]. Из-за большого объема вычислений мы их здесь не приводим.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 294 с.

2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

4. Бицадзе А.В. О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных // Матем. моделирование. — 1994. — Т. 6, № 6. — С. 22–31.

5. Бондаренко Б.А., Саидкаримова Г.У. Задача Гурса для уравнений Манжерона и ее связь с задачей Гурса для обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественная теория сложных систем. — Л., 1986. — С. 102–108.

6. Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. — Ташкент: Фан, 1987. — 146 с.

7. Бренева Р.М. Операционный метод решения некоторых видов уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Тр. Иркутского политехн. ин-та. — 1968. — Вып. 52. — С. 158–164.

8. Быков Я.В., Боташев А.И. О способе построения решений одного класса операторных уравнений // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. — 1965. — Вып. 3. — С. 41–57.

9. Быков Я.В., Боташев А.И., Назаров Р. Об одном методе решения задачи Коши для поливолнового уравнения // Тр. по механике, математике, физике. — Фрунзе, 1967. — Вып. 23. — С. 127–129.

10. Векуа И.Н. О метагармонических функциях // Тр. Тбилисского математического института. — 1943. — Т. 12. — С. 105–174.

11. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. — М-Л.: Гостехиздат, 1948. — 296 с.

12. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 280–285.

13. Водахова В.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 1. — С. 163–166.

14. Волкодавов В.Ф., Родионова И.Н. Основные краевые задачи для одного уравнения третьего порядка в трехмерной области специального вида // Дифференц. уравнения. — 1993. — Т. 29, № 8. — С. 1459–1461.

15. Волкодавов В.Ф., Дорофеев А.В. Задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1993. — № 11. — С. 6–8.

16. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я., Быстрова О.К., Захаров В.Н. Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения. — Самара: “Самарский университет”, 1995. — 76 с.

17. Волкодавов В.Ф., Захаров В.Н. Функция Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения. — Самара, 1996. — 52 с.

18. Джохадзе О.М. Задача типа Дарбу для уравнения третьего порядка с доминирующими младшими членами // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 4. — С. 523–535.

19. Ежов А.М. Решение задачи Коши — Гурса для одного уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения (межвуз. сборник). — Самара: СГПУ, 1995. — С. 8–12.

20. Елубаев С. Об одной обратной задаче в n-мерной области // Сб. по вопр. математики и механики. — Казахск. ун-т., 1973. — Вып. 4. — С. 59–64.

21. Жамалов Р.С. Смешанная задача для одного эволюционного уравнения // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. — Новосибирск, 1988. — С. 126–130.

22. Жегалов В.И. Об уравнении с постоянными коэффициентами, линейном относительно оператора Лаврентьева — Бицадзе // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: КГУ, 1969. — Вып. 6. — С. 44–51.

23. Жегалов В.И. Об одном классе дифференциальных уравнений высшего порядка // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: КГУ, 1970. — Вып. 7. — С. 129–134.

24. Жегалов В.И. Об одном линейном дифференциально-операторном уравнении // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: КГУ, 1971. — Вып. 8. — С. 70–79.

25. Жегалов В.И. Об одной системе уравнений смешанного типа высшего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1975. — № 6. — С. 25–35.

26. Жегалов В.И. О некоторых системах уравнений смешанного типа // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: КГУ, 1977. — Вып. 14. — С. 81–89.

27. Жегалов В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1990. — С. 94–98.

28. Жегалов В.И. Связь граничных значений задачи Гурса с нормальными производными // Тез. докл. всесоюзной конф. “Условно-корректные задачи матем. физики и анализа”. — Новосибирск, 1992. — С. 192.

29. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 10. — С. 1429–1430.

30. Жегалов В.И. Структура решений одного уравнения в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1997, Т. 33. — № 2. — С. 1704–1705.

31. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. Задача Гурса в n-мерном пространстве / Редакция Сиб. матем. журн. — Новосибирск, 1997. — Деп. в ВИНИТИ 08.07.97, № 2290–В97. — 4 с.

32. Жегалов В.И. О трехмерной функции Римана // Сиб. матем. журн. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 1074–1079.

33. Жегалов В.И., Малышев Ю.В. О структуре решений некоторых уравнений в частных производных // Тезисы докл. научн. школы-конф., посв. 100-летию Б.М. Гагаева. — Казань, 1997. — С. 92–93.

34. Жегалов В.И., Котухов М.П. Об интегральных уравнениях для функции Римана // Изв. вузов. Математика. — 1998. — № 1. — С. 26–30.

35. Жегалов В.И., Зомот Н.Х.Х. Линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка // Казанский ун-т, 1998. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 394-В98 — 20 с.

36. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 73–76.

37. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Трехмерные характеристические задачи с нормальными производными в граничных условиях // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 6. — С. 833–836.

38. Зомот Н.Х.Х. Условия разрешимости одной характеристической задачи // Казанский ун-т, 1997. — Деп. в ВИНИТИ 04.04.97, № 1089–В97. — 17 с.

39. Зомот Н.Х.Х. Случаи явного решения одной трехмерной задачи Гурса // Казанский ун-т, 1998. — Деп. в ВИНИТИ 10.02.98, № 393–В98 — 9 с.

40. Зомот Н.Х.Х. Линейная характеристическая задача в четырехмерном евклидовом пространстве // Казанский ун-т, 1998. — Деп. в ВИНИТИ 30.03.98, № 900–В98. — 43 с.

41. Зомот Н.Х.Х. Общая линейная характеристическая задача для системы уравнений в частных производных первого порядка. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. — Казанск. ун-т, 1998. — 113 с.

42. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. — М.: Наука. — 1981. — 544 с.

43. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 2. — М.: Наука. — 1984. — 640 с.

44. Карачик В.В., Саидкаримова Г.У. О разрешимости задачи Гурса для линейного уравнения Манжерона с постоянными коэффициентами // Докл. АН УзССР. — 1990. — № 9. — С. 7–9.

45. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1968. — 720 с.

46. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. — Казань: Казанск. ун-т, 1970. — 209 с.

47. Миронов А.Н. Построение в явном виде n-мерной функции Римана при неполном расщеплении уравнения / Казан. ун-т, 1999. — Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, № 1704–В99. — 25 с.

48. Миронов А.Н. О построении функции Римана для одного уравнения в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 7. — С. 78–80.

49. Миронов А.Н. О связи граничных значений задачи Гурса с нормальными производными третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 10. — С. 23–26.

50. Миронов А.Н. Задачи типа Гурса с нормальными производными в краевых условиях. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. — Казанск. ун-т, 1999. — 148 с.

51. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Т. 1. — Л-М.: ГТТИ, 1934. — 330 с.

52. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа. — 1995. — 301 с.

53. Невоструев Л.М. Задача Неймана для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. — 1973. — Т. 9, № 2. — С. 320–324.

54. Олевский М.Н. Задача Коши для одного класса линейных факторизованных дифференциально-операторных уравнений // ДАН СССР. — 1966. — Т. 169. — № 2. — С. 280–283.

55. Патронов А.И. О единственности решения смешанной краевой задачи для уравнения $L^2u+a_1Lu+a_2u=0$, когда граничные условия задаются на полной границе смешанной области // Тр. Моск. гос. пед. ин-та им. В.И. Ленина. — 1975. — Вып. 1. — С. 70–74.

56. Плещинская И.Е. Граничные задачи для систем уравнений смешанного типа, приводимые к задаче Гильберта. Автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Куйбышев, 1979. — 15 с.

57. Плещинская И.Е. Задача со смещениями для одной системы уравнений смешанного типа с частными производными // Тр. семинара по краевым задачам. — Казань: КГУ, 1983. — Вып. 19. — С. 145–155.

58. Плещинская И.Е. Об эквивалентности некоторых классов эллиптических и гиперболических систем первого порядка и уравнений второго порядка с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1634–1637.

59. Раджабов Н.Р. Общие представления решений для одного класса дифференциальных уравнений эллиптического типа высшего порядка // Изв. АН ТаджССР. — Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. — 1972. — № 2 (44). — С. 12–18.

60. Раджабов Н.Р. Общие представления решений для одного класса дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. — Душанбе: Тадж. гос. ун-т, 1980, ч. 1, 126 с.; 1981, ч. 2, 170 с.; 1982, ч. 3, 170 с.

61. Севастьянов В.А. О методе И.Н. Векуа решения интегральных уравнений типа Вольтерра / Казан. ун-т, 1997. — Деп. в ВИНИТИ 24.04.97, № 1373–В97. — 9 с.

62. Севастьянов В.А. Существование и единственность решения одного многомерного интегрального уравнения / Казан. ун-т, 1997. — Деп. в ВИНИТИ 05.06.97, № 1848–В97. — 6 с.

63. Севастьянов В.А. Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 5. — С. 69–73.

64. Севастьянов В.А. Вариант метода Римана для одного дифференциального уравнения в n-мерном евклидовом пространстве. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. — Казанск. ун-т, 1997. — 127 с.

65. Севастьянов В.А. Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т. 34, № 12. — С. 1706–1707.

66. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. — 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.

67. Старков А. Общий интеграл уравнения с частными производными $\partial^n z/\partial\varphi\partial\xi\ldots\partial\delta = \Psi(\varphi,\ldots,\delta)z+\Phi(\varphi,\ldots,\delta)$ // Записки матем. отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. — Одесса, 1879. — Т. 2. — С. 1–8.

68. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1964. — 233 с.

69. Сулханишвили Г.Н. О решении обобщенной задачи Коши-Дирихле для линейного поликалорического уравнения // Дифференц. уравнения. — 1969. — Т. 5, № 12. — С. 2258–2266.

70. Теут О.М. Некоторые краевые задачи для систем уравнений в частных производных смешанного типа. Автореферат дисс. … канд. физ.-мат. наук. — Казань, 1964. — 8 с.

71. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957. — 443 с.

72. Уткина Е.А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка / Редакция журн. Дифференц. уравнения. — Минск, 1999. — Деп. в ВИНИТИ 28.06.99, № 2059–В99. — 13 с.

73. Уткина Е.А. Новые варианты характеристических задач для псевдопараболических уравнений. — Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Казанск. ун-т, 1999. — 140 с.

74. Фаге М.К. Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом // ДАН СССР. — 1956. — Т. 108, № 5. — С. 780–783.

75. Фаге М.К. Задача Коши для уравнения Бианки // Матем. сб. — 1958. — Т. 45 (87), № 3. — С. 281–322.

76. Фаге М.К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1958. — Т. 7. — С. 227–268.

77. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. — Новосибирск: Наука, 1987. — 290 с.

78. Харибегашвили С.С. Задачи типа Гурса для одного класса гиперболических систем // Дифференц. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 1. — С. 157–164.

79. Харибегашвили С.С. О задачах типа Гурса для одного класса систем уравнений гиперболического типа второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 1. — С. 152–166.

80. Харибегашвили С.С. О разрешимости задачи Гурса для нормально гиперболических систем второго порядка с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 1, — С. 134–135.

81. Харибегашвили С.С. Об одной граничной задаче для нормально гиперболических систем второго порядка // Дифференц. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 2. — С. 269–272.

82. Харибегашвили С.С. Об одной граничной задаче для гиперболического уравнения второго порядка // ДАН СССР. — 1985. — Т. 280, № 6. — С. 1313–1316.

83. Харибегашвили С.С. Об одной граничной задаче для нормально гиперболических систем второго порядка с переменными коэффи-

циентами // Дифференц. уравнения. — 1985. — Т. 21, № 1. — С. 149–155.

84. Харибегашвили С.С. Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического типа. Автореферат дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. — Тбилиси, 1986. — 31 с.

85. Чекмарев Т.В. Решение гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями // Изв. вузов. Математика. — 1959. — № 6. — С. 220–228.

86. Чекмарев Т.В. Решение в квадратурах задач Коши и Гурса для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. записки Горьковского ун-та. — 1967. — Вып. 80. — С. 63–69.

87. Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 9. — С. 1614–1622.

88. Чекмарев Т.В. Системы уравнений смешанного типа. — Нижегородский гос. техн. ун-т, 1995. — 199 с.

89. Чуриков Ф.С., Мащенко И.П. Построение функции Римана для уравнения $u_{xy} + \varphi(x)\psi(y)u = 0$ // Научн. труды Краснодарского политехн. ин-та. — 1970. — Вып. 30. — С. 19–25.

90. Шабат А.Б. Уравнения с частными производными // Новосибирск. ун-т (ротапринт), 1967, ч. 1, 118 с.; 1968, ч. 2, 82 с.

91. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. — 1982. — Т. 18, № 4. — С. 689–699.

92. Шхануков М.Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265, № 6. — С. 1327–1330.

93. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка и экстремальных свойствах их решений // ДАН СССР. — 1982. — Т. 267, № 3. — С. 567–570.

94. Bateman H. Logarithmic solutions of Bianchi's equation // Proc. USA Acad. — 1933. — V. 19. — P. 852–854.

95. Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl. Sc. fis., mat. e natur. — 1895. — Vol. IV, 1 sem. — P. 89–99, 133–142.

96. Bondarenko B.A., Leung K.V., Mangeron D., Oguztoreli M.N. Operational representation of solutions of a class of polylinear equations // Notices Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 24, № 2. — P. A–244.

97. Bondarenko B.A., Leung K.V., Mangeron D., Oguztoreli M.N. Studies on polylinear equations // Math. Notae. — 1977/1978. — V. 26. — P. 13–20.

98. Bondarenko B.A., Leung K.V., Mangeron D., Oguztoreli M.N. Studi concernanti le equazioni polilineari // Rend. Accad. Sci. fis.-mat. Napoli. — 1978. — V. 44. — P. 285–291.

99. Bondarenko B.A., Mangeron D., Olivera Santos I.P., Shumenura E. Problemes concernant certeines extensions des equations polivibrants, dites equations de Mangeron // Bull. Inst. Politehn. Jasi. Sectia 1. — 1980. — V. 26 (30). — F. 1–2. — P. 9–12.

100. Bondarenko B.A., Cracinnas P.T., Salandi D., Olivera Santos I.P. Construction des systemes de base des solutions polynomiales pour une classe d'equations polylineaires d'ordre superieur aux operateurs differentials differents, dont certein sont les operateurs polyvibrants de Mangeron // Bull. Inst. Politehn. Jasi. Sectia 1. — 1981. — V. 27 (31). — F. 3–4. — P. 9–15.

101. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations. — 1972. — V. 12, № 3. — P. 559–565.

102. Copson E.T. On the Riemann — Green function // Jorn. Rat. Mech. Anal. — 1958. — V. 1. — P. 324–348.

103. Corduneanu A. About the equation $u_{xyz} + cu = g$ // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1.— 1974. — V. 20, № 1. — P. 103–109.

104. Easwaran S. On the positive definitenes of polivibrating operators of Mangeron // Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg. — 1973. — V. 59, № 7. — P. 563–569.

105. Easwaran S. Mangeron's polyvibrating operators and their eigenvalues // Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg. — 1973. — V. 59, № 10. — P. 1011–1015.

106. Florian H., Püngel J., Wallner H. Darstellungen von Riemannfunction for $\partial^n w/\partial z_1 \partial z_2 \ldots \partial z_n + c(z_1, \ldots, z_n)w = 0$ // Ber. Math.-statist. sec. Forschugszent. Graz. — 1983. — № 204. — S. 1–29.

107. Hornich H. Das Problem der linearen Differentialgleihungen // Rend. semin. mat. Univ. Padova. — 1954. — V. 23, № 2. — S. 333–339.

108. Hornich H. Lineare partielle Differentialgleihungen for hoher Ordnung // Studia scient. math. hung. — 1968. — V. 3, № 1–3. — S. 1–4.

109. Lahaye E. La metode de Riemann appliquée à la résolution d'une categorie d'equations linearés de troisieme ordre // Bull. cl. sci. Acad. Roy. de Belg. — 1946. — 5 serie. — V. 31. — P. 479–494.

110. Mangeron D. New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena. I. // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. — 1968. — V. 14, № 1–2. — P. 433–436.

111. Mangeron D. Functional equations in the theory of a class of polyvibrating equations // Math. Notae. — 1968/1969 (1970). — V. 21, № 3–4. — P. 81–86.

112. Mangeron D., Oguztoreli M.N. Functions de Bessel et polynomes de Legendre relatives aux equations polyvibrantes generalisees // C. R. Acad. Sci. — 1970. — V. 270, № 1. — P. A33–A40.

113. Mangeron D., Oguztoreli M.N. Darboux problem for a polyvibrating equation: solutions as F-function // Proc. Nat. Acad. USA. — 1970. — V. 67, № 3. — P. 1488–1492.

114. Mangeron D., Oguztoreli M.N. Sobre las relaciones entre las solutiones de las ecuationes en derivadas partiales de diferentes tipos y

sobre clertas clases nuevas de functiones relativas a las ecuationes polivibrantes // Math. Notae. — 1968/1969 (1970). — V. 21, № 3–4. — P. 95–103.

115. Mangeron D., Oguztoreli M.N. Problema di Goursat per le equazioni polivibranti // Atti Acad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur. — 1976 (1977). — V. 61, № 6. — P. 553–559.

116. Niccoletti O. Sull' estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. cl. sc. fis., mat. e natur. — 1895. — 1 sem. — P. 330–337.

117. Nicolesco M. Ecuatia iterata a caldurii // Stud. si. serc. — 1954. — V. 3–4. — Anul. 5. — P. 243.

118. Oguztoreli M.N., Easwaran S. A Goursat problem for a high order Mangeron equation // Atti Acad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur. — 1971. — V. 50, № 6. — P. 650–653.

119. Oguztoreli M.N. Boundary value problem for Mangerons equation. I. // Bul. Inst. politehn. Jasi. Sectia 1. — 1973. — V. 19, № 3. — P. 81–85.

120. Radochova V. Die Lösing der partiellen Differentialgleihung $u_{xxtt} = A(t,x)u_{xx} + B(t,x)u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedinungen // Cas. pestov. mat. — 1973. — V. 98, № 4. — S. 389–399.

121. Roberts G.B. Uniqueness the Cauchy problem for characteristic operators of Fuchsian type // J. Different. Equations. — 1980. — V. 38, № 3. — P. 374–392.

122. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the support of solutions of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — V. 63, № 1. — P. 77–81.

123. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncilindrical domains // J. Different. Equations. — 1978. — V. 27, № 3. — P. 394–404.

124. Rundell W. The Stefan Problem for a pseudo-heat equation // Indiana Univ. Math. J. — 1978. — V. 27, № 5. — P. 739–750.

125. Rundell W. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 76, № 2. — P. 253–257.

126. Scott E.J. The Riemann function for a class of equation of the form $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \nu(x)\mu(y)v = 0$ // Ganita. — 1975. — V. 26, № 1. — P. 19–28.

127. Tahara H. The structure of local solution of partial differential equations of the Fuchsian type // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1977. — V. 12, suppl. — P. 645–648.

128. Tahara H. Asymptotic expansions of solutions of Fuchsian hyperbolic partial differential equations // Proc. Jap. Acad. — 1983. — A 59, № 6. — P. 120–121.

129. Tomantschger K.W. Constructive methods for solving higher order formally hiperbolic differential equation // Math. Res. — 1989. — V. 53. — P. 193–202.

130. Zhegalov V.I. Relation between the Boundary Values of Goursat Problem and the Normal Derivatives // Conditionally Well-Posed Problems. — Moscow: TVP Sc. Publ. — 1994. — P. 346–349.