ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема 1 (Ньютона-Лейбница). Если f непрерывна на $[a, b]$ и Φ – произвольная ее первообразная, то $\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Доказательство. Пусть Φ – произвольная первообразная для f. Тогда, согласно теореме 2 (см. §7.7), $\Phi(x) = F(x) + c$, где $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,\ c - const$. Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a). \blacksquare$$

Замечание. Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ обозначается символом $\Phi(t)|_a^b$.

Формулу Ньютона-Лейбница можно обобщить. Предварительно приведем необходимые определения.

Определение 1. Функция f называется гладкой (на $[a, b]$), если

1. f непрерывна на $[a, b]$.
2. Производная функции $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ непрерывна, причем существуют и конечные пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$.

Определение 2. Непрерывная функция $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ называется непрерывной кусочно-гладкой, если существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots \ldots < x_n = b$ такое, что f – гладкая на каждом отрезке $[x_{j-1}, x_j]$.

Замечание 1. Если функция f гладкая на $[a, b]$, то $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ допускает непрерывное продолжение на $[a, b]$, т. е. f' можно доопределить в точках a и b так, что $f' : [a, b] \to \mathbf{R}$ будет непрерывной.

Доказательство. $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ является гладкой, поэтому $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ – непрерывна на (a, b) и существуют пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$, $\lim\limits_{x \to b--} f'(x)$. По определению функция называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна на (a, b), непрерывна слева в точке a и непрерывна справа в точке b. Поэтому, доопределяя f' в точках a и b так, что $f'(a) = \lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$, $f'(b) = \lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$, мы добьемся непрерывности f' на $[a, b]$.

Нетрудно показать, что $\lim\limits_{x \to a+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$ есть, соответственно, производные справа в точке a и слева в точке b функции $f(x)$. Действительно,

$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0+0} f'(a + \theta h) = \lim_{x \to a+0} f'(x)$$

(здесь $0 < \theta < 1$, и мы использовали формулу Лагранжа конечных приращений). Аналогично – для $\lim\limits_{x \to b-0} f'(x)$. $\blacksquare$

● Теорема 2. Если F – непрерывная кусочно-гладкая на $[a, b]$ функция, то

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

Прежде чем доказывать данную теорему, вы вынуждены распространить понятие интеграла на функции, определенные не во всех точках отрезка $[a, b]$. Это нам необходимо, так как интеграл слева в $(*)$ "плохо" определен: если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – разбиение, фигурирующее в определении 2, то $F'(x)$ не определена в точках x_i.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на $[a, b]$ за исключением точек $c_1, \ldots, c_n$. Пусть $\hat{f}(x)$ совпадает на $[a, b]$ с $f(x)$ в точках $x \neq c_i$, $i = 1, \ldots, n$, а в точках $c_1, \ldots, c_n$ принимает произвольные числовые значения.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$, если интегрируема по Риману на $[a, b]$

функция $\hat{f}(x)$, причем считается

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \hat{f}(x)dx.$$

Замечание 2. Данное определение будет корректным, т. е. не будет зависеть от значений функции $\hat{f}(x)$ в точках $c_1, \ldots, c_n$.

Действительно, пусть функция $\hat{f}_1(x) = \lambda_i^{(1)}$, если $x = c_i$, а $\hat{f}_2(x) = \lambda_i^{(2)}$, если $x = c_i$. Очевидно,

$$\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x) + \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)}, & \text{если } x = c_i \\ 0, & \text{если } x \neq c_i,\ i = 1, \ldots, n,\ x \in [a, b]. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$. Если $\hat{f}_1(x)$ интегрируема, то $\hat{f}_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$ (см. замечание 2 § 7.5). Поэтому

$$\int\limits_a^b \hat{f}_2(x)dx = \int\limits_a^b \hat{f}_1(x)dx + \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \hat{f}_1(x)dx.$$

Замечание доказано.

Перейдем к доказательству теоремы 2. После определения 3 $\int\limits_a^b F'(x)dx$ будет вполне корректно определен (полагаем, что $F'(x)$ определена в точках x_i произвольно). Используя свойства интеграла Римана, запишем

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F'(x)dx. \tag{1}$$

$F(x)$ – непрерывная кусочно-гладкая на $[a, b]$ функция, поэтому, согласно замечанию 1, $F'(x)$ допускает непрерывное продолжение на $[x_{i-1}, x_i]$ при любом $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F'(x)dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{F}'(x)dx,$$

где

$$\hat{F}'(x_i) = \lim_{x \to x_i - 0} F'(x),\ \ \hat{F}'(x_{i-1}) = \lim_{x \to x_{i-1} + 0} F'(x)$$

и функция $\hat{F}'(x)$ является непрерывной на $[x_{i-1}, x_i]$ при любом $i = 1, \ldots, n$.

К интегралам

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{F}'(x)dx$$

применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \hat{F}'(x)dx = \hat{F}(x_i) - \hat{F}(x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1}). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует

$$\int\limits_a^b F'(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Что и требовалось доказать. ● $\blacksquare$