Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина

Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебный практикум

Казань
2009

УДК 517

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ГОУ ВПО «Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина»

Научно-методического совета геологического факультета КГУ
Протокол №5 от 19 ноября 2009 г.

заседания кафедры общей математики КГУ
Протокол № 3 от 11 ноября 2009 г.

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой общей математики КГУ
Е.А. Широкова

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры общей математики КГУ Н.П. Заботина
доктор физ.-мат. наук, проф. ТГГПУ Ф.Г. Мухлисов

Бурмистров Б.Н., Секаева Л.Р.

Практические занятия по теории функций комплексного переменного: Учебный практикум. / Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева. – Казань: Изд-во Казанского государственного университета, 2009. – 54 с.

Учебное пособие представляет собой набор задач для практических занятий по ТФКП по программе геофизиков для очной и заочной форм обучения в КГУ.

Часть задач решена, для других задач есть ответы и к части из них даны указания к решению.

Это пособие есть переработка прежнего пособия Бурмистрова Б.Н. «Теория функций комплексного переменного». Практические занятия. – Казань, 1996 г.

© Казанский государственный университет, 2009
© Б.Н. Бурмистров, Л.Р. Секаева, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Изучение материала рассчитано на 12 практических занятий, которые разбиты на 6 тем.

ТЕМА I (3 часа)

Действия с комплексными числами. Алгебраическая, показательная и тригонометрическая формы комплексного числа. Формулы Муавра, Эйлера. Векторная интерпретация комплексного числа. Корень n – ой степени

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – вещественные числа, а i – мнимая единица: $i^2 = -1$. Числа $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ – соответственно действительная и мнимая часть комплексного числа z. Число $\overline{z} = x - iy$ является комплексно сопряженным с z. Комплексное число $z = x + iy$ отождествляется с точкой на декартовой плоскости (xOy), а также с радиус-вектором этой точки. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ являются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Действия с комплексными числами подчиняются обычным алгебраическим операциям. При этом: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$, $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$; для любого $z_2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}$, где $|z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ – модуль комплексного числа. Кроме алгебраической формы комплексного числа $z = x + iy$ рассматривают тригонометрическую форму: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и показательную форму: $z = re^{i\varphi}$, при этом используют формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $\varphi = \arg z$ – аргумент комплексного числа z. Аргумент определяется неоднозначно, а лишь с точностью до любого слагаемого, кратного 2π:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi k, \text{ когда } \operatorname{Re} z > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, \text{ когда } \operatorname{Re} z < 0; \end{cases}$$

$-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \le \dfrac{\pi}{2}$, k – любое целое число.

Из формулы Эйлера легко получается формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Корень n – ой степени из комплексного числа:
если $z = re^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg z$ – одно из значений аргумента z, то $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, где $k = \overline{0, n-1}$, а $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Пример 1. Представив в показательной форме числа $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, найти:

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1^3 \cdot z_2^{-2}$.

Решение. Имеем

1) $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}$;

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$;

3) $z_1^3 \cdot z_2^{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(-\pi - \frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\left(\frac{5}{3}\pi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Пример 2. Решить уравнение $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

Решение: учитывая равенство $a^3 + 1 = (a^2 - a + 1)(a + 1)$, данное уравнение можно записать $z^6 - z^3 + 1 = \frac{z^9 + 1}{z^3 + 1} = 0$, поэтому нужно из множества корней числителя отбросить корни знаменателя. Имеем: $z = \sqrt[9]{-1} = e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{9}}$, $k = \overline{0,8}$. Нужно отбросить корни знаменателя $z = \sqrt[3]{-1} = e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}}$, $k = \overline{0,2}$. $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\pi}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Оставшиеся корни и будут ответом на вопрос.

Пример 3. Вычислить числа $A = (a + ib)^n + (a - ib)^n$ и $B = (a + ib)^n - (a - ib)^n$, где a и b – вещественные числа.

Решение: $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{i\varphi}$, $a - ib = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{-i\varphi}$, где φ – главное значение $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, т.е. $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$A=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[e^{in\varphi}+e^{-in\varphi}\right]=2\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\cos n\varphi,$$

$$B=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\left[e^{in\varphi}-e^{-in\varphi}\right]=2i\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\sin n\varphi.$$

Мы здесь воспользовались формулами Эйлера

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\ \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Пример 4. Решить предыдущий пример, когда $a=-\sqrt{3}$, $b=1$, $n=-11$.

Решение: Имеем: $a^2+b^2=4$, тогда $A=2^{-10}\cos(-11\varphi)$ и $B=i2^{-10}\sin(-11\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Стало быть: $-11\varphi=\frac{11\pi}{6}$ и $A=2^{-10}\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2^{11}}$, $B=i2^{-10}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-i}{2^{11}}$.

1. Выполнить указанные действия:

1) $3(1-5i)-2(4+i)$; 2) $(2+3i)(i-3)$;

3) $\frac{2-3i}{4-i}$; 4) $(2i-1)^2\left[\frac{2}{1+i}-\frac{2-i}{1-i}\right]$;

5) $\frac{i^4+i^9-i^{16}}{1-i^5+i^{10}+i^{11}}$; 6) $2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-3\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

2. Пусть $z_1=1+i$, $z_2=-2-i$, $z_3=1-i$. Упростить следующие выражения:

1) $z_1^2-3z_1+2$; 2) $\left|2z_2-z_1\right|^2$; 3) $(z_3-\bar{z}_2)^3$;

4) $\left|\frac{z_3+z_2-1}{z_3-\bar{z}_2+2i}\right|$; 5) $\overline{(z_2-z_1)(z_2-\bar{z}_3)}$; 6) $\operatorname{Im}\left\{\frac{z_1\cdot z_2}{z_3}\right\}$.

3. Найти вещественные числа x и y из равенств:

1) $3x-2iy+2ix-y-3+4i=(x-2y-3)-(y+x+1)i$;

2) $2z-i\bar{z}+3(3-2i)=0$, где $z=x+iy$;

3) $z^2-\bar{z}^2+2z+2\bar{z}+8+16i=0$;

4) $z^2+z\cdot\bar{z}-\bar{z}^2=2+4i$.

4. Показать, что треугольник с вершинами $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4 - 2i$, $z_3 = 1 - 6i$ равнобедренный. Найти его стороны.

5. Пусть E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Доказать, что прямая BE отсекает от AC одну треть длины AC, считая от вершины A.

6. Пусть A, B, C, D – середины сторон любого четырехугольника. Доказать, что $ABCD$ – параллелограмм.

7. Представить в тригонометрической и показательной форме следующие комплексные числа:

1) $-2 + 2\sqrt{3}i$; 2) $4 - 4i$; 3) $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$;

4) $5i$; 5) $-3 - 4i$; 6) $1 - 2i$.

8. Доказать, что

1) $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$, где

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)},\ \theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{r_1 \sin\theta_1 + r_2 \sin\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2}\right);$$

2) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$; 3) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$;

4) $\sin 4\theta = \sin\theta(8\cos^3\theta - 4)$; 5) $\cos 4\theta = 8\sin^4\theta - 8\sin^2\theta + 1$.

9. Следующие комплексные числа представить в алгебраической форме:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$; 2) $\left(5e^{i20^\circ}\right) \cdot \left(3e^{i40^\circ}\right)$;

3) $\left(2e^{i50^\circ}\right)^6$; 4) $\dfrac{(3e^{i\frac{\pi}{6}})(6e^{i\frac{5\pi}{3}})}{(2e^{i\frac{2\pi}{3}})^2}$.

10. Вычислить и представить графически следующие корни:

1) $\sqrt[3]{2\sqrt{3} - 2i}$; 2) $\sqrt[4]{-5i}$; 3) $\sqrt[5]{32}$;

4) $\sqrt[3]{(-2i)^2}$; 5) $\sqrt{\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[6]{-8i}$.

11. Решить уравнения:

1) $z^4 + 625 = 0$; 2) $z^3 + 1 = \sqrt{3} \cdot i$;

3) $z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$; 4) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;

5) $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$.

12. Различные задачи:

1) Пусть $z=3e^{\frac{\pi}{3}i}$; вычислить $\left|e^{iz}\right|$.

2) Доказать, что $\sqrt{2}|z|\geq|x|+|y|$, где $z=x+iy$.

3) Выразить $\cos 5x$ и $\sin 5x$ через степени $\sin x$ и $\cos x$, пользуясь формулой Муавра.

4) Пусть $P_n=a_n^2+b_n^2, n=1,2,3\ldots,$ где a_n и b_n – целые положительные числа. Доказать, что для любого N – целого положительного можно найти положительные целые числа A и B такие, что $P_1\cdot P_2\cdots P_n=A^2+B^2$.

5) Доказать, что для любого целого $n\geq 2$

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

6) Пусть $ABCD\cdots PQ$ – правильный n – угольник, вписанный в единичную окружность. Доказать, что произведение диагоналей $AC\cdot AD\cdots AP$ равно $\dfrac{n}{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$.

ТЕМА II (4 часа)

Функции, пределы и непрерывность.
Переменные и функции. Функции однозначные и многозначные. Обратные функции. Отображения. Элементарные функции (рациональные, показательные, тригонометрические, гиперболические, логарифмические, обратные тригонометрические, обратные гиперболические, алгебраические и трансцендентные). Точки ветвления и разрезы плоскостей. Поверхности Римана. Пределы, непрерывность, равномерная непрерывность. Ряды с комплексными членами

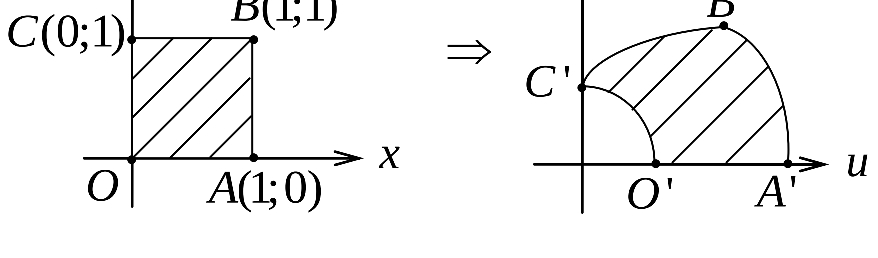
Остановимся на некоторых вопросах, обозначенных в этой теме, и решим несколько примеров.

Если задана функция комплексного переменного $w = f(z)$, то это означает, что задан закон отображения точек плоскости z: $(z = x + iy)$ во множество точек плоскости w: $(w = u(x;y) + iv(x;y))$. Отображения могут быть однозначными и многозначными. Известно, что при условии однолистности, внутренние точки области в плоскости z переходят во внутренние точки соответствующей области плоскости w, а граничные точки в граничные точки.

Решим несколько примеров на отображения областей.

Пример 1. Найти область в плоскости w, в которую функция $w = (z+1)^2$ отображает квадрат $OABC$ плоскости z, где $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$.

Решение: имеем $w = u + iv = (x+1+iy)^2 \Rightarrow u = (x+1)^2 - y^2$, $v = 2y(1+x)$.



$O(0;0) \Rightarrow O'(1;0)$

$A(1;0) \Rightarrow A'(4;0)$

$B(1;1) \Rightarrow B'(3;4)$

$C(0;1) \Rightarrow C'(0;2)$

Граница переходит в границу:

$OA\begin{Bmatrix} 0\le x\le 1 \\ y=0 \end{Bmatrix}\Rightarrow O'A'\begin{Bmatrix} u=(x+1)^2 \\ v=0 \end{Bmatrix}$, т.е. $O'A'$ есть отрезок $\begin{Bmatrix} 1\le u\le 4 \\ v=0 \end{Bmatrix}$.

$AB\begin{Bmatrix} x=1 \\ 0\le y\le 1 \end{Bmatrix}\Rightarrow A'B'\begin{Bmatrix} u=4-y^2 \\ v=4y \end{Bmatrix}$, т.е. $u=4-\dfrac{v^2}{16}$, стало быть $A'B'$ – отрезок параболы.

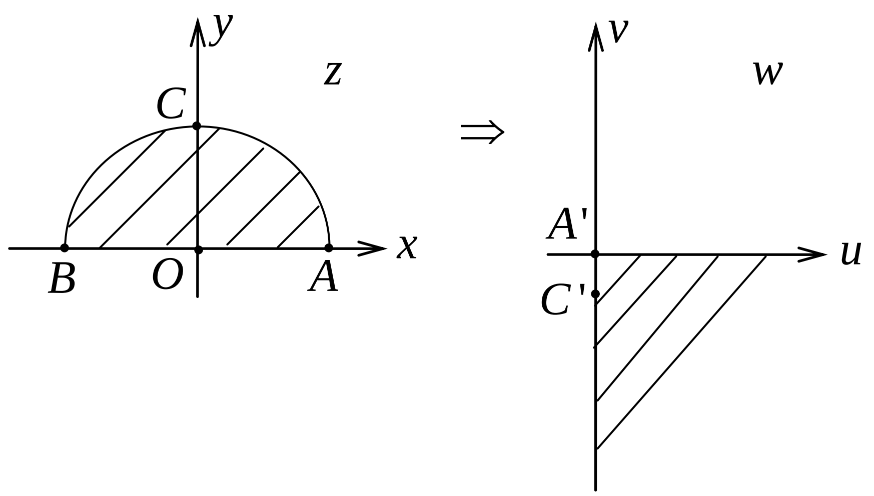
$BC\begin{Bmatrix} 0\le x\le 1 \\ y=1 \end{Bmatrix}\Rightarrow B'C'\begin{Bmatrix} u=x^2+2x \\ v=2x+2 \end{Bmatrix}$, т.е. $x=\dfrac{v-2}{2}$, значит $u=\left(\dfrac{v-2}{2}\right)^2+v-2=\dfrac{v^2}{4}-1$, опять имеем кусок параболы.

$OC\begin{Bmatrix} x=0 \\ 1\le y\le 1 \end{Bmatrix}\Rightarrow O'C'\begin{Bmatrix} u=1-y^2 \\ v=2y \end{Bmatrix}$, т.е. $u=1-\dfrac{v^2}{4}$, опять отрезок параболы.

Можно убедиться, что величины углов в вершинах сохранились.

Пример 2. Найти образ полукруга: $|z|\le 1, \operatorname{Im} z\ge 0$ с помощью функции $w=\dfrac{1-z}{1+z}$.

Решение: имеем $u=\dfrac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$, $v=\dfrac{-2y}{(1+x)^2+y^2}$.



$A(1;0)\Rightarrow A'(0;0)$
$B(-1;0)\Rightarrow B'(w=\infty)$
$C(0;1)\Rightarrow C'(0;-1)$

Займемся отображением границы.

$$ACB\left\{\begin{matrix} z=e^{i\varphi} \\ 0\le\varphi\le\pi \end{matrix}\right\}\Rightarrow w=\frac{1-e^{i\varphi}}{1+e^{i\varphi}}=\frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}-e^{\frac{i\varphi}{2}}}{e^{-\frac{i\varphi}{2}}+e^{\frac{i\varphi}{2}}}=-i\cdot\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2},\ \text{т.е.}\ \ u=0,\ \ v=-\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\ \ \text{и}$$

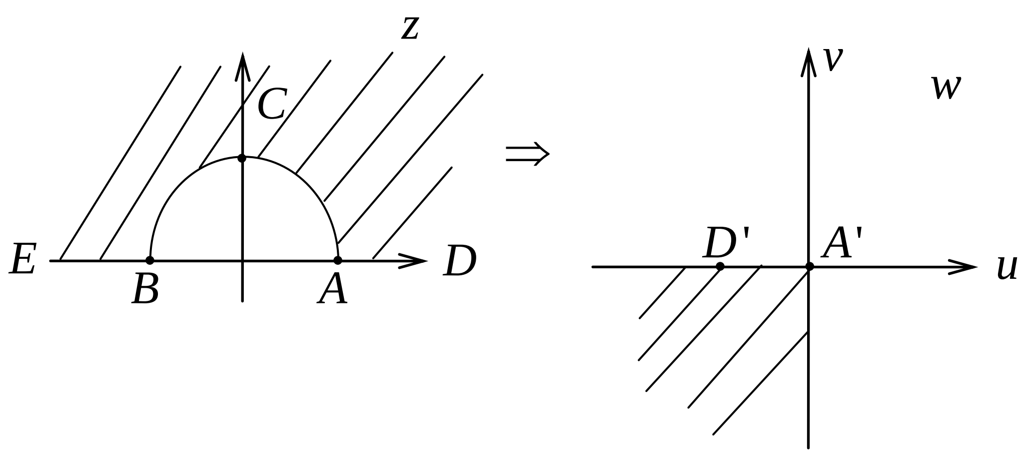
$0>v>-\infty$.

Стало быть, полуокружность ACB отображается в нижнюю полуось $u=0$.

Отрезок $AB\left\{\begin{matrix} -1\le x\le 1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow A'B'\left\{\begin{matrix} u=\dfrac{1-x}{1+x} \\ v=0 \end{matrix}\right\}$, т.е. $\left\{\begin{matrix} 0<u<+\infty \\ v=0 \end{matrix}\right\}$.

Стало быть, отрезок AB отобразился в правую полуось вещественной оси в плоскости w. Это означает, что наш полукруг отобразился в четвертый квадрант плоскости. w.

Пример 3. Показать, что та же функция $w=\dfrac{1-z}{1+z}$, что и в примере 2, отображает внешнюю часть указанного там полукруга при условии, что $\operatorname{Im} z\ge 0$ в третий квадрант плоскости w.



Имеем: $AD\left\{\begin{matrix} x\ge 1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow A'D'\left\{\begin{matrix} -1<u\le 0 \\ v=0 \end{matrix}\right\}$,

$EB\left\{\begin{matrix} x\le -1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow E'B'\left\{\begin{matrix} -\infty<u<-1 \\ v=0 \end{matrix}\right\}$.

При этом точка $D'(-1;0)$ в плоскости w есть образ бесконечно удаленной точки в плоскости z.

13. Пусть $w = u + iv = f(z) = z^2$.

1) Найти значения w, соответствующие точкам $z_1 = -1 + 2i$ и $z_2 = 3 - i$.

2) Показать, что прямая, проходящая через точки z_1 и z_2, преобразуется в некоторую кривую в плоскости w. Найти параметрические уравнения этой кривой.

3) Найти уравнения кривых в плоскости z, которые преобразуются в уравнения $u = c_1$ и $v = c_2$ в плоскости w. Рассмотреть случаи $c_1 = \pm 1, \pm 3$, $c_2 = \pm 1, \pm 3$. Построить кривые.

4) Определить образ области, расположенной во втором квадранте и ограниченной кривыми: $x^2 - y^2 = -1$, $x^2 - y^2 = -3$, $xy = -2$, $xy = -3$.

5) Пусть дан квадрат в плоскости z с вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$, $(1;1)$. Определить, во что он преобразуется функциями: а) $f(z) = z^2$, в) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$.

6) Та же задача, но для квадрата: $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;1)$.

14. Пусть $w^6 = z$ и предположим, что для некоторого $z = z_1$ мы имеем $w = w_1$.

1) Показать, что если точка z_1 переместится сама в себя один раз вдоль некоторого замкнутого контура вокруг начала координат, то w преобразуется в $w_1 \cdot e^{\frac{i\pi}{3}}$.

2) Какое значение w будет в точке z_1 после $2, 3, \ldots$ перемещений вдоль этого контура?

3) Что будет, если контур не охватывает начало координат?

4) Показать, что функция $w = w(z)$ – шестизначна (имеет 6 ветвей), и что точка $z = 0$ есть точка ветвления.

15. Доказать, что

1) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$; 2) $e^{z + 2\pi k i} = e^z$, $k = 0, 1, 2, \ldots$;

3) $\left| e^z \right| = e^x$; 4) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;

5) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \sin z_2 \cdot \cos z_1$;

6) $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$;

7) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$.

16. Показать, что нули функций $\sin z$ и $\cos z$ – вещественные. Найти их значения.

17. Доказать, что

1) $1-\text{th}^2 z=\dfrac{1}{\text{ch}^2 z}$; 2) $\sin(iz)=i\,\text{sh}z$;

3) $\cos(iz)=\text{ch}z$; 4) $\sin(x+iy)=\sin x\,\text{ch}y+i\cos x\,\text{sh}y$.

18. Пусть $z=e^w$, где $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ и $w=u+iv$.

1) Показать, что $u=\ln r$, $v=\theta+2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,$, т.е. $w=\text{lnz}=\ln r+i(\theta+2\pi k)$.

2) Определить $\ln(-1+i)$. Каково главное значение этого выражения?

3) Если $\cos z=2$, вычислить $\cos 2z$, $\cos 3z$.

4) Вычислить $\text{Re}\{f(z)\}$ и $\text{Im}\{f(z)\}$, если $f(z)$ задана следующими функциями: e^{3iz}, $\sin 3z$, z^2e^{2z}.

5) Определить все значения: а) $\arcsin 2$; в) $\arccos i$; с) $(1+i)^i$; д) $1^{\sqrt{3}}$.

6) Вычислить: а) $\text{Re}\{(1-i)^{1+i}\}$; в) $\left|(-i)^i\right|$.

19. Дана функция $f(z)=\text{lnz}$. Показать, что

1) $z=0$ есть точка ветвления.

2) окружности с центром в начале координат в плоскости z отображаются в прямые линии, параллельные оси v в плоскости w.

3) Прямые, проходящие через центр в плоскости z отображаются в прямые, параллельные оси u в плоскости w.

4) Проиллюстрировать графически.

20. 1) Если мы определим главное значение $\arcsin z$ выбором, что $\arcsin 0=0$, доказать, что $\arcsin z=\dfrac{1}{i}\ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$. Что будет, если $\arcsin 0=2\pi$?

2) Если мы определим главное значение $\arg\text{thz}$ выбором, что $\arg\text{th}0=0$, доказать, что $\arg\text{thz}=\dfrac{1}{2}\text{Ln}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$.

3) Определить все значения: а) $\arg\text{sh}i$; б) $\arg\text{ch}i$; с) $\arg\text{sh}2$; д) $\arg\text{ch}2$.

4) Определить $\text{Re}\{z^z\}$ и $\text{Im}\{z^z\}$, где $z=x+iy$.

21. а) Дана функция $w=\sqrt{1+z^2}$.

1) Показать, что $z=\pm i$ есть точки ветвления.

2) Показать, что, проходя один раз вокруг двух точек ветвления, мы не покидаем выбранную ветвь.

3) Определить разрезы плоскостей так, чтобы функция стала однозначной.

4) Описать и построить поверхности Римана для этой функции.

б) Пусть $w=\sqrt{1-z^2}$. Ответить на аналогичные вопросы для этой функции.

с) Построить поверхности Римана для функций:

1) $z^{\frac{1}{3}}$; 2) $z^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}}$; 3) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{3}}$;

4) $\ln(z+1)$; 5) $\arcsin z$; 6) $\mathrm{arctg} z$.

д) Показать, что поверхность Римана для функции $\sqrt{z}+\sqrt[3]{z}$ имеет 6 листов.

22. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{z\to -1+i}(z^2-6z+10)$; 2) $\lim\limits_{z\to 2e^{\frac{i\pi}{3}}}\dfrac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$; 3) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+1}{z^6+1}$;

4) $\lim\limits_{z\to 1+i}\left(\dfrac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)$; 5) $\lim\limits_{z\to\frac{\pi i}{2}} z^2\mathrm{ch}\dfrac{4z}{3}$;

6) Доказать, что $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\bar{z}}$ не существует.

23. Изучить сходятся ли последовательности:

1) $u_n=\dfrac{i^n}{n}$; 2) $u_n=\dfrac{(1+i)^n}{n}$; 3) $u_n=\dfrac{n}{n+3i}-\dfrac{in}{n+1}$;

4) $u_n=n\cdot i^n$; 5) $u_n=\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}$; 6) $u_n=\sqrt{n}(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i})$.

24. Сходятся ли ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{i}{2}\right)^{n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\omega^n}{5^{n/2}}$, где $\omega=\sqrt{3}+i$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

25. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $\dfrac{2z-3}{z^2+2z+2}$; 2) $\dfrac{3z^2+5}{z^4-16}$; 3) $\mathrm{ctg} z$;

4) $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\cos z}$; 5) $\dfrac{\mathrm{th} z}{z^2+1}$; 6) $\mathrm{cth} z$.

26. 1) Показать, что $f(z)=5z^2-3$ равномерно непрерывна в области $|z|\le 5$.

2) Показать, что $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ не является равномерно непрерывной в области $0<|z|\le 1$, но является таковой в области $\varepsilon<|z|\le 1$, где $0<\varepsilon<1$.

3) Показать, что $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными функциями во всей плоскости z.

ТЕМА III (4 часа)

Производная, аналитические функции, уравнения Коши-Римана, гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее вещественной или мнимой части. Конформные отображения, примеры отображений

27. Вычислить производные:

а) $\cos^2(2z+3i)$; б) $z\,\mathrm{arctg}(\ln z)$;

с) $\{\arg \mathrm{cth}(iz+2)\}^{-1}$; д) $(z-3i)^{4z-2}$;

е) Пусть $w=\arcsin(t-3)$, $z=\ln\sqrt{t+1}$, найти $\dfrac{dw}{dz}$ и $\dfrac{d^2w}{dz^2}$.

28. а) Рассмотрим два семейства кривых, заданных уравнениями $u(x;y)=\alpha$ и $v(x;y)=\beta$, где u и v суть вещественная и мнимая части аналитической функции и α и β некоторые вещественные постоянные. Доказать, что эти семейства кривых ортогональны.

б) Определить ортогональные траектории к следующим семействам кривых:

1) $e^{-x}(x\sin y - y\cos y)=\alpha$;

2) $x^3y - y^3x=\alpha$;

3) $e^{-x}\cos y + xy=\alpha$, где α – вещественная постоянная величина.

29. а) Доказать, что $\dfrac{d}{dz}(z^2\overline{z})$ не существует.

б) Проверить условия Коши-Римана для следующих функций:

1) $3z^2-5iz+3+2i$; 2) ze^{-2z}; 3) $\sin(3z+i)$;

4) $\ln z$; 5) $\mathrm{sh}(4z)$; 6) e^{z^2}.

с) Будет ли функция $f(z)=x^3+iy^3$ аналитична?

30. а) Среди следующих функций u или v определить гармонические. Для каждой гармонической найти ей сопряженную. После этого представить аналитическую функцию $f(z)=u+iv$ с помощью одной переменной z:

1) $u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$; 2) $v=2xy+3xy^2-2y^3$;

3) $u=xe^x\cos y - ye^x\sin y$; 4) $v=2x(1-y)$;

5) $u=x^2-y^2-2xy-2x+3y$;

б) Доказать, что если $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитическая функция в некоторой области, то там

$$f(z)=2u\left(\frac{z}{2};-\frac{iz}{2}\right)+\text{const}$$

или

$$f(z)=2iv\left(\frac{z}{2};-\frac{iz}{2}\right)+\text{const}\,.$$

Доказательство этих формул можно найти в книге М.А. Лаврентьева и Б.В. Шабат «Методы теории функций комплексного переменного». Физматгиз. – Москва, 1958. – Стр. 190-191. Или в задачнике Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович «Сборник задач по теории функций комплексного переменного». – Москва, 1975. – Стр. 70 и 238.

С помощью этих формул восстановить аналитическую функцию по ее вещественной или мнимой части:

1) $v=e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$; 2) $u=\ln[(x+3)^2+(y-3)^2]$;

3) $u=\text{shz}\cdot\cos y$; 4) $v=x^4-6x^2y^2+y^4+2x-4y+5$;

5) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)+2\sin x\,\text{sh}y+x^3-3xy^2+y$.

31. 1) Рассмотрим область D в плоскости z, ограниченную линиями $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$. Определить область D' в плоскости w, в которую отображается область D с помощью функций:

а) $w=z+(2-i)$; б) $w=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot z$; с) $w=\sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{4}}\cdot z+(2-i)$. Построить области.

2) Дана функция $w=z^2$. Во что отображаются следующие области: а) первый квадрант плоскости z; б) треугольник: $x\le 2$, $y\le 2$, $x+y\ge 2$.

3) Определить дробно-линейную функцию, которая переводит точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 соответственно.

4) Найти дробно-линейную функцию, которая переводит точки $z=0,-i,-1$ в точки $w=i,1,0$ соответственно.

5) Доказать, что дробно-линейная функция $w=e^{i\theta_0}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)$ переводит верхнюю полуплоскость плоскости z, где z_0 принадлежит этой полуплоскости, в единичный круг $|w|\le 1$. Рассмотреть частный случай: $z_0=i$ и $z=\infty$ отображается в $w=-1$.

6) Определить неподвижные точки преобразования

$$w = \frac{2z - 5}{z + 4}.$$

32. 1) Доказать, что дробно-линейное отображение можно рассматривать как произведение преобразований: перенос, вращение, гомотетия и обратное преобразование.

2) Доказать, что дробно-линейное преобразование преобразует круги плоскости z в круги плоскости w.

33. Пусть D есть треугольник плоскости z с вершинами $i, 1-i, 1+i$. Определить область D', в которую отображается D с помощью каждой из функций:

a) $w = 3z + 4 - 2i$; b) $w = iz + 2 - i$; c) $w = 5e^{\frac{\pi i}{3}} \cdot z - 2 + 4i$.

34. Определить уравнение кривой в плоскости w, в которую отображается прямая $x + y = 1$ с помощью функций:

1) $w = z^2$; 2) $w = \dfrac{1}{z}$.

35. Внутренность квадрата D с вершинами $1, 2, 1+i, 2+i$ преобразуется в область D', с помощью функций:

1) $w = 2z + 5 - 3i$; 2) $w = z^2$; 3) $w = \sin(\pi z)$. Построить области D' в каждом случае и проверить, что прямые углы сохранились.

36. Найти дробно-линейное преобразование, переводящее точки:

1) $i, -i, 1$ в $0, 1, \infty$ соответственно.

2) $1+i, -i, -2-i$ в $0, 1, i$ соответственно.

37. Доказать, что дробно-линейная функция $w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z - p}{\bar{p}z - 1}\right)$, где θ и p две постоянные, причем θ – вещественная

а) Отображает кривую $|z| = 1$ в кривую $|w| = 1$.

б) Отображает область $|z| < 1$ в $|w| < 1$, если $|p| < 1$ и область $|z| < 1$ в $|w| > 1$, если $|p| > 1$.

с) Что произойдет, если $|p| = 1$?

ТЕМА IV (3 часа)

Интеграл в комплексной области. Криволинейный интеграл. Связь комплексных и вещественных криволинейных интегралов. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Интегральная формула Коши. Производные аналитических функций

Из указанных вопросов поясним теорему Коши и интегральную формулу Коши и вычислим несколько интегралов.

Теорема Коши. Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая функция $f(z)$. Тогда интеграл от этой функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в области G равен нулю:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Формула Коши.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{z - z_0}.$$

Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, выражает значение аналитической функции $f(z)$ в некоторой точке z_0 через ее значения на любом контуре Γ, лежащем в области аналитичности функции $f(z)$ и содержащем точку z_0 внутри. Это и есть формула Коши.

Эти теорема Коши и формула Коши легко обобщаются и на многосвязные области.

Из формулы Коши легко получается формула для производной аналитической функции через интеграл по контуру:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}. \qquad (*)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \oint_{c}\frac{e^{2z}dz}{(z-1)(z+2i)}$, где контур c трех видов: 1) $|z| = \frac{1}{2}$; 2) $|z| = \frac{3}{2}$; 3) $|z| = 3$.

Решение. 1) в первом случае $I = 0$, поскольку подынтегральная функция в этом случае аналитична внутри контура, а по теореме Коши интеграл равен нулю.

2) Во втором случае внутри контура одна особая точка $z=1$, поэтому по формуле Коши $I=2\pi i\left\{\dfrac{e^{2z}}{z+2i}\right\}\Bigg|_{z=1}=\dfrac{2\pi i e^2}{1+2i}$.

3) В третьем случае внутри контура имеются две особые точки: $z=1$ и $z=-2i$. Поэтому, чтобы применить формулу Коши, нужно подынтегральную функцию разбить на два слагаемых, которые будут иметь по одной особой точке. Для этого разобьем дробь $\dfrac{1}{(z-1)(z+2i)}$ на сумму двух дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{(z-1)(z+2i)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2i}\ \Rightarrow\ 1\equiv A(z+2i)+B(z-1),$$

пусть $z=1$, тогда $1=A(1+2i)$, $A=\dfrac{1}{1+2i}$,

пусть $z=-2i$, тогда $1=B(-2i-1)$, $B=-\dfrac{1}{2i+1}$.

Теперь применяем формулу Коши к двум слагаемым. Будем иметь

$$I=\frac{1}{1+2i}e^{2z}\Bigg|_{z=1}-\frac{1}{2i+1}e^{2z}\Bigg|_{z=-2i}=\frac{1}{1+2i}(e^2-e^{-4i}).$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_c\dfrac{\sin(iz)dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, где c контур трех типов: 1) $|z|=3$; 2) $|z-\pi i|<4$; 3) $|z|<4$.

Решение. 1) По теореме Коши $I=0$, т.к. подынтегральная функция аналитична внутри контура.

2) Во втором случае точка $z=\pi i$ является единственной особой точкой подынтегральной функции. Применяем формулу (*) при $n=1$ для функции $f(z)=\dfrac{\sin(iz)}{(z+\pi i)^2}$. Имеем

$$I=\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin(iz)}{(z+\pi i)^2}\right)\Bigg|_{z=\pi i}=\frac{i\cos(iz)(z+\pi i)-2\sin(iz)}{(z+\pi i)^3}\Bigg|_{z=\pi i}=$$

$$=\frac{-2\pi\cos(-\pi)-2\sin(-\pi)}{-8\pi^3 i}=\frac{i}{4\pi^2}.$$

3) В третьем случае обе особые точки $z=\pm\pi i$ находятся внутри контура. Поэтому, чтобы применить формулу (*) нужно опять подынтегральную функцию разбить на слагаемые, имеющие по одной особой точке внутри

контура. Имеем $\frac{1}{(z^2+\pi^2)^2}=\left(\frac{A}{z-\pi i}+\frac{B}{z+\pi i}\right)^2=$ $\Bigg($Находим, что $A=\frac{1}{2\pi i}$, $B=-\frac{1}{2\pi i}\Bigg)$ $=-\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{(z-\pi i)^2}-\frac{2}{z^2+\pi^2}+\frac{1}{(z+\pi i)^2}\right]$ (среднее слагаемое опять разбиваем на сумму двух слагаемых). В результате имеем:

$$\frac{1}{(z^2+\pi^2)^2}=-\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{(z-\pi i)^2}+\frac{1}{(z+\pi i)^2}\right)+\frac{1}{4\pi^3 i}\left(\frac{1}{z-\pi i}-\frac{1}{z+\pi i}\right).$$

Поэтому

$$I=-\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{d}{dz}(\sin(iz))\Big|_{z=\pi i}-\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{dz}(\sin(iz))\Big|_{z=-\pi i}+\frac{1}{4\pi^3 i}(\sin(-\pi)-\sin(-\pi))=$$

$$=-\frac{1}{4\pi^2}[i\cos(-\pi)+i\cos(\pi)]+0=\frac{-2i}{-4\pi^2}=\frac{i}{2\pi^2}.$$

38. Вычислить интегралы вдоль указанных кривых:

1) $\int\limits_{AB}(x^2+iy^2)dz$, где $A(0;0)$, $B(1;4)$ и

а) AB – дуга параболы $y=4x^2$;

б) AB – прямая;

с) AB – ломаная ACB, где $C(1;0)$.

2) $\oint\limits_c \bar{z}dz$, где c: а) квадрат с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$; б) круг $|z|=1$; с) круг $|z-2|=1$.

3) $\oint\limits_c \bar{z}^2dz$, где c: а) круг $|z|=2$; б) круг $|z-1|=2$; с) эллипс $|z-1|+|z+1|=4$.

4) $\oint\limits_c(3z^4-z^3+2)dz$, где c: а) круг $|z|=1$; б) круг $|z-2|=1$; с) эллипс $|z-1|+|z+1|=4$.

5) $\oint\limits_c\frac{dz}{z-3i}$, где c: а) круг $|z-3i|=1$; б) квадрат с вершинами $(1+4i)$, $(1+2i)$, $(-1+2i)$, $(-1+4i)$; с) $|z|=4$.

б) $\oint\limits_{c}(x^2+iz)dl$, где c – круг $|z|=2$, а dl – обозначает элемент длины дуги.

39. Проверить теорему Коши для функций:

а) $5z^2-3iz+1+i$; б) $\sin(5z+i)$; с) $\mathrm{th}(2z+1)$, когда контур интегрирования квадрат с вершинами $1\pm i$, $-1\pm i$;

д) $3z^2+iz^2+2i$, если контур интегрирования: 1) круг $|z|=1$; 2) круг $|z-1|=1$; 3) эллипс $|z-3i|+|z+3i|=20$.

40. а) Учитывая, что $\oint\limits_{c}(z^2-2iz)dz=0$, где контур c – некоторая простая замкнутая кривая, показать, что

$$\oint\limits_{c}(2xy-2x)dx+(x^2-y^2+2y)dy=0.$$

б) Учитывая, что $\oint\limits_{c}e^z dz=0$, где контур c есть круг $|z|=1$, доказать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\cos(\theta+\sin\theta)d\theta=\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot\sin(\theta+\sin\theta)d\theta=0.$$

с) Если n – целое положительное число, показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\cos(\theta-\cos n\theta)d\theta=\int\limits_0^{2\pi} e^{\sin n\theta}\sin(\theta-\cos n\theta)d\theta=0.$$

41. Вычислить:

1) $\oint\limits_{c}\dfrac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z^2-1}dz$; 2) $\oint\limits_{c}\dfrac{e^{3z}dz}{(z+2)^4}$; 3) $\oint\limits_{c}\dfrac{e^z dz}{(z^2+\pi^2)^2}$, где контур c есть круг $|z|=4$.

42. Вычислить:

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{c}\dfrac{e^z dz}{z-2}$, где контур c означает а) круг $|z|=3$; в) круг $|z|=1$.

2) $\oint\limits_{c}\dfrac{e^{2z}dz}{z+\pi i}$, где контур c означает: а) круг $|z-1|=4$; в) эллипс $|z+2|+|z-2|=6$.

3) $\oint\limits_{c} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz$, где контур c есть прямоугольник с вершинами: а) $2 \pm i$, $-2 \pm i$; в) $\pm i$, $2 \pm i$; с) $\pm i$, $-2 \pm i$.

43. Вычислить:

a) $\oint\limits_{c} \frac{e^{zt} dz}{z^2+1}$, где $t > 0$, а контур c есть круг $|z| = 2$;

b) $\oint\limits_{c} \frac{e^{iz} dz}{z^2}$, где контур c есть круг $|z| = 1$;

c) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^5 z}{z - \pi/6} dz$;

d) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^5 z}{\left(z - \pi/6\right)^3} dz$;

e) $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{zt} dz}{(z^2+1)^2}$, $t > 0$.

ТЕМА V (4 часа)

Функциональные ряды, абсолютная сходимость, равномерная сходимость. Степенные ряды, Теорема Абеля. Разложение функций в ряд Тейлора. Классификация особых точек. Разложение функций в ряд Лорана. Аналитическое продолжение

44. Найти область сходимости рядов, построить эти области.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n(n+2)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+3)^{n-1}}{(n+1)^3\cdot 4^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n+1)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!z^{2n}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2}\cdot 3^{-n}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{2\pi inz}}{(n+1)^{3/2}}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^n z}{n^2+1}$.

45. Сходятся ли равномерно следующие ряды в указанных областях?

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{\sqrt[n]{n+1}}, |z|\le 1$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+z^2}, 1<|z|<2$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nz}{n^3}, |z|\le 1$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{nz}}{n^2}, |z|\le 2$.

46. Определить область равномерной сходимости следующих рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+i)^{2n}}{n^2+1}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot z^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2+|z|^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z}{[1+(n-1)z][1+nz]}$.

47. Разложить следующие функции в ряд Тейлора в окрестности указанных точек и найти области сходимости полученных рядов.

1) $e^{-z}, z_0=i$; 2) $\cos z, z_0=\pi$;

3) $z^4-3z^2+4z+2, z_0=-2$; 4) $ze^{3z}, z_0=1$;

5) $\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}, z_0=2$; 6) $\sin^2 z, z_0=0$.

48. 1) Доказать, что ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+i)^n}{(3+i)^{n+1}}$ являются аналитическим продолжением один другого.

2) Доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ нельзя аналитически продолжить вовне круга $|z| \le 1$.

3) Доказать, что $F_2(z) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{1+i} \right)^n$ является аналитическим продолжением $F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ и построить области сходимости этих рядов.

4) Пусть $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \cdot z^{n+1}$.

а) Найти аналитическое продолжение для $F(z)$, которое будет сходиться для $z_0 = 3-4i$;

б) Найти значение аналитического продолжения в точке $z_0 = 3-4i$.

5) Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ нельзя аналитически продолжить за круг $|z| \le 1$.

49. Найти особые точки функций и указать их природу:

1) $\frac{z-1}{(z^2+1)^2}$; 2) $\cos^{-1} z^{-1}$; 3) $\frac{\ln(z+2)}{(z^2+2z+2)^3}$; 4) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$;

5) $\frac{z^7+z^6+2}{(z+1)^3(2z-1)^2}$; 6) $\sqrt{z(z^2+1)}$; 7) $\frac{\cos z}{(z-i)^3}$.

50. Разложить функции в ряд Лорана в указанных областях:

1) $\frac{1}{z-2}$ для а) $|z| < 2$ и б) $|z| > 2$.

2) $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ для а) $|z| < 1$, б) $1 < |z| < 2$; с) $|z| > 2$; д) $|z-1| > 1$; e) $0 < |z-2| < 1$; f) $|z-2| > 1$.

3) $\frac{1}{z(z-2i)}$ для а) $0 < |z| < 2$, б) $|z| > 2$.

4) $\frac{1}{(z-2)^2}$ для а) $|z| < 2$, б) $|z| > 2$.

51. 1. Указанные функции разложить в ряд Лорана в окрестности нуля, указать природу особых точек и найти область сходимости полученных рядов:

$$1)\ \frac{1-\cos z}{z}; \qquad 2)\ e^{z^2}\cdot z^{-3}; \qquad 3)\ z^5\sin\frac{1}{z}.$$

2. Доказать, что если $\operatorname{tg} z$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z=\frac{\pi}{2}$, то

а) главная часть будет иметь вид $-\frac{1}{z-\pi/2}$;

б) ряд сходится для $0<\left|z-\pi/2\right|<\pi/2$;

с) $z=\pi/2$ есть простой полюс.

3. Разложить $e^{z/(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=2$ и определить область сходимости этого ряда. Проклассифицировать особые точки этой функции.

ТЕМА VI (6 часов)

Вычеты, их вычисление, приложение теоремы о вычетах к вычислению определенных интегралов

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ (обозначение $\operatorname{res} f(a)$ от слова *le residu* (фр.) – вычет или выч $f(a)$) называется число

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz,$$

где γ – достаточно малая окружность, т.е. $|z-a| = \rho$, проходящая в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Если функцию $f(z)$ представить в виде ряда Лорана, сходящегося в кольце $r < |z-a| < R$, $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, то выч $f(a) = c-1$.

Имеем $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где

$f_1(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c-n}{(z-a)^n}$ – главная часть ряда Лорана, этот ряд сходится в области $|z-a| > r$,

$f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ – регулярная часть ряда Лорана, этот ряд сходится в области $|z-a| < R$.

Вычеты широко применяются при вычислении определенных и криволинейных интегралов по замкнутому контуру. Для этого сформулируем основную теорему теории вычетов.

Теорема 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в односвязной области G, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и пусть γ – простая замкнутая кривая, лежащая в области G и содержащая внутри себя точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k),$$

где γ – кривая ориентирована положительно.

Примеры на вычисление вычетов

1) Найти вычет функции $f(z)=z^2\cdot e^{-\frac{1}{2z}}$ в особой точке $z=0$.

Имеем

$$f(z)=z^2\left(1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2!\cdot(2z)^2}-\frac{1}{3!\cdot(2z)^3}+\cdots\right)=z^2-\frac{z}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{48z}+\frac{1}{4!\cdot 16z^2}-\cdots.$$

Стало быть, $c_{-1}=-\frac{1}{48}$. Это и есть $\operatorname{res} f(0)$.

Здесь мы воспользовались разложением в ряд функции e^z:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots.$$

2) Пусть $f(z)=(z^2+5)\sin\frac{1}{z}$. Найти выч $f(0)$.

Имеем

$$f(z)=\left(z^2+5\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots\right)=z+\frac{5}{z}-\frac{1}{6z}-\frac{5}{6z^3}+\frac{1}{5!z^3}-\cdots=$$

$=z+\frac{29}{6}\cdot\frac{1}{z}+\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{5!}\right)\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots$, значит выч $f(0)=\frac{29}{6}$.

Сформулируем правила вычисления вычетов в полюсе.

1. Если полюс простой в точке a, то ряд Лорана имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n .$$

Тогда $c_{-1}=\lim\limits_{z\to a}[f(z)(z-a)]$. Если в частности $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – регулярные в точке a функции, причем $\varphi(a)\neq 0$, $\psi(a)=0$, $\psi'(a)\neq 0$, то находим

$$c_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

2. Если точка a – полюс порядка m для функции $f(z)$, то ряд Лорана в окрестности точки a имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots.$$

Умножим обе части этого равенства на $(z-a)^m$, получим

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^m + \cdots.$$

Чтобы добраться до коэффициента c_{-1} нужно это равенство продифференцировать $(m-1)$ раз и затем перейти к пределу при $z \to a$.

Будем иметь

$$(m-1)!c_{-1} = \lim_{z\to a}((z-a)^m f(z))^{(m-1)}.$$

Стало быть,

$$\text{res}\, f(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)(z+1)}$ в ее особых точках $z = \pm 1$.

В точке $z_1 = 1$ функция имеет полюс первого порядка, а в точке $z_2 = -1$ полюс второго порядка. Поэтому

$$\text{выч}\, f(1) = \lim_{z\to 1}[(z-1)f(z)] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right] = \frac{1}{4}.$$

$$\text{выч}\, f(-1) = \lim_{z\to 1}[(z+1)^2 f(z)]' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{z+1}\right)' = \left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = \frac{1}{4}.$$

Вычисление интегралов по замкнутому контуру сводится к вычислению вычетов подынтегральной функции в особых точках, находящихся внутри контура интегрирования. Этот факт следует из **теоремы 1.**

Пример. Вычислить $I = \oint\limits_c \dfrac{z \sin z dz}{(z^2+\pi^2)(z-\pi)^2}$, где c круг $|z-4i| = 4$.

Имеем $I = 2\pi i\, \text{выч}\, f(\pi \text{i})$, т.к. особые точки $z_1 = -\pi i$, $z_2 = \pi$ не содержатся внутри указанного контура.

Имеем

$$\text{выч}\, f(\pi i) = \lim_{z\to \pi i}[(z-\pi i)f(z)] = \left[\frac{z \sin z}{(z+\pi i)(z-\pi)^2}\right]_{z=\pi i} = \frac{\pi i \sin(\pi i)}{2\pi i(i-1)^2\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{-4\pi^2 i}\cdot\frac{e^{(\pi i)\cdot i} - e^{-(\pi i)\cdot i}}{2i} = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2} = -\frac{1}{4\pi^2}\text{sh}\pi.$$

Здесь мы воспользовались формулой Эйлера $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ и формулой гиперболического синуса: $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$.

Вычеты применяются и для вычисления определенных интегралов.

Рассмотрим вычисление определенных интегралов двух видов.

1°. $J = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin\varphi, \cos\varphi)d\varphi$, где $R(u;v)$ – есть рациональная функция от u и v. Этот интеграл сводится к интегралу по замкнутому контуру с помощью замены переменного.

Пусть $z = e^{i\varphi}$. Тогда $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $d\varphi = -\dfrac{idz}{z}$. При изменении φ от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z| = 1$ в положительном направлении.

Имеем $J = \oint\limits_{|z|=1} R_1(z)dz$, где $R(z) = -\dfrac{i}{z} R\left[\dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right), \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right]$ – рациональная функция. По теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} R_1(z_k),$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – все полюсы рациональной функции $R_1(z)$, лежащие внутри круга $|z| < 1$.

Пример. Вычислить $J = \int\limits_0^{2\pi} \dfrac{d\varphi}{1 + 2a\cos\varphi + a^2}$ $(|a| > 1)$.

Имеем $J = \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{\frac{-idz}{z}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + a^2} = -i \oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{az^2 + (1 + a^2)z + a}$.

Находим корни знаменателя

$$z_{1,2} = \frac{-(1 + a^2) \pm \sqrt{(1 + a^2)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{-(1 + a^2) \pm (a^2 - 1)}{2a},$$

$z_1 = -\dfrac{1}{a},\ z_2 = -a \ \Rightarrow\ |z_1| < 1,\ |z_2| > 1$. Это означает, что

$$J = 2\pi i \,\text{выч}\, f\left(-\frac{1}{a}\right) = 2\pi i\left(-i\frac{z - z_1}{a(z - z_1)(z - z_2)}\right)\Bigg|_{z=z_1} = 2\pi\cdot\frac{1}{a\left(-\dfrac{1}{a} + a\right)} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}.$$

2^{o}. Второй тип интегралов, на вычислении которых мы остановимся, это несобственный интеграл первого рода (предполагаем, что он сходится)

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Считаем, что функция $f(x)$ однозначно аналитически продолжается в верхнюю плоскость и, что она не имеет особенностей на вещественной оси. Мы понимаем интеграл J как предел

$$J = \lim_{R\to\infty}(J_R) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

К этому интегралу прибавляем интеграл $J_{C_R} = \int\limits_{C_R} f(z)dz$, где C_R – верхняя полуокружность $|z| = R$, проходимая против часовой стрелки, и отнимаем его. Тогда имеем

$$J_R = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int\limits_{C_R} f(z)dz - \int\limits_{C_R} f(z)dz = \oint\limits_{\Gamma_R} f(z)dz - \int\limits_{C_R} f(z)dz,$$

где $\Gamma_R = [-R; R] \cup C_R$ – замкнутая кривая, проходимая в положительном направлении.

Для широкого класса функций $f(x)$, в котором исходный несобственный интеграл сходится, можно показать, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$. И тогда

$$J = \lim_{R\to\infty}\oint\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{выч}\, f(z_k),$$

где z_k – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости.

Пример 1. Вычислить $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(a>0, b>0)$.

Имеем

$$J = 2\pi i[\text{выч}\, f(ia) + \text{выч}\, f(ib)] = 2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)}\right|_{z=ia} + \left.\frac{1}{(z^2+a^2)(z+bi)}\right|_{z=ib}\right] =$$

$$= 2\pi i\left[\frac{1}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{1}{2bi(a^2-b^2)}\right] = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

Пример 2. Вычислить $J = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^3}$.

Имеем $J = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^3}$.

$$J = \frac{2\pi i}{2}\text{выч}\, f(i) = \pi i \cdot \left.\left[\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{z^2}{(z+i)^3}\right)''\right]\right|_{z=i} = \frac{\pi i}{2}\cdot\left.\left[\left(\frac{2z(z+i)-3z^2}{(z+i)^4}\right)'\right]\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\cdot\left.\left[\left(\frac{-z^2+2iz}{(z+i)^4}\right)'\right]\right|_{z=i} = \frac{\pi i}{2}\cdot\left.\left[\frac{(-2z+2i)(z+i)-4(-z^2+2zi)}{(z+i)^5}\right]\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\cdot\left.\left[\frac{2z^2-8zi-2}{(z+i)^5}\right]\right|_{z=i} = \frac{\pi i}{2}\cdot\frac{4}{32i} = \frac{\pi}{16}.$$

52. Вычислить вычеты указанных функций в их особых точках:

1) $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+4)}$;

2) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$;

3) $\frac{\mathrm{ctg} z \cdot \mathrm{cth} z}{z^3}$ в точке $z_0 = 0$;

4) $\frac{\sin z}{z^2}$;

5) $\frac{1}{\mathrm{ch} z}$;

6) $\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$.

53. Вычислить интегралы:

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \dfrac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+2z+2)}$ вдоль линии c: $|z|=3$;

2) $\oint\limits_c \dfrac{\text{chz}}{z^3}dz$, где c: квадрат с вершинами $\pm 2\pm 2i$;

3) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \dfrac{e^z dz}{\text{chz}}$, где c: $|z|=5$;

4) $\oint\limits_c e^{-1/z}\cdot\sin\dfrac{1}{z}dz$, где c: $|z|=1$;

5) $\oint\limits_c \dfrac{\text{sh}3z dz}{\left(z-\pi/4\right)^3}$, где c квадрат $(x=\pm 2, y=\pm 2)$;

6) $\oint\limits_c \dfrac{(3z^2+5)dz}{(z+2)^2(z^2+4)z^3}$, где:

а) $|z-2i|=6$; б) квадрат с вершинами $1+i$, $2+i$, $2+2i$, $1+2i$;

7) $\oint\limits_c \dfrac{z+2\sin\pi z}{z(z-1)^2}dz$, где c: а) $|z|<\dfrac{1}{2}$; б) $|z|<2$;

8) $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_c \dfrac{e^{zt}}{z(z^2+1)}dz$, $t>0$, где c прямоугольник с вершинами $\pm 1\pm 2i$.

54. Вычислить:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^6+1}$; 2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$;

3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$; 4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$; 5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$; 7) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx$.

55. Вычислить:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$; 2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\sin\theta}$ $\left(|a|>|b|\right)$;

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$; 4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$;

5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5-3\cos\theta}\,d\theta$;

6) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5+4\sin\theta}\,d\theta$;

7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta$;

8) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3+\cos^2\theta)^2}$.

56. Вычислить:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx,\ m>0$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin \pi x dx}{x^2+2x+5}$;

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{(x^2+1)^2},\ m>0$;

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x dx}{x}$;

5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$;

6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax dx}{e^{2\pi x}-1},\ a>0$;

7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x+1}dx,\ a>0$;

8) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh}\pi x}$;

9) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{-p} dx}{x-1},\ 0<p<1$;

10) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{ch}\pi x}$;

11) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt}dz}{\sqrt{z}}$, где a и t положительные постоянные;

12) $\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\operatorname{arctg} z\,dz$, где $a>0$ и $t>0$ суть постоянные.

УКАЗАНИЯ

ТЕМА I

12. 2) Пусть $z = x + iy$, тогда очевидно:

$$x^2 + y^2 \ge 2|x|\cdot|y| \Rightarrow 2(x^2 + y^2) \ge \left(|x| + |y|\right)^2.$$

4) $P_1 \cdot P_2 \cdots P_n = \left\{\begin{matrix}(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)\cdots(a_N + ib_N) \\ (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2)\cdots(a_N - ib_N)\end{matrix}\right\} = (A + iB)(A - iB).$

5) Учесть, что $z^{n-1} = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1)$ для $\forall\, n$ целого. Корни уравнения z^{n-1} суть $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$. Поэтому $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + 1 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1})$. Положим здесь $z = 1$. Имеем

$$n = (1 - e^{\frac{2\pi i}{n}})(1 - e^{\frac{4\pi i}{n}})\cdots(1 - e^{\frac{2\pi(n-1)}{n}i}) = e^{\frac{\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdots e^{\frac{\pi(n-1)}{n}i} \cdot (-1)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot(e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}})(e^{\frac{2\pi i}{n}} - e^{-\frac{2\pi i}{n}})\cdots(e^{\frac{\pi(n-1)}{n}i} - e^{-\frac{\pi(n-1)}{n}i}) =$$

$$= e^{\frac{\pi}{n}i(1+2+\cdots+(n-1))} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (2i)^{n-1} \cdot \boxed{\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{\pi(n-1)}{n}}^{\,=A} =$$

$$= e^{\frac{\pi}{n} i \cdot \frac{1+n-1}{2}(n-1)} \cdot (-i)^{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot A = A \cdot 2^{n-1}.$$

Откуда $A = n \cdot 2^{1-n}$.

6) Можно считать, что вершинами правильного n – угольника вписанного в единичную окружность, являются точки $z_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда произведение диагоналей $M = AC \cdot AD \cdots AP$ многоугольника $ABCD \cdots PQ$ будет:

$$M = \left|1 - e^{\frac{4\pi i}{n}}\right| \cdot \left|1 - e^{\frac{6\pi i}{n}}\right| \cdots \left|1 - e^{\frac{2\pi}{n}(n-2)i}\right| =$$

$$= \left|e^{\frac{2\pi i}{n}} - e^{-\frac{2\pi i}{n}}\right| \cdot \left|e^{\frac{3\pi i}{n}} - e^{-\frac{3\pi i}{n}}\right| \cdots \left|e^{\frac{\pi}{n}(n-2)i} - e^{-\frac{\pi}{n}(n-2)i}\right| =$$

$$= 2^{n-3} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{3\pi}{n} \cdots \sin\frac{\pi(n-2)}{n} = 2^{n-3} \cdot \frac{A}{\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{\pi(n-1)}{n}} =$$

(где из 5)) $= 2^{n-3} \cdot n \cdot 2^{1-n} \cdot \dfrac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{n}} = \dfrac{n}{4\sin^2 \frac{\pi}{n}}$.

ТЕМА II

14. Пусть $z = re^{i\theta}$, тогда $w = r^{1/6} \cdot e^{i\theta/6}$.

1) $z_1 = r_1 \cdot e^{i\theta_1} \Rightarrow w_1 = r^{1/6} \cdot e^{i\theta/6}$. Если θ_1 примет значение $\theta_1 + 2\pi$, то $w_1 = r_1^{1/6} \cdot e^{\frac{i(\theta+2\pi)}{6}} = w_1 \cdot e^{\frac{i\pi}{3}}$.

2) После 2-х, 3-х, 4-х, 5-ти вращений получим $w_1 e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $w_1 e^{i\pi}$, $w_1 e^{\frac{i4\pi}{3}}$, $w_1 e^{\frac{i5\pi}{3}}$. После 6-ти обходов вокруг начала координат получим $w_1 e^{i2\pi} = w_1$, т.е. функция w принимает первое значение.

3) Если контур не охватывает начала координат, то $\arg z = \theta$ не получает приращения, поэтому w_1 не меняется.

4) Точка $(0;0)$ есть точка ветвления, поскольку, обходя ее, мы получаем первое значение функции в одной и той же точке. Таких ветвей здесь – шесть.

15. Для доказательства 1)-3) воспользоваться формулами
$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$
Для доказательства 4)-7) воспользоваться формулами
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$
17. Для доказательства учитывать определение гиперболических функций:
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$
и формулы в указании к **15**.

20. 1) Пусть $\arcsin z = w \;\Rightarrow\; z = \sin w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2i} \;\Rightarrow\; e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \;\Rightarrow$ $e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$, где $\sqrt{1 - z^2}$ принимает оба возможных значения. Имеем $e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow w = 2k\pi + \dfrac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. Если при $z = 0$, $w = 0$, так, что нужно взять $k = 0$. Если при $z = 0$, $w = 2\pi$, то нужно выбрать $k = 1$.

21. а) 1) Пусть $z-i=r_1e^{i\varphi_1}$, $z+i=r_2e^{i\varphi_2}$, тогда $w=\sqrt{r_1r_2}e^{i\varphi_1/2}\cdot e^{i\varphi_2/2}$. Предположим, что главное значение z соответствует для $\varphi_1=\alpha_1$ и $\varphi_2=\alpha_2$. Тогда если мы опишем круг вокруг точки $z=i$, то φ_1 возрастает от α_1 до $\alpha_1+2\pi$, в то же время φ_2 не изменится и останется равным α_2. Отсюда имеем после обхода вокруг только одной точки $z=i$

$$w=\sqrt{r_1r_2}\cdot e^{\frac{i(\alpha_1+2\pi)}{2}}\cdot e^{\frac{i\alpha_2}{2}}=-\sqrt{r_1r_2}\cdot e^{\frac{i\alpha_1}{2}}\cdot e^{\frac{i\alpha_2}{2}},$$

т.е. мы получили другое значение для w, стало быть, $z=i$ есть точка ветвления. Аналогично и для $z=-i$.

2) Если мы обойдем обе точки ветвления, то останемся на одной и той же ветви.

3) Разрезы плоскости можно определить двояко:

– разрез произвести по оси Oy, между точками $z=i$, $z=-i$;

– разрез произвести по оси Oy, соединяя точки $z=i$, $z=-i$ с бесконечно удаленной точкой.

4) Эти два вида разреза позволяют построить поверхность Римана, состоящую из двух ветвей.

б) Аналогичные действия, что и в а).

26. 1) Нам нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, когда $|z-z_0|<\delta$, где δ зависит только от ε и не зависит от z_0. Именно. Если z и z_0 любые точки из нашего множества $|z|<5$, тогда имеем

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\left(5z^2-3\right)-\left(5z_0^2-3\right)\right|=5|z-z_0|\cdot|z+z_0|\le$$

$$\le 5\left(|z|+|z_0|\right)\cdot|z-z_0|<50\delta=\varepsilon,$$

т.е. существует $\delta=\varepsilon/50$, которое зависит только от ε. Что и требовалось доказать.

2) Доказательство от противного. Предположим, что $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$ равномерно непрерывна в области $0<|z|\le1$. Это означает, что для $\forall\varepsilon>0$ мы можем найти $\delta>0$, такое, что если $|z-z_0|<\delta$ будет следовать $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Итак, пусть z_0 и $z_0+\xi$ две точки из множества $0<|z|\le1$ такие, что $|(z_0+\xi)-z_0|=|\xi|=\delta$. Тогда

$$\left| f(z_0+\xi)-f(z_0)\right| = \left| \frac{1}{(z_0+\xi)^2} - \frac{1}{z_0^2} \right| = \frac{\xi \left|2z_0+\xi\right|}{\left|z_0\right|^2 \cdot \left|z_0+\xi\right|^2} = \delta \left(\frac{\left|2z_0+\xi\right|}{\left|z_0\right|^2 \cdot \left|z_0+\xi\right|^2} \right).$$

Но, если z_0 достаточно близко к 0, то эта дробь будет больше любого фиксированного положительного числа, т.е. мы получили противоречие. Оно и доказывает наше утверждение.

Если же $\alpha \le |z| \le 1$, тогда

$$\left| f(z_0+\xi)-f(z_0)\right| < \delta \cdot \frac{2\left|z_0\right| + \left|\xi\right|}{\left|z_0\right|^2 \cdot \left|z_0+\xi\right|^2} < \delta \cdot \frac{3}{\alpha^4} = \varepsilon .$$

3) Воспользоваться формулами $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \dfrac{e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{-y}e^{ix}+e^{y}e^{-ix}}{2}$.

ТЕМА III

28. а) Дифференцируем по x равенства: $\begin{cases} u(x;y)=\alpha, \\ v(x;y)=\alpha, \end{cases}$ и находим угловые коэффициенты касательных к этим кривым k_1 и k_2. С помощью условий Коши-Римана показываем, что $k_1 \cdot k_2 = -1$.

30. а) Представить аналитическую функцию $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ через z по ее вещественной и мнимой части из следующих способов:

– подставляя непосредственно $x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$,

– применяя формулы $f(z)=u(z;0)+iv(z;0)$, $f(z)=u(0;-iz)+iv(0;-iz)$ (доказать).

31. 2) а, б) Представить $w=u+iv$. Тогда найдем, что $u=x^2-y^2, v=2xy$.

3) Если w_k соответствует точкам $z_k, k=1,2,3,$ тогда имеем

$$w-w_k = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_k+b}{cz_k+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_k)}{(cz+d)(cz_k+d)},$$

откуда

$$w-w_1 = \frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)},\ w-w_3 = \frac{(ad-bc)(z-z_3)}{(cz+d)(cz_3+d)}. \quad *)$$

Заменяем здесь w на w_2 и z на z_2, что оправдано, получим

$$w_2-w_1=\frac{(ad-bc)(z_2-z_1)}{(cz_2+d)(cz_1+d)},\ w_2-w_3=\frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}.\quad **)$$

Из $*)$ и $**)$ получаем

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

4) Метод 1. Пусть $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, тогда имеем

$$1)\ i=\frac{a\cdot 0+b}{c\cdot 0+d};\qquad 2)\ 1=\frac{-ai+b}{-ci+d};\qquad 3)\ 0=\frac{-a+b}{-c+d},$$

откуда получим w.

Метод 2. Воспользуемся формулой пункта 3)

$$\frac{(w-i)(1-0)}{(w-0)(1-i)}=\frac{(z-0)(-i+1)}{(z+1)(-i-0)},$$

откуда получим w.

5) Имеем: $|w|=\left|e^{i\theta_0}\left(\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)\right|=\dfrac{|z-z_0|}{|z-\bar{z}_0|}$, но если $z\in$ верхней полуплоскости, то $|z-z_0|\le|z-\bar{z}_0|$ поэтому имеем $|w|\le 1$, что и требовалось доказать.

6) Неподвижные точки преобразования $w=\dfrac{2z-5}{z+4}$ получаются из уравнения $z=\dfrac{2z-5}{z+4}$.

32. Имеем 1) $w=a+\dfrac{b}{z+c}$, где $a={}^{\alpha}\!/\!_{\gamma}$, $b=\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}$, $c=\dfrac{\delta}{\gamma}$ – константы. Поэтому дробно-линейное преобразование эквивалентно произведению преобразований: 1) $w_1=z+c$ (перенос); 2) $w_2=\dfrac{1}{w_1}$ (обратное преобразование); 3) $w_3=bw_2$ (вращение и гомотетия); 4) $w=a+w_3$ (опять перенос).

2) Уравнение окружности имеет вид:

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0.$$

Учитывая, что $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, получим

$$A(z\bar{z})+\left({}^{B}\!/\!_{2}+{}^{C}\!/\!_{2i}\right)z+\left({}^{B}\!/\!_{2}-{}^{C}\!/\!_{2i}\right)\bar{z}+D=0.$$

Итак, уравнение окружности в переменных z и $\bar{z}$ имеет вид

$$\alpha z\bar{z}+\beta z+\bar{\beta}\bar{z}+\gamma=0,\ \text{где}\ \alpha=A,\ \beta=\frac{B}{2}+\frac{C}{2i},\ \gamma=D.$$

Итак, если $z=\frac{1}{w}$, то уравнение будет иметь вид

$$\gamma w\bar{w}+\bar{\beta}w+\beta\bar{w}+\alpha=0$$

(т.е. окружность). Если $w=az$, т.е. $z=\frac{w}{a}$ (поворот и подобие), исходное уравнение запишется в виде

$$\alpha w\bar{w}+(B\bar{a})w+(\bar{B}a)w+Ca\bar{a}=0$$

(т.е. опять окружность).

Перенос опять переведет окружность в окружность. Но эти три преобразования в произведении дают дробно-линейное преобразование.

35. 3) Функцию $w=\sin\pi z$ представить в виде:

$$u+iv=\sin\pi x\operatorname{ch}\pi y+i\cos\pi x\operatorname{sh}\pi y.$$

ТЕМА IV

40. c) Учесть, что $\oint\limits_{|z|=1} e^{-iz^n}dz=0$.

ТЕМА V

44. 9) Учесть, что

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\sin iy\cos x=\sin x\cdot\frac{e^{i\cdot iy}+e^{-i\cdot iy}}{2}+\cos x\cdot\frac{e^{i\cdot iy}-e^{-i\cdot iy}}{2i}=$$

$$=\sin x\cdot\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}+i\cos x\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$$

и $|\sin z|=\sqrt{\sin^2 x\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x\operatorname{sh}^2 y}=\sqrt{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$.

45. 1) Заметим, что $\left|\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}\right|\le\frac{1}{n^{3/2}}$, если $|z|\le 1$. По признаку Вейерштрасса получаем ответ.

2) Если $n\ge 3$ и $1<|z|<2$, то имеем $\left|n^2+z^2\right|\ge n^2-|z|^2\ge n^2-4\ge\frac{n^2}{2}$, тогда $\left|\frac{1}{n^2+z^2}\right|\le\frac{2}{n^2}$, т.е. по признаку Вейерштрасса (ряд без двух первых членов)

сходится равномерно. Но если $z=i$, или $z=2i$, то первые два члена могут обращаться в бесконечность. Поэтому равномерной сходимости в окрестности двух окружностей $|z|=1$ и $|z|=2$ нет.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-ny}(\cos nx+i\sin nx)}{2n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ny}(\cos nx-i\sin ny)}{2n^3}$, первый ряд расходится при $y<0$, а второй при $y>0$. Поэтому при $|z|\le 1$ исходный ряд просто расходится.

4) $e^{nz}=e^{nx}\cdot e^{iny}$, расходится.

46. 5) Заметим, что $\frac{z}{[1+(n-1)z](1+nz)}=\frac{1}{1+(n-1)z}-\frac{1}{1+nz}$. Поэтому частичная сумма ряда $S_n(z)=1-\frac{1}{nz+1}$.

Но

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)=\begin{cases}0,\text{ если } z=0,\\ 1,\text{ если } |z|\ge\delta,\text{ где } \delta>0.\end{cases}$$

Поэтому равномерная сходимость будет в области $|z|\ge\delta$, где δ – любое положительное число.

48. 1) Оба ряда есть геометрические прогрессии, сходящиеся к одной и той же функции $1/(3-z)$ (первый ряд сходится в области $|z|<3$, второй в области $|z+i|<\sqrt{10}$). Стало быть, в общей части этих областей оба ряда представляют одну и ту же функцию. Следовательно, каждый ряд есть аналитическое продолжение другого в соответствующую область. Сделать чертеж.

2) Обозначим $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{3^n}=z+z^3+z^9+z^{27}+z^{81}+\cdots$, этот ряд сходится при $|z|<1$. Можно заметить, что

$$F(z)=z+F(z^3),\ F(z)=z+z^3+F(z^{3^2}),\ldots,\ F(z)=z+z^3+\cdots+z^{3^n}+F(z^{3^{n+1}}),\ldots$$

Следовательно, множество точек: $z=1,\ z^3=1,\ z^9=1,\ldots,z^{3^n}=1$ есть множество особых точек, принадлежащих окружности $|z|=1$. На любой дуге этого круга находится бесчисленное число особых точек, поэтому аналитическое продолжение хотя бы через малую дугу этой окружности невозможно.

4) а) $F_1(z)$ определена в области $|z|<3$ и $F_1(z)=\dfrac{3z}{3-z}$. Эту функцию можно представить другим рядом, который в точке $z_0=3-4i$ сходится, например, так:

$$F_2(z)=\frac{3z}{3-z}=\frac{3z}{4i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{4i}}=\frac{3z}{4i}\left[1+\frac{z-z_0}{4i}+\left(\frac{z-z_0}{4i}\right)^2+\cdots\right].$$

Область сходимости этого ряда: $|z-z_0|<16$.

в) $-3-\dfrac{9}{4}i$.

5) Если p и q – взаимно простые целые числа и $n\geq q$, то

$$\left(re^{\frac{2\pi ip}{q}}\right)^{n!}=r^{n!}.$$

ТЕМА VI

52. 3) Разложить в ряд по степеням z:

$$f(z)=\frac{\cos z\cdot \operatorname{ch} z}{z^3\sin z\cdot \operatorname{sh} z}=\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\cdots\right)\left(1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots\right)}{z^3\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)\left(z+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)}=\frac{\left(1-\dfrac{z^4}{6}+\cdots\right)}{z^5\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\cdots\right)\left(1+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots\right)}=$$

$$=\frac{1-\dfrac{z^4}{6}+\cdots}{z^5\left(1-\dfrac{z^4}{90}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{7z^4}{45}+\cdots\right),$$

стало быть, выч $f(0)=-\dfrac{7}{45}$.

54. 5) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos mxdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos mxdx}{(x^2+1)^2}$, затем $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin mxdx}{(x^2+1)^2}=0$, поэтому $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos mxdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{imx}dx}{(x^2+1)^2}$, следовательно, нужно вычислить интеграл

$\frac{1}{2}\oint\limits_{c}\frac{e^{imz}}{(z^2+1)^2}dz$, где c полуокружность $\underset{0\le\varphi\le\pi}{z}=Re^{i\varphi}$ и устремить R к бесконечности.

ОТВЕТЫ

ТЕМА I

1. 1) $-5-17i$;

2) $-9-7i$;

3) $\frac{11}{17}-\frac{10}{17}i$;

4) $-4+\frac{13}{2}i$;

5) $-\frac{1}{2}$;

6) $-2-3i$.

2. 1) $-1-i$;

2) 34;

3) $-9-46i$;

4) $\frac{8}{13}$;

5) $1+8i$;

6) -2.

3. 1) $x=1,\ y=-2$;

2) $x=-4,\ y=1$;

3) $x=-2,\ y=2$;

4) а) $x=y=1$; в) $x=y=-1$.

4. Ответы: 5, 5, 8.

7. 1) $4e^{\frac{2\pi i}{3}}$;

2) $4\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}$;

3) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{6}}$;

4) $5e^{\frac{\pi i}{2}}$;

5) $5e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi\right)}$;

6) $\sqrt{5}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}$.

9. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{64}-\frac{i}{64}$;

2) $\frac{15}{2}+\frac{15\sqrt{3}i}{2}$;

3) $32-32\sqrt{3}i$;

4) $\frac{9i}{4}$.

10. 1) $2\sqrt[3]{2}e^{\frac{11\pi i}{18}}$; $2\sqrt[3]{2}e^{\frac{23\pi i}{18}}$; $2\sqrt[3]{2}e^{\frac{35\pi i}{18}}$;

2) $\sqrt[4]{5}e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{8}}$, $k=0,1,2,3$;

3) $2e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $k=0,1,2,3,4$;

4) $\sqrt[3]{4}e^{\frac{2k\pi i}{3}}$, $k=0,1,2$;

5) $\sqrt{6}e^{i\frac{\pi+8k\pi}{8}}$, $k=0,1$;

6) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi+4\pi k}{12}}$, $k=0,1,2,3,4,5$.

11. 1) $5e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$, $k=0,1,2,3$;

2) $\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi+6k\pi}{9}}$, $k=0,1,2$;

3) $z_1=-1+\frac{1}{2}(1+\sqrt{11})i,\ z_2=-1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{11})i$;

4) $z_1=e^{\frac{\pi i}{3}}$, $z_2=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $z_3=e^{\frac{4\pi i}{3}}$, $z_4=e^{\frac{5\pi i}{3}}$;

5) $z_1=z_2=1,\ z_3=2,\ z_4=-1+i,\ z_5=-1-i$.

12. 1) $e^{-\sqrt{3}/2}$.

ТЕМА II

13. 1) $w_1=-3-4i$; $w_2=8-6i$.

2) Прямая, проходящая через точки z_1, z_2, имеет уравнение $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-3}$ или

$\begin{cases} x = 4t - 1, \\ y = -3t + 2. \end{cases}$ Эта прямая преобразуется в кривую: $u = 7t^2 + 4t - 3$, $v = -24t^2 + 22t - 4$.

18. 2) $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3\pi}{4} i$;

3) 7 и 26.

4) $\mathrm{Re}\left\{e^{3iz}\right\} = e^{-3y}\cos 3x$, $\mathrm{Im}\left\{e^{3iz}\right\} = e^{-3y}\sin 3x$;

$\mathrm{Re}\{\sin 3z\} = \sin 3z\,\mathrm{ch}3y$, $\mathrm{Im}\{\sin 3z\} = \cos 3x\,\mathrm{sh}3y$;

$\mathrm{Re}\left\{z^2 e^{2z}\right\} = e^{2x}\left[(x^2 - y^2)\cos 2y - 2xy\sin 2y\right]$,

$\mathrm{Im}\left\{z^2 e^{2z}\right\} = e^{2x}\left[(x^2 - y^2)\sin 2y + 2xy\cos 2y\right]$.

5) а) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$;

б) $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$;

с) $e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2})$;

д) $e^{i2\pi k\sqrt{3}}$.

6) а) $e^{\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2k\pi}\cos\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $e^{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$.

20. 3) а) $i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

б) $i\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2}\right) + \ln\left(\sqrt{2} \pm 1\right)$;

с) $\ln(2 + \sqrt{5}) + 2k\pi i$;

д) $\ln(2 + \sqrt{3}) + 2k\pi i$.

4) $\mathrm{Re}\left\{z^z\right\} = e^{x\ln\sqrt{x^2+y^2} - y(\arg z + 2k\pi)} \cdot \cos\left[y\ln\sqrt{x^2 + y^2} + x(\arg z + 2k\pi)\right]$.

22. 1) $16 - 8i$;

2) $1/4 + i\sqrt{3}/8$;

3) $\frac{1}{3}$;

4) $-\frac{1}{4}$;

5) $\frac{\pi^2}{8}$.

23. 1) сходится к нулю;
2) расходится;
3) сходится к $1-i$;
4) расходится;
5) сходится к 0;
6) сходится к $i/2$.

24. 1) сходится;
2) сходится;
3) расходится.

25. 1) $z_{1,2} = -1 \pm i$;
2) $z = 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, k = 0,1,2,3$;
3) $z = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
4) $z_1 = 0, z_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;
5) $z_{1,2} = \pm i, z_3 = \pi i\left(k + \frac{1}{2}\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
6) $z = k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ТЕМА III

28. б) 1) $e^{-x}(y\sin y + x\cos y) = \beta$;
2) $\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} + 3x^2y^2 = \beta$;
3) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - e^{-x}\sin y = \beta$.

30. а) 1) $f(z) = 2z^2 - iz^3 + ci$;
2) функция v – не гармоническая;
3) $f(z) = ze^z + ci$;
4) $f(z) = -z^2 + 2iz + c$;
5) $f(z) = (1+i)z^2 - 3iz + ci$;

б) 1) $2ie^{iz^2/2}\sin\left(z^2/2\right)+c$;

2) $2\ln[z+3(1-i)]+c$;

3) $\mathrm{sh}z+c$;

4) $iz^4+2(i-2)z+c$;

5) $ze^z+2i\cos z+z^3-iz+c$.

31. 1) а) Все точки области поступательно переместятся на величину вектора $z=2-i$;

б) Фигура повернется на угол $\varphi=\pi/4$ против часовой стрелки и модули точек увеличатся в $\sqrt{3}$ раза;

с) Фигура переместится на величину вектора $z=2-i$, затем повернется на угол $\varphi=\pi/4$ и растянется в $\sqrt{3}$ раза.

2) а) Фигура отобразится в верхнюю полуплоскость;

б) Фигура отобразится в криволинейный треугольник с вершинами $A'=(4;0)$, $B'(0;8)$, $C'(-4;0)$ в плоскости $w=u+iv$, где:

$A'B'$ имеет уравнение $u=4-\dfrac{v^2}{16}$, $0\le v\le 8$;

$B'C'$ имеет уравнение $u=\dfrac{v^2}{16}-4$, $-4\le u\le 8$;

$C'A'$ имеет уравнение $v=\dfrac{u^2-16}{8}$, $-4\le u\le 4$.

3) Искомая функция $w(z)$ есть решение следующего уравнения:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

4) $w=-i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$;

5) $w=\dfrac{i-z}{i+z}$;

6) $z_{1,2}=-1\pm 2i$.

33. а) Треугольник в плоскости w с вершинами: $4+i$; $7-5i$; $7+i$;

b) Треугольник в плоскости w с вершинами: $1-i$; 3; 1;

с) Треугольник в плоскости w с вершинами:

$$-\frac{5\sqrt{3}+4}{2}+\frac{13}{2}i;\ \frac{9+5\sqrt{3}}{2}+i\frac{5\sqrt{3}+3}{2};\ \frac{1-5\sqrt{3}}{2}+i\frac{5\sqrt{3}+13}{2}.$$

34. 1) $u^2+2v=1$; 2) $u^2+v^2=u-v$.

35. 1) Область D отобразилась в квадрат в области w с вершинами: $7-3i$, $9-3i$, $9-i$, $7-i$.

2) Область D' есть криволинейный четырехугольник со сторонами, которые являются тремя кусками парабол и отрезком прямой:

$$\begin{cases} u=4-\dfrac{v^2}{16}, \\ 0\le v\le 4, \end{cases} \begin{cases} u=\dfrac{v^2}{4}-1, \\ 2\le v\le 4, \end{cases} \begin{cases} u=1-\dfrac{v^2}{4}, \\ 0\le v\le 2, \end{cases} \begin{cases} v=0, \\ 1\le u\le 4. \end{cases}$$

3) Граница D' есть левая половина эллипса $\dfrac{u^2}{\mathrm{ch}^2\pi}+\dfrac{v^2}{\mathrm{sh}^2\pi}=1$ с разрезом от центра до левого фокуса.

36. 1) $w=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}\cdot\dfrac{z-i}{z-1}$; 2) $w=\dfrac{2i(z-1-2i)}{(5+i)z+3+3i}$.

ТЕМА IV

38. 1) а) $-21+\dfrac{26}{5}i$;

б) $-21+\dfrac{20}{3}i$;

с) $\dfrac{65}{3}+4i$.

2) а) $1+2i$;

б) $2\pi i$;

с) $2\pi i$.

3) а) 0;

б) $16\pi i$;

с) $4\sqrt{3}\pi i$.

4) а) 0;

б) 0;

с) 0.

5) а) $2\pi i$;

б) $2\pi i$;

с) $2\pi i$.

6) 8π.

41. а) 0;

б) $\pi i 9e^{-6}$;

c) i/π.

42. 1) a) e^2;

в) 0.

2) a) $2\pi i$;

в) 0;

3) a) $2\pi i$;

в) πi;

c) πi.

43. a) $2\pi i \sin t$;

b) -2π;

c) $\dfrac{\pi i}{16}$;

d) $\dfrac{55\pi i}{32}$;

e) $\dfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.

ТЕМА V

44. 1) $|z| \le 1$;

2) $|z+3| \le 4$;

3) $|z| < \infty$;

4) $z = 0$;

5) $|z| < 1$;

6) $|z^2+1| > 1$;

7) $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2 + y^2 \ge \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$ или $|z+1| \le 3|z-1|$;

8) $\operatorname{Im} z \ge 0$;

9) $|\sin z| \le 1$ или $\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x \le 1$.

45. 1) Да;

2) Нет;

3) Нет;

4) Нет.

46. 1) $|z| \le R$, где $R < 2$;

2) $|z+i| \le 1$;

3) $|z| \geq R$, где $R > 1$;

4) Сходится равномерно всюду;

5) Равномерно сходится в области $|z| \geq \delta$, где $\delta > 0$ любое вещественное число.

47. 1) $(\cos 1 - i\sin 1)\left[1-(z-i)+\dfrac{(z-i)^2}{2!}-\cdots+\dfrac{(-1)^n(z-i)^n}{n!}+\cdots\right]$, $R=\infty$;

2) $-1+\dfrac{(z-\pi)^2}{2!}-\dfrac{(z-\pi)^4}{4!}+\dfrac{(z-\pi)^6}{6!}-\cdots$, $R=\infty$;

3) $(30-8i)+(4+44i)(z+2i)-27(z+2i)^2-8i(z+2i)^3+(z+2i)^4$;

4) $e^3\left[1+4(z-1)+\dfrac{15}{2}(z-1)^2+9(z-1)^3+\cdots+\dfrac{3^{n+1}}{n!}(z-1)^n+\cdots\right]$, $R=\infty$.

5) $-2-(z-2)-2(z-2)^2-(z-2)^3-\cdots-\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{(-1)^n}{2}\right)(z-2)^n-\cdots$, $|z-2|<1$;

6) $z^2-\dfrac{z^4}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{2^{2n-1}\cdot z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$, $R=\infty$.

49. 1) $z=\pm i$ полюсы 2-го порядка, изолированные;

2) $z=\dfrac{2}{\pi(1+2k)}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ полюсы первого порядка;

3) $z_1=-2$ – точка ветвления, изолированная особая точка, $z_{2,3}=-1\pm i$ – полюсы 3-го порядка, изолированные;

4) $z=0$ – устранимая особая точка;

5) $z_1=-1$ – полюс 3-го порядка, $z_2=\dfrac{1}{2}$ – полюс 2-го порядка, $z_3=\infty$ – полюс 2-го порядка.

6) $z_1=0,\ z_{2,3}=\pm i$ – точки ветвления;

7) $z=i$ – полюс 3-го порядка.

50. 1) а) $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}$;

2) а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)z^n$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^n}\right)$;

с) $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{z^n}$;

д) $\frac{1}{z-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(z-1)^n}$;

е) $\frac{2}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n(-1)^{n-1}$;

f) $\frac{1}{z-2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}$;

3) а) $\frac{i}{2z}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n$;

б) $-\frac{i}{2z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n$;

4) а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(n+1)}{2^{n+2}}, |z|<2$;

б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{z^{n+2}}, |z|>2$.

51. 1. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n)!}, |z|<\infty$, устранимая особенность;

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-3}}{n!}, |z|<\infty$, полюс 3-го порядка;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!z^{2n-6}}, |z|<\infty,\ z=0$ – существенно особая точка.

ТЕМА VI

52. 1) выч $f(-1)=-\frac{1}{25}$, выч $f(2i)=\frac{1-7i}{50}$, выч $f(-2i)=\frac{1+7i}{50}$;

2) выч $f(0)=1$;

3) выч $f(0)=-\frac{7}{45}$;

4) выч $f(0)=1$;

5) выч $f\left(\frac{2k+1}{2}\pi i\right)=(-1)^{k+1}\cdot i$, где $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

6) выч $f(0)=2$, выч $f(-1+i)=\frac{-1+3i}{2}$, выч $f(-1-i)=\frac{-1-3i}{2}$.

53. 1) $\frac{1}{2}(-1+t+e^{-t}\cos t)$;

2) πi;

3) 4;

4) $2\pi i$;

5) $-\frac{9\pi i\sqrt{2}}{2}$;

6) а) $\frac{225\pi i}{32}$;

б) 0;

7) а) $6\pi i$;

б) $-4\pi^2 i$;

8) $2\sin^2\left(t/2\right)$;

54. 1) $\pi/3$;

2) $7\pi/50$;

3) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

4) $\frac{5\pi}{228}$;

5) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$;

6) $\pi/2$;

7) $-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\pi\sqrt{3}}$.

55. 1) π;

2) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$;

3) $\pi/12$;

4) $5\pi/32$;

5) 0;

6) $-\dfrac{\pi}{12}$;

7) $\dfrac{3\pi}{8}$;

8) $\dfrac{7\pi\sqrt{3}}{72}$.

56. 1) $\dfrac{\pi}{2}e^{-m}$;

2) $-\pi e^{-2\pi}$;

3) $\dfrac{\pi}{4}e^{-m}(1+m)$;

4) $\dfrac{\pi}{2}$;

5) $\dfrac{\pi}{2}$;

6) $\dfrac{1}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$;

7) $\dfrac{1}{2a}-\dfrac{\pi}{2\operatorname{sh} a\pi}$;

8) $1/4$;

9) $\pi \operatorname{ctg} p\pi$ (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши);

10) $\dfrac{4-\pi}{2}$;

11) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$;

12) $\dfrac{\sin t}{t}$.