УДК 514.764.77

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНОЙ

О.А. Рязанова[1], В.Н. Кокарев[2]

1 *olga.riazanova2011@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
2 *sko1949@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева

Описывается поверхность в R^3, средняя кривизна которой в каждой точке равна значению некоторой гладкой функции. Получено уравнение, описывающее поверхности заданной средней кривизны. Получены условия его разрешимости в неявном виде.

Ключевые слова: средняя кривизна, существование поверхности, квазилинейное дифференциальное уравнение.

Пусть компактная регулярная поверхность S в R^3 локально задана уравнением $r = r^S(u,v)$. Пусть в некоторой окрестности S задана функция $H(x,y,z)$. Мы рассматриваем вопрос о существовании поверхности S^f, гомеоморфной S, которая задана уравнением $r = r^S(u,v) + f(u,v)\overline{n}^S(u,v)$ и в каждой своей точке A имеет среднюю кривизну, равную H(A). Для случая, когда S является сферой или тором, задача была рассмотрена в [1] (с. 271-303) и в [2].

В окрестности поверхности S возникает система координат (u,v,ρ), где (u,v) – локальные координаты на S, а ρ – величина смещения вдоль перпендикуляра, проведенного к S.

Наша задача сводится к вопросу о разрешимости некоторого квазилинейного дифференциального уравнения второго порядка на S относительно функции $f(u,v)$. Для доказательства разрешимости этого уравнения требуются оценки его решения и первых производных решения.

Пусть S^ρ – поверхность, заданная уравнением $r = r^S(u,v) + \rho\overline{n}^S(u,v)$, где ρ – константа, удовлетворяющая неравенству $|\rho| < c$. Здесь $c = \min_{(A\in S, i=\overline{1,2})}\{\frac{1}{k_i(A)}\}$, и $k_i(A)$ – главные нормальные кривизны поверхности S в точке A. Средняя кривизна поверхности S^ρ равна $H^\rho = \frac{k_1}{1-\rho k_1} + \frac{k_2}{1-\rho k_2}$.

Функцию H представим в виде

$$H(u,v,\rho) = H^\rho(u,v,\rho) + h(u,v,\rho).$$

Теорема. *Если a, b – константы, такие, что $-c < a < b < c$, и если*

$$h(u,v,\rho) < 0 \text{ при } \rho < a,$$

$$h(u,v,\rho) > 0 \text{ при } \rho > b,$$

то для функции $f(u,v)$ имеют место оценки

$$a < f(u,v) < b.$$

Литература

1. Бакельман И., Вернер А., Кантор Б. *Введение в дифференциальную геометрию в целом.* – М.: Наука, 1973. – 440 с.

2. Голубцова Т. *Оценки гомеоморфной тору поверхности в E^3 с данной средней кривизной* // Геометрия и топология. – 1974. – № 2. – С. 76–88.

PRIOR ESTIMATES FOR A COMPACT SURFACE OF GIVEN MEAN CURVATURE

O.A. Ryazanova, V.N. Kokarev

This paper describes a surface in R^3 with a mean curvature that equals value of some function at each point. Equation which represents surfaces of given mean curvature is obtained. Conditions which enable it to be resolvable is obtained.

Keywords: mean curvature, surface existance, quasilinear differential equation.

УДК 615.322+66.061.3

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИТЕРПЕНОВЫХ КИСЛОТ В ЛИСТЬЯХ ШАЛФЕЯ ЛЕКАРСТВЕННОГО

А.А. Саламатин[1], А.С. Халиуллина[2]

1 *arthur.salamatin2@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *anela_90@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт фундаментальной медицины и биологии

В статье обсуждаются результаты лабораторных опытов по экстракции дитерпеновых кислот из листьев шалфея лекарственного петролейным эфиром, селективным в отношении целевой группы соединений. Используется традиционный метод экстракции на водяной бане. Данные опытов позволяют оценить изотерму равновесия экстрагированных (в объеме растворителя) и неэкстрагированных (в объеме сырья) соединений. Соответствующая функциональная зависимость получается в результате варьирования отношения массы навески сырья к объему экстрагента. Анализ чувствительности решения обратной задачи к параметрам модели проводится в рамках обратного метода Монте-Карло.

Ключевые слова: шалфей лекарственный, петролейный эфир, дитерпеновые кислоты, обратный метод Монте-Карло, равновесная концентрация.

В работе исследуется кинетика экстракции дитерпеновых кислот из листьев шалфея лекарственного. Петролейный эфир используется в качестве селективного растворителя. Типичный лабораторный опыт по экстракции организован следующим образом. Измельченное сырье помещается в колбу, содержащую известный объем растворителя. Полученная смесь нагревается на водяной бане и поддерживается при температуре кипения экстрагента (40–60°C). Вода постоянно подводит тепло к системе, и обычно раствор закипает через 3–4 минуты после начала эксперимента [1]. Этот момент принимается за начало отсчета времени, $t = 0$. Колба присоединяется к обратному холодильнику, что предотвращает значительное уменьшение объема экстрагента со временем — испарившийся растворитель конденсируется и сливается обратно в колбу. Анализ концентрации раствора в различные моменты времени позволяет установить факт наступления материального равновесия в системе, когда целевые соединения перестают выходить в раствор, омывающий сырье. Для более полной экстракции необходимо использование свежей (чистой) порции растворителя.

Результаты лабораторных опытов свидетельствуют о том, что с течением времени в описанной системе наступает равновесие. Целевые соединения перестают выходить в раствор. Так, добиться большей степени экстракции возможно лишь с уменьшением отношения массы навески m к объему растворителя V, $L = m/V$. Увеличение времени экстракции перестает влиять на концентрацию раствора при $t > 20$ мин. Подтверждение сформулированной гипотезы о наступлении равновесия и одновременная идентификация изотермы равновесия являются основными задачами представленной работы.

Хорошего согласия теории [2] с экспериментальными данными позволяет добиться нелинейная изотерма сорбции, определяющая равновесие растворенных веществ в объеме экстрагента с дитерпеновыми кислотами, содержащимися в объеме сырья. Текущее содержание y соединений в сырье в равновесии с раствором при концентрации c_{eq} дается следующей формулой

$$y(c_{eq}) = \begin{cases} c_{eq}/K, & c_{eq} < c_b; \\ c_b/K + (c_{eq} - c_b)/K_1 & c_{eq} \geq c_b. \end{cases} \qquad (1)$$

Величины c_{eq} и y дополнительно связаны условием сохранения полной массы дитерпенов в системе, что позволяет однозначно идентифицировать равновесное состояние по гидромодулю L.

Параметры изотермы (наклоны прямолинейных участков $K_1 \gg K$, промежуточное значение c_b концентрации, разделяющее два режима), а также полное содержание y_{max} соединений в сырье являются свободными параметрами, и определяются из согласования теории с экспериментальными данными. Результат представлен на Рис. 1. Экспериментальные точки получаются в результате варьирования гидромодуля L и кратности экстракции [3].

Обычно линейная изотерма не позволяет дать адекватную интерпретацию данных лабораторных наблюдений. В связи с этим часто рассматриваются нелинейные изотермы [5]. Используемое здесь выражение для изотермы равновесия предполагает, что часть целевых соединений $0 < y_e < y_{max}$ слабо взаимодействует с развитой внутренней поверхностью сырья и может быть легко растворена экстрагентом. Таким образом, наклон изотермы (1) при высоких концентрациях близок к нулю, означая, что количество извлеченных соединений $x = y_{max} - y$ слабо зависит от равновесной концентрации c_{eq}. Растворитель любого уровня чистоты способен растворить эту часть соединений; нет необходимости регулярно подавать новый, чистый экстрагент. С другой стороны, оставшаяся фракция, $y_h = y_{max} - y_e$, находится в непосредственном контакте с внутренней развитой поверхностью внутриклеточных мембран, и для ее извлечения требуется повышенная растворяющая способность экстрагента. В связи этим, необходимо регулярно сменять растворитель, чтобы достичь полного истощения сырья. Таким образом, обосновывается необходимость многократной экстракции.

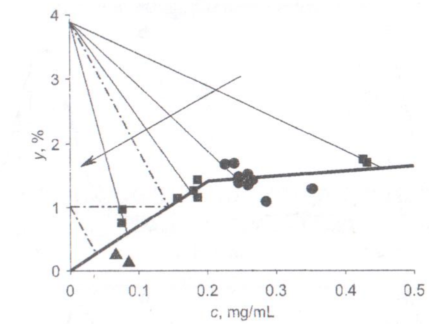

Рис. 1. Сопоставление данных лабораторных опытов с теоретической кривой равновесия (1). Здесь K = 1.42E−2 г/мл, K_1 = 1.07E−1 г/мл, c_b = 1.99E−4 г/мл, y_{max} = 3.89E−2. Маркеры – данные опытов, тонкие сплошные линии показывают траектории материального баланса при L = {1:50, 1:100, 1:150, 1:200, 1:400} г/мл, стрелка указывает направление убывания L. Время t является параметром вдоль каждой кривой. При его стремлении к бесконечности, линия упирается в кривую равновесия. Штрих-пунктирная ломаная кривая демонстрирует эффект от двухкратной экстракции при соотношении L = 1:200 г/мл (каждая).

Наилучшее приближение параметров модели (подпись к Рис. 1) получено на основе метода наименьших квадратов. Однако, он не позволяет непосредственно оценить соответствующие доверительные интервалы, а также убедиться, что найденные значения действительно отвечают глобальному минимуму невязки. В связи с этим применялся обратный метод Монте Карло, развитый Тарантолой и Мозгаардом [4]. Он позволяет получить весьма строгие оценки реальных значений параметров, а также проверить чувствительность модели к изменению значений в окрестности оптимума. Полученные результаты представлены на Рис. 2. Интересно, что наибольшая дисперсия наблюдается для параметра K_1, что свидетельствует о справедливости гипотезы о том, что определенная часть целевых соединений может практически беспрепятственно растворяться в экстрагенте.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Академии наук Республики Татарстан (проект 18–41–160001 р_а).

Литература

1. Халиуллина А.С., Хазиев Р.Ш., Саламатин А.А. *Количественное определение дитерпеновых кислот в листьях шалфея лекарственного* // Журнал аналитической химии. – 2017. – Т. 72, № 7. – С. 681–685

2. Salamatin A.A. *Detection of micro-scale mass-transport regimes in supercritical fluid extraction* // Chemical engineering and technology. – 2017. – V. 40, № 5. – P. 829–837

3. Саламатин А.А., Хазиев Р.Ш., Макарова А.С., Иванова С.А. *Кинетика экстракции биологически активных веществ из растительного сырья кипящим растворителем* // Теоретические основы химической технологии. – 2015. – Т. 49, № 2. – С. 206–213.

4. Bucic-Kojic A., Sovova H., Planinic M., Tomas S. *Temperature-dependent kinetics of grape seed phenolic compounds extraction: Experiment and model* // Food Chemistry. – 2013. – V. 136, № 3–4. – P. 1136–1140.

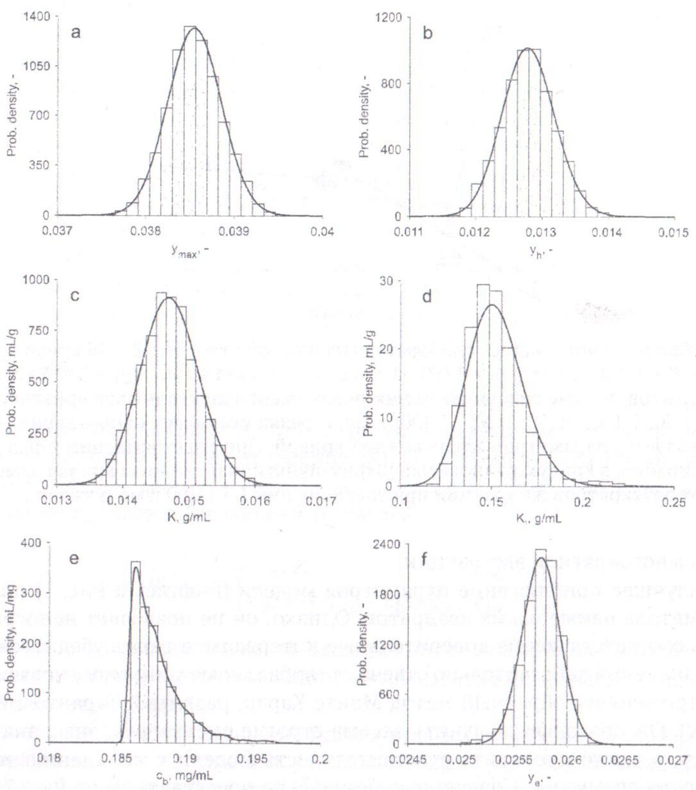

Рис. 2. Гистограммы плотности маргинальных функций распределения параметров изотерм равновесия, (a) y_{max}, (b) $y_h = c_b/K$, (c) K, (d) K_1, (e) c_b, (f) y_e. Сплошные линии в (a)–(d), и (f) – наилучшее приближение логнормальным распределением, и в (e) – метод на основе окон Парцена – Розенблатта.

5. Mosegaard K. *Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling* // Inverse Problems. – 1998. – V. 14. – P. 405–426.

MONTE CARLO METHOD FOR QUANTITATIVE DETERMINATION OF DITERPENE ACIDS CONTENT IN *SALVIA OFFICINALIS* LEAVES

A.A. Salamatin, A.S. Haliullina

Results of laboratory experiments of extraction of diterpene acids from ground Salvia officinalis leaves using petroleum ether are discussed in the paper. The solvent is selective with respect to the target group of compounds. Observed data allow for the estimation of the equilibrum isotherm between extracted compounds (in the bulk of the solvent) and non-extracted compounds (in the bulk of the raw material). The dependence is obtained when the ratio of plant material mass to the volume of the solvent is varied. The resolution analysis is performed in terms of the Monte Carlo approach.

Keywords: Salvia officinalis, petroleum ether, diterpene acids, inverse Monte-Carlo method, equilibrium concentration.

УДК 532.539

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИСПАРЕНИЯ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ КАПЕЛЬ В СТРУЕ: МЕТОД МОМЕНТОВ

Р.Р. Салахов[1]

1 *ramms_92@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Решена задача движения полидисперсного аэрозоля с испаряющимися каплями в струе внутри канала кругового сечения: модель струи аэрозольного ингалятора. Реализован эйлеров метод моментов для логарифмически нормальной функции распределения частиц по площадям поверхности. Для различных начальных значений насыщенности рассчитаны характеристики испаряющейся жидкой фазы.

Ключевые слова: метод моментов, испарение, полидисперсный аэрозоль.

Математическое моделирование многофазных систем имеет ряд приложений в различных областях: химическая инженерия, машиностроение, медицина и др. Во многих случаях многофазная система представляет собой газовзвесь, состоящую из капель, взвешенных в среде несущего газа. В двигателях внутреннего сгорания или при движении капель лекарственных аэрозолей в дыхательных путях одним из процессов, вовлеченных в динамику частиц, является испарение. Модели испарения одиночной капли на настоящий момент достаточно хорошо развиты [1]. Однако испаряющиеся капли в реальных ситуациях, как правило, имеет полидисперсное распределение по размерам, и остается актуальным развитие методов моделирования испарения полидисперсных аэрозолей. Основными при этом являются лагранжев метод расчета траекторий отдельных частиц и эйлеров метод решения уравнения переноса для дисперсной фазы. С точки зрения эффективности в плане вычислительной стоимости и возможности учета двухстороннего взаимодействия с несущей средой привлекательным является эйлеров метод моментов [2,3].

В настоящей работе развит метод моментов для моделирования движения полидисперсного аэрозоля в струе внутри канала кругового сечения. Подобная задача возникает при моделировании струи аэрозольного ингалятора. Задача формулируется для функции распределения частиц по площадям поверхности при диффузионном законе испарения отдельной капли.

Постановка задачи. В канал кругового поперечного сечения диаметром $D_t = 22$ mm и длиной $L = 150$ mm через сопло диаметра $d_n = 0.6$ mm подается аэрозольная струя температуры T_0 со скоростью U_{x0}. По кольцевому сечению вне выходного сечения сопла подается струя воздуха температуры T_1 со скоростью U_{x1}. На рис. 1 дана схема расчетной области. Течение гидродинамической струи описывается осредненными уравнениями Рейнольдса неизотермического турбулентного течения в рамках $k-\varepsilon$ модели турбулентности. Распределение $n_a(a,t)$ капель по площадям поверхности a описывается логарифмически нормальной функцией [4,5].

Казанское математическое общество
Российская Федерация,
Республика Татарстан, 420008,
Казань, ул. Кремлевская, 35
Институт математики и механики
им. Н.И. Лобачевского
Казанского (Приволжского)
федерального университета

Kazan Mathematical Society
Lobachevski Institute of
Mathematics and Mechanics
Kazan (Volga region) Federal
University, 35, Kremlevskaya str.
Kazan, Republic of Tatarstan,
420008, Russian Federation

Издание осуществлено за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.12878.2018/12.1.

УДК 51+533
ББК 22.1
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 56 / Казанское математическое общество. «Лобачевские чтения – 2018» // *Материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ 2018. – Т. 56. – 342 с.

ISBN 978-5-9690-0472-6

Сборник содержит материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2018», организованной на базе Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета. Школа-конференция проведена в Казани с 23 по 28 ноября 2018 года.

Книга предназначена для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 51+533
ББК 22.1

ISBN 978-5-9690-0472-6

УДК 517.95

КВАЗИДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

О. Абдулвохид[1], Д.С. Сафаров[2]

1 *vohid161090@mail.ru*; Бохтарский государственный университет, Таджикистан
2 *safarov-5252@mail.ru*; Бохтарский государственный университет, Таджикистан

В работе для одного класса эллиптической систем второго порядка находится квазидвоякопериодические решение с помощью апарата теории эллиптические функции.

Ключевые слова: двоякопериодические, квазидвоякопериодические, циклические постоянные.

В работе [1] для эллиптической системы вида [2]

$$w_{\bar{z}z} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w_z + c(z)w = f(z),$$

при довольно общих условиях на коэффициенты и правую часть было доказано, что задача существования и нахождения двоякопериодических решений с периодами $h_1, h_2, \mathrm{Im}(h_2/h_1) \neq 0$, фредгольмова в пространстве Соболева $W_p^2(\Omega)$, $p > 2$, где Ω — один из параллелограммов периодов.

При решении задачи были использованы интегральные операторы с ядрами, являющимися эллиптическими функциями Вейерштрасса $\zeta(z), \sigma(z)$ [3], построенными на периодах h_1, h_2, которые имеют вид

$$T_\zeta\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \varphi(t)\zeta(t-z)d_t\Omega, \quad T_\sigma\rho = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\frac{\sigma(t-z-D)}{\sigma(-D)\sigma(t-z)}d_t\Omega,$$

причём D не является периодом. Свойства операторов $T_\zeta\varphi, T_\sigma\rho$ изучены в [4].

В данной заметке для одного частного случая уравнения вида

$$w_{\bar{z}z} + b(z)w_z = f(z), \tag{1}$$

где $a(z), b(z)$ — двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2, принадлежащие классу $L_p(\overline{\Omega})$, $p > 2$, Ω — основной параллелограмм периодов решетки $\Gamma = \{m_1h_1 + m_2h_2; m_1, m_2$ – целые числа$\}$, будем исследовать, задачи существования и нахождения решений уравнения, удовлетворяющих условию

$$w(z+h_1) = w(z) + c_1, w(z+h_2) = w(z) + c_2, \tag{2}$$

где c_1, c_2 — постоянные. Если $w(z)$ удовлетворяет условию (2) и $w(z) \in C^2$, то w_z и $w_{\bar{z}}$ — двоякопериодические функции. Из этого утверждения следует

Лемма. *Если $w(z)$– решение задачи (1), (2), то необходимо, чтобы $b(z), f(z)$ были двоякопериодическими функциями с периодами h_1, h_2.*

При обозначении $w_z = \varphi(z)$, мы ищем двоякопериодические решения уравнения вида

$$\varphi_{\bar{z}} + b(z)\varphi = f(z). \tag{3}$$