УДК: 530.1

Эволюция и столкновительное взаимодействие солитонов уравнения GNLS в нестационарных и неоднородных средах

В.Ю. Белашов[1], Е.С. Белашова[2], О.А. Харшиладзе[3]

Evolution and Collisional Interaction of the GNLS Solitons in Nonstationary and Nonuniform Media

V.Yu. Belashov[1], E.S. Belashova[2], O.A. Kharshiladze[3]

[1]*Казанский федеральный университет, Казань, Россия, E-mail: vybelashov@yahoo.com*
[2]*Казанский национальный исследовательский технический университет, Казань, Россия*
[3]*Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*

[1]*Kazan Federal University, Kazan, Russia, E-mail: vybelashov@yahoo.com*
[2]*Kazan National Research Technical University, Kazan, Russia*
[3]*Iv. Javaxishvilis Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

Аннотация. На основе аналитического и численного подходов, с учетом неоднородности и нестационарности среды распространения, изучается динамика неодномерных солитоноподобных решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (GNLS), которое описывает волны в плазме и нелинейных оптических системах. Получены условия устойчивости решений, показано, что даже в наиболее простом 1-мерном случае уравнение GNLS может иметь, наряду с неустойчивыми решениями, рассеивающимися со временем, устойчивые и квазиустойчивые решения типа солитонов и бризеров. Результаты могут быть полезными в многочисленных приложениях в физике плазмы и нелинейной оптике.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера; солитоны огибающей; бризеры; эволюция; взаимодействие; неоднородная среда; нестационарная среда; плазма; нелинейная оптика

Abstract. On the basis of the analytical and numerical approaches the dynamics of the multidimensional soliton-like solutions of the generalized nonlinear Schrödinger (GNLS) equation, which describes the waves in a plasma and nonlinear optical systems, taking into account inhomogeneity and nonstationarity of medium, is studied. The conditions of stability of the solutions are obtained, and it is shown that even in the simplest 1D case the GNLS equation can have stable and quasi-stable solutions of the soliton and breather types on a level with unstable solutions which disperse with time. Our results can be useful in numerous applications in plasma physics and nonlinear optics.

Keywords: generalized nonlinear Schrödinger equation; envelop solitons; breathers; evolution; interaction; multidimensional solitons; nonuniform medium; nonstationary medium; plasma; nonlinear optics

Введение

Обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (3-GNLS) [Belashov et al., 2018a] описывает динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (волновых пакетов) в средах с дисперсией и имеет многочисленные важные приложения в физике плазмы (например, описывает распространение ленгмюровских волн в горячей плазме), нелинейной оптике (распространение световых импульсов в кристаллах, оптоволокне и плоских оптических волноводах), оно описывает, в частности такие явления, как турбулентность, волновой коллапс и оптическая самофокусировка. Уравнение используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур, гидродинамика и др. Уравнение не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, с использованием подходов, развитых в [Belashov, Vladimirov, 2005; Belashov et al., 2018b] для других уравнений (GKP и 3-DNLS) системы BK (Belashov-Karpman), мы можем аналитически исследовать устойчивость возможных решений уравнения 3-GNLS, а эволюцию и динамику взаимодействия солитонов изучить численно. В настоящей работе и реализуется такой подход.

Уравнение 3-GNLS. Устойчивость решений

Если в системе BK

$$\partial_t u + \hat{\mathrm{A}}(t,u)u = f, \quad f = \sigma\int_{-\infty}^{x}\Delta_\perp u \mathrm{d}x + f', \quad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{1}$$

оператор имеет вид $\hat{\mathrm{A}}(t,u) = i\,[\gamma|u|^2 - \beta\partial_x^2] + \alpha/2$, мы имеем класс уравнений 3-GNLS:

$$\partial_t u + i\gamma|u|^2 u - i\beta\partial_x^2 u + (\alpha/2)u = \sigma\int_{-\infty}^{x}\Delta_\perp u\,\mathrm{d}x + f', \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(t,x,y,z)$, $f' = f'(t,x,y,z)$, и $(\alpha/2)u$ описывает диссипативные эффекты, а u есть огибающая волнового пакета (импульса). В гамильтоновой форме уравнение (2) с $\alpha = 0$ (уравнение 3-NLS) будет иметь вид:

$$\partial_t u = \partial_x(\delta\mathrm{H}/\delta u), \tag{3}$$

где $\mathrm{H} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\gamma}{2}|u|^4 + \beta u u^*\partial_x\varphi + \frac{1}{2}\sigma\left(\nabla_\perp\partial_x w\right)^2\right]\mathrm{d}\mathbf{r}, \quad \partial_x^2 w = u, \quad \varphi = \arg(u)$.

Используя метод, подробно изложенный в [Belashov, Vladimirov, 2005], исследуем устойчивость 2D и 3D решений уравнения (2). При этом, задача для уравнения (3) формулируется в виде вариационного уравнения $\delta(\mathrm{H} + \upsilon P_x) = 0$, $P_x = \frac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}\mathbf{r}$, смысл которого состоит в том, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана H при фиксированном значении проекции импульса P_x. В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости, в динамической системе точки, которые соответствуют минимуму или максимуму гамильтониана Н являются абсолютно устойчивыми. Если же экстремум локальный, то ему будут соответствовать локально устойчивые решения.

Рассмотрим деформации Н $u\,(x, r_\perp) \to \zeta^{-1/2}\eta^{-1}u\,(x/\zeta,\ \mathbf{r}_\perp/\eta),\ \zeta, \eta \in \mathrm{C}$, сохраняющие проекцию импульса P_x. Гамильтониан примет вид $\mathrm{H}(\zeta, \eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} - c\zeta^2\eta^{(1-d)}$ с интегральными коэффициентами $a = (\gamma/2)\int |u|^4 \mathrm{d}\mathbf{r},\ b = \beta\int u u^* \partial_x \varphi \mathrm{d}\mathbf{r},\ c = (\sigma/2)\int (\nabla_\perp \partial_x w)^2 \mathrm{d}\mathbf{r}$. Из необходимых условий экстремума $\partial_\zeta \mathrm{H} = 0,\ \partial_\eta \mathrm{H} = 0$ сразу же найдем его координаты: $\zeta_0 = -ac^{-1},\ \eta_0 = \left[-ab^{-1}\left(1 + a^2c^{-2}\right)\right]^{1/2}$, где $b < 0$, если $\eta \in \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$, поскольку $a > 0$, $c > 0$ по определению, и $b > 0$, если $\eta \in \mathrm{C}$. Достаточные условия минимума в точке (ζ_i, η_j):

$$\begin{vmatrix} \partial_\zeta^2 \mathrm{H}(\zeta_i, \eta_j) & \partial_{\zeta\eta}^2 \mathrm{H}(\zeta_i, \eta_j) \\ \partial_{\eta\zeta}^2 \mathrm{H}(\zeta_i, \eta_j) & \partial_\eta^2 \mathrm{H}(\zeta_i, \eta_j) \end{vmatrix} > 0, \qquad \partial_\zeta^2 \mathrm{H}(\zeta_i, \eta_j) > 0.$$

Решая данную систему неравенств, получим следующие результаты. Для волн в случае $b < 0$ (положительная нелинейность) будем иметь: $a/c < d = (2\sqrt{2})^{-1}\sqrt{13 + \sqrt{185}}$, откуда следует, что $\mathrm{H} > -3bd/(1 + 2d^2)$, то есть гамильтониан ограничен снизу.

При $b > 0$ (отрицательная нелинейность): замена $b \to -b$ эквивалентна замене $y \to -iy$, $z \to -iz$ и $\mathrm{H} < -3bd/(1 + 2d^2)$, то есть гамильтониан снизу не ограничен (ограничен сверху).

Итак, мы доказали возможность существования устойчивых 3D решений в модели 3-NLS и получили условия их устойчивости, то есть определили области значений коэффициентов уравнения (характеристик среды), когда 3D солитоны будут устойчивыми.

Моделирование эволюции и взаимодействия GNLS солитонов

Рассмотрим вначале более простой 1D случай ($\sigma = 0$), когда уравнение (2) принимает вид

$$\partial_t u + i\gamma|u|^2 u - i\beta\partial_x^2 u + (\alpha/2)u = f', \tag{4}$$

где, в общем случае (неоднородная и нестационарная среда), $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(x, t),\quad f' = f'(x, t)$.

При моделировании мы использовали начальные условия в виде солитоноподобного импульса огибающей $u_0 = u\,(x, 0)$ разной формы [Belashov et al., 2019]:

а) $u\,(x,0) = A\exp\,(-x^2/l)$;

б) $u\,(x,0) = A\exp\,[-(x-5)^2/l] + A\exp\,[-(x+5)^2/l]$;

в) $u\,(x,0) = A[\mathrm{sch}\,(x - s/2) + \mathrm{sch}\,(x + s/2)]$;

г) $u\,(x,0) = A[\mathrm{sch}\,(x) + \mathrm{sch}\,(x - s/2) + \mathrm{sch}\,(x + s/2)]$.

На рис. 1 и 2 представлены результаты, полученные при начальных условиях (а) и (б) в простейшем случае уравнения NLS с β, γ = const (стационарная среда); α, f' = 0 при отрицательной нелинейности, β > 0. В этом случае $b > 0$ и Н > $-3bd/(1+2d^2)$, а это значит, что условие устойчивости для отрицательной нелинейности, Н < $-3bd/(1+2d^2)$, не выполняется, и, как видно из рисунков, мы наблюдаем рассеяние импульсов огибающей со временем.

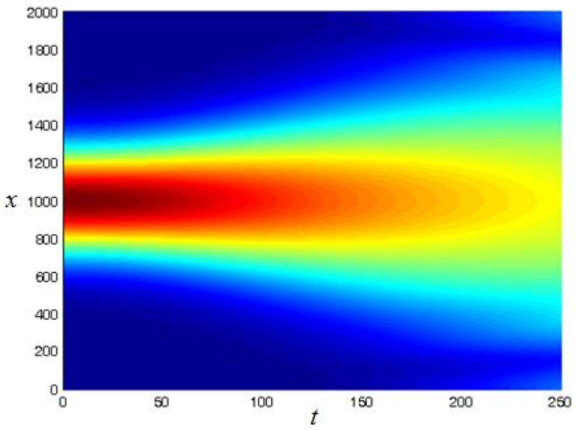

Рис. 1. Эволюция гауссовского импульса огибающей (а) при A =2, l =2; β=0.5, γ=0

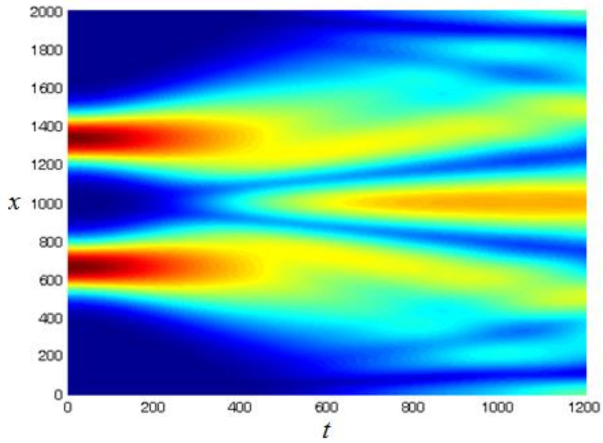

Рис. 2. Эволюция гауссовского импульса огибающей (б) при A=1, l=4; β=0.5, γ=0

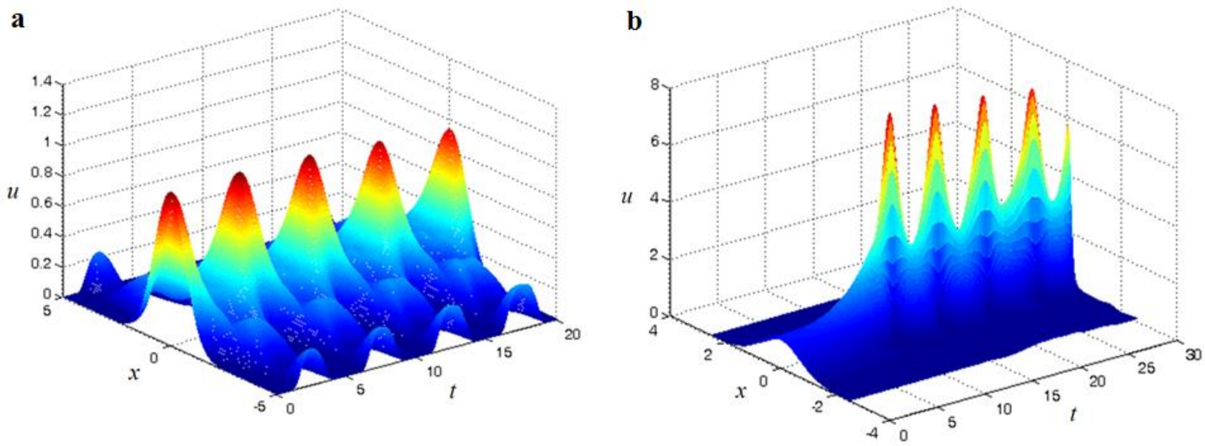

Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при α, f' = 0:
a) β = 0.5, $\gamma = -1+0.01\sin 2\pi t$; b) γ = −1, β(t) = – 0.5 for $t \le 5$ and β(t) = 0.5(1+0.2sin 2πt) for t >5; случаи отрицательной нелинейности

На рис. 3 представлены два примера результатов эволюции гауссова импульса (а) в нестационарной среде при отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости Н < $-3bd/(1+2d^2)$ выполняется. В результате эволюции при этом наблюдается возникновение из начального уединенного импульса мощных устойчивых пульсаций типа бризеров.

Пример взаимодействия солитоноподобных начальных импульсов (в) и (г) при отрицательной нелинейности приведен на рис. 4, 5, соответственно. В первом случае, условие устойчивости не выполняется, и мы наблюдаем на первом этапе возникновение одного мощного импульса из 3-импульсного начального возмущения и далее, со временем, его распад на два импульса малой амплитуды. Во втором случае, условие устойчивости выполнено, и имеет место устойчивая эволюция 2-импульсного возмущения. В численных экспериментах было также установлено, что при слабой отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости выполняется, переход от устойчивой эволюции к режиму устойчивых пульсаций (бризеров) происходит при уменьшении начального расстояния *s* между импульсами [Belashov et al., 2019].

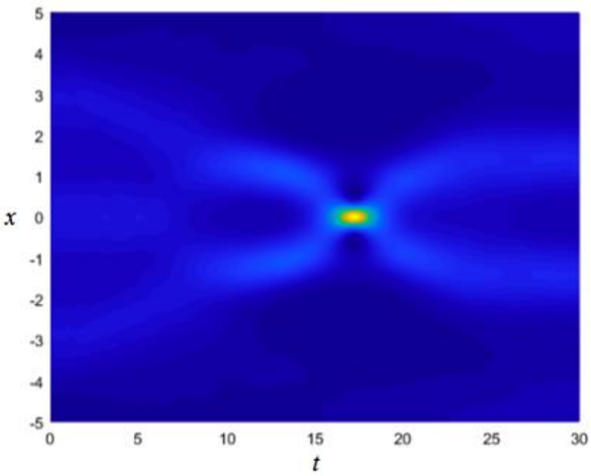

Рис. 4. Взаимодействие трех импульсов GNLS (стационарная среда) при $\gamma = -1$, $\beta = 0.25$; случай слабой отрицательной нелинейности

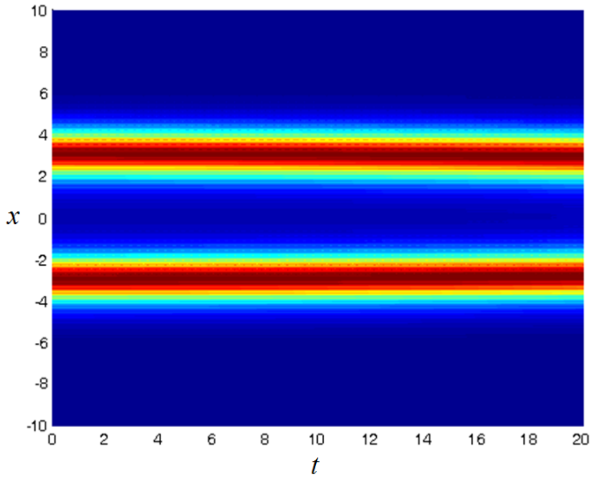

Рис. 5. Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS (стационарная среда) при $\gamma = -1$, $\beta = 0.05$; случай отрицательной нелинейности

Заключение

В работе аналитически получены условия устойчивости солитоноподобных решений уравнения GNLS и численно изучены случаи устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, а также взаимодействие 2- и 3-импульсных структур, приводящее к формированию устойчивых и неустойчивых решений. Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Работа была поддержана Национальным научным фондом Грузии им. Шота Руставели (SRNF) (грант № FR17 252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J. Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem // J. Astrophys. Aerospace Tech. 2018. V. 6. P. 38.

Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Problem of stability of multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma // Adv. Space Res. 2018. V. 62. P. 65-70.

Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 2005. 303 p.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O. A., Rogava J. L. Interaction of Multidimensional NLS Solitons in Nonuniform and Nonstationary Medium // 2019 Russian Open Conf. on Radio Wave Prop., Kazan, Russia, July 1–6, 2019. Proc. IEEE Xplore Dig. Lib. P. 535-538. Date Added to IEEE Xplore: 26 August 2019.