13. Свойства степенных рядов. Действия с ними

Для простоты записи мы будем считать, что для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ значение b равняется 0.

Обозначим
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1}$$
Функция $S(x)$ корректно определена во всех точках сходимости ряда (1), то есть в интервале сходимости $\Delta = (-R, R)$, и в тех граничных точках, $x = \pm R$, в которых ряд сходится. В области содимости ряда функция $S(x)$ непрерывна. В частности, если ряд (1) сходится в точке $x = R$, то $S(R) = \lim\limits_{x \to R-0} S(x)$ (теорема Абеля).

Функция $S(x)$ дифференцируема на интервале Δ, и при $x \in \Delta$
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

С точностью до констант при $x \in \Delta$ также выполняется:
$$\int S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} + C.$$

Заметим, что при почленном дифференцировании и почленном интегрировании интервалы сходимости остаются прежними, однако может измениться поведение в граничных точках.

Для любых чисел c, d из области сходимости ряда (1) выполняется также
$$\int\limits_c^d S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_c^d a_n x^n\,dx.$$

№2869.
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Отсюда:
$$f(x) = \int f'(x)\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n}\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Найдем костанту C. С одной стороны, $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$. С другой — $f(0) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big|_{x=0} + C = 0 + C$. Следовательно, $C = 0$.

По иному значение C можно получить, обратившись к разложению функции $f(x)$ в ряд Тейлора: $C = f(0) = 0$.

Таким образом мы получили разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

и пока можем утверждать, что это разложение имеет место на интервале $-1 < x < 1$.

Рассмотрим поведение последнего ряда в граничных точках $x = \pm 1$. При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dots$, который сходится по признаку Лейбница. Аналогично, в точке $x = -1$ ряд тоже сходится.

Воспользовавшись теоремой Абеля и непрерывностью функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ на отрезке $[-1, 1]$ заключаем, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

при $-1 \le x \le 1$.

Для полного решения остается заметить:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

№2901. $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Имеем:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,t^{2n} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Следовательно,

$$f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x\frac{(-1)^n}{n!}\,t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

№2906. Обозначим

$$(*) \qquad x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = S(x).$$

Тогда

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1).$$

Поэтому

$$S(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C,$$

где C — некоторая консанта, которую следует найти.

$S(0) = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)\Big|_{x=0} = 0$. С другой стороны, $S(0) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-0}{1+0}\right| + C = 0 + C$. Следовательно, $C = 0$.

При $x = \pm 1$ ряд $(*)$ расходится, что легко проверить, сравнив с гармоническим рядом.

Окончательно получаем:

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

при $-1 < x < 1$, а при всех остальных x ряд расходится.

Замечание При вычислении суммы ряда бывает целесообразно умножить члены ряда на некоторую степень x^k или вынести x^k за знак суммы.