Научно-методический центр "Образование"
(г. Казань)

А.Р. Камалеева, С.Ю. Грузкова, О.Б. Русскова

КИНЕМАТИКА В ГРАФИКАХ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань 2017

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета
Научно-методического центра "Образование"

УДК 53(075.8)
ББК 22.3 Я 73

К 45 Камалеева А.Р., Грузкова С.Ю., Русскова О.Б. Кинематика в графиках: учебно-методическое пособие. Казань: Издательство «Отечество», 2017. 52 с

Учебно-методическое пособие переиздано вторично и адресовано учителям школ, гимназий, лицеев и колледжей, слушателям подготовительных курсов, а также учащимся старших классов. Отбор материала проведен в соответствии с требованиями государственного образовательного стандарта по физике. Рассмотрена специфика решения графических задач, проведен подробный анализ графиков всех кинематических величин для прямолинейного равномерного и равнопеременного движения, описан метод построения графиков кинематических величин по заданному графику ускорения, скорости или перемещения и даны соответствующие примеры. Представлена программа спецкурса «Кинематика в графиках», рассчитанная на 34 часа.

Табл.7 Граф. 32 Библиограф.: 24 назв.

Авторы – составители:

А.Р.Камалеева, доктор педагогических наук, профессор РАЕ, ведущий научный сотрудник ФГБНУ "Институт педагогики, психологии и социальных проблем.

С.Ю. Грузкова, кандидат технических наук, старший научный сотрудник ФГБНУ "Институт педагогики, психологии и социальных проблем.

О.Б. Русскова, заместитель директора по научно-методической работе ГАПОУ "Зеленодольский механический колледж"

Рецензенты:

П.П. Головин, Народный учитель СССР, кандидат педагогических наук, директор ученической учебно-методической и производственной фирмы «Импульс».

В.М. Сарро, доцент кафедры теории и методики обучения физике Казанского федерального университета.

ISBNN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный образовательный стандарт требует, чтобы каждый выпускник средней школы умел представлять результаты измерений с помощью таблиц и графиков и выявлять на этой основе эмпирические зависимости.

Широкое применение координатного метода при изучении кинематики, использование таких понятий, как система отсчета, радиус-вектор, вектор перемещения и т.д., позволяет сочетать строгость изложения с наглядностью, что делает освоение данного раздела школьного курса физики более доступным для учащихся. Координатный метод дает возможность не только получить графическую зависимость кинематических величин от времени, но и установить аналитическую (с помощью уравнений) связь между кинематическими величинами.

К сожалению, большинство учащихся имеет довольно слабые навыки построения графиков и их анализа. Особые затруднения у учащихся вызывают задачи, в которых требуется построить график какой-либо величины (например, перемещения), если дан график другой величины (например, ускорения). В данной методической разработке проведен подробный анализ графиков всех кинематических величин, и на ряде примеров показаны методы, позволяющие по графику одной из кинематических величин построить графики других величин.

Изучение механики с применением координатного метода позволяет приблизить трактовку основных понятий и законов к той, которая принята в науке, освоить общий подход к изучению законов движения и повысить уровень систематизации знаний.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Физической задачей называется небольшая проблема, которая решается на основе методов физики, с использованием в процессе решения логических умозаключений, физического эксперимента и математических действий.

Основные цели такого вида учебной деятельности как решение задач – углубление знаний учащихся, развитие их мышления, формирование умения анализировать ситуацию, творчески подходить к возникающим проблемам и находить пути их решения. Умение применять знания на практике – показатель их осознанности и прочности.

Решение физических задач имеет:

- **образовательное значение**, т.к. способствует усвоению учащимися курса физики, как на алгоритмическом, так и на творческом уровне;
- **воспитательное значение,** т.к. оно позволяет влиять на личность, воспитывать волю, настойчивость, усидчивость, самостоятельность;
- большое значение **для развития учащихся,** для развития их логического мышления, для формирования умения делать индуктивные и дедуктивные умозаключения, использовать аналогии и эвристические приемы;
- **политехническое значение**, т.к. в задачах с политехническим содержанием приводятся сведения о технических объектах, выявляются принципы их работы, устанавливается взаимосвязь между отдельными элементами этих объектов.

В формировании умения решать физические задачи важное место занимает умение решать графические задачи.

Графические задачи – это задачи, в которых ответ на поставленный вопрос не может быть получен без использования графика.

Таблица 1. - Виды графических задач

I	II	III	IV	V
На основе данных условия строится график	По виду заданного графика определяется вид функциональной зависимости величин	По заданному графику находится искомая величина	Заданная величина выражается графически	По заданному графику проводится анализ процесса (явления)

Значение графических задач в формировании умения решать физические задачи заключается в следующем:

- При изучении процессов, происходящих в природе и технике, как правило, определяются функциональные зависимости между величинами, характеризующими эти процессы. Понятие функциональной зависимости с большой полнотой и конкретностью отражает взаимную связь и обусловленность явлений. Графическое изображение функциональной зависимости наиболее ярко и доходчиво выражает эту зависимость. График наглядно раскрывает закономерность. В средней школе в ряде случаев графически могут быть представлены такие процессы, аналитически выразить которые можно только на более поздних стадиях обучения. Графические упражнения и задачи в значительной мере помогают учащимся овладеть этим важным методом выражения функциональных связей, способствующих глубокому раскрытию сущности процессов и явлений.
- Графические задачи и упражнения способствуют сознательному усвоению закономерностей и формированию у учащихся понятий. Особенно велика их роль в активизации процесса преподавания естественнонаучных дисциплин. Необходимая подготовка к решению графических задач дается в курсе математики.

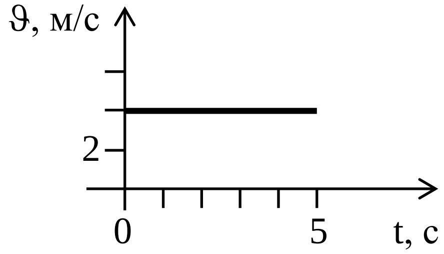
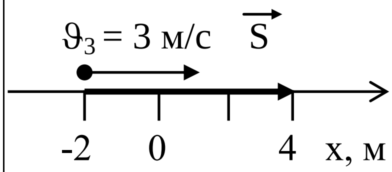
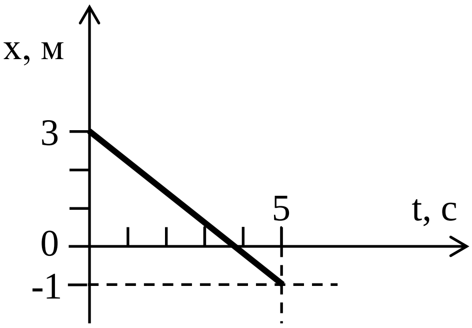
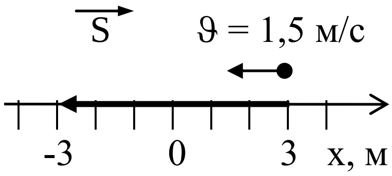
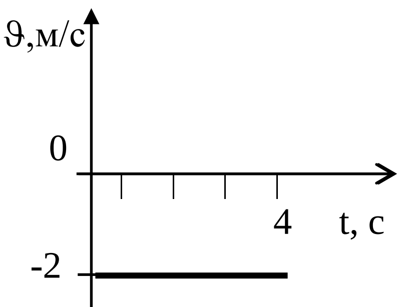
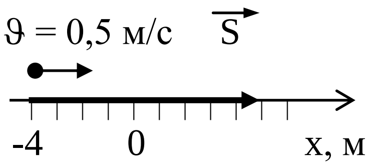
При изучении раздела «Кинематика» рекомендуется оформлять решение задач в следующей последовательности:

1) Краткая запись условия (дано).
2) Перевод единиц измерения в систему СИ.
3) Чертеж.
4) Решение в «общем виде».
5) Работа с единицами измерения (проверка решения в «общем виде»).
6) Графическое изображение различных зависимостей.

В зависимости от условия задачи, пункт 6 может предшествовать пункту 3 или следовать за ним.

На первом этапе обучения необходимо развивать умение учащихся изображать ситуацию, описанную в задаче, с помощью чертежа, переходить от него к графику и обратно. Для отработки этих навыков целесообразно использовать специальные задания в виде таблицы с пустыми ячейками, которые необходимо заполнить. Пример такого задания по теме «Равномерное прямолинейное движение» приведен ниже (таблица 2). Учащийся, используя график зависимости $\vartheta(t)$ или $x(t)$ и дополнительные данные, должен нарисовать чертеж, соответствующий данной ситуации, или, наоборот, используя чертеж, построить график зависимости $\vartheta(t)$ или $x(t)$.

Таблица 2.

№	График	Дополнитель-ные данные	Чертеж
1		$x_0 = 5$ м	?
2	$\vartheta(t) = ?$	t = 2 с	
3		-	?
4	x(t) - ?	-	
5		$x_0 = 3$ м	?
6	x(t) = ?	-	

1. Графики основных кинематических величин прямолинейного равномерного движения

1.1. График скорости.

При равномерном прямолинейном движении $\boldsymbol{\vartheta}$ = const. (Здесь и далее полужирным шрифтом мы будем обозначать векторные величины). Направим ось x вдоль траектории движения тела. Графики скорости для различных случаев будут иметь вид, представленный на рис.1.

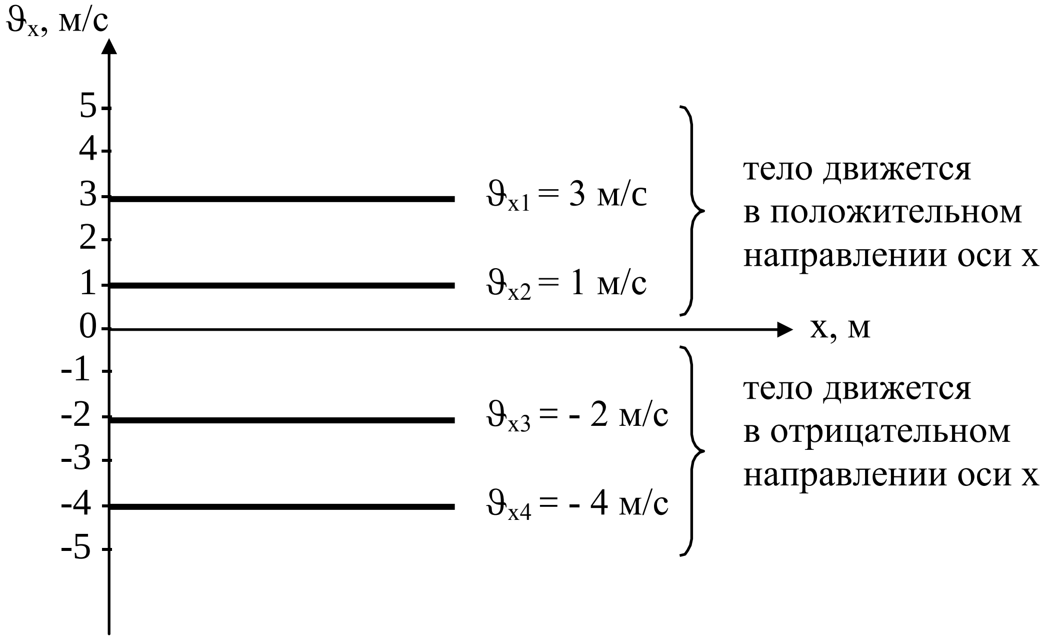


Рис.1

1.2. График перемещения.

Перед рассмотрением графика перемещения полезно вспомнить известные учащимся из курса математики основные свойства функции y = kx, роль параметра k, особенности графика этой функции и способы его построения.

При равномерном прямолинейном движении перемещение пропорционально времени движения: $\mathbf{S} = \boldsymbol{\vartheta} t$. Если тело движется вдоль оси x, то величина проекции вектора перемещения на эту ось также будет пропорциональна времени: $S_x = \vartheta_x t$. Таким образом, график перемещения представляет собой прямую линию. Заметим, что $S_x = 0$ при $t = 0$, следовательно, график перемещения всегда проходит через начало координат. В зависимости от знака ϑ_x, наклон графика $S_x(t)$ может быть как положительным, так и отрицательным. При этом угол наклона графика будет тем больше, чем больше ϑ_x по абсолютной величине (рис. 2).

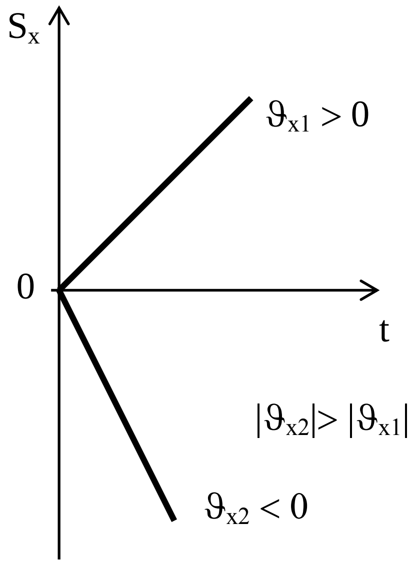


Рис. 2.

Так как график $S_x(t)$ - прямая, проходящая через начало координат, то для его построения достаточно найти координаты всего лишь одной дополнительной точки. На рис. 3 приведены графики перемещения, соответствующие рассмотренным ранее графикам скорости. Расчеты координат дополнительных точек отражены в таблицы 3.

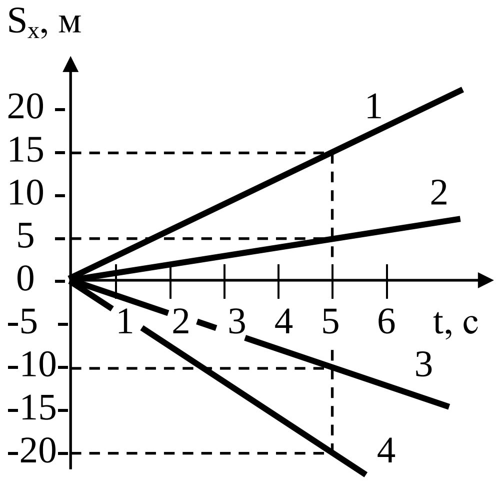


Рис. 3.

Таблица 3.

№ графика	ϑ_x, м/с	t, с	S_x, м
1	3	5	15
3	1	5	5
3	-2	5	-10
4	-4	5	-20

1.3. График координаты

Так как $S_x = x - x_0$, то $x = x_0 + S_x$. Следовательно, значения x отличаются от соответствующих значений S_x на постоянную величину x_0, равную координате точки в начальный момент времени. Графически это выражается сдвигом графика зависимости x(t) относительно графика $S_x(t)$ вверх или вниз, в зависимости от знака x_0 (см. рис. 4 и 5).

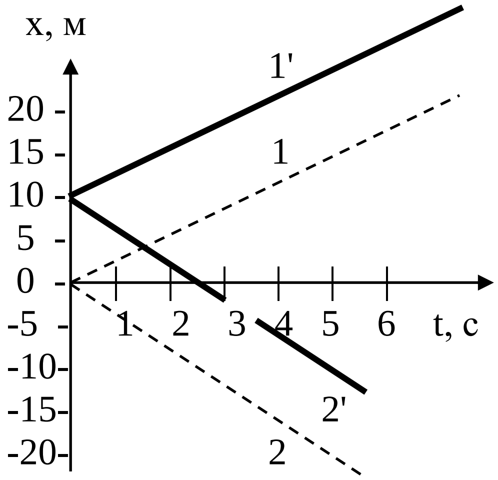


Рис. 4. x_0 = 10 м.

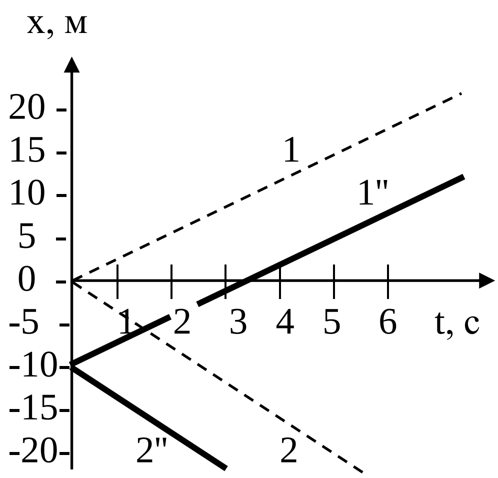


Рис. 5. x_0 = -10 м

При равномерном прямолинейном движении значение координаты точки может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от того, как направлен вектор перемещения относительно выбранной системы отсчета. Если направление вектора перемещения совпадает с положительным направлением оси (проекция вектора на ось положительна), то координата будет возрастать, если же вектор перемещения противоположен положительному направлению оси – координата убывает.

Конечно, если известна величина скорости, то для построения графика координаты нет необходимости строить вспомогательный график перемещения. Действительно, так как $S_x = \vartheta_x t$, то $x = x_0 + \vartheta_x t$.

Последнее выражение аналогично известной учащимся из курса математики функции $y = b + kx$. Полезно обратить на это внимание учащихся и обсудить с ними свойства данной функции и способы построения ее графика.

График функции $x = x_0 + \vartheta_x t$ - прямая линия, пересекающая оси координат в точках $(0, x_0)$ и $(-x_0/\vartheta_x, 0)$. Вторую точку использовать для построения графика не всегда удобно, она находится в первой четверти координатной плоскости только в том случае, если знаки x_0 и ϑ_x противоположны и величина $-x_0/\vartheta_x$ положительна (прямая 2' на рис. 4 и 1'' на рис. 5). Ясно, что в общем случае координаты второй точки графика можно рассчитать, выбрав произвольное значение t.

2. Графики кинематических величин при прямолинейном равнопеременном движении.

2.1. График ускорения.

При равномерном прямолинейном движении $\boldsymbol{a}$ = const. Направим ось x вдоль линии движения тела Графики ускорения для различных случаев будет иметь следующий вид (рис. 6).

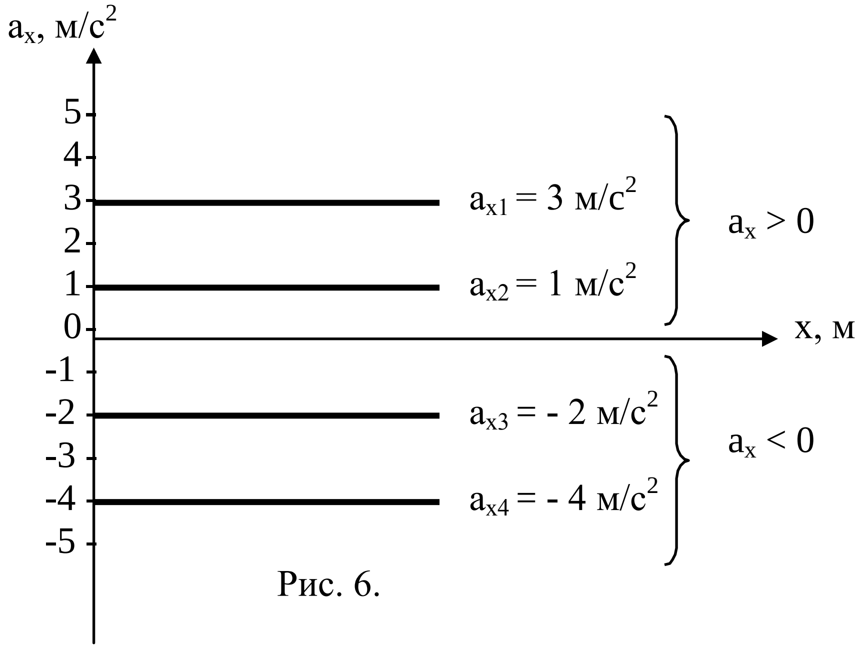


Рис. 6.

Что означают условия: $a_x > 0$, $a_x < 0$? Как правило, ученики отвечают на этот вопрос так: если $a_x > 0$, то тело движется равноускоренно, если $a_x < 0$ - равнозамедленно. При этом они забывают, что не знак ускорения непосредственно определяет, будет ли движение равноускоренным или равнозамедленным, а взаимная ориентация векторов скорости и ускорения.

Пусть, например, тело движется вдоль оси x, причем положительное направление оси x совпадает с направлением вектора скорости $\boldsymbol{\vartheta}$.

Если движение равноускоренное и скорость тела за время t возрастает от ϑ_{0X} до ϑ_X, то

$$a_X = \frac{\vartheta_X - \vartheta_{0x}}{t} > 0$$

Проекция вектора ускорения на ось x положительна, следовательно, он совпадает с направлением скорости.

Пусть теперь тело движется в противоположном направлении и проекция скорости на ось x отрицательна. При равноускоренном движении $|\vartheta_X| > |\vartheta_{0X}|$ и $|\vartheta_X| - |\vartheta_{0X}| > 0$. Теперь

$$a_x = \frac{(-|\vartheta_x|)-(-|\vartheta_{0x}|)}{t} = -\frac{|\vartheta_x|-|\vartheta_{0x}|}{t} < 0$$

Проекция вектора ускорения на ось x в данном случае получается отрицательной, но это означает, что его направление и в этом случае совпадает с направлением вектора скорости.

При прямолинейном равноускоренном движении направления векторов скорости и ускорения совпадают

Анализ равнозамедленного движения проведем, используя графический метод (рис. 7а и 7б).

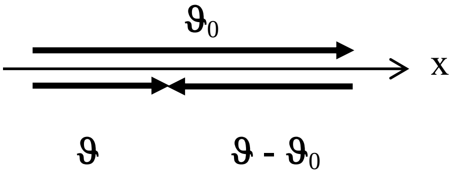


Рис. 7а

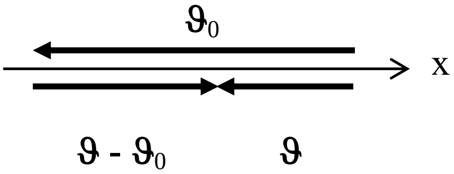


Рис. 7б

Как можно видеть, на каждом из чертежей направление вектора изменения скорости ϑ - ϑ_0, а, следовательно, и вектора ускорения **a** противоположно направлению скорости.

При прямолинейном равнозамедленном движении направления векторов скорости и ускорения противоположны

2.2. График скорости.

Функция, выражающая зависимость величины проекции скорости от времени при равнопеременном движении, $\vartheta_x = \vartheta_{0x} + a_x t$ аналогична функции $x = x_0 + \vartheta_x t$ (или $y = b + kx$), график которой уже обсуждался в разделе 1.3. Это прямая линия, пересекающая оси координат t и ϑ_x точках $(0, \vartheta_{0x})$ и $(-\vartheta_{0x}/a_x, 0)$.

В зависимости от значения параметров ϑ_{0x} и a_x можно выделить шесть различных вариантов расположения графика этой функции на координатной плоскости (таблица. 4). Отметим общие закономерности, отраженные на графиках, представленных в таблице 4:

- значение ординаты в точке пересечения с графиком скорости равно величине проекции начальной скорости ϑ_{0x} (или просто величине начальной скорости, если движение происходит вдоль оси x);
- наклон графика скорости определяется знаком проекции ускорения a_x.

К этому следует добавить, что угол наклона графика скорости зависит от величины ускорения - аналогично тому, как угол наклона графика перемещения или координаты при равномерном прямолинейном движении зависит от скорости (см. разделы 1.2 и 1.3); в данном случае в роли параметра k выступает a_x.

Дадим теперь краткие пояснения к таблице 4. При этом ограничимся рассмотрением событий, происходящих при $t \geq 0$.

Вариант 1. Тело начинает двигаться равноускоренно из состояния покоя. Направления векторов $\boldsymbol{\vartheta}$ и **a** совпадают. Их проекции на ось x остаются положительными в течение всего времени движения (напомним, при $t \geq 0$), причем величина проекции скорости линейно увеличивается с течением времени.

Вариант 2. Движение равноускоренное без начальной скорости. Направления векторов $\boldsymbol{\vartheta}$ и **a** совпадают, но их проекции отрицательные - тело движется в направлении противоположном направлению оси x, при этом модуль вектора скорости увеличивается.

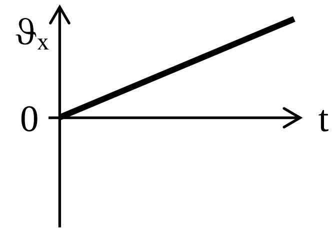
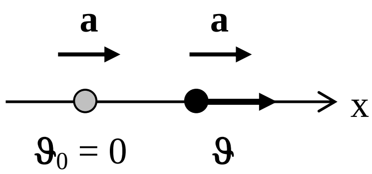
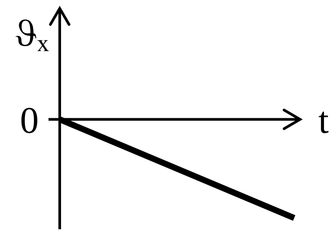
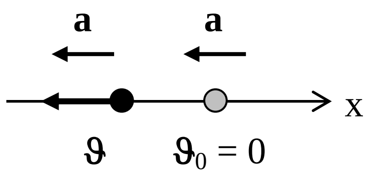
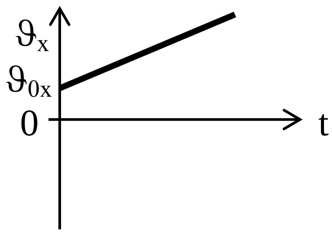
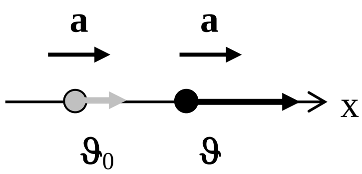
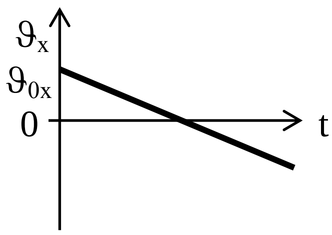
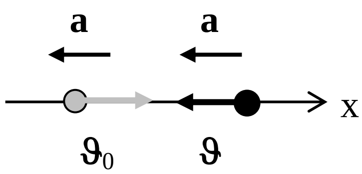
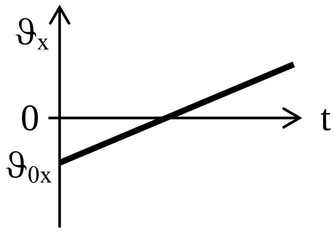
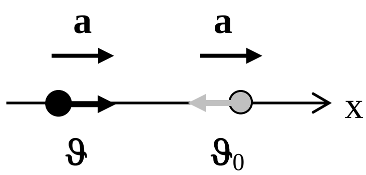
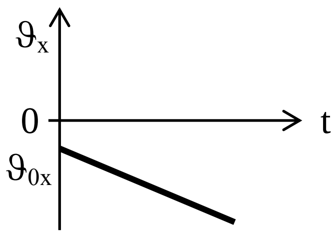
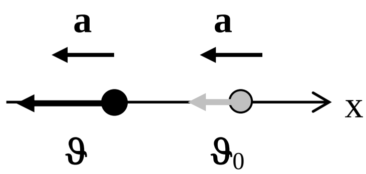
Вариант 3. Аналогичен варианту 1, но в начальный момент времени тело имеет скорость $\boldsymbol{\vartheta}_0$, направленную вдоль оси x.

Вариант 4. Движение тела происходит в два этапа. На первом этапе, когда направления векторов $\boldsymbol{\vartheta}$ и **a** противоположны, движение равнозамедленное. В момент времени $t = -\vartheta_{0x}/a_x$ скорость тела становится равной нулю - тело на мгновение останавливается и затем начинает двигаться в противоположном направлении с тем же ускорением. Чертеж в таблице дан для второго этапа.

Вариант 5. Напоминает предыдущий, но на первом этапе тело движется (равнозамедленно) в направлении противоположном направлению оси x. Чертеж в таблице соответствует второму этапу - равноускоренному движению в положительном направлении этой оси.

Вариант 6. Аналогичен варианту 2, но при t = 0 тело имеет скорость ϑ_0, направление которой противоположно направлению оси x.

Таблица 4.

Вариант	Параметры	График	Чертеж
1	$\vartheta_{0x} = 0$ $a_x > 0$		
2	$\vartheta_{0x} = 0$ $a_x < 0$		
3	$\vartheta_{0x} > 0$ $a_x > 0$		
4	$\vartheta_{0x} > 0$ $a_x < 0$		
5	$\vartheta_{0x} < 0$ $a_x > 0$		
6	$\vartheta_{0x} < 0$ $a_x < 0$		

2.3. График перемещения.

Приступая к построению графиков перемещения при прямолинейном равнопеременном движении целесообразно обсудить с учащимися свойства функции $y = a + bx + cx^2$, а также вспомнить особенности графика этой функции и приемы его построения.

При прямолинейном равнопеременном движении зависимость перемещения S от времени выражается, как известно, следующей функцией:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\vartheta}_0 t + \mathbf{a}t^2/2.$$

Если направить ось x вдоль направления движения, то для проекции перемещения на эту ось будем иметь

$$S_x = \vartheta_{0x}t + a_x t^2/2.$$

График этой функции есть парабола, проходящая через начало координат. Координаты вершины параболы, наклон ее ветвей и их ориентация зависят от значения параметров ϑ_{0x} и a_x. Как и в предыдущем случае (см. раздел 2.2) возможны шесть вариантов (таблица 5).

Общие закономерности, которые можно увидеть на графиках, таковы:

- ориентация ветвей параболы зависит от знака проекции ускорения: если $a_x > 0$, то ветви направлены вверх, если $a_x < 0$ - вниз;
- наклон графика при t = 0 зависит от знака ϑ_{0x}: при $\vartheta_{0x} > 0$ наклон положительный (значения S_x вблизи точки t = 0 возрастают при увеличении t), при $\vartheta_{0x} < 0$ наклон отрицательный (значения S_x вблизи точки t = 0 убывают при увеличении t).

Интуитивно понятно, что при изменении абсолютных значений ϑ_{0x} и a_x наклон ветвей параболы также будет изменяться. Позднее будет найдена количественная связь между этими параметрами.

В последней колонке таблицы 5 приведены рисунки, иллюстрирующие представленные графики. Рисунки выполнены для t = 0.

Вариант 1. Шарик из состояния покоя скатывается с наклонной плоскости. Ось x проведена так, что ее направление совпадает с направлением движения шарика, начало координат (для удобства) выбрано в месте старта.

Вариант 2. Ситуация аналогична варианту 1, но направление оси x изменено на противоположное.

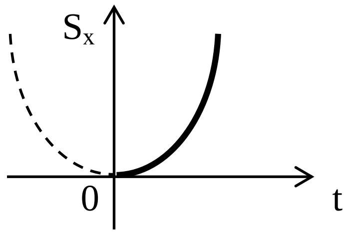
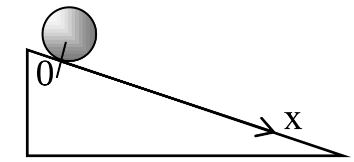
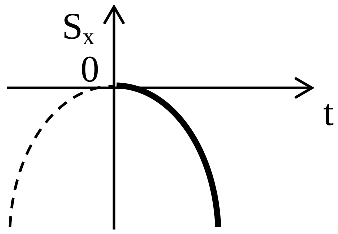
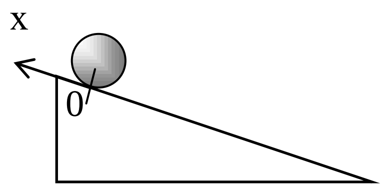
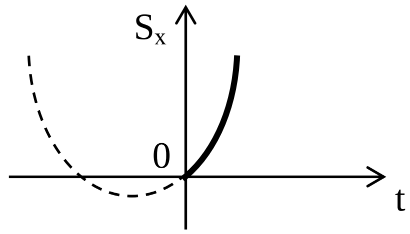
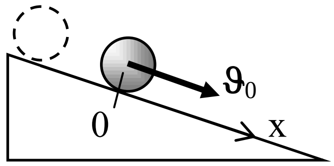
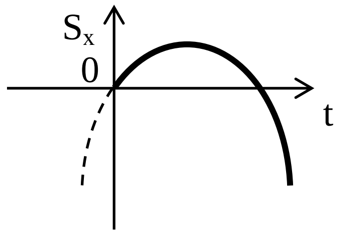
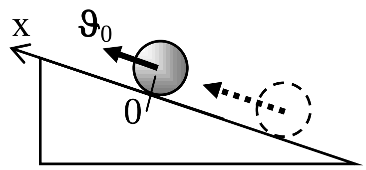
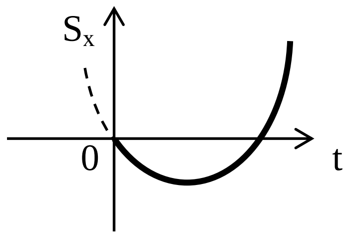
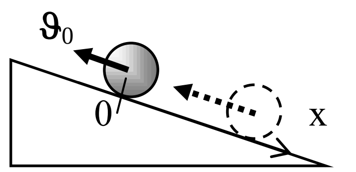
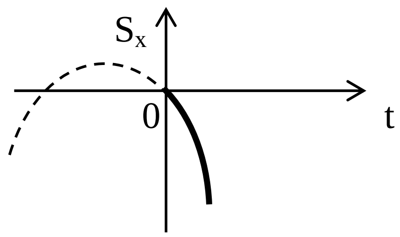
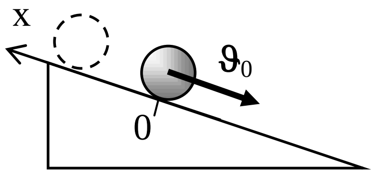
Вариант 3. Как и в предыдущих случаях, шарик скатывается вниз по наклонной плоскости, но отсчет времени начинается не сразу, так что при t = 0 шарик уже имеет некоторую (начальную) скорость.

Вариант 4. Шарик пускают *вверх* по наклонной плоскости и начинают отсчет времени. Рисунок соответствует равнозамедленному движению - направления векторов скорости и ускорения противоположны. Обратите внимание, что ось x направлена вверх по наклонной плоскости.

Вариант 5. Отличается от 4-го варианта только направлением оси x.

Вариант 6. Аналогично варианту 3, но ось x направлена вверх по наклонной плоскости.

Таблица 5.

Вариант	Параметры	График	Иллюстрация
1	$\vartheta_{0x} = 0$ $a_x > 0$		
2	$\vartheta_{0x} = 0$ $a_x < 0$		
3	$\vartheta_{0x} > 0$ $a_x > 0$		
4	$\vartheta_{0x} > 0$ $a_x < 0$		
5	$\vartheta_{0x} < 0$ $a_x > 0$		
6	$\vartheta_{0x} < 0$ $a_x < 0$		

Нетрудно убедиться, что все графики можно получить, рассматривая различные фазы движения шарика, пущенного вверх по наклонной плоскости. Равнозамедленному движению вверх соответствуют графики 4 и 5, равноускоренному движению из состояния покоя (после остановки шарика в самом верхнем положении) - графики 1 и 2, равноускоренному движению при отличной от нуля начальной скорости - графики 3 и 6. При этом отличие вариантов 1, 3 и 5 от вариантов 2, 6 и 4 заключается лишь в отличии направления оси x.

Следует обратить внимание учащихся на то, как выбор системы отсчета влияет на вид графика и, соответственно, на формулы, описывающие одно и то же движение. Полезно обсудить с ними факторы, влияющие на рациональный выбор направления осей системы координат.

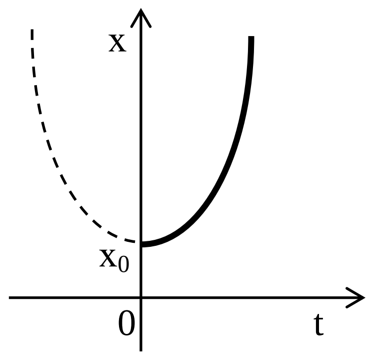
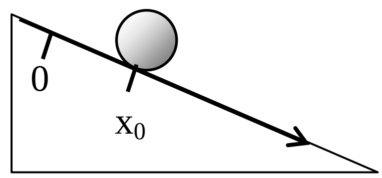
2.4. График координаты

Зависимость координаты от времени при прямолинейном равнопеременном движении, как известно, выражается следующей формулой:

$$x = x_0 + \vartheta_{0x}t + a_x t^2/2.$$

От формулы перемещения это выражение отличается постоянным слагаемым x_0. Следовательно, как и в случае равномерного движения, график координаты будет сдвинут по отношению к графику перемещения на величину x_0 вверх или вниз в зависимости от знака x_0. Таким образом, из 6-ти вариантов графиков перемещения получается 12 вариантов графиков координаты. Один из вариантов представлен в таблице 6. Читателю предлагается, в качестве упражнения, нарисовать остальные графики и соответствующие им рисунки, взяв за основу таблицу 5.

Таблица 6.

Вариант	Параметры	График	Рисунок
1	$x_0 > 0$ $\vartheta_{0x} = 0$ $a_x > 0$		 t = 0

3. Определение параметров движения по графикам кинематических величин

3.1. Определение ускорения по графику скорости

Уравнение графика скорости $\vartheta_x = \vartheta_{0x} + a_x t$ содержит два параметра: начальную скорость ϑ_{0x} и ускорение a_x. Оба эти параметра можно определить из графика скорости. Величина начальной скорости равна значению ординаты в точке пересечения с графиком (см. раздел 2.2).

Ускорение, как известно, численно равно изменению скорости за единицу времени, то есть $a_x = (\vartheta_x - \vartheta_{0x})/t$ или $a_x = \Delta\vartheta_x/\Delta t$. Последнее выражение удобно использовать, если значение ϑ_{0x} неизвестно, определить его по графику затруднительно или знание этого параметра не требуется для решения задачи. Рассмотрим график, приведенный на рисунке 8а. Видно, что точка

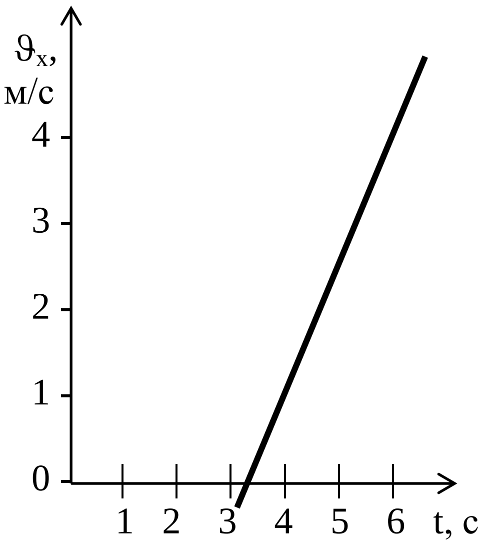


Рис. 8а.

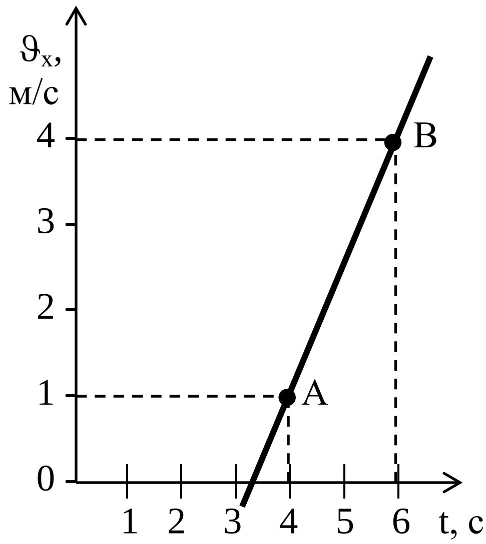


Рис. 8б.

пересечения прямой $\vartheta_x = \vartheta_{0x} + a_x t$ с осью ϑ_x находится где-то значительно ниже нулевой отметки и величина ϑ_{0x} не может быть определена непосредственно по приведенной части графика. Для расчета ускорения в этом случае достаточно найти приращения функции и аргумента на некотором участке графика и взять их отношение. Для увеличения точности, участок выбирают как можно больше и так, чтобы координаты его граничных точек выражались целыми числами. Так, на участке АВ (см. рис. 8б) приращение функции $\Delta\vartheta_x = 4 - 1 = 3$ м/с, приращение аргумента $\Delta t = 6 - 4 = 2$ с, и ускорение, таким образом, $a_x = \Delta\vartheta_x/\Delta t = 3/2 = 1{,}5$ м/с^2. Величина начальной скорости ϑ_{x0} определяется (если это требуется по условию задачи) вычислением: либо по формуле $\vartheta_{x0} = \vartheta_x - a_x t$, либо по формуле $\vartheta_{x0} = -a_x t$, если удается с достаточной точностью определить значение t, соответствующее $\vartheta_x = 0$ (то есть абсциссу точки пересечения графика с осью времени). В рассматриваемом случае приходится использовать первый вариант, так как значение t в точке пересечения можно определить лишь приблизительно. Если выбрать точку А, то ϑ_x = 1 м/с, t = 4 с и, учитывая, что a_x = 1,5 м/с^2, получаем ϑ_{x0} = 1 - 1,5·4 = - 5 м/с. Аналогично для точки В: ϑ_{x0} = 4 - 1,5·6 = - 5 м/с, - получаем тот же результат.

Заметим, что график пересекает ось времени в точке t = - ϑ_{x0}/a_x = 5/1,5 = 3,33(3). Эту величину действительно невозможно достоверно определить по имеющемуся графику.

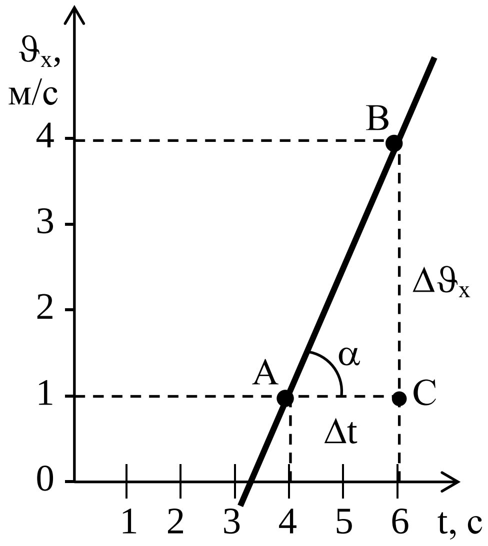


Рис. 9.

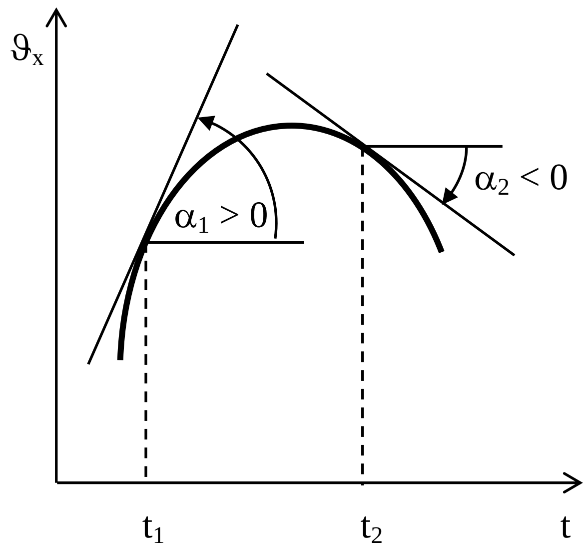


Рис. 10.

Как видно на рис. 9, отношение $\Delta\vartheta_x/\Delta t$ равно тангенсу угла наклона графика: $\Delta\vartheta_x/\Delta t$ = BC/AC = tgα. Если движение не является равнопеременным, то наклон графика изменяется. В этом случае *мгновенное* ускорение в некоторый момент времени определяется как величина, равная тангенсу угла наклона *касательной* к графику скорости в точке, абсцисса которой равна t. При этом положительными считаются углы, отсчитываемые против часовой стрелки от оси t (см. рис. 10).

Тангенс угла наклона графика скорости к оси времени численно равен ускорению.

Следует предостеречь учащихся от попыток измерения угла наклона транспортиром - измеренный таким образом угол зависит от масштаба графика и не может быть использован для определения ускорения.

Для равномерного движения угол наклона графика равен нулю (см. рис. 1). Следовательно, и тангенс угла наклона и, соответственно, определяемое таким образом ускорение также равны нулю.

3.2. Определение скорости по графику пути или координаты.

Согласно определению, скорость численно равна пути, пройденному телом за единицу времени: $\vartheta_x = S_x/t$. Эту формулу можно использовать только в случае равномерного движения. При этом для расчета скорости движения достаточно определить по графику координаты какой-либо точки (исключая точку с координатами (0,0), через которую всегда проходит график пути).

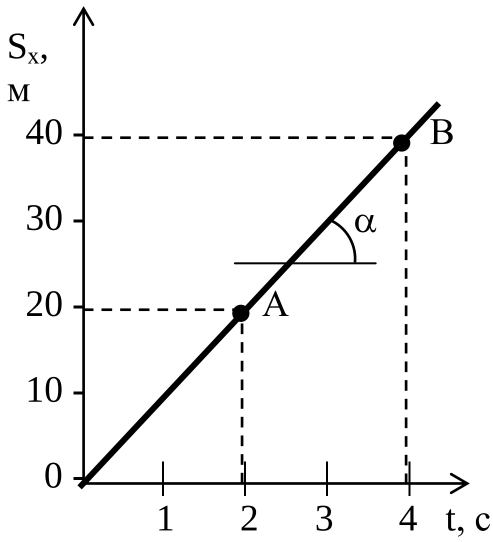


Рис. 11а.

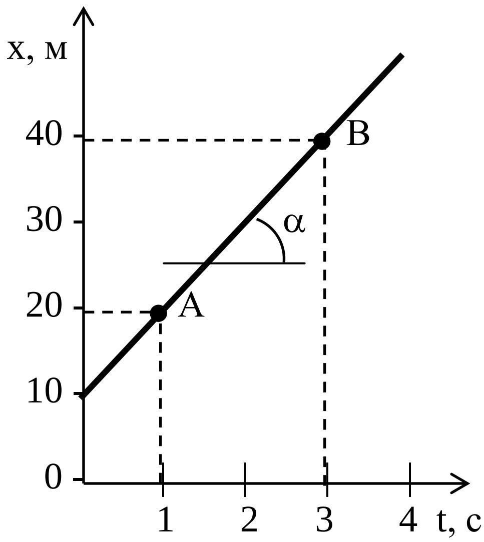


Рис. 11б.

Например, по графику, представленному на рис. 11а, скорость можно определить, используя точку А ($\vartheta_x = 20/2 = 10$ м/с), или точку В ($\vartheta_x = 40/4 = 10$ м/с) - в обоих случаях результат будет одним и тем же. Важно отметить, что тот же самый результат получается, если рассчитать скорость как отношение приращений функции и аргумента на участке АВ: $\vartheta_x = \Delta S_x/\Delta t = (40-20)/(4-2) = 10$м/с. Таким образом, скорость также может быть определена по наклону графика, то есть $\vartheta_x = \mathrm{tg}\alpha$.

Учитывая, что $S_x = x - x_0$, формулу для скорости при равномерном движении можно записать следующим образом: $\vartheta_x = (x - x_0)/t$ или в общем виде: $\vartheta_x = \Delta x/\Delta t$. Таким образом, скорость определяется как величина, численно равная тангенсу угла наклона графика координаты. Например, для графика, приведенного на рис. 11б, $\vartheta_x = (40 - 20)/(3 - 1) = 10$ м/с. Результат совпадает с тем, который был получен по графику пути, так как график координаты имеет тот же наклон, что и график пути (см. раздел 1.3).

В случае равнопеременного движения наклон графиков пути и координаты меняется с течением времени и определяет *мгновенную* скорость движения (см рис.12).

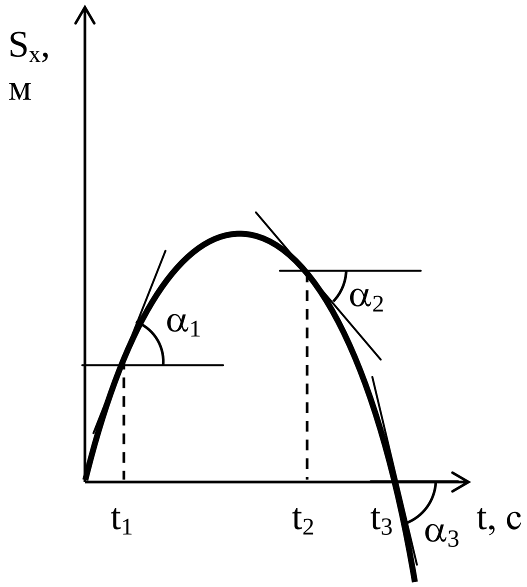


Рис. 12а.

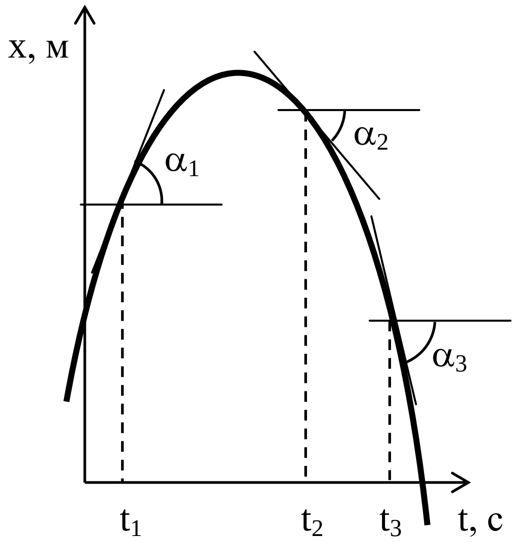


Рис. 12б.

Представленные на рис. 12 графики пути и координаты соответствуют рассмотренному ранее примеру - движению шарика, пущенного вверх по наклонной плоскости (см. табл. 5, вариант 4). При $t = t_1$ угол наклона $90° > \alpha_1 > 0$ и $\vartheta_{1x} = tg\alpha_1 > 0$. С течением времени наклон графика (и скорость движения) уменьшается и в точке, соответствующей вершине параболы, становится равным нулю - здесь шарик на мгновение останавливается. При $t = t_2$ угол наклона $\alpha_2 < 0$ и $\vartheta_{2x} = tg\alpha_2 < 0$ - шарик движется вниз по наклонной плоскости (ось x направлена вверх). Правая ветвь параболы соответствует равноускоренному движению: $|\alpha_3| > |\alpha_2|$ и $|tg\alpha_3| > |tg\alpha_2|$ то есть $|\vartheta_{3x}| > |\vartheta_{2x}|$ - скорость растет по абсолютной величине.

Тангенс угла наклона графика перемещения или координаты к оси времени численно равен скорости.

Чтобы найти численные значения ϑ_{1x}, ϑ_{2x}, ϑ_{3x} следует на отрезке касательной как на гипотенузе построить прямоугольный треугольник и взять отношение его катетов. На рис. 13 представлен пример такого построения - определяется мгновенная скорость в момент времени t = 3 с. Рассматривается интервал времени от 3 до 6 с и, соответственно, треугольник АВС. При расчете длины катетов необходимо пользоваться тем же правилом, что и при вычислении приращения: из значения, соответствующего концу рассматриваемого интервала времени, вычитать значение, зафиксированное в начале этого интервала. Получим $\vartheta_x = \Delta x/\Delta t = CB/AB = (2 - 5)/(6 - 3) = -1$ м/с.

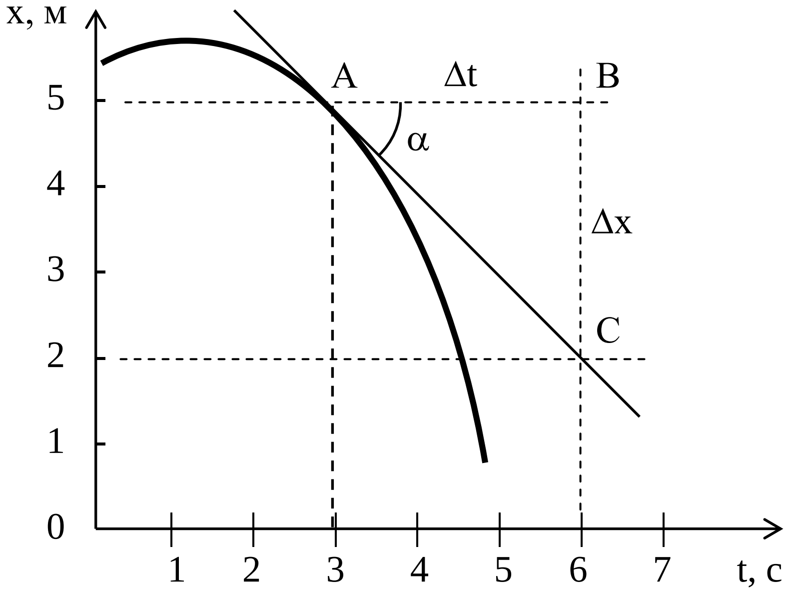


Рис. 13.

3.3. Определение перемещения по графику скорости.

Формула $S_x = \vartheta_x t$ напоминает формулу площади прямоугольника: $S = ab$. Это дает право утверждать, что величина перемещения численно равна площади под графиком скорости. Графически это можно изобразить так, как показано на рисунке 4. Заметим, что проекция перемещения S_x может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому площадь прямоугольника, располагающегося под осью времени t, также следует считать отрицательной.

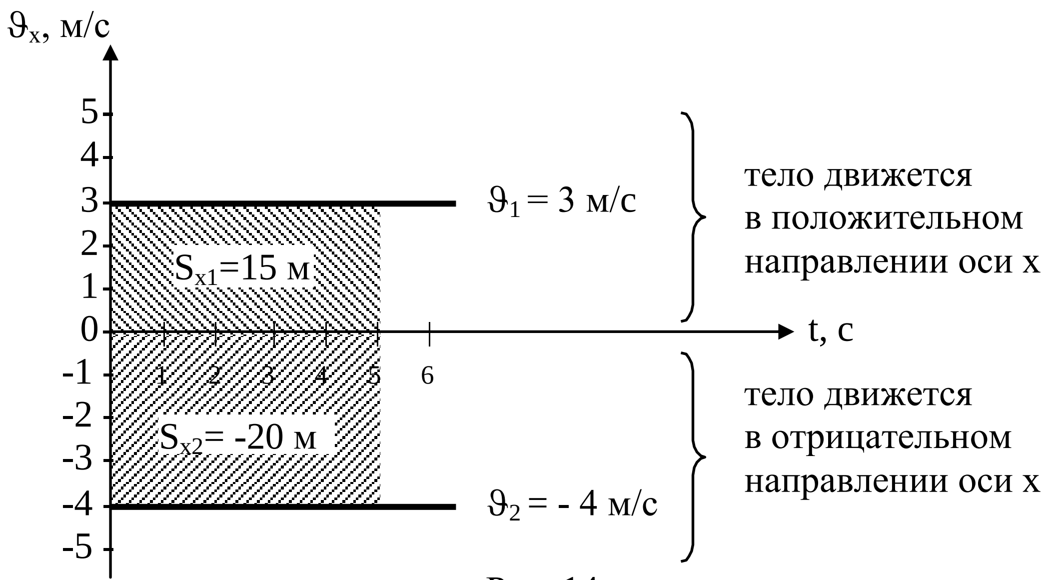


Рис. 14.

Аналогично может быть определено по графику приращение перемещения за любой промежуток времени. Так, например, из построений на рис.15 видно, что за интервал времени от 2 до 7 с величина перемещения первого тела изменилась на 15 м, а приращение перемещения второго тела за интервал времени от 1 до 8 с составляет - 28 м.

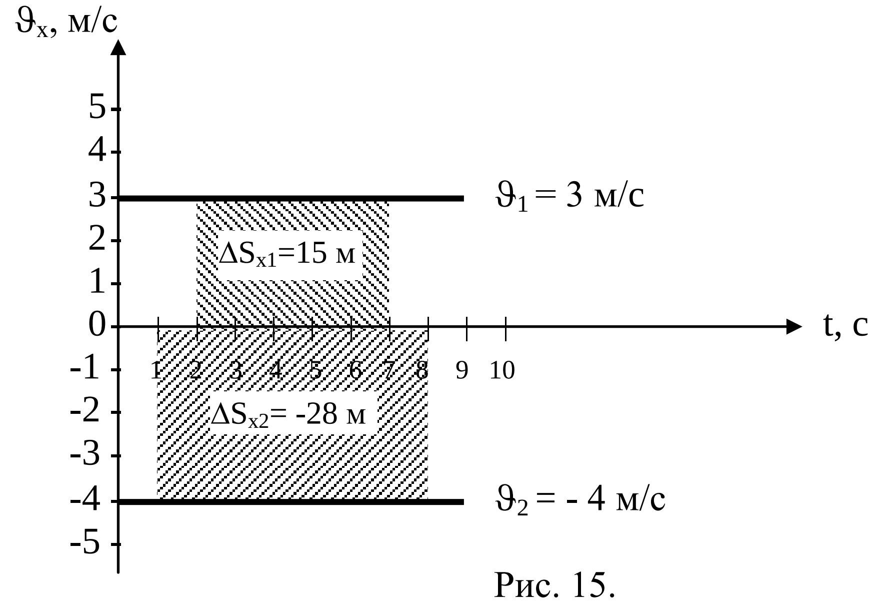


Рис. 15.

Если по графику скорости требуется определить пройденный телом путь, то все площади считаются положительными - путь не бывает отрицательным.

При равнопеременном движении график скорости не параллелен оси времени, поэтому для определения величины перемещения (пути) требуется вычислять площади треугольников или трапеций (см. рис. 16).

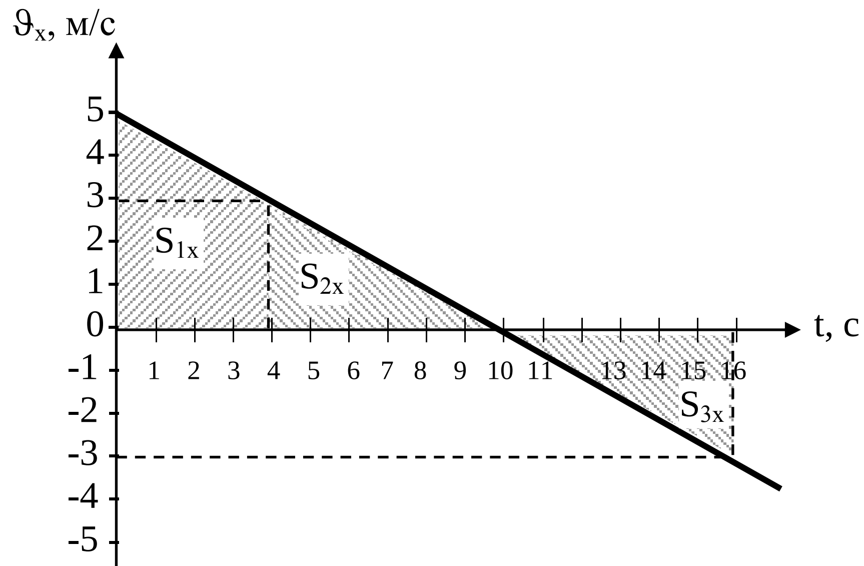


Рис. 16.

На этом рисунке:
S_{1x} = 4*(5+3)/2 = 16 м - площадь трапеции, численно равная перемещению за время t = 4 с. Основания трапеции равны 5 и 3 (м/с), ее высота равна 4 (с).
S_{2x} = 3*(10-4)/2 = 9 м - площадь треугольника, численно равная приращению перемещения S_x за интервал времени от 4 до 10 с. Основание и высота треугольника равны 6 (с) и 3 (м/с).
Ошибка! Ошибка связи.- площадь треугольника, численно равная приращению перемещения S_x за интервал времени от 10 до 16 с. Основание и высота треугольника равны 6 (с) и -3 (м/с).
Суммарное перемещение за время t = 16 с составляет $S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x}$ = 16 +9 - 9 = 16 м.
Путь, пройденный телом за 16 с равен $|S_{1x}| + |S_{2x}| + |S_{3x}|$ = 16 + 9 + 9 = 33 м, Отметим, что перемещение за интервал времени от 4 до 16 с равно нулю, а пройденный при этом путь равен 18 м

Если скорость меняется произвольным образом, то площадь под графиком приближенно можно определить, разбив ее на небольшие прямоугольники, как показано на рис. 17.

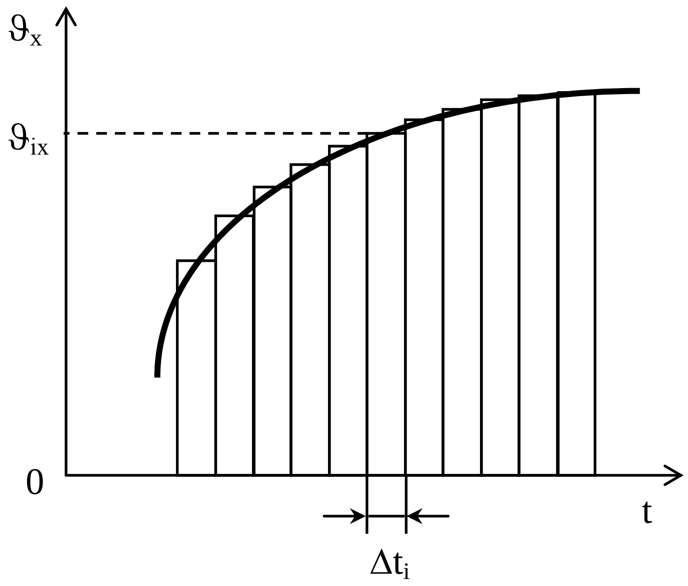


Рис. 17.

Общая площадь определяется суммированием площадей всех прямоугольников на интересующем интервале времени:

$$S_x = \vartheta_{1x}\Delta t_1 + \vartheta_{2x}\Delta t_2 + \vartheta_{3x}\Delta t_3 + ... + \vartheta_{Nx}\Delta t_N.$$

Если требуется найти перемещение, суммирование проводится с учетом знака слагаемого, при подсчете пути все слагаемые считаются положительными.

Площадь под графиком скорости численно равна перемещению (пройденному пути).

3.4. Определение скорости по графику ускорения.

Из формулы $a_x = \Delta\vartheta_x/\Delta t$ следует, что $\Delta\vartheta_x = a_x\Delta t$. Эта формула эквивалентна формуле площади прямоугольника со сторонами a_x и $\Delta t = t - t_0$. Таким образом, изменение проекции скорости численно равно площади прямоугольника, ограниченного горизонтальной осью t, графиком $a_x(t)$ и двумя вертикальными прямыми, проведенными через точки t_0 и t (см. рис. 18).

Так как a_x может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то площади прямоугольников, лежащих выше оси абсцисс, считаются положительными (приращение скорости положительно), площади прямоугольников, лежащих ниже оси абсцисс считаются отрицательными (приращение скорости отрицательно). Так, на интервале от $t_0 = 0$ до $t = 5$ с приращение скорости положительное ($\Delta\vartheta_{x1} = 15$ м/с), на интервале от $t_0 = 5$ с до $t = 10$ с приращение скорости отрицательное ($\Delta\vartheta_{x2} = -20$ м/с).

Если за время движения тела $(t - t_0)$ ускорение принимает и положительные и отрицательные значения, то для нахождения изменения скорости за этот промежуток времени нужно провести алгебраическое (с учетом знака) суммирование площадей соответствующих прямоугольников. Например, изменение скорости на интервале от $t_0 = 0$ до $t = 10$ с равно - 5 м/с.

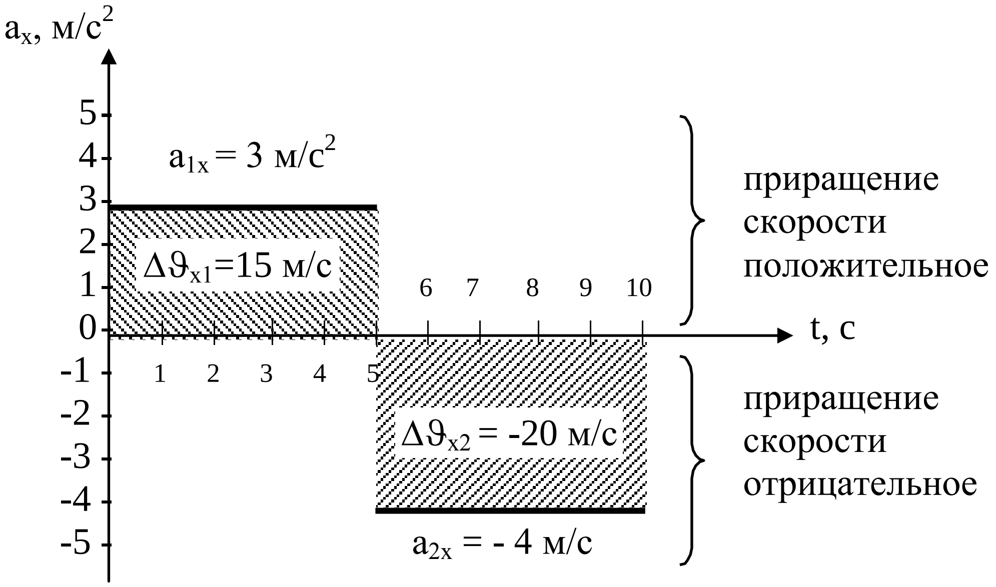


Рис. 18.

Площадь под графиком ускорения численно равна изменению скорости.

Подводя итоги данного раздела, можно сказать следующее:

1. Если имеется график ускорения, то
   а) по площади прямоугольника образованного графиком, осью времени и двумя вертикальными прямыми, проведенными через точки t_0 и t, можно определить изменение скорости на интервале от t_0 до t.
2. Если имеется график скорости, то
   а) по тангенсу угла наклона графика с осью времени можно определить величину и знак проекции ускорения;
   б) по площади фигуры, заключенной между графиком скорости, осью времени и двумя вертикальными прямыми, проведенными через точки t_0 и t, можно вычислить перемещение и путь, пройденный телом за время $\Delta t = t - t_0$.
3. Если имеется график пути (координаты), то
   а) по тангенсу угла наклона графика с осью времени можно определить величину и знак проекции скорости;
   б) по ориентации ветвей параболы (вверх или вниз) можно определить знак проекции ускорения (плюс или минус, соответственно).

4. Построение графиков скорости, ускорения и пройденного пути по графику перемещения (координаты).

Пусть дан график перемещения в виде участка параболы ОА (рис. 19) Необходимо построить графики зависимости скорости, ускорения и пройденного пути от времени.

Прежде всего, отметим следующие особенности графика перемещения:

1) Угол наклона касательной к графику в точке t = 0 равен нулю. Следовательно, начальная скорость $\vartheta_{0x} = tg0 = 0$.

2) Угол наклона касательной при t > 0 и увеличивается со временем. Следовательно, проекция скорости на направление оси x положительная ($\vartheta_x > 0$) и ее величина растет со временем - движение равноускоренное.

3) Ветвь параболы направлена вверх. Значит проекция ускорения положительно ($a_x > 0$) и, следовательно, совпадает с направлением скорости. Этот факт подтверждает, что движение равноускоренное.

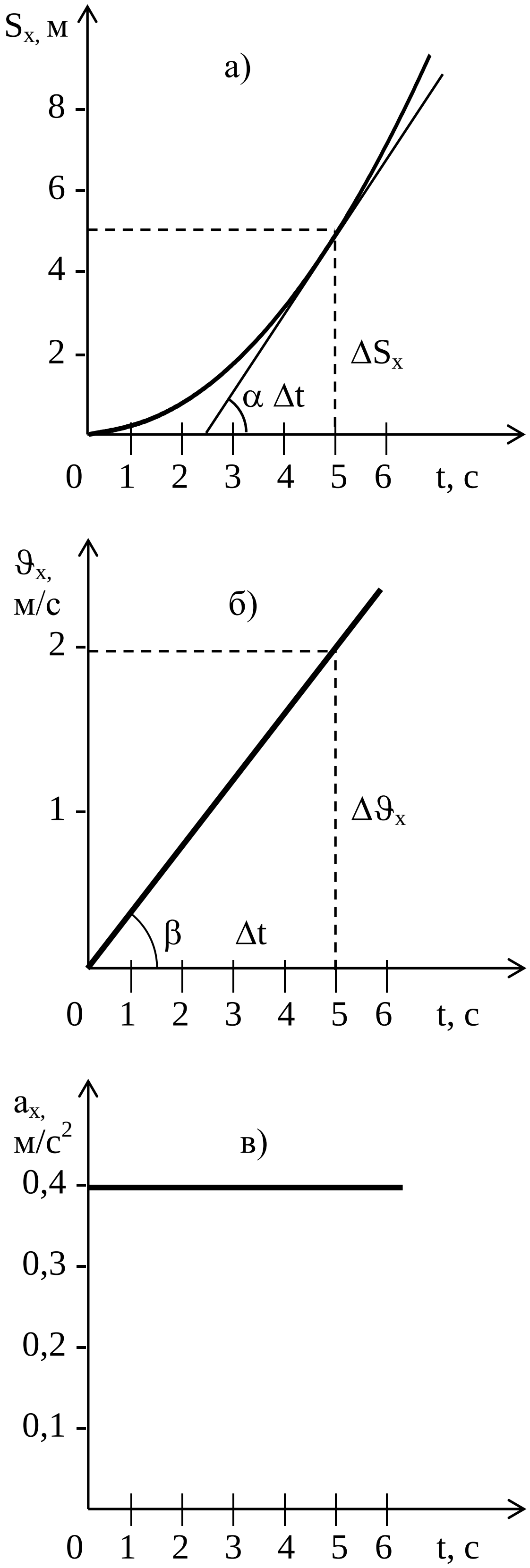

Sx, м
а)
8
6
4
2
ΔSx
α Δt
0 1 2 3 4 5 6 t, с
ϑx, м/с
б)
2
1
Δϑx
β Δt
0 1 2 3 4 5 6 t, с
ax, м/с2
в)
0,4
0,3
0,2
0,1
0 1 2 3 4 5 6 t, с

Рис. 19.

График скорости при равноускоренном движении без начальной скорости, как известно, прямая линия, проходящая через начало координат (см. раздел 2.2, табл. 4, вариант 1). Для построения этого графика достаточно определить координаты всего одной точки - время и соответствующую скорость. Выберем t = 5 с. Чтобы определить скорость в этот момент времени, проведем касательную к графику перемещения в точке, абсцисса которой t = 5 с и рассчитаем тангенс угла наклона этой касательной как отношения катетов прямоугольного треугольника, изображенного на рис. 19а: $\vartheta_x = \Delta S_x/\Delta t = (5 - 0)/(5 - 2{,}5) = 2$ м/с. Таким образом, координаты двух точек, через которые проходит график скорости, известны: (0,0) - начало координат и (5,2). Полученный график представлен на рис. 19б.

При равноускоренном движении график ускорения - прямая линия, лежащая выше оси абсцисс и параллельная ей (см. раздел 2.1, рис. 6). Значение ускорения найдем по наклону графика скорости: $a_x = tg\beta = \Delta\vartheta_x/\Delta t = (2 - 0)/(5 - 0) = 0{,}4$ м/с^2. График ускорения представлен на рис. 19в.

График пути в данном случае совпадает с графиком перемещения, так как направление движения не меняется.

Рассмотрим более сложное движение, график которого изображен на рис. 20а. Здесь 0А, BCD, EF – участки парабол. AB и DE – отрезки прямых линий. График симметричен относительно прямой CK. Охарактеризуем движение на каждом участке.

Участок 0А – ускорение $a_x > 0$ (ветви параболы обращены вверх), $\vartheta_x > 0$ (тангенс угла наклона касательной к параболе 0А во всех ее точках положительный). Следовательно, движение равноускоренное. Начальная скорость равна нулю, так как в точке 0 находится вершина параболы.

Участок АВ – движение равномерное (x линейно зависит от t). Скорость движения равна тангенсу угла наклона прямой AB к оси абсцисс; она равна конечной скорости равноускоренного движения на участке 0А.

Участок ВС – движение равнозамедленное ($a_x < 0$, $\vartheta_x > 0$). В точке С тело останавливается - здесь скорость равна нулю так как нулю равен угол наклона касательной к оси t.

Участок CD - начиная с точки С, направление скорости меняется, а направление ускорения остается тем же, что и на предыдущем участке (BC и CD – участки одной параболы). Таким образом, направления скорости и ускорения здесь совпадают ($\vartheta_x < 0$, $a_x < 0$), то есть движение становится равноускоренным. Об этом свидетельствует и тот факт, что модуль скорости на данном участке возрастает. Начальная скорость движения равна нулю. Конечная скорость определяется тангенсом угла наклона касательной в точке D.

Участок DE – движение равномерное, скорость $\vartheta_x < 0$ и равна конечной скорости равноускоренного движения на участке CD. В силу симметрии

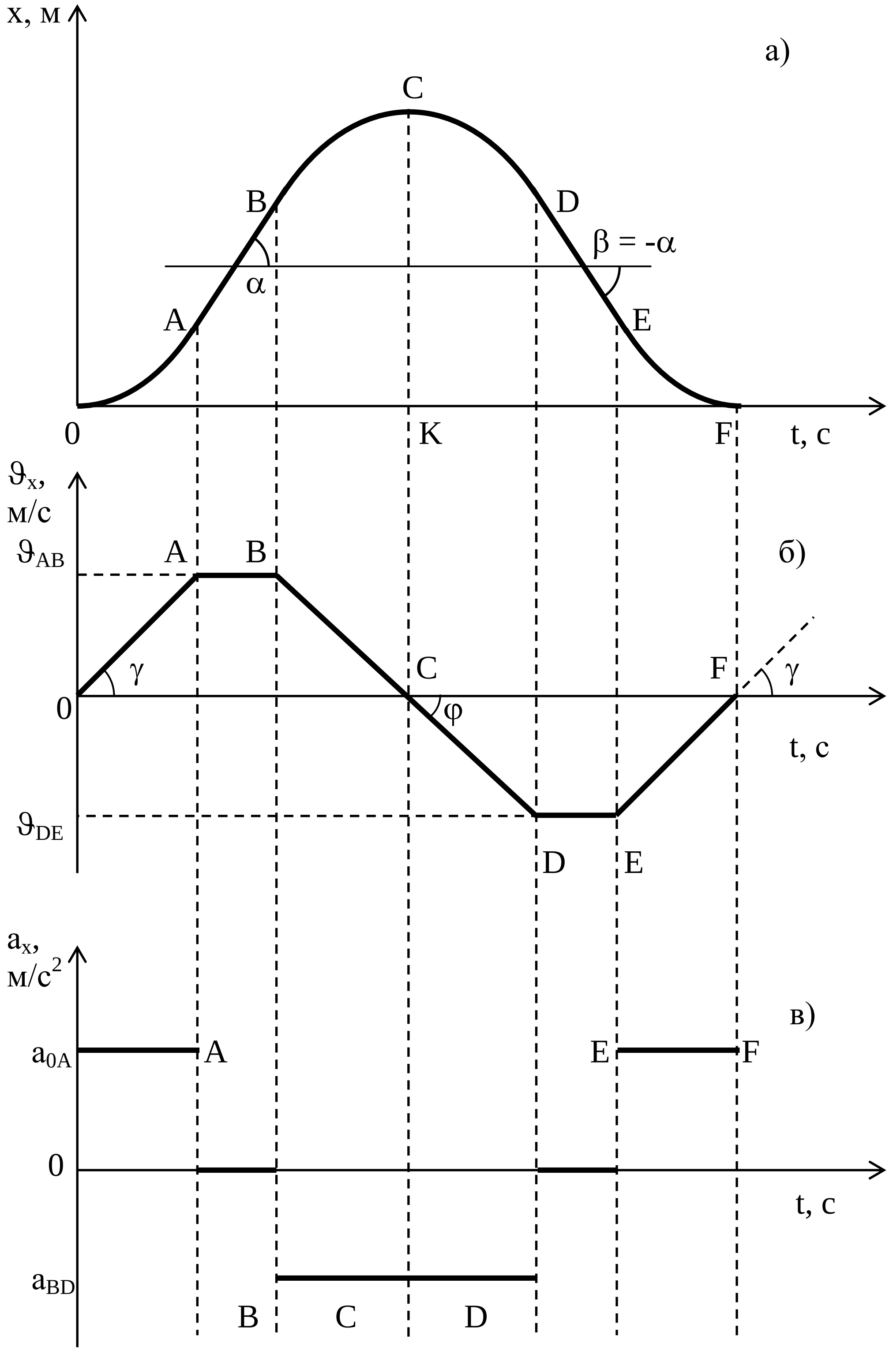

x, м
а)
C
B
D
β = -α
α
A
E
0
K
F
t, с
ϑx, м/с
ϑAB
A
B
б)
γ
C
F
γ
0
φ
t, с
ϑDE
D
E
ax, м/с2
в)
a0A
A
E
F
0
t, с
aBD
B
C
D

Рис. 20.

графика $\beta = -\alpha$, поэтому скорости движения на участках АВ и ДЕ равны по величине (но противоположны по направлению).

Участок EF - движение равнозамедленное ($a_x > 0$, $\vartheta_x < 0$ и уменьшается по модулю) Начальная скорость этого движения равна скорости равномерного движения на участке ДЕ. Конечная скорость равна нулю, поскольку в точке F лежит вершина параболы. Так как график симметричен относительно прямой СК, то параметры параболы EF совпадают с параметрами параболы 0А, то есть на участках 0А и EF тело движется с одинаковым ускорением (наклон прямых 0А и EF на графике скорости (рис. 20б) одинаков).

Графики скорости и ускорения представлены на рис. 20б и 20в. Согласно проведенному выше анализу, параметры, отмеченные на этих графиках, связаны между собой и с параметрами графика координаты (рис. 20а) следующими соотношениями:

$$a_{0A} = a_{EF} = tg\gamma;\ a_{BD} = tg\varphi;\ \vartheta_{AB} = tg\alpha;\ \vartheta_{DE} = tg\beta = tg(-\alpha) = -tg\alpha = -\vartheta_{AB}.$$

Так как координаты начальной (0) и конечной (F) точек совпадают, суммарное перемещение равно нулю.

Для того, чтобы построить график пути, необходимо вычислять (без учета знака) площадь под графиком скорости для каждого момента времени. Задачу можно упростить, если использовать графический метод. Так как при расчете пройденного пути направление скорости не имеет значения, формально можно считать, что скорость всегда оставалась положительной. На графике скорости это приведет как бы к зеркальному отражению отрицательного участка графика относительно оси t (рис. 21а), при этом скорости на этом участке не изменятся по величине, но изменятся по направлению. Скорость в каждый момент времени равна тангенсу угла наклона графика координаты, значит необходимо изменить соответствующую часть графика x(t) так, чтобы его наклон в каждой точке остался прежним по величине, но стал положительным. Это можно сделать, если, как и на графике скорости, часть графика координаты зеркально отразить относительно горизонтальной оси MN, проходящей через точку С. Полученный таким образом график пути представлен на рис. 21б.

Рассмотрим еще одно движение, график перемещения которого приведен на рис. 22. На этом графике ОА и CDE – отрезки прямых линий. ABC - участок параболы с вершиной в точке B. Охарактеризуем кратко движение на каждом участке.

Участок ОА – движение равномерное со скоростью ϑ_{0A} , направленной противоположно направлению оси x.

Участок АВ – движение равнозамедленное, так как скорость на этом участке отрицательна, а ускорение – положительно. Начальная скорость равна ϑ_{0A}, конечная скорость равна нулю, так как в точке B находится вершина параболы.

Участок ВС – ускорение на этом участке такое же, как и на участке АВ (АВС часть одной параболы), $a_x > 0$. Скорость на этом участке $\vartheta_{BC} > 0$, следовательно, движение равноускоренное. Начальная скорость равна нулю. Участок CDE – движение равномерное со скоростью, которую приобрело тело, двигаясь равноускоренно на участке ВС, к моменту времени t_C. В момент времени t_D тело находится в точке, откуда оно начало движение.

График скорости, соответствующий данному движению, представлен на рис. 22б. В момент времени $t_Д$ $\Delta x = 0$, следовательно, площади трапеций 0НАВ и BCDG должны быть равны. Перемещение, которое совершило тело к моменту времени t_E, численно равно площади прямоугольника DEFG.

График ускорения приведен на рис. 22в. Площадь прямоугольника RACP численно равна изменению скорости $\Delta\vartheta_x$ за время (t_C - t_A), то есть равна:

$$\Delta\vartheta_x = \vartheta_C - (-\vartheta_A) = \vartheta_C + \vartheta_A.$$

Для построения графика пути необходимо найти точки, где тело меняет направление движения. В данном случае изменение направления скорости происходит в момент времени, соответствующий точке В, поэтому для получения графика пути отразим ветвь BCDE графика перемещения относительно прямой MN (рис. 22г). Кривая 0ABC'D'E' представляет собой график движения, при котором скорость не меняет направления. Движение при этом происходит против направления оси х ($\vartheta_x < 0$) и перемещение отрицательно. Так как пройденный путь равен модулю перемещения, то полученную кривую 0ABC'D'E' необходимо отразить относительно оси абсцисс. Полученная таким образом кривая 0A"B"C"D"E" и есть график пути, который соответствует графику перемещения, приведенному на рис. 22а.

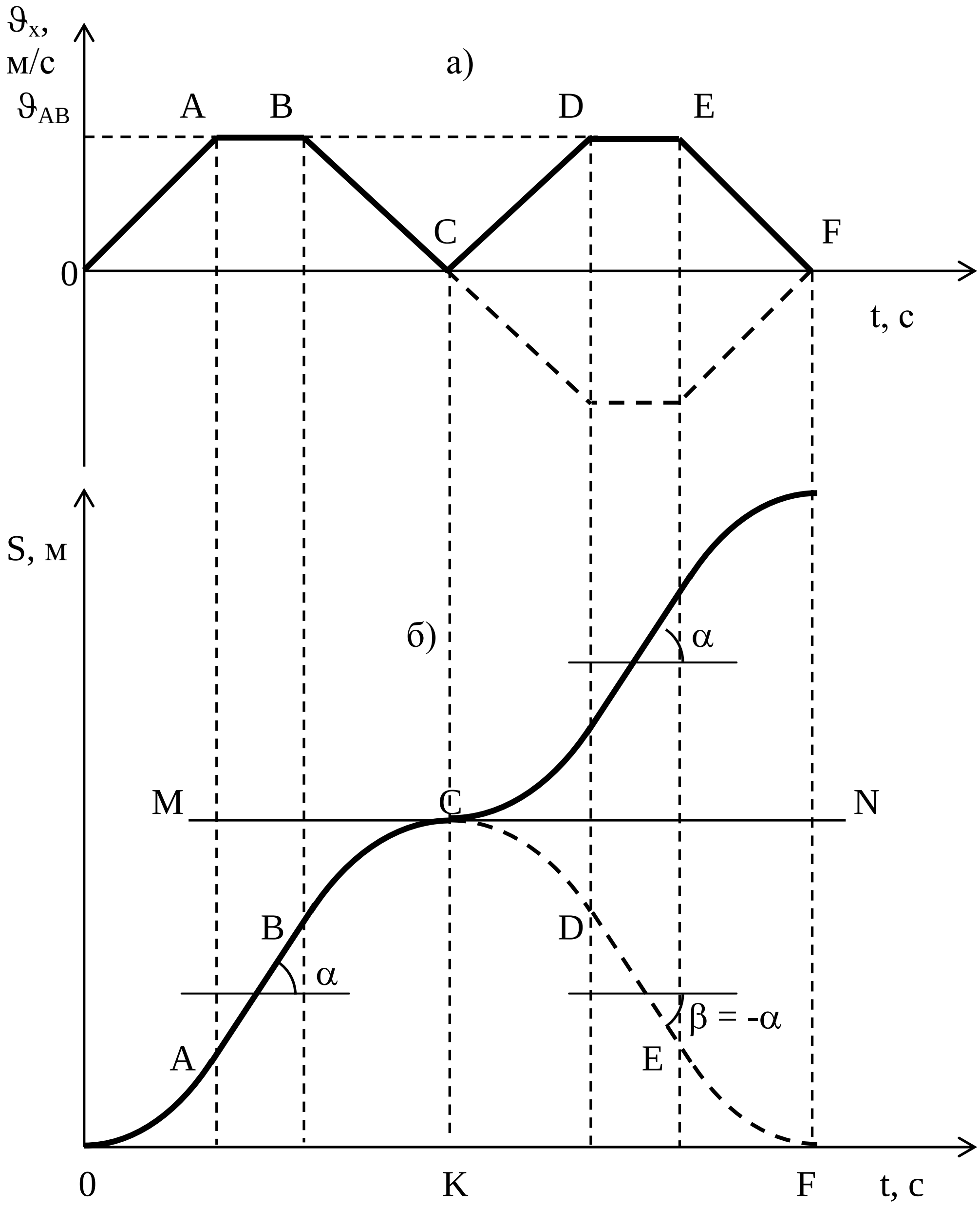
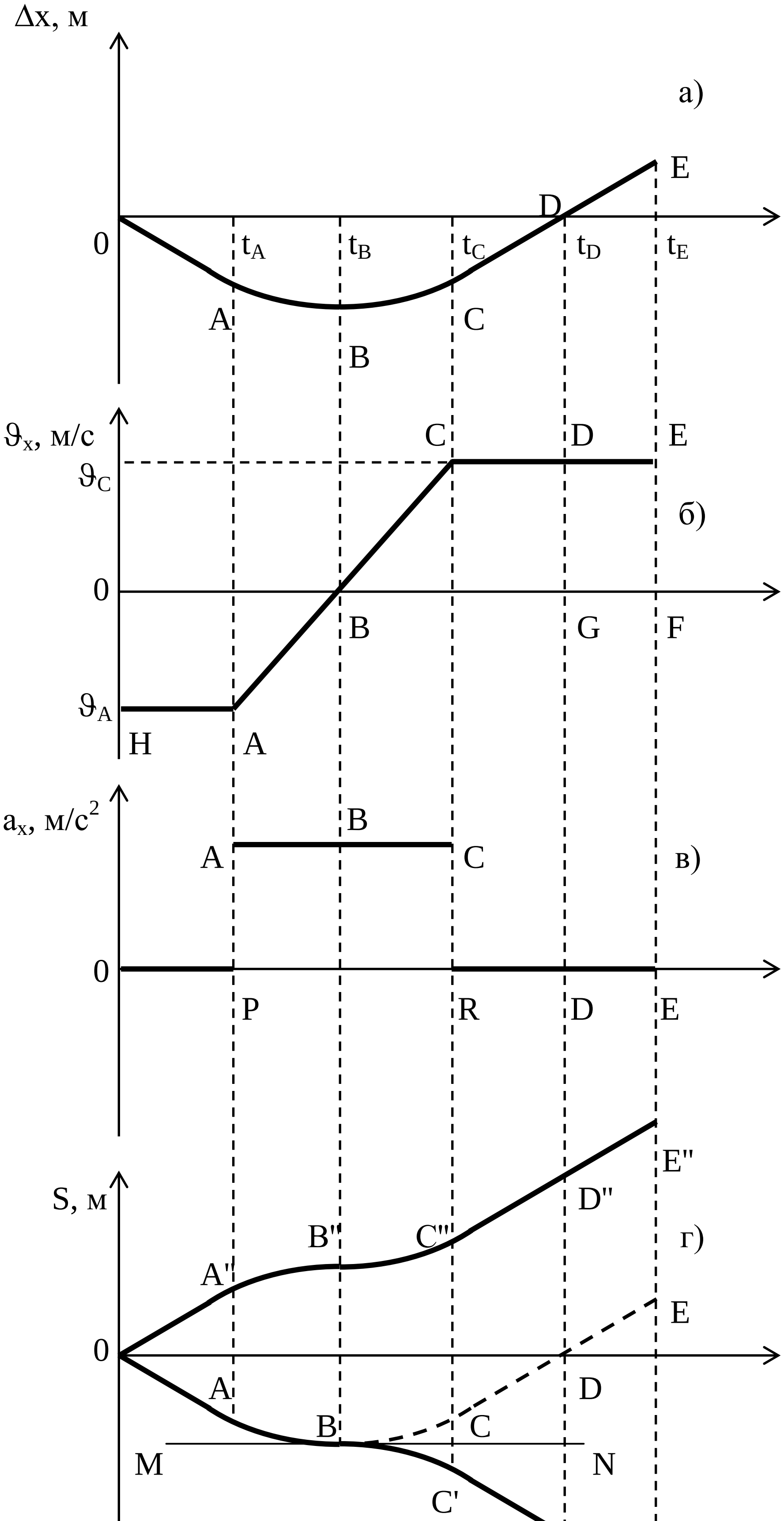


Рис. 21



Δx, м
а)
E
D
0
t_A
t_B
t_C
t_D
t_E
A
C
B
ϑ_x, м/с
C
D
E
ϑ_C
б)
0
B
G
F
ϑ_A
H
A
a_x, м/с^2
B
A
C
в)
0
P
R
D
E
E''
S, м
D''
B''
C''
г)
A''
E
0
A
D
B
C
M
N
C'
D'
E'

Рис. 22

5. Построение графиков перемещения, ускорения и пройденного пути по графику скорости

Пусть дан график скорости прямолинейного движения тела (рис.23а). Требуется построить графики перемещения, ускорения и пройденного пути. Сначала дадим характеристику движению на каждом участке.

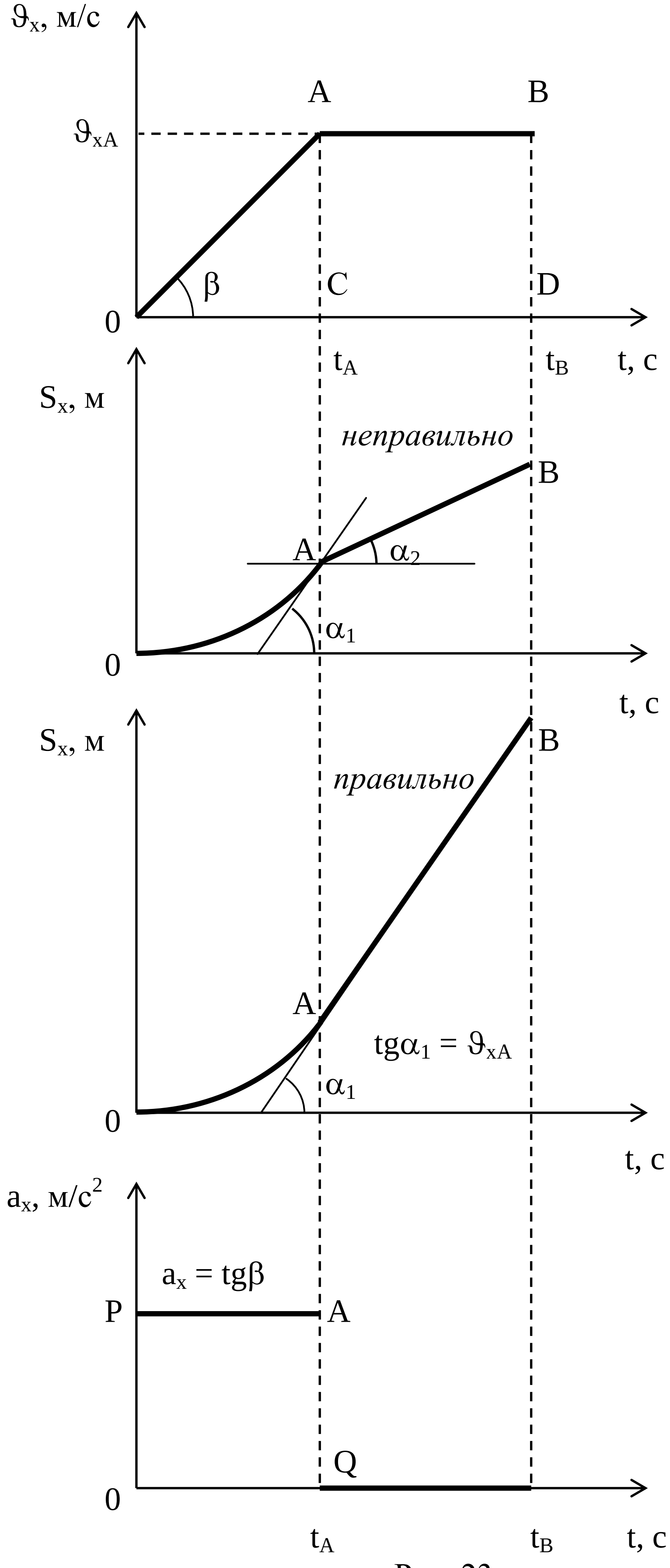
Участок 0А – проекция скорости на этом участке положительна и возрастает по линейному закону, следовательно, движение равноускоренное. Начальная скорость равна нулю. Конечная скорость движения $\vartheta_{xA.}$ Модуль перемещения, совершенного телом к моменту времени t_A, численно равна площади треугольника 0АС**.**

Участок АВ – скорость с течением времени не меняется – движение равномерное со скоростью ϑ_{xA}, которую тело имело в конце участка 0А. Перемещение, которое совершит тело за время равномерного движения (t_B - t_A), численно равно площади прямоугольника ABDC**.** Общее перемещение, совершенное телом за время t_B, численно равно площади трапеции 0ABD.

Построим график перемещения. На участке ОА, при равноускоренном движении, перемещение увеличивается по параболическому закону, причем ветви параболы обращены вверх (a_x>0), а вершина параболы находится в точке 0 (скорость в начальный момент времени равна нулю). На участке АВ S_x будет увеличиваться по линейному закону (равномерное движение). Часто ученики пристраивают линейный отрезок графика так, как показано на рис. 23б. Это неправильно так как график перемещения не должен иметь изломов, он должен изображаться плавной линией, то есть парабола должна сопрягаться с прямой.

Действительно, из рис. 23б следует, что в момент времени t_A скорость тела может принимать два разных значения: если приближаться к t_A слева, то скорость будет численно равна $tg\alpha_1$, а если приближаться к t_A справа, то скорость равна $tg\alpha_2$. Таким образом, согласно графику на рис. 23б зависимость скорости тела в момент времени t_A должна была бы претерпевать разрыв, чего в действительности, не наблюдается (график скорости на рис. 23а непрерывен). Заметим, что разрыва на графике скорости не может быть, так как скорость тела не может мгновенно (за $\Delta t = 0$) измениться - для этого требуется сообщить телу бесконечно большое ускорение и, соответственно, приложить бесконечно большую силу. Правильный график перемещения представлен на рис. 23в.

На рис. 23г приведен график ускорения. Модуль ускорения на участке 0А равен $tg\beta$ (см. рис. 23а). Площадь прямоугольника 0PAQ численно равна изменению скорости на участке ОА: $\Delta\vartheta_x=\vartheta_{xA} - 0 = \vartheta_{xA}$. На участке АВ ускорение равно нулю.



ϑx, м/с
A
B
ϑxA
β
C
D
0
tA
tB
t, с
Sx, м
неправильно
B
A
α2
α1
0
t, с
Sx, м
B
правильно
A
tgα1 = ϑxA
α1
0
t, с
ax, м/с2
ax = tgβ
P
A
Q
0
tA
tB
t, с

Рис. 23.

Как видно из рис. 23г, график ускорения имеет разрыв. Это не противоречит законам физики: вполне можно допустить, что сила перестанет действовать на тело в определенный момент времени.

Поскольку движение происходит вдоль координатной оси x без изменения направления, то график пути совпадает с графиком перемещения (рис. 23в).

Рассмотрим еще один пример (рис. 24а). По условию задачи $\Delta OAB = \Delta BCD$ и, кроме того, 0M = 2MB. Как обычно, прежде всего, выясним характер движения тела на каждом участке.

Участок 0A – проекция скорости положительна и увеличивается по линейному закону, значит, движение равноускоренное ($\vartheta_x > 0$, $a_x > 0$); начальная скорость равна нулю. Перемещение, совершенное телом за время t_A численно равно площади треугольника 0AM.

Участок AB – в точке A меняется знак и модуль ускорения и теперь $\vartheta_x > 0$, $a_x < 0$ - движение на этом участке равнозамедленное. Модуль ускорения на участке AB больше 2 раза, чем на участке OA (так как $tg\alpha = AM/0M = AM/2MB = |tg\beta|/2$). Конечная скорость равна нулю (точка B). Общее перемещение, совершенное телом за время t_B, численно равно площади треугольника 0AB.

Участок BC – в точке B меняется знак скорости, тело движется в направлении, противоположном оси x. Ускорение остается тем же, что и на участке AB (отрезки AB и AC лежат на одной прямой), так что направления скорости и ускорения совпадают ($\vartheta_x < 0$, $a_x<0$). Следовательно, движение равноускоренное, начальная скорость, равна нулю.

Участок CD – движение равнозамедленное ($\vartheta_x < 0$, $a_x > 0$). Начальная скорость равна скорости, которой тело достигло, двигаясь равноускоренно на участке BC, к моменту времени t_C. Конечная скорость равна нулю (точка D). Модуль ускорения равен модулю ускорения, которое имело тело на участке OA (так как $\Delta OAB = \Delta BCD$ по условию задачи). Перемещение, совершенное телом за время (t_D - t_B), численно равно площади ΔBCD , взятой с обратным знаком. Общее перемещение тела за все время движения $t_Д$ будет равно нулю, так как площадь ΔOAB равна площади ΔBCD. Путь, пройденный телом к моменту времени $t_Д$, равен арифметической (без учета знака) сумме площадей этих треугольников, т.е. удвоенной площади одного из треугольников.

Проанализировав движение на каждом участке, построим график перемещения. При этом необходимо помнить, что график перемещения должен быть плавной кривой, без изломов. Отдельные участки графика должны сопрягаться друг с другом (рис. 24б). Так как скорость тела равна нулю в моменты времени 0, t_B, t_D, то вершины парабол OA, ABC и CD также должны иметь абсциссы, равные временам 0, t_B и t_D, соответственно. Общее перемещение, как указывалось выше, равно нулю, следовательно, ордината

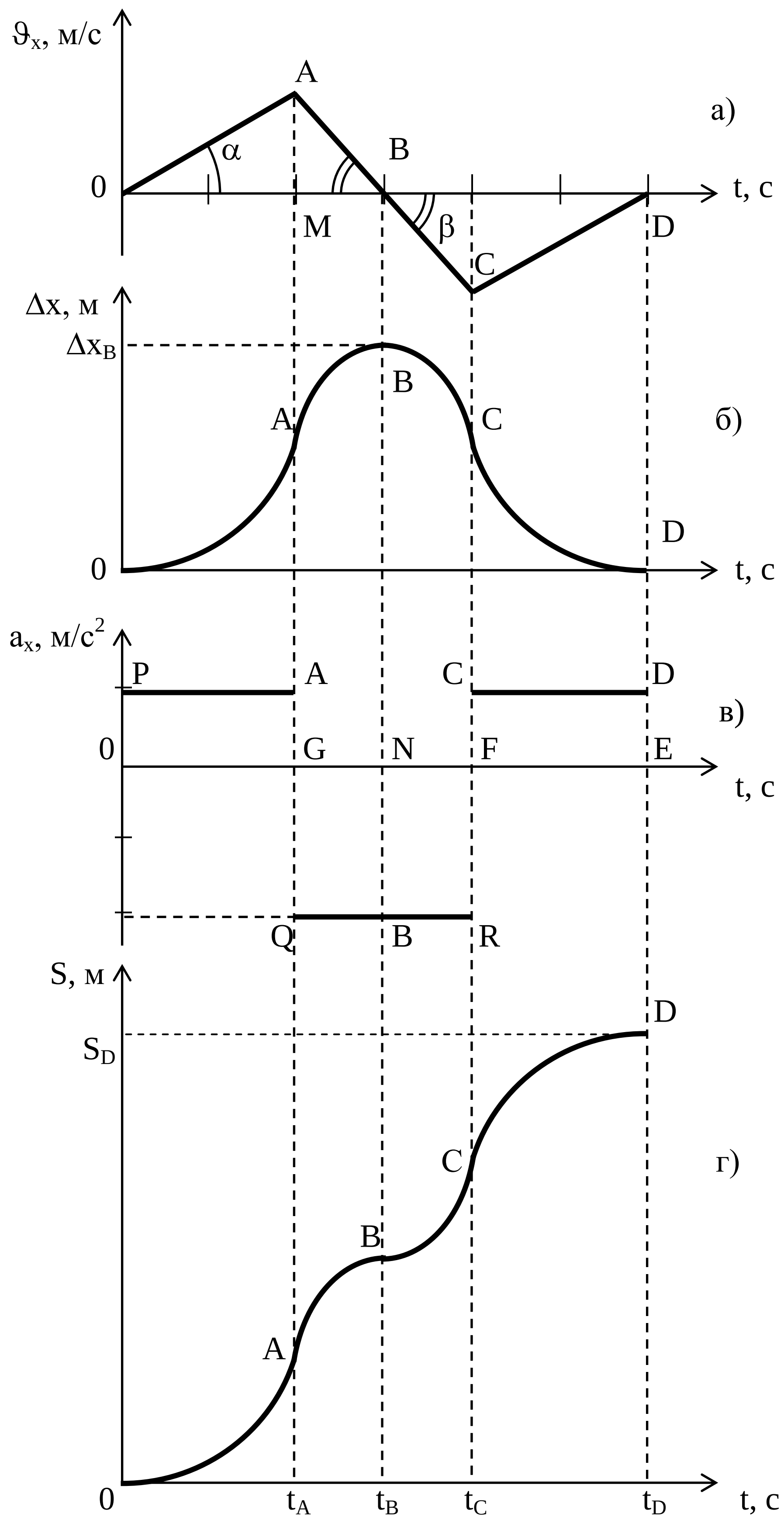

ϑx, м/с
A
а)
α
B
0
t, с
M
β
D
C
Δx, м
ΔxB
B
A
C
б)
D
0
t, с
ax, м/с2
P
A
C
D
в)
0
G
N
F
E
t, с
Q
B
R
S, м
D
SD
C
г)
B
A
0
tA
tB
tC
tD
t, с

Рис. 24.

точки D равна нулю. Максимальное перемещение в момент времени t_B численно равно площади треугольника OAB.

График ускорения показан на рис. 24в. Ускорения на участках OA и СД равны, ускорение на участке ABC по модулю в два раза больше и противоположно направлено ускорению на участке OA (и CD). Изменение скорости к моменту времени t_B равно нулю (рис. 24а), следовательно, площади прямоугольников 0PAG и FCDE на графике ускорения (рис. 24в) равны между собой. Аналогично, равны и площади прямоугольников QGNB и BNFR.

График пройденного пути представлен на рис. 24г. Общий пройденный путь численно равен арифметической сумме площадей треугольников.

Рассмотрим следующий пример. Тело совершает прямолинейное движение, график скорости которого изображен на рис. 25а. Как и ранее, требуется построить графики перемещения, ускорения и пройденного пути.

<u>На участке AB</u> – $\vartheta_x > 0$, $a_x < 0$ - движение равнозамедленное. Начальная скорость равна ϑ_A, конечная ϑ_B.

<u>Участок BC</u> – движение также равнозамедленное, так как $\vartheta_x < 0$, $a_x < 0$. Начальная скорость равна ϑ_B, конечная равна нулю (точка C). Как следует из графика, ускорение на участке BC меньше ускорения на участке AB.

<u>Участок CD</u> – скорость равна нулю: тело покоится относительно выбранной системы отсчета.

Начертим график перемещения, соответствующий данному графику скорости. Так как начальная скорость движения равна ϑ_A, то тангенс угла наклона касательной к графику перемещения в момент времени t=0 должен равняться ϑ_A: $tg\alpha=\vartheta_A$ (рис. 25б). Конечная скорость на участке AB (рис. 25а) не равна нулю, следовательно, точка B не является вершиной параболы OB (рис. 25б). Для того, чтобы определить, какова будет абсцисса вершины этой параболы, нужно продлить отрезок AB до пересечения с осью времени. (рис. 25а); момент времени t_E и соответствует абсциссе точки E – вершины параболы. На участке BC модуль перемещения увеличивается также по параболическому закону, причем крутизна параболы BC, как отмечено выше, меньше крутизны параболы OC. Точка B – точка сопряжения двух парабол. Вершина параболы BC лежит в точке C, так как в момент времени t_C скорость тела становится равной нулю. На участке CD тело покоится, точка C – точка сопряжения параболы BC с горизонтальным отрезком CD. Общее перемещение Δx_C за время движения t_C равно площади фигуры 0ABC0.

График пути в данном случае совпадает с графиком перемещения, так как движение происходило вдоль оси x без изменения направления скорости.

График ускорения приведен на рис. 25в. Модуль ускорения на участке AB больше, чем на BC ($a_{x1} = tg\beta_1$, $a_{x2} = tg\beta_2$ и $\beta_1 > \beta_2$), проекции ускорений в обоих случаях отрицательны.

Площадь фигуры 0AMBCN на графике ускорения (рис. 25в) численно равна изменению скорости за время t_C: ϑ_C-ϑ_A=-ϑ_A.

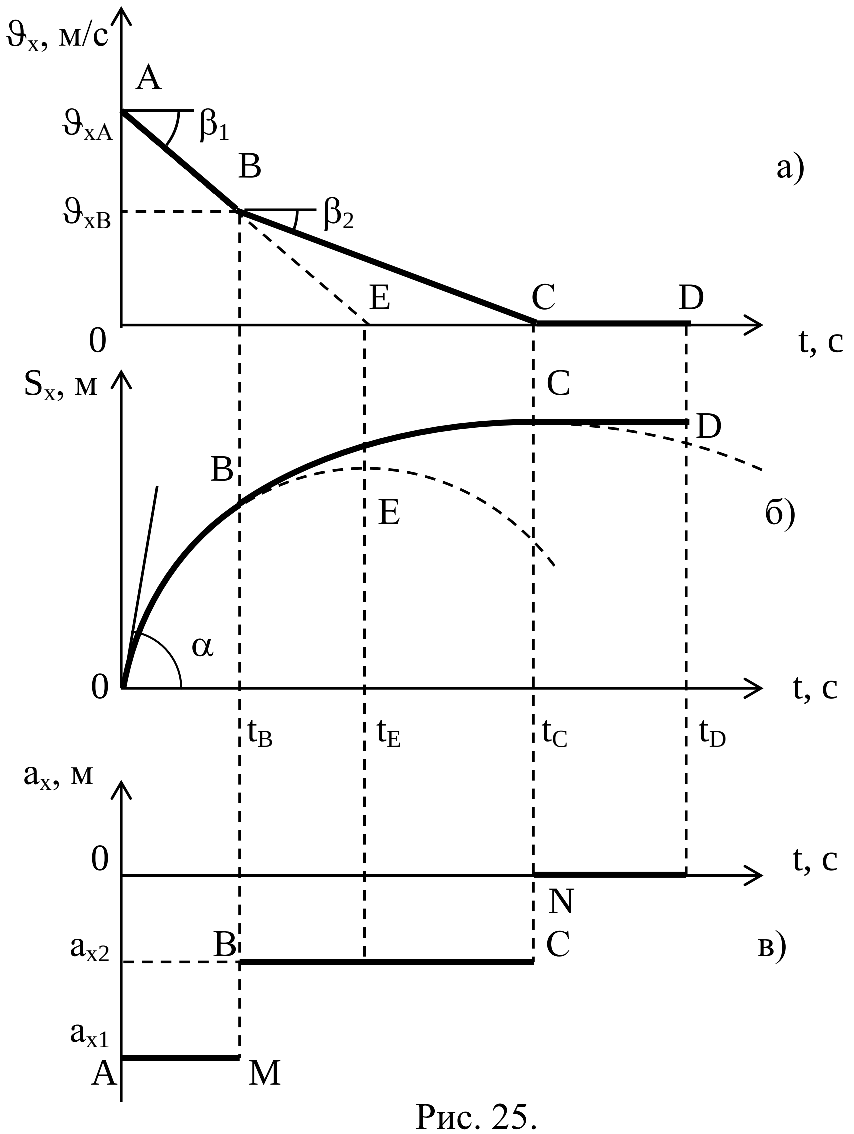


Рис. 25.

6. Построение графиков основных кинематических величин по графику ускорения.

Пусть дан график ускорения, приведенный на рис. 26а. Площадь прямоугольника 0ABC под графиком ускорения численно равна изменению скорости $\Delta\vartheta_x = \vartheta_x - \vartheta_{0x}$ за время t_B (см. раздел 2.1). В любой момент времени от 0 до t_B изменение скорости $\Delta\vartheta_x > 0$ и линейно увеличивается со временем, поэтому график зависимости $\Delta\vartheta_x(t)$ будет иметь вид, показанный на рис.

26б. Поскольку $\vartheta_x = \Delta\vartheta_x + \vartheta_{0x}$, для построения графика скорости необходимо задать ϑ_{0x} – начальную скорость. Мы ограничимся случаем движения тела без начальной скорости: $\vartheta_{0x}=0$. Тогда $\vartheta_x = \Delta\vartheta_x$ и график $\vartheta_x(t)$ совпадает с графиком $\Delta\vartheta_x(t)$. Тангенс угла наклона α графика скорости численно равен ускорению, с которым движется тело.

Построение графика перемещения по полученному графику скорости сводится к уже рассмотренным задачам (см. раздел 4). Если ускорение отрицательно $a_x < 0$ (рис. 26в), то изменение скорости $\Delta\vartheta_x < 0$. График скорости для случая, когда начальная скорость равна нулю, приведен на рис. 26г. Тангенс угла β должен быть численно равен ускорению.

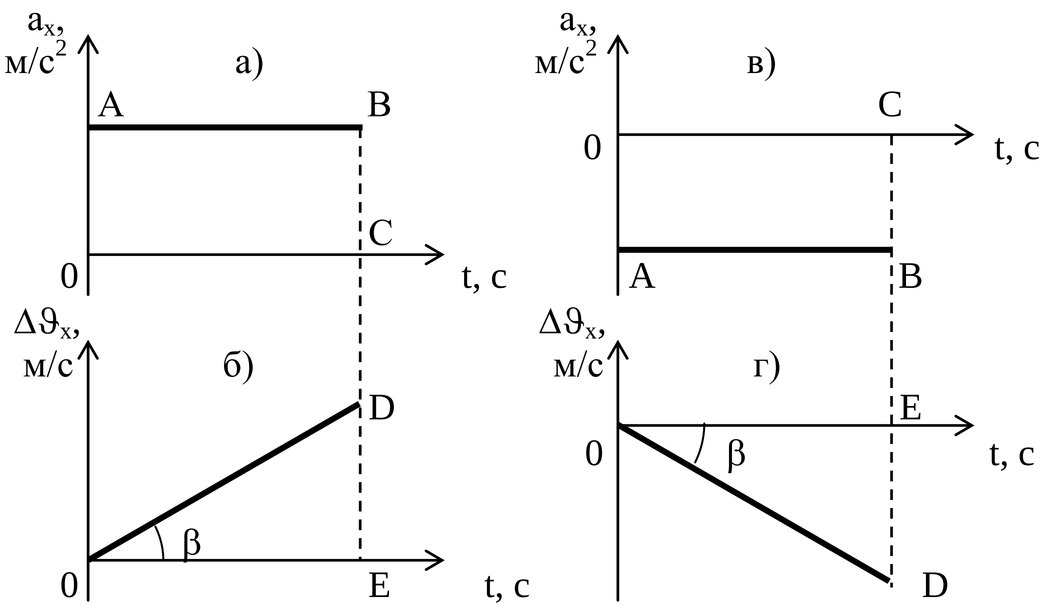


Рис. 26.

7. Примеры решения графических задач

В заключение приведем несколько примеров с решениями на построение графиков основных кинематических величин для прямолинейного движения по известным графикам скорости, перемещения или ускорения (объяснение графиков предлагаем читателю дать самостоятельно).

1. Даны графики (рис. 27а и 28а) для прямолинейного движения. Построить графики скорости, ускорения и пути.
2. Даны графики скорости (рис. 29а и 30а) прямолинейного движения вдоль оси. Построить графики перемещения, ускорения и пути.
3. Даны графики ускорения (рис. 31а и рис. 32а) прямолинейного движения без начальной скорости. Построить графики скорости.

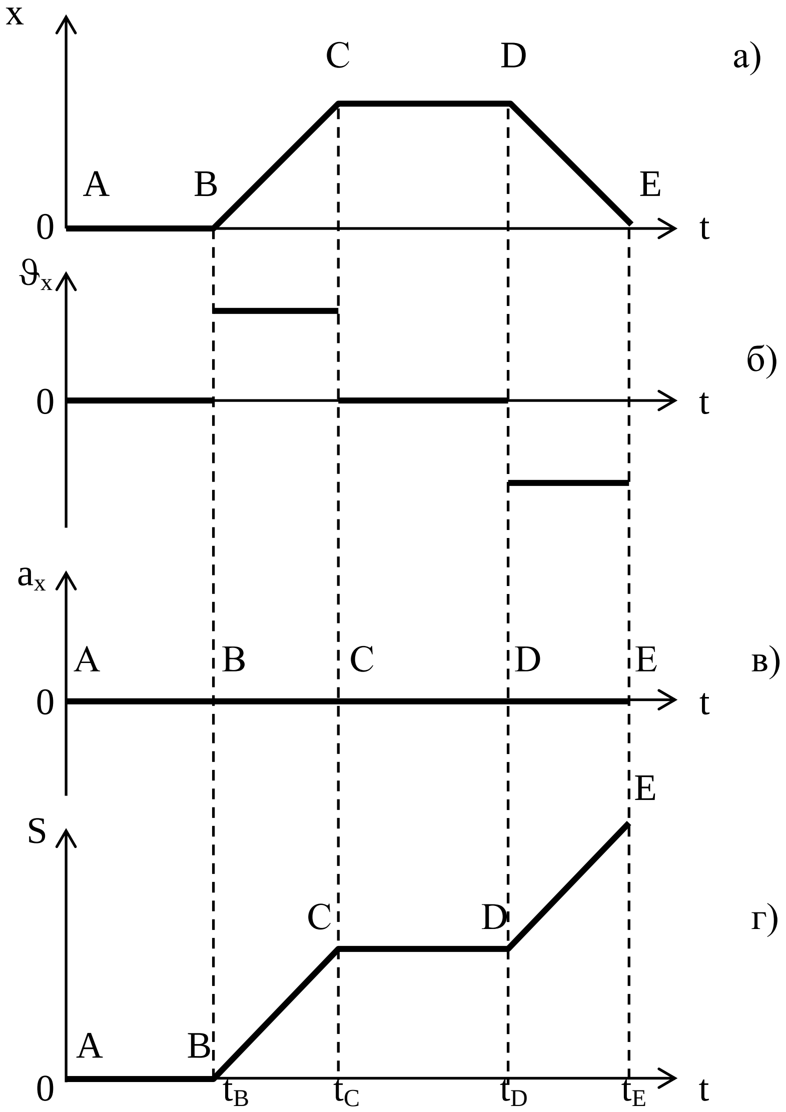
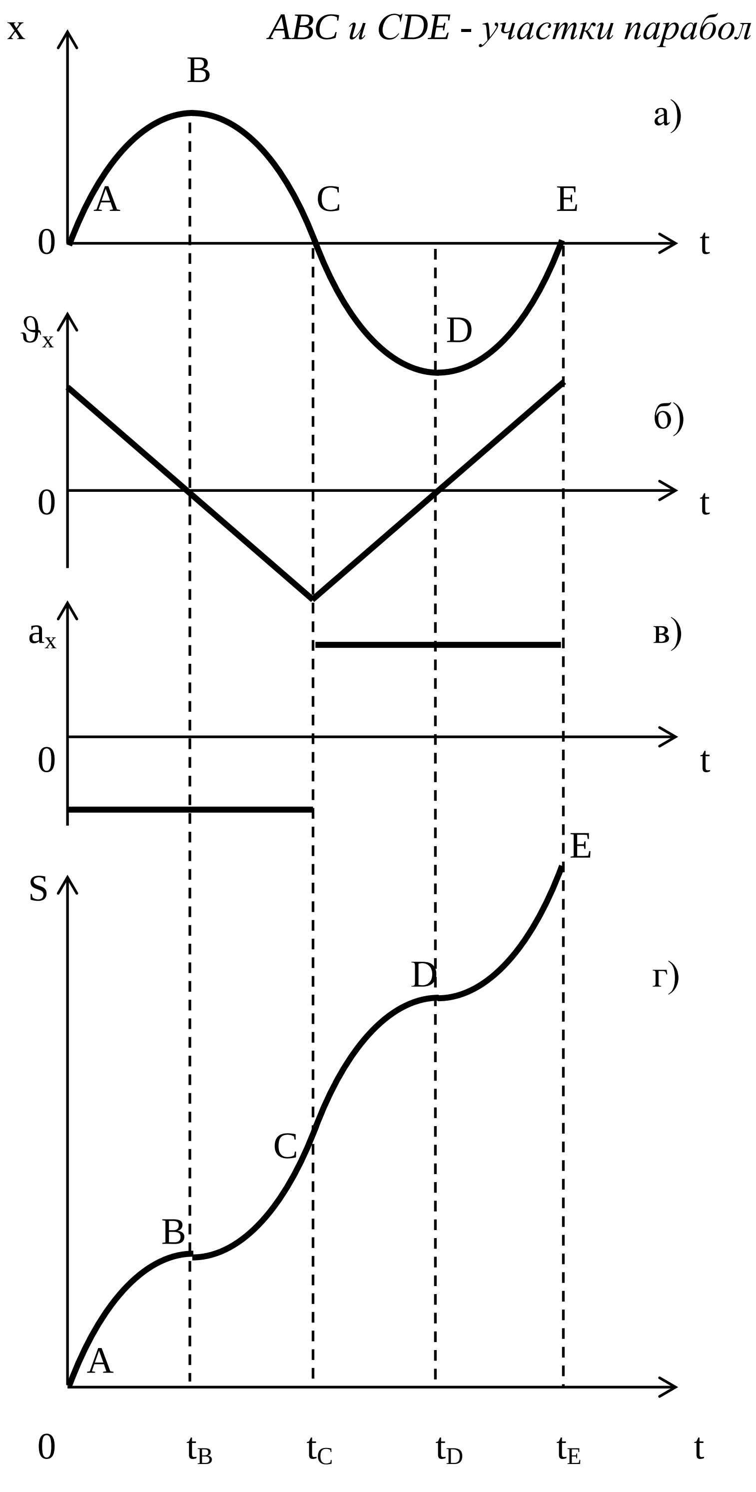


Рис. 27.



ABC и CDE - участки парабол
x
B
а)
A
C
E
0
t
ϑx
D
б)
0
t
ax
в)
0
t
E
S
D
г)
C
B
A
0
tB
tC
tD
tE
t

Рис. 28.

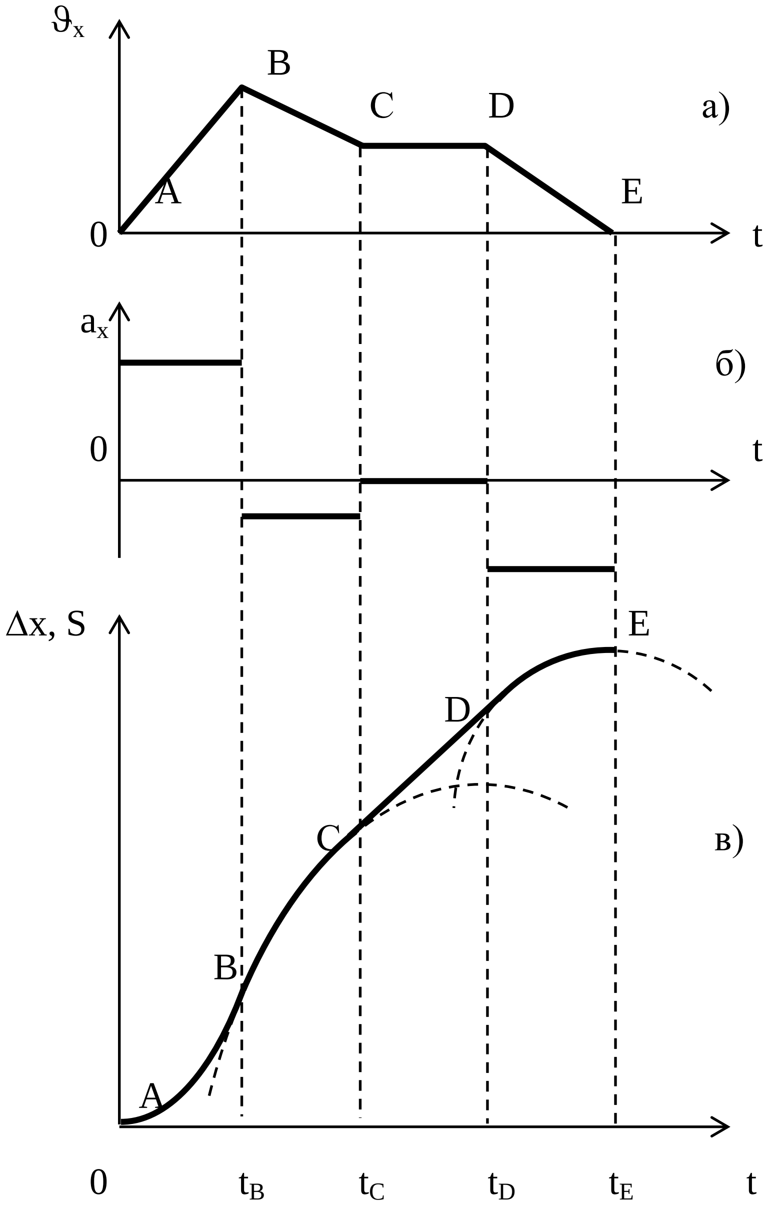


Рис. 29.

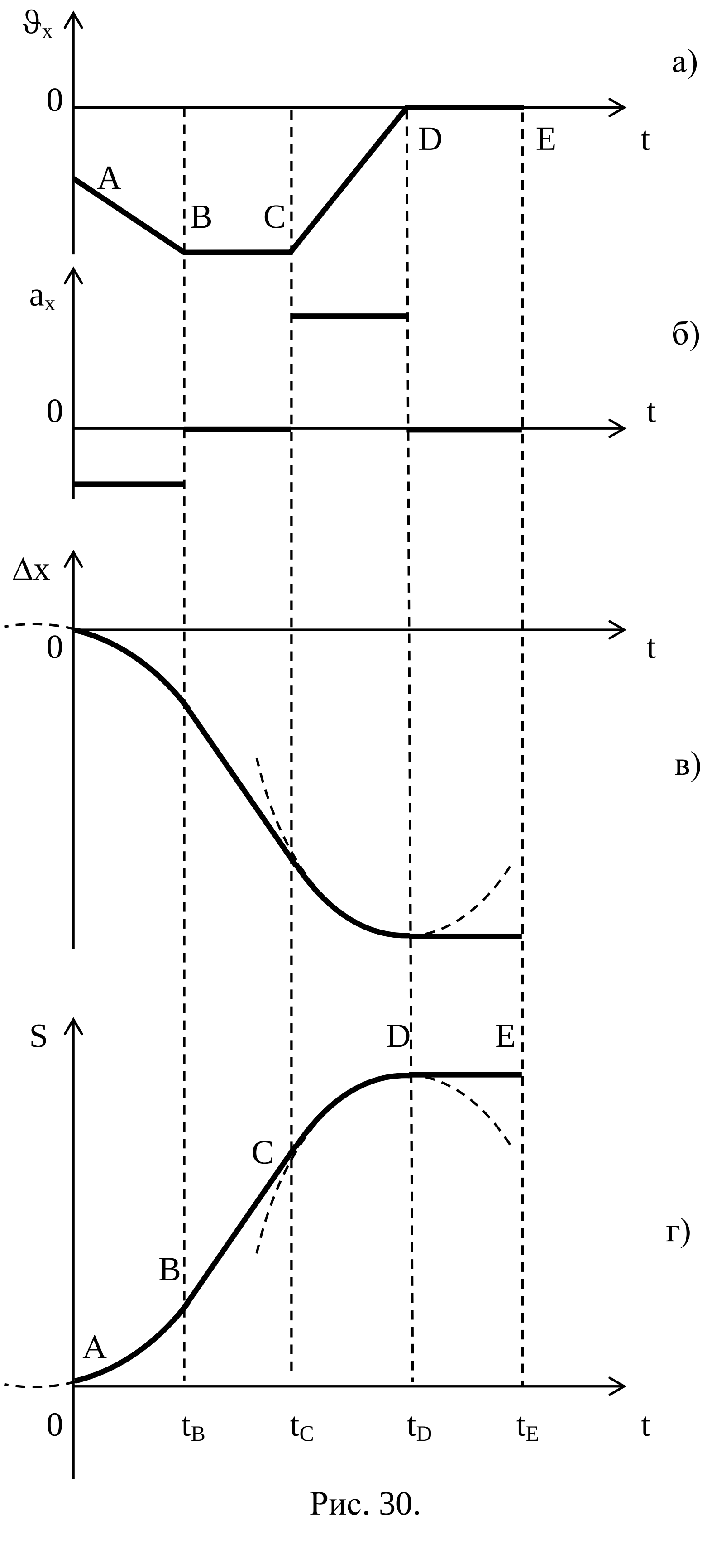


Рис. 30.

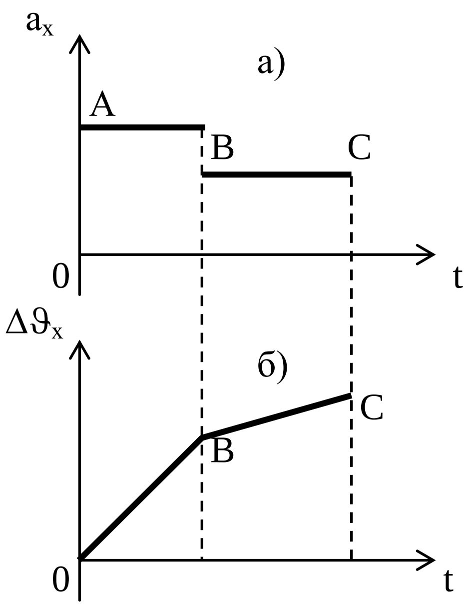

a$_x$
а)
A
B
C
0
t
$\Delta\vartheta_x$
б)
C
B
0
t

Рис. 31.

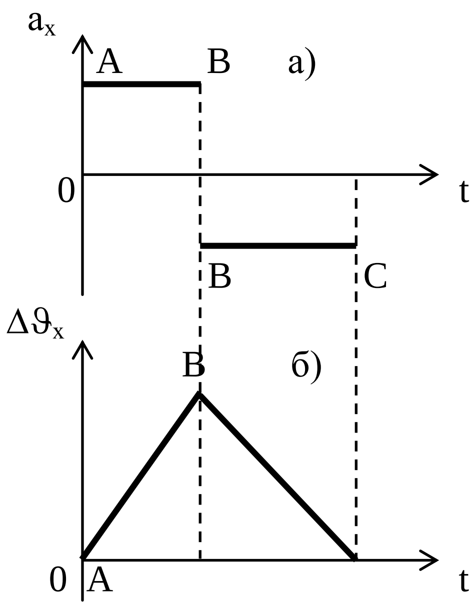

a$_x$
A
B
а)
0
t
B
C
$\Delta\vartheta_x$
B
б)
0
A
t

Рис. 32.

8. Программа спецкурса «Кинематика в графиках»

Пояснительная записка

Главными целями спецкурса, расширяющего и дополняющего знания учащихся по кинематике, являются:

1) выработка у учащихся обобщенных умений и навыков решения графических задач по кинематике на основе общих подходов к их формированию в процессе преподавания учебных предметов: физики и математики;
2) демонстрация общности и вместе с тем специфичности методов исследования, применяемых в этих науках;

В соответствии с целями были определены следующие задачи спецкурса:

1) Показать, что понятие функциональной зависимости с большой полнотой и конкретностью отражает взаимную связь и обусловленность явлений.
2) Продемонстрировать различные способы исследования функциональных зависимостей между величинами, характеризующими процессы, протекающие в окружающей нас природе и технике.
3) Показать преимущества графического метода, особенно при исследованиях процессов, аналитическое описание которых недоступно для учащихся на ранних стадиях процесса обучения.
4) Изучая кинематику, как часть механики, с применением координатного метода приблизить трактовку основных понятий и законов к той, которая принята в науке, развить общий подход к изучению законов движения и повысить уровень систематизации знаний.

Подбор и содержание материала спецкурса предполагает не только анализ графиков кинематических величин для прямолинейного равнопеременного движения, но и демонстрацию методов построения графиков всех кинематических величин по заданному графику одной из них. Часть спецкурса отводится на практикум по решению графических задач.

Предлагаемая программа предполагает глубокую интеграцию с математикой, опору на умения и навыки учащихся, приобретенные ими на уроках алгебры, геометрии, тригонометрии. Интегративный характер данной программы определяется наличием общей предметной области, при этом развитая математическая теория используется для анализа физических явлений.

Используемая взаимосвязь физики и математики в спецкурсе

Таблица 7.

Что нужно из курса математики физике	Что дает физика математике
Вектор и операции над векторами	Примеры векторных величин (**S**, **ϑ**, **a**, **F**) и операций над ними
Система координат	Рациональные приемы выбора системы координат

Линейная функция и ее график	Уравнение координаты $x = x_0 + \vartheta_{0x} t$ и скорости $\vartheta = \vartheta_{0x} + a_x t$, графики движения
Квадратная функция и квадратное уравнение	Уравнение координаты $x = x_0 + \vartheta_{0x} t + a_x t^2/2$, уравнение траектории $y = f(x)$
Радианная мера угла, соотношение между радианом и градусом. Понятие о тригонометрических функциях	Решение задач, помогающих формированию математического языка

Основные методы работы

- объяснительно-иллюстративный;
- репродуктивный (работа по образцу);
- исследовательский (самостоятельные работы учащихся, связанные с построением и анализом графиков).

Формы организации учебной деятельности учащихся

- фронтальная;
- парная (во время взаимоконтроля полученных результатов);
- групповая (выполнение заданий практикума);
- индивидуальная.

Описание планируемых результатов

После изучения спецкурса учащиеся должны:

- владеть графическим способом решения физической задачи, при котором объектом исследования является график, который необходимо построить и/или проанализировать в процессе решения задачи;
- научиться использовать знания, умения и навыки, приобретенные на уроках математики, на уроках физики;
- уметь осознавать смысл задачи, выявлять скрытые (недостающие) данные, определять характер описываемого явления, главные и второстепенные факторы, понимать и конкретизировать содержание главного вопроса, строить графическую модель явления;
- уметь проанализировать полученный результат и оценить его физический смысл.

Тематическое планирование специального курса «Кинематика в графиках» (34 часа)

Раздел 1. Анализ графиков кинематических величин для прямолинейного равнопеременного движения (18 часов)

I. Введение (2 часа)

1. Вводное занятие по следующему плану:
- задачи спецкурса;
- содержание спецкурса;
- организация спецкурса;
- требования к отчету.
2. Прямолинейное равномерное и равнопеременное движение:
- определение;
- чертеж;
- графики $\vartheta(t)$, $S(t)$, $x(t)$.

II. График зависимости ускорения a от времени t (5 часов)

1. Анализ графика зависимости ускорения от времени прямолинейного равноускоренного движения.
2. Решение графических задач с использованием графика ускорения.
3. Анализ графика зависимости ускорения от времени при прямолинейном равноускоренном движении.
4. Решение графических задач с использованием графика зависимости ускорения от времени при прямолинейном равнозамедленном движении.
5. Урок-обобщение на тему «Использование графиков зависимости ускорения прямолинейного равнопеременного движения при решении задач по кинематике»

III. График зависимости скорости тела ϑ от времени t (7 часов)

1. Анализ графика зависимости скорости тела от времени прямолинейного равнопеременного движения. Доказательство того, что тангенс наклона графика скорости к оси времени численно равен ускорению тела.
2. Графический анализ равнопеременного движения в случае $a_x > 0$, $\vartheta_X > 0$ (равноускоренное движение вдоль оси x) по следующей схеме:
- анализ задачной ситуации;
- чертеж;
- график $\vartheta(t)$;
- решение графической задачи.
3. Графический анализ равнопеременного движения в случае $a_x < 0$, $\vartheta_X > 0$ (равнозамедленное движение вдоль оси x) по следующей схеме:
- анализ задачной ситуации;
- чертеж;
- график $\vartheta(t)$;
- решение графической задачи.

4. Графический анализ равнопеременного движения в случае $a_x < 0$, $\vartheta_X < 0$ (равноускоренное движение в направлении противоположном направлению оси x) по следующей схеме:
- анализ задачной ситуации;
- чертеж;
- график $\vartheta(t)$;
- решение графической задачи.
5. Графический анализ равнопеременного движения в случае $a_x > 0$, $\vartheta_X < 0$ (равнозамедленное движение в направлении противоположном направлению оси x) по следующей схеме:
- анализ задачной ситуации;
- чертеж;
- график $\vartheta(t)$;
- решение графической задачи.

IV. График зависимости перемещения тела S от времени t (4 часа)
1. Анализ графика перемещения при прямолинейном равнопеременном движении по ориентации ветвей параболы (или по направлению ускорения тела).
2. Анализ графика перемещения при прямолинейном равнопеременном движении по крутизне параболы (или по величине проекции ускорения тела на ось x).
3. Анализ графика перемещения при прямолинейном равнопеременном движении по тангенсу угла наклона касательной к параболе.
4. Решение графической задачи с использованием графика перемещения при равнопеременном движении по схеме:
- анализ задачной ситуации;
- чертеж;
- график S(t);

Раздел 2. Построение графиков кинематических величин прямолинейного равнопеременного движения по заданному графику скорости, перемещения и ускорения (9 часов)

I. Построение графиков кинематических величин прямолинейного равнопеременного движения по графику перемещения (3 часа)
1. Построение графика зависимости скорости от времени по графику перемещения.
2. Построение графика зависимости ускорения от времени по графику перемещения.
3. Построение графика зависимости пройденного пути от времени по графику перемещения.

II. Построение графиков всех кинематических величин прямолинейного равнопеременного движения по графику скорости (3 часа)

1 Построение графика зависимости перемещения от времени по графику скорости.
2. Построение графика зависимости ускорения от времени по графику скорости.
3. Построение графика зависимости пройденного пути от времени по графику скорости.

III. Построение графиков кинематических величин прямолинейного равнопеременного движения по графику ускорения (3 часа)

1. Построение графика зависимости $\Delta\vartheta(t)$ для движения тела без начальной скорости.
2. Построение графиков перемещения и пути по полученному графику скорости.
3. Самостоятельная работа «Построение графиков зависимостей $\Delta\vartheta(t)$, x(t) и S(t) для движения тела с заданной начальной скоростью»

Раздел 3. Практикум по решению графических задач (3 часа)

1. Решение задач, требующих построения графиков скорости, ускорения и пути по заданному графику перемещения прямолинейного равнопеременного движения.
2. Решение задач, требующих построения графиков перемещения, ускорения и пути по заданному графику скорости прямолинейного равнопеременного движения.
3. Решение задач, требующих построения графиков скорости по заданному графику ускорения равнопеременного прямолинейного движения.

Резерв времени (3 часа)

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения. – М.: Просвещение, 1977.
2. Башарин В.Ф., Горбушин Ш.А. Тезаурус курса физики средней школы. Фонд образовательного стандарта по физике средней школы (понятия, явления, законы, методы познания). («Для тех, кто учит – для тех, кто учится»).– Ижевск: Издательство Удмуртского университета, 1996.245с.
3. Богов А.В., Галеев И.Г., Галимов Д.Г., Тимеркаев Б.А. Подготовка к тестированию по физике. Казань: Изд-во «Экоцентр», 2003, 252 с.
4. Бударский А.И. Какой урок можно считать современным // Народное образование. 1975. № 1,2.
5. Вопросы методики и психологии формирования физических понятий / Под ред. А.В.Усовой. Челябинск, 1970. Т.1.
6. Временный государственный стандарт. Общее среднее образование. Физика / Под редакцией Ю.И.Дика. М.: Институт общеобразовательной школы РАО, 1993.
7. Графическое изображение прямолинейного равнопеременного движения. Методическая разработка. Составитель: А.И.Фишман, Казань, КГУ, 1982. 32 с.
8. Гусев В.А. и др. Изучение величин на уроках математики и физики в школе / Гусев В.А., Иванов А.И., Шебалик О.Д.– М.: Просвещение, 1981.79 с., ил.
9. Гусев В.А., Мордкович А.Г. Математика: Справ. материалы: Кн. для учащихся, - 2-е изд. М.: Просвещение, 1990. 416 с.: ил.
10. Игропуло В.С., Вязников Н.В. Физика: Алгоритмы, задачи, решения: Пособие для всех, кто изучает и преподает физику. – М.: Илекса, Ставрополь: Сервисшкола, 2002. 592 с.
11. Кабардин О.Ф. и др. Задания для контроля знаний учащихся по физике в средней школе: Дидактический материал. Пособие для учителя / О.Ф.Кабардин, С.И. Кабардина, в,А.Орлов. М.: Просвещение, 1983. 142 с.
12. Каменецкий С.Е., Орехов В.П. Методика решения задач по физике в средней школе. М.: Просвещение, 1987
13. Кирик Л.А. Самостоятельные и контрольные работы по физике. Разноуровневые дидактические материалы. 9 класс. Механика Издание 2, «Илекса», «Гимназия», Москва Харьков, 1998. 128 с.
14. Клинцов В.И.. Определения и законы в элементарной физике. (Механика. Молекулярная физика): Учеб. пособие / Рлд ред. Г.Д.Юдина. – Обнинск: НПП РИТИС, 1991. 48 с., ил. – (Физико-математическая библиотека абитуриента, Выпуск 3.)
15. Методика решения задач по физике. Кобушкин В.К. Изд-во ЛГУ, 1972. 247 с.

16. Оноприенко О.В., Смирнов П.М. Обучение навыкам самоконтроля при решении задач.// Физика в школе. №2. 1983. с. 30-34.
17. Оценка качества подготовки выпускников средней (полной) школы по физике / Сост. В.А. Коровин, В.А Орлов. М.: Дрофа, 2001. 192 с
18. Подласый И.П. Педагогика: 100 вопросов – 100 ответов: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Изд-во ВЛАДОС-ПРЕСС. 2001. 368 с.
19. Разумовский В.Г., Гуревич А.Е. Задания для контроля знаний учащихся по физике. VIII кл. Механика. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 80 с., ил.
20. Тезаурус учителя физики (психолого-педагогические термины): Авторы-составители А.Р.Камалеева, Т.В.Куренева, Казань, изд-во ООО «Вестфалика», 2005. 20с.
21. Теория и методика обучения физике в школе: Частные вопросы: Учеб.пособие для пед.вузов / С.Е.Каменецкий, Н.С.Пурышева, Т.И.Носова и др.; Под ред.С.Е.Каменецкого. М.: Издательский центр «Академия», 2000. 384 с.
22. Теория и методика обучения физике в школе: Общие вопросы: Учеб.пособие для пед.вузов / С.Е.Каменецкий, Н.С.Пурышева, Т.И.Носова и др.; Под ред.С.Е.Каменецкого. М.: Издательский центр «Академия», 2000. 368 с.
23. Физика в таблицах. 7-11 кл.: Справочное пособие / Авт.-сост.В.А.Орлов.- 3-е изд., стереотип.- М.: Дрофа, 2000. 64 с.: ил.
24. Шаталов В.Ф. и др. Опорные конспекты по кинематике и динамике: Книга для учителя: Из опыта работы / Шаталов В.Ф., Шейман В.М., Хаит А.М.. М.: Просвещение, 1989. 143 с.