МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ

Выполнение контрольных работ по дискретной математике

Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине «ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»

Набережные Челны
2018

Выполнение контрольных работ по дискретной математике Методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине «Дискретная математика»/ Хузятова Л.Б., Гибадуллина Г.Р. – Набережные Челны: Изд.-полигр.центр НЧИ К(П)ФУ, 2018. – 55 с.

Методические указания разработаны на кафедре «Информационные системы» и предназначены для самостоятельной работы студентов дневного и заочного отделения по курсу «Дискретная математика» основной профессиональной образовательной программы направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.04 Программная инженерия. В работе даны примеры решения типовых задач по основным разделам изучаемого предмета – отношения и операции, теории графов.

Рецензент: к.т.н., доцент Хамадеев Шамиль Актасович

Печатается по решению Учебно-методической комиссии отделения информационных технологий и энергетических систем Набережночелнинского института (филиала) ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Содержание.

1. Отношения и операции

№ 1.1

Пусть M равно {2,5,-7,9,12,-15}. Составить матрицы и списки пар отношений R_1, $R_2 \in M^2$.

Если R_1 – «иметь сумму больше десяти», R_2 – «иметь разность больше нуля».

Решение:

Список пар – это перечисление пар, для которых это отношение выполняется. Матрица – это квадратная матрица, по вертикали и горизонтали которой перечисляются элементы множества и в которой элемент C_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен единице, если между соответствующими элементами имеет место отношение R, или 0, если оно отсутствует.

R_1*={ (2,9), (2,12), (5,9), (5,12), (9,9), (9,12), (12,12) }.*

R_2*={ (2,-7), (2,-15), (5,2), (5,-7), (5,-15), (-7,-15), (9,2), (9,5), (9,-7), (9,-15), (12,2), (12,5), (12,-7), (12,9), (12,-15) }.*

№ 1.2

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицы отношений R1, R2, R3⊆M*M, если R1 – «быть остатком от деления на 3», R2 – «в сумме давать 9», R3 – «произведение должно быть больше 7».

Решение:

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	1	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1	1	1
6	0	1	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1

№ 1.3

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Составить матрицу отношения R_1, $R_2 \subseteq M \times M$ если

1. R_1 - «быть наибольшим простым множителем для четных чисел»(нельзя делить число на само себя и единиц).
2. R_2 - «быть наименьшим простым множителем для нечетных чисел» (нельзя делить число на само себя).

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.

Отношения, определенные на конечных множествах, можно задать матрицей – бинарному отношению $R \subseteq M x M$, где $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение R, или нулю, если оно отсутствует.

Рассмотрим случай 1, где R означает «быть наибольшим простым множителем для четных чисел». Отношение задается так: R={(a,b), b/a, где а наибольший простой множитель (НПМ)}. Т.е., например, для b=8, b/a=8/2=4 8/4=2, т.е. получаем, что НПМ для 8 является 4, поэтому на пересечении 4 и 8 ставим 1.

1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рассмотрим случай 2, где R означает «быть наименьшим простым множителем для нечетных чисел». Отношение задается так: R={(a,b), b/a, где а наименьшим простой множитель (НПМ)}. Т.е., например, для b=9, b/a=9/3=3, т.е. получаем, что НПМ для 9 является3, поэтому на пересечении 3 и 9 ставим 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

№ 1.4

Составить матрицу отношений, заданных на системе множеств α(F), где F={ 1,2,3,4 }; R – «пересекаться с …».

Решение:

Матрица отношений – это квадратная матрица, по вертикали и горизонтали которой перечисляются элементы множества.

α(F)={ {∅}, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4} }.

R	∅	*1*	*2*	*3*	*4*	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*2,3*	*2,4*	*3,4*	*1,2,3*	*1,2,4*	*1,3,4*	*2,3,4*	*1,2,3,4*
∅	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
2	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
3	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
1,2	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1,3	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1,4	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
2,3	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2,4	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3,4	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,2,3	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,2,4	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,3,4	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2,3,4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1,2,3,4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

№1.5

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицы отношений R_1, R_2, $R_3 \subseteq M \times M$, если

R_1 – «иметь один и тот же остаток от деления на 7»;

R_2 –«быть равным»;

R_3 – «быть не меньше»

Решение: R_1 -«иметь один и тот же остаток от деления на 7»

R_1	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

На пересечении i-ой строки и j-ого столбца ставим «1», если отношение R_1 выполняется и «0» - если невыполняется.
Например: $а_1$=1; $в_2$=2

$$\frac{1}{7} \neq \frac{2}{7} =\rangle C_{1,2} = 0$$

Аналогично R_2 и R_3:

R_2	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

R_3	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1

№ 1.6

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если R={(a,в) (a+1-в) – четное}

Решение:

R	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0

Замечание: условно полагаем, что 0 – четное число

№ 1.7

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если:
R={(а,в) : (а+в) – нечетное}
Решение:

R	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	1	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	1	0	1	0

№ 1.8

Пусть M={1,2,3,4,5,6}. Составить матрицу отношения R_1, R_2 $\subseteq$ M x M если

1. R_1 {(a, b): a+b делитель a*b}.
2. R_2 {(a,b): b/a делитель a+b}.

Решение:
Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.

Отношения, определенные на конечных множествах, можно задать матрицей – бинарному отношению $R \subseteq MxM$, где $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ соответствует квадратная матрица порядка n, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i строки и j столбца, равен 1, если между a_i b a_j имеет место отношение R, или нулю, если оно отсутствует.

Рассмотрим случай 1. R={(a,b): a*b/a+b}. Например, получаем a=2,b=2, тогда 2*2/2+2=1, т.е. у данного отношения получаем целый результат, значит, отношение выполняется. На пересечении 2 и2 ставим 1.

1.

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	1

2. Рассмотрим случай 1. R={(a,b): (a+b)/(b/a)}. Например, получаем a=1,b=2, тогда (2+2)/(2/2)=4, т.е. у данного отношения получаем целый результат, значит, отношение выполняется. На пересечении 1 и2 ставим 1.

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

№ 1.9

Из данных примеров выбрать те, в которых выполняется данное отношение:

R_1 – «быть строго больше».

R_2 – «иметь четную сумму».

R_3 – «иметь общий четный делитель».

Примеры: (1,3), (2,5), (8,3), (9,5), (7,9), (3,4), (2,4), (5,5), (3,6), (7,3), (8,2), (3,9), (1,7), (2,6), (1,5).

Решение:

R_1={ (8,3), (9,5), (7,3), (8,2) }.

R_2={ (1,3), (9,5), (7,9), (5,5), (7,3), (8,2), (2,4), (3,9), (1,7), (2,6), (1,5) }.

R_3={ (2,4), (8,2), (2,6) }.

№ 1.10

Пусть А – алфавит (множество всех букв в русском алфавите). Задано множество М= {а, б, в,г,д,е,и,к,л} – подмножество множества А. Задать матрицей следующее отношение:

R= {(x,y) : x- согласная, y – гласная}

Решение:

По определению: $C_{I,J}=\begin{cases} 1, \text{ если } xRy; \\ 0 \text{ – в противном случае} \end{cases}$

Тогда имеем:

R	а	б	в	г	д	е	и	к	л
а	0	0	0	0	0	0	0	0	0
б	1	0	0	0	0	1	1	0	0
в	1	0	0	0	0	1	1	0	0
г	1	0	0	0	0	1	1	0	0
д	1	0	0	0	0	1	1	0	0
е	0	0	0	0	0	0	0	0	0
и	0	0	0	0	0	0	0	0	0
к	1	0	0	0	0	1	1	0	0
л	1	0	0	0	0	1	1	0	0

№ 1.11

Пусть M={1,2,3,4,5,6,7}. Составить матрицу отношения R, если: R={(а,в):(а+1) – делитель (а+в)}

Решение:

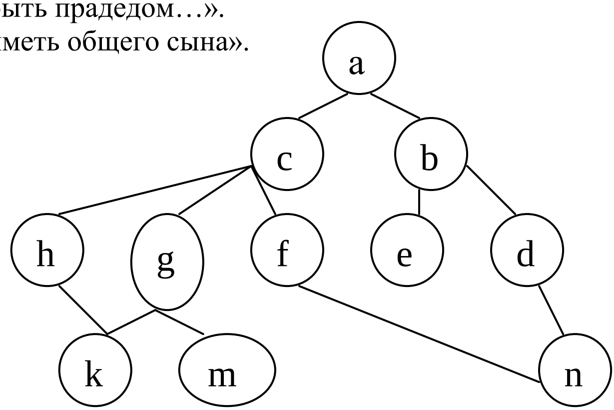
R	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	0	1
3	1	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0

(а+1) – делитель (а+в) $=\rangle$ - это значит, что $\left(\dfrac{a+в}{a+1}\right)$- целое число

№ 1.12

На рисунке представлено множество элементов. Задать списком пар отношения R_1, R_2, R_3, R_4. Если

R_1 – «быть внуком…».
R_2 – «быть двоюродными братьями».
R_3 – «быть прадедом…».
R_4 – «иметь общего сына».



Решение:

Список пар – это перечисление пар, для которых это отношение выполняется.

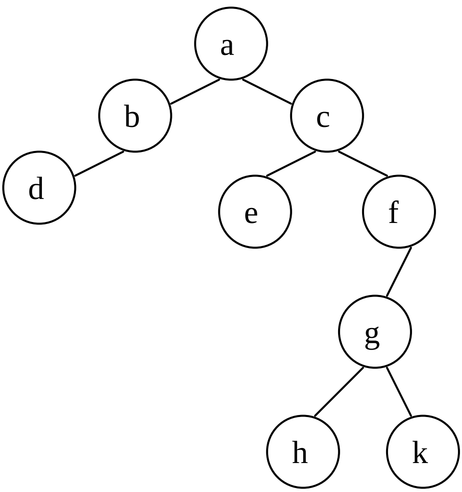
R_1={ (h,a), (g,a), (f,a), (e,a), (d,a), (n,b), (n,c), (m,c), (k,c) }.
R_2={ (f,e), (f,d), (g,e), (g,d), (h,e), (h,d), (k,m)}.
R_3={ (a,k), (a,m), (a,n) }.
R_4={ (h,g), (f,d) }.

№ 1.13

По данным отношениям R_1, R_2, R_3, R_4 составить структуру множества элементов. Если R_1 – «быть родными братьями», R_2 – «быть дедом…», R_3 – «быть дядей…», R_4 – быть прадедом…».

R_1={ (b,c), (e,f), (h,k) }.
R_2={ (a,d), (c,g), (f,h), (f,k), (a,f), (a,e) }.
R_3={ (c,d), (b,e), (b,f), (e,g) }.
R_4={ (a,g), (c,h), (c,k) }.

Решение:



№ 1.14

Привести пять примеров пар отношений, для которых выполняются все три отношения, указанные ниже:
R_1 – «иметь общий нечетный делитель, лежащий в интервале (1,10)».

R_2 – «иметь четную сумму, лежащую в интервале (0,30)».
R_3 – «2a – делитель (a+b), если $R=\{(a,b):a,b\in M\}$».

Решение:

R_1, R_2, R_3={ (3,15), (7,21), (3,9), (9,9), (3,3), (5,5) }.

2. Декартовое произведение, функции, правые и левые области отношений

№ 2.1

Выписать все элементы декартового произведения множеств А и В, если

А={a,в,c,d,e}
В={1,2,3}

Решение:

Декартовое произведение множеств А и В представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы $\in$ А, а вторые – В:

А х В = {(a,1), (a,2), (a,3), (в,1), (в,2), (в,3), (c,1), (c,2), (c,3), (d,1), (d,2), (d,3), (e,1), (e,2), (e,3)}

№2.2

Найти декартовое произведение множеств А и В, если A={ a,b,d },
B={ f,d,e }.

Решение:

Декартово произведение множеств A и B представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы принадлежат множеству A, а вторые элементы принадлежат множеству B, следовательно,
$A\times B$={ (a,f), (a,d), (a,e), (b,f), (b,d), (b,e), (d,f), (d,d), (d,e) }.

№2.3

Найти все элементы множества F, если A={ a,b,c,k },
B={ b,d,e,h },
C={ e,f,h,k }, U={ a,b,c,d,e,f,h,k }, $F=(U\setminus A)\cup(A\cap(B\cup C))$.

Решение:

F=({ a,b,c,d,e,f,h,k }\{ a,b,c,k })$\cup$*({ a,b,c,k }*$\cap$*({ b,d,e,h }*$\cup$*{ e,f,h,k }))={ d,e,f,h }*$\cup$*({ a,b,c,k }*$\cap$ $\cap$*{ b,d,e,f,h,k })={ d,e,f,h }*$\cup$*{ b,k }={ b,d,e,f,h,k }.*

№ 2.4

Выписать все элементы декартового произведения множество А и В, если:

А={а,в,с}; В={1,2,3,4,5}

Решение:

декартовое произведение множеств А и В представляет собой множество всевозможных упорядоченных пар, в которых первые элементы $\in$ А, вторые – В.

А х В = {(а,1), (а,2), (а,3), (а,4), (а,5), (в,1), (в,2), (в,3), (в,4), (в,5), (с,1), (с,2), (с,3), (с,4), (с,5)}.

№ 2.5

Выписать все элементы декартового произведения множество АхВхС, если:

А={1,2}, В={a,b,c}, С={k,l,m}.

Решение: декартовым произведением АхВхС называется множество:

АхВхС={(m_A, m_B, m_C) / $m_A \in$ A, $m_B \in$ B, $m_C \in$ C}

Элементами декартового произведения АхВхС являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из 3-х элементов, причем первый элемент $\in$ множеству M_A, второй – M_B, третий – M_C.

Имеем:

АхВхС={(1,a,k), (1,a,l), (1,a,m), (1,в,k), (1,в,l), (1,в,m), (1,c,k), (1,c,l), (1,c,m), (2,a,k), (2,a,l), (2,a,m), (2,в,k), (2,в,l), (2,в,m), (2,c,k), (2,c,l), (2,c,m)}

№ 2.6

Выписать все элементы декартового произведения множеств А и В, если А={1,2,3}, В={а,с,е}

Решение:

А*В={(1;а),(1;с),(1;е),(2;а),(2;с),(2;е),(3;а),(3;с),(3;е)}

№ 2.7

Пользуясь методом математической дедукции написать все элементы декартового произведения множеств M_1 x M_2 x M_3 … x x $M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i$, порождающей процедурой.

Решение: Элементами декартового произведения M_1 x M_2 x M_3 … x M_n являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причем первый элемент принадлежит множеству M_1 , второй – множеству M_2, n-ый элемент – множеству M_n. Таким образом, имеем:

$M=\{(m_{i1}, m_{i2}, \dots m_{in})/m_{i1} \in M_1, m_{i2} \in M_2, \dots, m_{in} \in M_n\}$, где $i=\overline{1,n}$

№ 2.8

Выписать все элементы множества M^2, если M={а,в,с}

Решение: M^2 - вторая степень множества M.

По определению имеем:

M^2=M x M ={а,в,с} x {а,в,с}={(а,а), (а,в), (а,с), (в,а),(в,в), (в,с), (с,а), (с,в), (с,с)}.

M^2 часто также называют декартовым квадратом множества M.

№ 2.9

Найти правую и левую область отношения:

R={(1,2), (2,1), (3,1), (1,3), (3,5)}

Решение: Левой областью $Д_l$ отношения R называется множество всех первых элементов пар, принадлежащих R, правой областью $Д_r$ – множество всех вторых элементов этих же пар.

Следовательно, имеем:

$Д_l$={1,2,3}, $Д_r$={2,1,3,5}

№ 2.10

Найти правую и левую область отношения

R={(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)}

Решение:

$Д_r$={2,3,1), $д_l$={1,2,3}

№ 2.11

Найти правую и левую область отношения:

R={(a,b), (c,d), (e,f)}

Решение:

$Д_R$={в,d,f}, $Д_l$= {a,c,e}

№ 2.12

Найти правую и левую область отношения:

R={(1,a), (2,в),(3,c),(4,d), (5,f)}

Решение:

$Д_R$={a,в,c,d,f}; $Д_L$={1,2,3,4,5}

№ 2.13

Найти правую и левую область отношения:

R={(a,1), (2,e), (c,3), (g,9), (7,e), (5,k)}

Решение: [см. № 2.11]

$Д_R$ ={1,e,3,9,k}; $Д_l$={a,2,c,g,7,5}

Следовательно, имеем в областях отношения R двухсортные множества (множества областей состоят как из цифр, так и из букв).

№ 2.14

Является ли отношение

R= {(a,2), (в,3), (c,4), (d,5)},

определенное на декартовом произведении множеств:

A={a,в,c,d}, B={2,3,4,5} функцией?

Решение: Поскольку каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B, то можно утверждать, что данное отношение является функцией.

№ 2.15

Является ли отношение R:

R= {2,а), (1,а), (3,в), (4,в), (5,с),

определенное на декартовом произведении множеств:

A={1,2,3,4,5}, B={а,в,с} функцией?

Решение: Да, т.к. каждому элементу из множества А соответствует единственный элемент множества В, то можно утверждать, что данное отношение является функцией (если множество А является областью определения функции, а множество В – областью значений, но не наоборот).

№ 2.16

Является ли отношение R:

R={(1,а), (1,в), (3,d), (5,с), (5,d),

определенное на декартовом произведении множеств

A={1,3,5}, B={а,в,с,d} функцией?

Решение: Нет, т.к. существуют такие элементы множества А, которым соответствуют более одного элемента из множества В: например, (1,а) и (1,в); (5,с) и (5, d).

№ 2.17

Пусть отношение R задано на декартовом произведении множеств Р и N, где Р- множество всех паспортов некоторой страны, а N – множество всех номеров этих паспортов, служащих для идентификации.

Является ли отношение R функцией?

Ответ: Данное отношение является функцией, т.к. каждому паспорту однозначно соответствует его идентификационный номер.

№ 2.18

Пусть множество R задано на декартовом произведении множеств К и Р: КxР, где К – множество ключевых слов для поиска в Интернете, а Р – множество Web-страниц. Пара (x,y) принадлежит R, только если ключевое слово x содержится на странице y. Является ли R функцией?

Ответ: Не является, т.к. одно и то же ключевое слово может содержаться на различных Web-страницах $=\rangle$ условие однозначности не выполняется.

№ 2.19

В водоёме два пескаря, два карася и одна щука. Зная, что карась и щука – хищные рыбы (щука может съесть карася), выяснить бинарное отношение «R – быть съеденным» (т.е. быть пищей) с помощью матрицы.

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

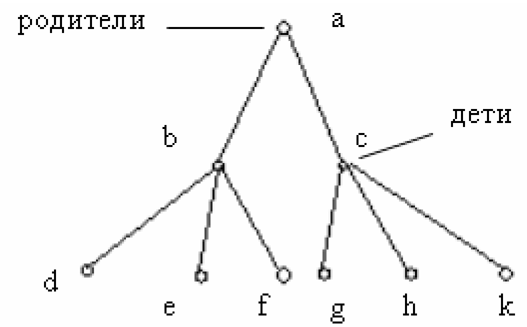
Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве M.

Т.к. пескарь не является хищной рыбой, он себя не ест, и караси и щуки тоже не едят себя, но щука ест карася, а карась щуку есть не может, то получаем матрицу бинарного отношения.

	пескарь	пескарь	карась	карась	щука
пескарь	0	0	1	1	1
пескарь	0	0	1	1	1
карась	0	0	0	0	1
карась	0	0	0	0	1
щука	0	0	0	0	0

№ 2.20

Для указанных ниже отношений привести примеры пар, для которых выполняются отношения. Отношения заданы на множестве элементов структуры гносеологического дерева.



Следующие отношения:

R_1 – «быть родителем»

R_2 – «быть внуком»

R_3 – «быть сыном (дочерью) »

R_4 – «быть братом или сестрой»

R_5 – «быть дядей или тетей»

R_6 – «быть двоюродными сестрами или братьями»

Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве М.

Опр. Задать отношение списком пар означает перечислить все пары элементов, для которых это отношение выполняется.

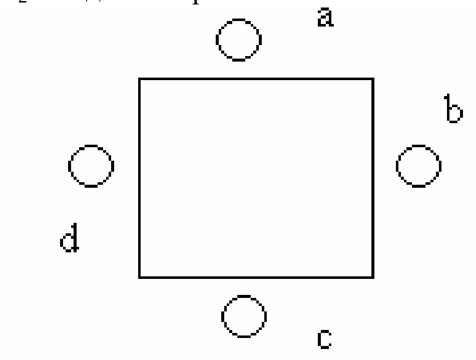
1. R_1 = {(a, b), (a, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, g), (c, h), (c, k)}
2. R_2 = {(d, a), (e, a), (f, a), (g, a), (h, a), (k, a)}
3. R_3 = {(b, a), (c, a), (d, b), (e, b), (f, b), (g, c), (h, c), (k, c)}
4. R_4 = {(b, c), (d, e),(d, f), (e, f), (e, d), (f, d), (f, e), (g, h), (g, k), (h, g), (h, k), (k, g), k, h) }
5. R_5 = {(b, g), (b, h),(b, k),(c, d),(c, e),(c, f)}
6. R_6 = {(d, g), (d, h),(d, k),(e, g),(e, h),(e, k),(f, g), (f, h),(f, k), (g, d), (g, e), (g, f), (h, d), (h, e), (h, f), (k, d), (k, e), k, f)}

№ 2.21

Друзья сидят за квадратными столом. Привести примеры пар, для которых следующие отношения выполняются:

R_1 – быть соседом

R_2 – сидеть напротив



Решение:

Опр. Отношение – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

Опр. Бинарное отношение – используется для определения каких-то взаимосвязей, которыми характеризуются пары элементов в множестве M.

Опр. Задать отношение списком пар означает перечислить все пары элементов, для которых это отношение выполняется.

1. $R_1 = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (d, c), (c, d), (a, d), (d, a)\}$
2. $R_2 = \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$

3. Свойства отношений

№ 3.1

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей: R = {(a,b): a – сын b}?

Решение:

1) Не рефлексивно, антирефлексивно, так как ни для каких a не выполняется: a – сын a;

2) Не симметрично, антисимметрично, поскольку ни для каких $a \neq b$ не выполняется: a – сын b и b – сын a;

3) Не транзитивно, так как если a – сын b и b сын – c,то a – не сын c.

№ 3.2

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей:
R = {(a,b): a живет в одном горде с b}?

Решение:

1) Рефлексивно, не антирефлексивно, так как aRa для всех a;

2) Симметрично, поскольку для любых a, b, если aRb, то bRa;

3) Не антисимметрично, так имеет место aRb и bRa для $a \neq b$;

4) Транзитивно, поскольку для всех a, b, c, если aRb и bRc, то aRc.

№ 3.3

Каковы свойства отношений, заданных: на множестве людей:
R = {(a,b): a – брат b}?

Решение:

1) Не рефлексивно, антирефлексивно из-за очевидного отсутствия aRa для всех a;

2) Не симметрично, так как в общем случае между братом a и сестрой b имеет место aRb, но не bRa;

3) Не антисимметрично, так как если a и b – братья, то aRb и bRa, но $a \neq b$;

4) Транзитивно, если называть братьями людей, имеющих общих родителей (отца и мать).

№ 3.4

Каковы свойства отношений, заданных на множестве точек окружности, лежащих на дуге этой окружности. R- быть соседней точкой.

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a \in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a \in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» - антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. симметрично, т.е. aRb влечет bRa, т.е. a и b соседние точки.
2. не антисимметрично, т.к. aRb и bRa не влечет a=b, т.е. a и b не одни и те же точки.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не может быть соседней точкой для самой себя.
4. антирефлексивно, т.к не может быть, чтобы он был сам себе соседом.
5. не транзитивно, т.к aRb и bRc не влечет за собой aRc, т.е. a и c не являются соседними точками.

№ 3.5

Пусть дано уравнение $y=x^2$. Каковы свойства отношения R – «являться решением уравнения», т.е xRy.

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈

∈M (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b (a≠b) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» - антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. xRy и yRx не будут иметь одинаковые корни.
2. не антисимметрично, т.к. xRy и yRx не влечет x=y.
3. не рефлексивно, т.к. xRx не имеет место в данном уравнении.
4. антирефлексивно, т.к. ни для какого x не выполняется xRx.
5. не транзитивно, т.к. xRy , yRf не влечет за собой xRf, т.е. может быть $f=y^3$.

№ 3.6

В водоёме плавают пескари и караси. Зная, что караси – хищные рыбы, выяснить свойства бинарного отношения R – «быть съеденным» (т.е. быть пищей).

Решение:

Опр. Свойством бинарного отношения являются:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈

$\in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a \in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a \neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

R={(a,b): b может съесть a }

1. не симметрично, т.к. aRb не влечет bRa, т.е. карась может съесть пескаря, а пескарь карася – нет.
2. антисимметрично, т.к aRb и bRa не влекут a=b, т.к., например, пескарь не может съесть пескаря.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. пескарь не может съесть пескаря.
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
5. не транзитивно, т.к. aRb и bRc, т.к. например, карась может съесть пескаря, а пескарь съест водоросли, а карась не может есть водоросли.

№ 3.7

Каковы свойства отношений, заданных на множестве действительных чисел. R – быть натуральным логарифмом, т.е. a = ln b (b>1 и $b \neq 0$).

Решение:

Опр. Свойства бинарных отношений:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a \in$

$\in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).
в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).
г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b (a≠b) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).
д). R – транзитивно, если aRb и bRc влечет aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. для любого a и b a = ln b не влечет b = ln a.
2. не антисимметрично, т.к. aRb и bRa не влекут a=b, например, не выполняется одновременно 2=ln3 и 3=ln2.
3. не рефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. a $\sqrt[3]{c}$ ln a
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
5. транзитивно, т.к. aRb и bRc влечет aRc, a=ln b, b=ln c, то a=ln (ln c), например, если 2=lne^2 и $e^2 = \ln(e^{e^2})$, то

$$2 = \ln(\ln(e^{e^2})) = \ln(e^2 \cdot \ln e) = \ln e^2 + \ln(\ln e) = 2\ln e = 2\,.$$

№ 3.8

Каковы свойства отношения R – быть кубом, т.е. $b=a^3$, заданного на множестве натуральных чисел?

Решение:
Опр. Свойства бинарных отношений:
а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого a∈
∈M (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).
б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, a∈M, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).
в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влекут a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a\neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).
д). R – транзитивно, если aRb и bRc влекут aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, т.к. $b=a^3$ не влечет $a=b^3$.
2. не антисимметрично, т.к. $b=a^3$ и $a=b^3$ не влекут a=b.
3. не рефлексивно, т.к. $a\neq a^3$.
4. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется, т.е. $a\neq a^3$.
5. не транзитивно, т.к. $b = a^3$ и $c = b^3$ не влекут $c = a^3$, т.к. если $b = a^3$ и $c = b^3$, то $a^9=c$.

№ 3.9

Каковы свойства отношений, заданных на множестве натуральных чисел N, если R – «быть строго больше», то есть R={(a,b): a>b}.

Решение:

Свойства бинарных отношений:

1)R – рефлексивно, если имеет место aRa для любых $a\in M$.

2)R – антирефлексивно, если ни для каких $a\in M$ не выполняется aRa.

3)R – симметрично, если aRb влечет bRa.

4)R – антисимметрично, если aRb и bRa влекут b=a, то есть ни для каких различающихся элементов a и b не выполняется одновременно aRb и bRa.

5)R – транзитивно, если aRb и bRc влекут за собой aRc.

А) нерефлексивно, антирефлексивно, так как ни для какого $a\in N$ не выполняется a>a, например, не выполняется 2>2.

Б) несимметрично, так как a>b не влечет за собой b>a, например, 3>2, но не выполняется 2>3.

В) не антисимметрично, так как не выполняется aRb и bRa, если a=b, например, не выполняется 2>2, но 2=2.

Г) транзитивно, так как если a>b и b>c, то a>c, например, если 5>3 и 3>1, то 5>1.

№ 3.10

В вооруженных силах рота состоит из трех взводов, а взвод из трех отделений, в каждом отделении по 11 солдат и командир-сержант, а взводом лейтенант, ротой капитан. Определить свойства бинарного отношения R – быть командиром роты.

Решение:

Опр. Свойством бинарного отношения являются:

а). R – рефлексивно, если имеет место aRa для любого $a\in$ $\in M$ (Например, отношение «жить в одном городе» - рефлексивно).

б). R – антирефлексивно, если ни для какого a, $a\in M$, не выполняется aRa. (Например, отношение «быть сыном» - антирефлексивно).

в). R – симметрично, если aRb влечет bRa (Например, отношение «работать на одной фирме» - симметрично).

г). R – антисимметрично, если aRb и bRa влечет a=b, т.е. ни для каких различающихся элементов a и b ($a\neq b$) не выполняется одновременно aRb и bRa.(Например, отношение «быть сыном», «быть начальником» антисимметрично).

д). R – транзитивно, если aRb и bRc влекут aRc (например, «быть моложе», «быть братом» - транзитивно).

1. не симметрично, антисимметрично, т.к. aRb влечет bRa, т.к. капитан может командовать лейтенантом, а лейтенант капитаном – нет.
2. не рефлексивно, т.к. капитан не может командовать сам собой.
3. антирефлексивно, т.к. aRa не выполняется.
4. транзитивно, т.к. если капитан может командовать лейтенантом, а лейтенант – сержантом, то капитан может командовать сержантом.

№ 3.11

Охарактеризовать отношения, заданные на множестве натуральных чисел:

а) R1 – быть строго меньше

б) R2 – иметь общий делитель

в) R3 – быть не меньше

Решение

а) R1 не рефлексивно, антирефлексивно, не симметрично, не антисимметрично, транзитивно.

б) R2 рефлексивно, не антирефлексивно, симметрично, не антисимметрично, не транзитивно (точнее, не всегда транзитивно).

в) R3 рефлексивно, не антирефлексивно, не симметрично, антисимметрично, транзитивно.

№ 3.12

Каковы свойства отношения, заданного на множестве натуральных чисел N, если R – «быть не меньше».

Решение: R – « быть не меньше» $=\rangle$ математически это запишется как $\geq$.

1) рефлексивно, не антирефлексивно, т.к. выполняется $a \geq a$ для $\forall\, a \in N$;

2) не симметрично, т.к. например $5 \geq 3$, но не верно обратное ($3 \geq 5$).

3) антисимметрично, т.к. если выполняется одновременно aRв и вRa, то $=\rangle$ а=в.

4)транзитивно, т.к. если $a \geq в$ и $в \geq c$, то $a \geq c$.

В справедливости некоторых из вышеуказанных свойств можно наглядно убедиться, построив матрицу для данного отношения и помня **следующие правила:**

1. Главная диагональ матрицы <u>рефлексивного</u> отношения содержит только единицы.

2. Главная диагональ матрицы <u>антирефлексивного</u> отношения содержит только нули.

3. В матрице <u>симметричного</u> отношения $C_{i,j} = C_{j,i}$, т.е. матрица симметрична относительно главной диагонали.

4. В матрице <u>антисимметричного</u> отношения отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали.

Например, построив для данного отношения матрицу, предварительно задав произвольное количество элементов множества N, убедимся в справедливости вышеуказанных свойств.

R	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1

Пусть $A \subseteq N$ и $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Тогда отношение R:

1) На главной диагонали стоят единицы $= \rangle$ рефлексивно, не антирефлексивно;
2) $C_{i,j} \neq C_{j,I} = \rangle$ не симметрично;
3) отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали $= \rangle$ антисимметрично
4) транзитивность данного отношения находим по определению.

№ 3.13

Каковы свойства отношения R – «быть кратным», заданного на множестве натуральных чисел N.

Решение: «быть кратным» - значит, делиться нацело. Если aRв, то в делится на а нацело.

1) рефлексивно, не антирефлексивно, т.к. а/а=1 для ¥a∈N;

2) не симметрично, антисимметрично, т.к. а/в≠в/а, где а≠в;

3) транзитивно, т.к., если $\frac{c}{в}, \frac{в}{a} \in N$, то $\frac{c}{a} = \frac{в}{a} \cdot \frac{c}{в} \in N$.

Для проверки приведем матрицу данного отношения (см. рис.).

R	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1

№ 3.14

Задать списком и матрицей, а также графически (орграфом) следующее бинарное отношение R.

Дж. фон Нейман (1903-1957) предложил блок-схему ЭВМ последовательного действия, которая состоит из множества устройств M:

M:= {a, в, c, d, e},

где a – устройство ввода;

b – арифметическое устройство (процессор);

c – устройство управления;

d – запоминающее устройство;

e – устройство вывода.

Рассмотреть информационный обмен между устройствами m_i и m_j , которые находятся в отношении R, если из устройства m_i поступает информация в устройство m_j.

Решение:

Данное бинарное отношение R определяет 14 пар элементов (задание отношения R списком):

R= {(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,e), (b,d), (c, a), (c,b), (c,d), (c,e), (d,b), (d,c), (d,e), (e,c)}

Матрица данного отношения имеет вид:

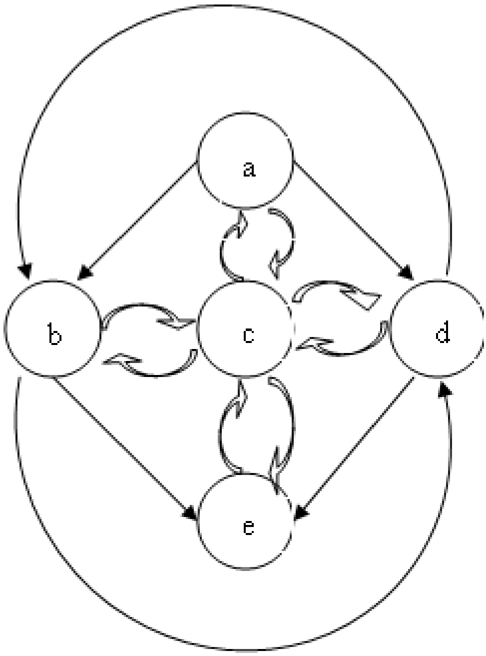


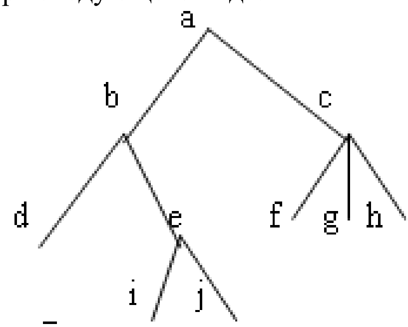
Рисунок 1-- Граф G={M,R}, задающий это бинарное отношение R

R	a	b	c	d	e	f	g
a	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	0	0	0	0
e	1	1	1	0	0	0	0
f	1	0	1	0	0	0	0
g	1	0	0	1	0	0	0

Граф G={M,R}, задающий это бинарное отношение R, представлен на рис. 1, где вершины обозначены кружками, а дуги –ориентированными линиями:

№ 3.15

Задана структура следующего вида:



Выписать пары, для которых выполняются отношения:

А) R1 – быть дедом

Б) R2 – быть дядей

В) R3 – быть двоюродным братом

Решение:

А) R1={(a,d);(a,e);(a,f);(a,g);(a,h);(b,i);(b,j)}

Б) R2={(b,f;);(b,g);(b,h);(c,d);(c,e);(d,i);(d,j)}

В)R3={(d,f);(d,g);(d,h);(e,f);(e,g);(e,h);(f,d);(f,e);(g,d);(g,e);(h,d);(h,e)}

№ 3.16

Каковы свойства отношения R – «быть частью целого», заданного на множестве элементов структуры? Задать данное отношение матрицей.

Решение:

Структура, задающая отношениеR свидетельствует о том, что целое a состоит из 3-х частей: в, с и d, которые в свою очередь разделены на части e, f и д.

Зададим данное отношение матрицей:

1) не рефлексивно, антирефлексивно, т.к. aRa не имеет смысла (в матрице: на главной диагонали – нули);

2) не симметрично, т.к. если верно aRв, то не верно вRa (матрица не симметрична);

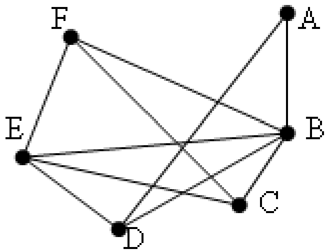
3) не антисимметрично, т.к. не выполняется aRв $\rightarrow$ вRa (для $\forall$ а, в) (в матрице: отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали);

4) транзитивно, т.к. например, если fRa и fRc, то верно cRa.

4. Теория графов

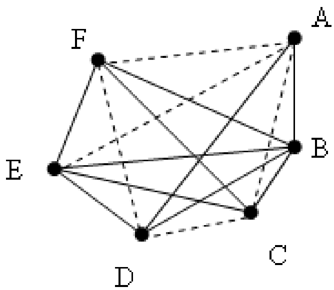
№ 4.1

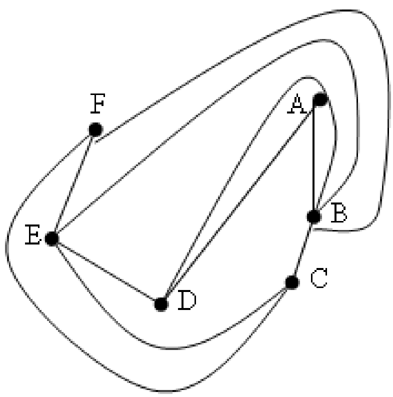
Для данного графа нарисовать изоморфный граф таким образом, чтобы ребра между собой не пересекались, дорисовать до полного графа.



Решение:

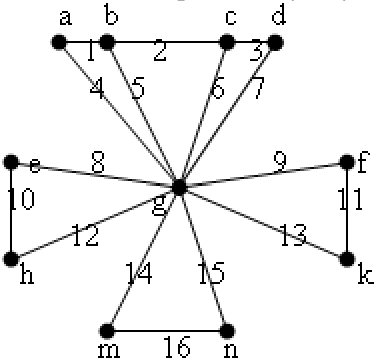
Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа G_1 (B_1 и C_1) соединенных ребром, соответствующие им вершины B_2 и C_2 графа G_2 тоже соединены ребром и обратно. Полный граф – это граф, в котором каждая пара вершин будет соединена ребром.





№ 4.2

Задать граф А, найти степени вершин и сумму всех степеней.



Решение:

А) Граф может быть полностью определен:

1)Множеством вершин: V={ a,b,c,d,e,f,g,h,k,m,n }.

Множеством ребер: E={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 }.

2)Множеством ребер, каждое из которых представлено парой вершин:

E_1={ (a,b), (b,c), (c,d), (a,g), (b,g), (c,g), (d,g), (e,g), (f,g), (e,h), (f,k), (h,g), (g,k), (m,g), (n,g), (m,n) }.

Б) В каждой не изолированной вершине некоторого графа G имеется одно или несколько ребер. Число таких ребер и называется степенью вершины.

$\rho(a)=\rho(d)=\rho(e)=\rho(h)=\rho(f)=\rho(k)=\rho(m)=\rho(n)=2.$

$\rho(b)=\rho(c)=3.$

$\rho(g)=10.$

Сумма степеней вершин:

$\Sigma\rho=\rho(a)+\rho(d)+\rho(c)+\rho(h)+\rho(f)+\rho(k)+\rho(m)+\rho(n)+\rho(b)+\rho(c)+\rho(g)=32.$

№ 4.3

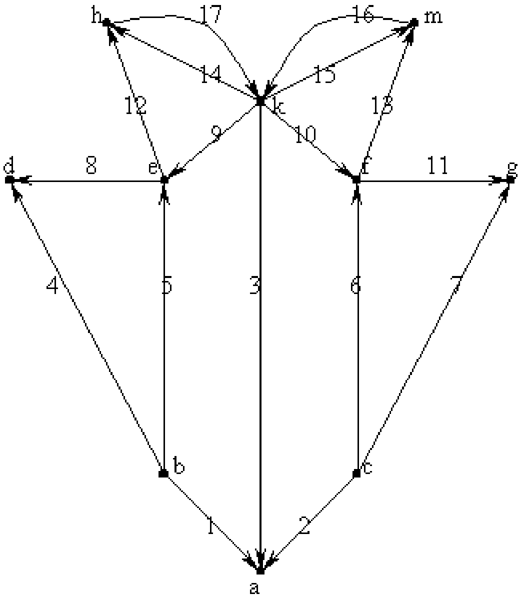
Задать граф матрицами смежности и инцидентности, списком ребер.

Решение:

Матрица инцидентности – это матрица размера m×n, в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой вершины и j-ого ребра ставится «-1» если вершина является началом, «1» - вершина является концом, «0» - вершина и ребро не инцидентны. Матрица смежности – это квадратная матрица, в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины, а на пересечении к-ой и l-ой вершин ставиться число ребер с началом в к-ой вершине и концом в l-ой вершине. Список ребер графа представлен двумя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные им вершины.

1	ba
2	ca
3	ka
4	bd
5	be
6	cf
7	cg
8	ed
9	ke
10	kf
11	fg
12	eh
13	fm
14	kh
15	km
16	mk
17	hk

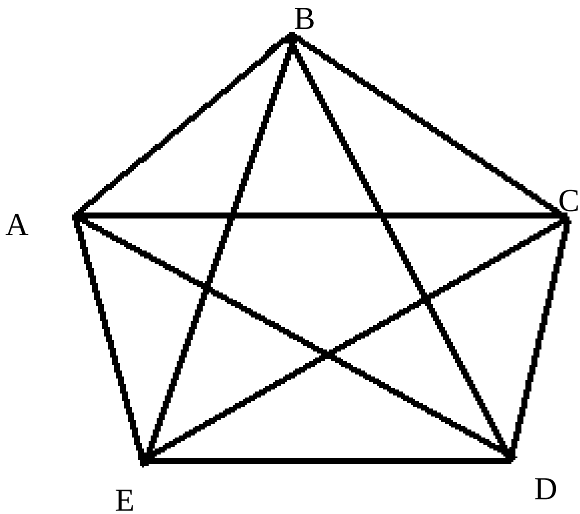
	a	b	c	d	e	f	g	h	k	m
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
c	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
k	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1
m	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

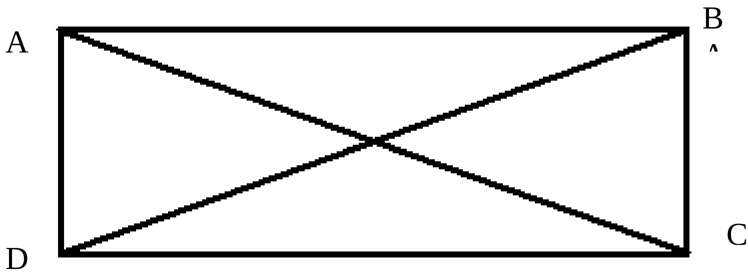


	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	-1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	0	0	1	0	0	-1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	-1	0	-1	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-1
k	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1	-1	1	1
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	-1	0

№ 4.4

Можно ли нарисовать данные фигуры, не отрывая руки и не проходя по одной линии фигуры дважды.





Решение:

Опр. Графом называется геометрическая схема.

Опр. Эйлеров граф называется граф имеющий Эйлеровый цикл.

Опр. Эйлеров цикл называется цикл графа содержащий все ребра графа.

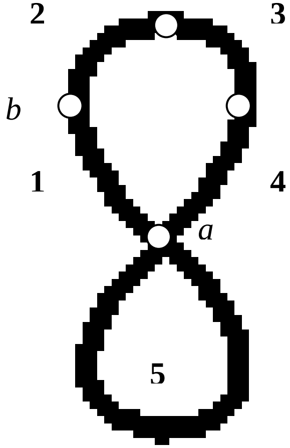
Опр. Цикл называется цепь начинающиеся и заканчивающаяся в одной и той же вершины.

Фигуру слева можно нарисовать не отрывая руки и не проходя по одному и тому же ребру более одного раза: BECADBCDEAB

Фигуру справа нельзя.

№ 4.5

Задать матрицами смежности и инцидентности, а также списком следующий граф.



Решение:

Способы задания графов:

В общем виде задать граф – значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их пронумеровать. Пусть $V_1, V_2, \ldots V_J, \ldots V_N$ – вершины графа G, $e_1, e_2, \ldots, e_i, \ldots, e_m$ – ребра графа G. Отношение инцидентности задается:

А) матрицей инцидентности $||\varepsilon_{ij}||$

Размера m x n , в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой

вершины и j-го ребра в случае неориентированного графа ставится 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае.
в случае орграфа

-1 если вершина является началом ребра,

1 если вершина является концом ребра,

0 если вершина и ребро не инцидентны,

α (любое число) если e_i - петля, а V_j - инцидентная ей вершина.

Б) списком ребер графа – представленным 2мя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные ему вершины. Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит начало ребра.

В). Матрицей смежности $||\delta_{ke}||$
Квадратная матрица $n \times n = n^2$, в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины $V_i \in V$, а на пересечении к-ой и е-ой вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины, а для орграфа δ_{ke} равно числу ребер с началом в к-ой вершине и концом в е-ой вершине.

Матрица смежности:

	a	**b**	**c**	**d**
a	1	1	0	1
b	1	0	1	0
c	0	1	0	1
d	1	0	1	0

Матрица инцидентности:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
a	1	0	0	1	1
b	1	1	0	0	0
c	0	1	1	0	0
d	0	0	1	1	0

Списком:

1	ab
2	bc
3	cd
4	da
5	aa

№ 4.6

Построить граф по матрице смежности, если этот граф является орграфом.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
a	0	1	0	0	0	1
b	0	0	1	1	0	0
c	0	0	0	1	0	1
d	0	0	0	0	1	0
e	0	0	0	0	0	1
f	0	1	0	1	0	0

Решение:

Способы задания графов:

В общем виде задать граф – значит описать множество его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их пронумеровать. Пусть $V_1, V_2, \dots V_J, \dots V_N$ – вершины графа G, $e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_m$ – ребра графа G. Отношение инцидентности задается:

А) матрицей инцидентности $||\varepsilon_{ij}||$

Размера m x n , в которой по вертикали указываются вершины, а по горизонтали ребра, а на пересечении i-ой вершины и j-го ребра в случае неориентированного графа ставится 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае.

в случае орграфа :

-1 если вершина является началом ребра,

1 если вершина является концом ребра,

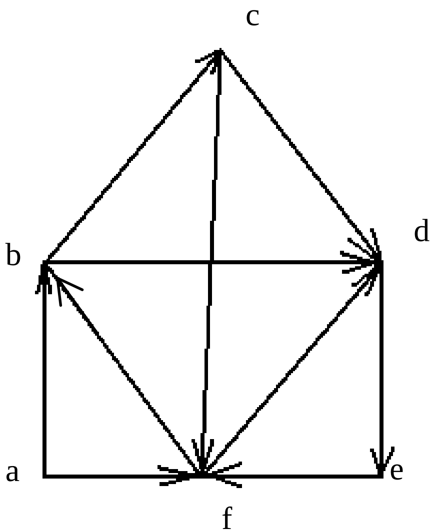
0 если вершина и ребро не инцидентны,

α (любое число) если e_i - петля, а V_j - инцидентная ей вершина.

Б) списком ребер графа – представленным 2мя столбцами, где в левом перечислены все ребра, а в правом перечисляются инцидентные ему вершины. Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит начало ребра.

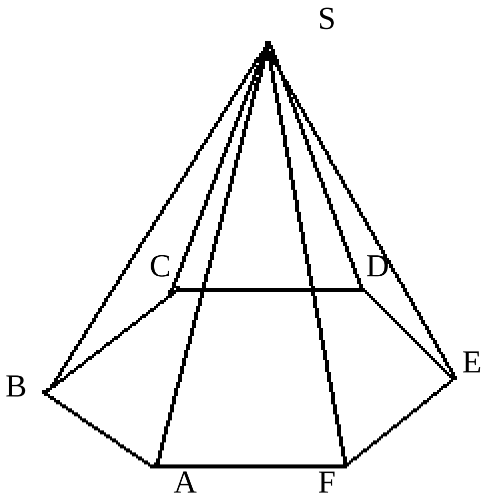
В). Матрицей смежности $||\delta_{ke}||$

Квадратная матрица $n \times n = n^2$, в которой по горизонтали и по вертикали перечисляются только все вершины $V_i \in V$, а на пересечении к-ой и е-ой вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины, а для орграфа δ_{ke} равно числу ребер с началом в к-ой вершине и концом в е-ой вершине.



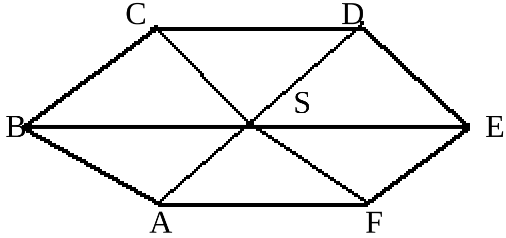
№ 4.7

Постройте для данного графа изоморфный ему граф.



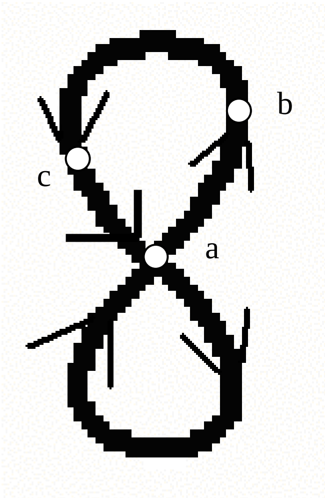
Решение:

Опр. Два графа G_1 и G_2 изоморфны, если они отвечают одному и тому же списку проведенных игр. То есть если G_1 и G_2 графы изоморфны, то они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа G_1(B_1 и C_1), соединенных ребром соответствующие им вершины B_2 и C_2 графа G_2 тоже соединены ребром и обратно.



№ 4.8

Пусть орграф задает отношение R. Каковы свойства этого отношения?



Решение:

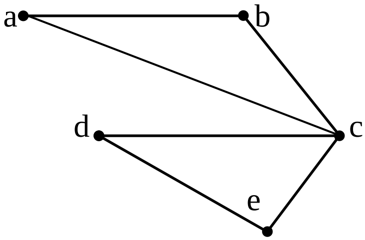
Отношение R определено на множестве V={a,b,c} и количество вершин |V|=3.

Свойство отношения:

1. Не рефлексивно, т.к. отношение cRc, bRb не выполняется.
2. Не антирефлексивно, т.к. имеет место aRa.
3. Не симметрично, т.к. это орграф.
4. Не антисимметрично, т.к. не выполняется например aRb и bRa, т.к. в данном случае орграф, а как видно на рисунке у нас направление от b к a нет, т.е. стрелка.
5. Не транзитивно, т.к. выполняется aRb, bRc но отсутствует aRc.

№ 4.9

Для данного графа определить расстояние между вершинами, радиусы и центр.



Решение:

Расстояние $d(V^{I},V^{II})$ между вершинами V^{I} и V^{II} неориентированного графа называется минимальная длинна простой цепи с началом V^{I} и концом V^{II}. Центром называется вершина неориентированного графа, от которой максимальное из расстояний от других вершин являлось бы минимальным. Радиусом графа G называется максимальное расстояние от центра G до его вершины.

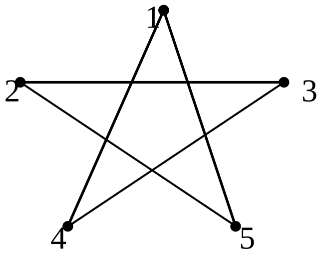
Расстояние между вершинами:
d(b,a)=d(c,a)=d(c,b)=d(d,c)=d(d,e)=d(e,c)=1
d(d,a)=d(d,b)= d(e,a)=d(e,b)= 2.
Радиусы: r(a)=2, r(b)=2, r(c)=1, r(e)=2, r(d)=2.
Центр: r(c)=1.

№ 4.10

По данной матрице смежности построить граф.

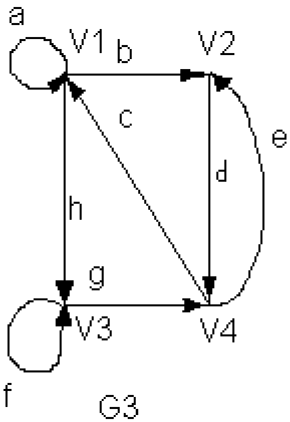
	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	1	1	0	0	0

Решение:

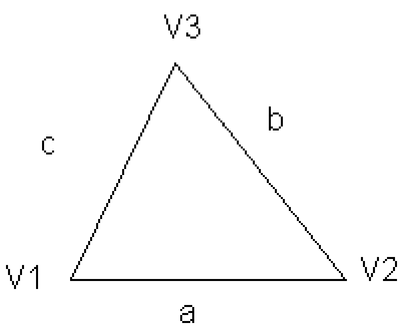


№ 4.11

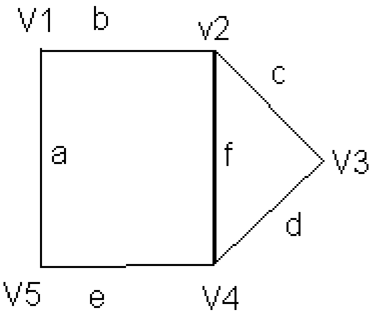
Для графов G1, G2, G3 построить матрицы инцидентности.



G3



G1



G2

Решение:

G1	a	b	c
1	1	0	1
2	1	1	0
3	0	1	1

G2	a	b	c	d	e	f
1	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	1
5	1	0	0	0	1	0

G3	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	-1	1	0	0	0	0	-1
2	0	1	0	-1	1	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	-1	1
4	0	0	-1	1	-1	0	1	0

№ 4.12

Для графов G1, G2, G3 построить матрицы смежности.

Решение:

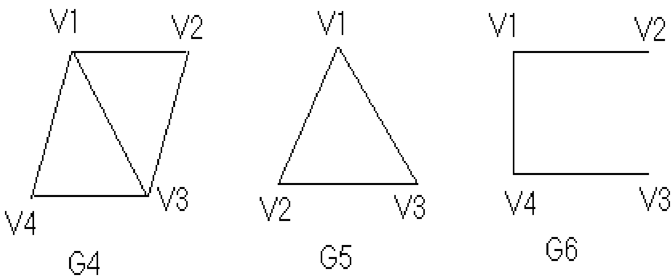
V	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

V	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	1	0

V	1	2	3	4
1	1	1	1	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	1
4	1	1	0	0

4.13

Определить степени вершин графов G4, G5, G6.



Решение:

1) V1 – 3, V2 – 2, V3 – 3, V4 – 2.
2) V1 – 2, V2 – 2, V3 – 2.
3) V1 – 2, V2 – 1, V3 – 1, V4 – 2.

№ 4.14

Для графов G4, G5, G6 определить расстояния между вершинами, центры графов и их радиусы.

Решение

G1: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=1; d(V1,V4)=1; d(V2,V3)=1; d(V2,V4)=2; d(V3,V4)=1;

G2: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=1; d(V2,V3)=1;

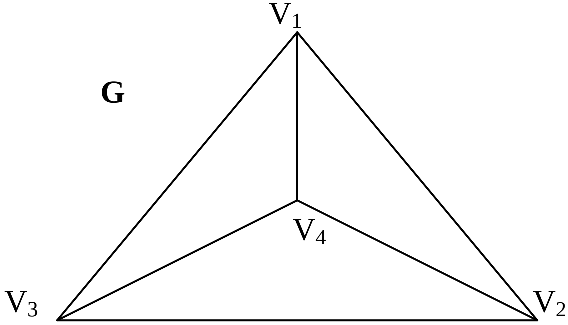
G3: d(V1,V2)=1; d(V1,V3)=2; d(V1,V4)=1; d(V2,V3)=3; d(V2,V4)=2; d(V3,V4)=1;

G1: r(V1)=1; r(V2)=2; r(V3)=1; r(V4)=2;
G2: r(V1)=1; r(V2)=1; r(V3)=1;
G3: r(V1)=2; r(V2)=3; r(V3)=3; r(V4)=2;

r(G1)=1; V1, V3 – центры
r(G2)=1; V1, V2, V3 – центры
r(G3)=2; V1, V4 - центры

№ 4.15

Дан граф G. Для его вершин привести примеры эйлерова цикла, гамильтонова цикла, маршрута.



Решение:

Эйлеров цикл – это цикл, содержащий все ребра графа по одному разу и все вершины графа, которые могут встречаться несколько раз, причем начало и конец в одной вершине. Именно поэтому данный граф не содержит эйлерова цикла.

Гамильтонов цикл – это простой цикл, содержащий все вершины графа (по одному разу), зато не обязательно содержит все ребра графа.

Примером гамильтонова цикла является: (V_3, V_1, V_4, V_2, V_3);

Маршрут – последовательность ребер, в которой 2 соседних ребра имеют общую вершину (одно и тоже ребро может встречаться несколько раз). Примером маршрута может быть: (V_1, V_2, V_4, V_3, V_1, V_4, V_2).

№ 4.16

По условию задачи составить дерево и определить, вершины каких типов оно содержит.

На склад Автосборочного завода поступают детали со всех прилегающих к нему заводов. Затем они распределяются на 2 производства: механообрабатывающее и механосборочное. Механообрабатывающее производство отправляет детали для дальнейшей обработки по цехам: картеров, передних осей, сборки мостов; а механосборочное – по цехам: карданных валов, шестерен, арматурным.

Решение:

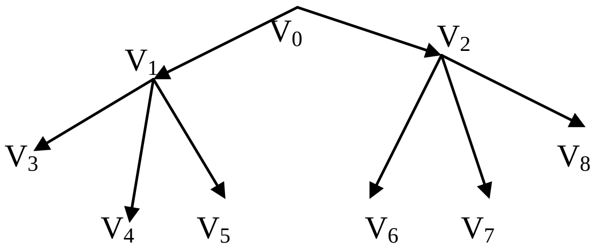
Корнем дерева (вершиной, от которой ориентируются все вершины дерева) будет являться склад, который обозначим, как V_0.

V_0 – вершина максимального типа.

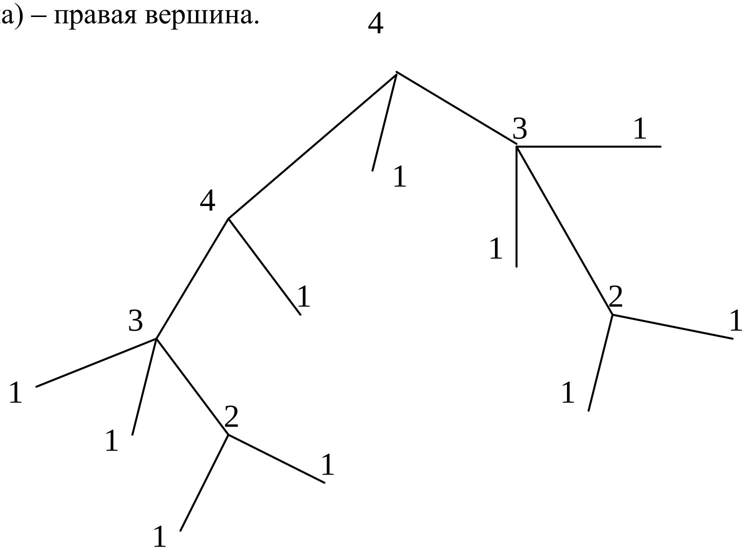
V_1 и V_2 – вершины 2 типа (ими обозначим 2 производства).

V_3, V_4, V_5 – (цеха механообрабатывающего производства), то есть вершины, инцидентные с вершиной V_1, и вершины V_6, V_7, V_8 – (цеха механосборочного производства), инцидентные с вершиной V_2, являются вершинами 1 типа, то есть концевыми вершинами.

Таким образом, граф типа дерева будет выглядеть следующим образом:



Теперь построим из n – графа ориентированное дерево с корнем, являющимся вершиной максимального типа (в нашем случае 4 типа) – правая вершина.



Литература

1. Г.И. Москинова. Дискретная математика. М.: Логос, 2002. – 240с.
2. Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. Дискретная математика. Ростов-наДону: Торсинг, 2003. - 144с.
3. Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2002. - 304с.
4. Н.П. Редькин. Дискретная мтематика. СПб.: Лань, 2003. - 96с.
5. В.А. Горбатов, А.В. Горбатов, М.В. Горбатов. Дискретная математика. М.: АСТ, Астрель, 2003. - 447с.