КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНО-ФИЛОСОФСКИХ НАУК И МАССОВЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Кафедра социальной философии

А. С. Сафонов

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ:
учебно-методическое пособие

Казань – 2020

УДК 164.1

ББК 87.4

С 12

Рекомендовано к печати кафедрой социальной философии КФУ

Протокол №2 от 9 октября 2020 года

Автор: Сафонов А. С., кандидат философских наук, старший преподаватель кафедры социальной философии

Рецензент: доктор философских наук, заведующий кафедрой социальной философии КФУ А. Р. Каримов

С12 Сафонов А. С. Аксиоматическое исчисление высказываний: учебно-методическое пособие / Сафонов А. С. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2020. –16 с.

В пособии рассматривается две системы аксиоматического исчисления высказываний: со схемами аксиом и с конечным числом аксиом. Приводится доказательство метатеоремы дедукции для системы со схемами аксиом. Также даны примеры доказательств в аксиоматических системах с комментариями. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 47.03.01 – Философия.

Содержание

Аксиоматическое исчисление высказываний

Аксиоматика является стандартным способом представления теоретического знания. Законы, относящиеся к исследуемой области, выражаются посредством аксиом, и доказываемых с их помощью теорем.

В течение длительного времени под аксиомами понимались «самоочевидные положения», которые не требуют доказательства. Их истинность была интуитивно очевидна. Однако с развитием науки и появлением различных неклассических теорий (напр., геометрия Лобачевского) стало понятно, что в качестве аксиом можно принимать контринтуитивные положения. Т.е. самоочевидность не является необходимым свойством аксиом. Поэтому под аксиомами мы будем понимать тождественно-истинные высказывания, которые будут браться без предварительного доказательства.

Из такой интерпретации аксиом понятно, что количество аксиоматических систем может быть достаточно большим (все зависит от того, какие высказывания вы принимаете изначально в качестве аксиом, т.е. без доказательств).

Мы рассмотрим две традиционные аксиоматические системы логики высказываний:

AP – аксиоматика пропозиционального исчисления

CAP – исчисление высказываний со схемами аксиом.

Алфавит и правила построения формул AP совпадают с тем, что мы ввели ранее для логики высказываний.

Система АР – аксиоматика пропозиционального исчисления

Аксиомы

А1: $p\to(q\to p)$ – утверждение консеквента

А2: $(p\to(q\to r))\to ((p\to q)\to(p\to r))$ – самодистрибутивность материальной импкликации

А3: $(p\&q) \to p$ - удаление конъюнкции

А4: $(p\&q) \to q$ - удаление конъюнкции

А5: $p \to(q \to(p\&q))$ – введение конъюнкции

А6: $p \to(p\vee q)$ – введение дизъюнкции

А7: $q \to(p\vee q)$ – введение дизъюнкции

А8: $(p \to r) \to((q \to r) \to ((p\vee q) \to r))$ - разбор случаев

А9: $(\neg p\to\neg q)\to((\neg p\to q)\to p)$ – рассуждение от противного

В качестве единственного правила вывода используется Modus ponens:

$$\frac{A\to B,\ A}{B}$$

Кроме того, поскольку аксиомы сформулированы как конкретные формулы (конкретные высказывания), то для того, чтобы переходить к другим конкретным формулам, имеющим форму аксиом, требуется сформулировать правило подстановки:

$$\frac{A(p)}{A(p/B)}$$

Где p – произвольная пропозициональная переменная в формуле A, а p/B результат подстановки вместо всех вхождений переменной p некоторой формулы B.

Доказательство – это непустое конечное множество формул C1,C2, … , Ck, каждая из которых есть либо аксиома, либо получена из предыдущих по одному из правил вывода.

Последняя формула в доказательстве называется доказуемой формулой, или теоремой.

Вывод из посылок A1, A2, … , An – это непустая конечная последовательность формул C1, C2, … , Ck , каждая из которых либо посылка, либо аксиома, либо теорема, либо получена по правилу вывода, либо по правилу подстановки (примененное к теоремам или аксиомам).

Наличие такой последовательности обозначается

$$A1, A2, \ldots , An \vdash Ck$$

Примеры

1) $\vdash p \to p$

1. $p \to ((q \to p) \to p)$ – *подст. в A1 q/(q →p)*
2. $p \to ((q \to p) \to p) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$ – *подст. в A2 q/(q →p) и r/p*
3. $(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$ – *MP из 1 и 2*
4. $p \to (q \to p)$ – *A1*
5. $p \to p$ - *MP из 3 и 4*

2) $\vdash (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

1. $((p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ – *подст. в A1 p/A2 и q/(q →r)*
2. $(p \to (q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ – *A2*

3. $((q\to r)\to ((p\to(q \to r)) \to((p\to q)\to(p\to r)))$ – *MP из 1,2*

4. $((q\to r)\to((p\to(q \to r)) \to((p\to q)\to(p\to r)))\to$ $((q\to r)\to(p\to(q\to r)))\to((q\to r)\to((p\to q)\to(p\to r)))$ – *подст. в A2 p/(q→r), q/(p→(q → r), r/((p→q)→(p→r))*

5. $((q\to r)\to(p\to(q\to r)))\to((q\to r)\to((p\to q)\to(p\to r)))$ – *MP 3,4*

6. $(q\to r)\to(p\to(q\to r))$ – *подст. В A1 p/(q→r) и q/p*

7. $(q\to r)\to((p\to q)\to(p\to r))$ – *MP из 5,6*

Исчисление высказываний со схемами аксиом САР

Отличие АР от САР в том, что АР содержит конечное число аксиом. Поэтому требуется особое правило подстановки. САР – это система с бесконечным числом аксиом, т.е. любая формула соответствующая схеме аксиом является аксиомой.

Другими словами, каждое бесконечное множество аксиом представимо в системе общей схемой, которая задает общую структуру аксиом.

Схемы аксиом САР

CA1: $A\to(B\to A)$

CA2: $(A\to(B\to C))\to ((A\to B)\to(A\to C))$

CA3: $(A\&B) \to C$

CA4: $(A\&B) \to C$

CA5: $A \to(B \to(A\&B))$

CA6: $A \to(A \vee B)$

CA7: $B \to(A \vee B)$

CA8: $(A \to C) \to((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

CA9: $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A)$

Единственное правило вывода: Modus ponens

Выводом в аксиоматике САР называется непустая, конечная последовательность формул C1,C2, … , Ck, каждая из которых есть либо аксиома, либо посылка, либо формула, полученная из предыдущих по modus ponens.

Если формулы A1, A2, … , An - это посылки вывода C1,C2, … , Ck, а последняя формула Ck графически совпадает с формулой B, то говорят, что формула B выводима из посылок A1, A2, … , An , т.е. A1, A2, … , An ⊢B

Теорема дедукции

Если в Системе натурального вывода, эвристические приемы позволяли в вывод включать специальные допущения (гипотезы), то аксиоматических системах такая возможность отсутствует. При этом такая возможность существенно бы упростила процесс доказательства. Чтобы получить возможность делать допущения в процессе доказательства в аксиоматических системах требуется доказать промежуточную дедукционную теорему, или теорему дедукции.

Если из множества формул Г и формулы А выводима формула В, то из множества формул Г выводима формула А→В

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Докажем следующую метатеорему: В САР справедлива теорема дедукции.

Доказательство будем вести методом математической индукции по длине вывода.

Рассмотрим вывод $C_1,C_2, \dots , C_k$, где последняя формула графически совпадает с формулой В, т.е. имеет место Г, А ⊢ В или Г, А ⊢ Ck .

Индуктивное допущение: Допустим, что теорема дедукции справедлива для $\Gamma, A \vdash C_{k-1}$, т.е. справедливо $\Gamma \vdash A \to C_{k-1}$

Индуктивный шаг: Покажем, что теорема дедукции справедлива для случая $\Gamma, A \vdash C_k$

Согласно определению вывода формула C_k может быть:

1. Аксиомой;
2. Быть одной из посылок множества Г;
3. Бать посылкой А;
4. Получена по Modus ponens из некоторых предшествующих формул.

Рассмотрим все эти случаи

А) Формула C_k является аксиомой.

Тогда доказательство представлено следующей последовательностью формул:

Г

.

.

.

$\vdash Ck$ – *аксиома*

$\vdash Ck \rightarrow (A \rightarrow Ck)$ – *CA1*

$\vdash A \rightarrow Ck$ – *MP*

Т.о. существует вывод вида $Г \vdash A \rightarrow Ck$, что доказывает нашу метатеорему для данного случая

В) Формула C_k – одна из посылок множества Г. Тогда

Г

.

.

.

C_k – *принадлежит множеству Г*

$\vdash C_k \rightarrow (A \rightarrow C_k)$ – *CA1*

$\vdash A \rightarrow C_k$ – *MP*

Т.о., формула $A \rightarrow C_k$ выводима из Г в данном случае.

С) C_k совпадает с посылкой А.

В данном случае теорема дедукции будет иметь место, если доказать, что из множества посылок Г выводима формула $A \to A$; $\Gamma \vdash A \to A$

Г

.

.

.

$\vdash A \to ((A \to A) \to A)$ – *СА1*

$\vdash A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ – *СА2*

$\vdash (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ – *МР из 1 и 2*

$\vdash A \to (A \to A)$ – *СА1*

$\vdash A \to A$ - *МР из 3 и 4*

Т.о., $\Gamma \vdash A \to A$ *, т.е.* $\Gamma \vdash A \to C_k$

D) C_k получена из предшествующих формул по modus ponens. Допустим, что C_k получается из формул C_{k-1} и $C_{k-2} = C_{k-1} \to C_k$. Согласно индуктивному допущению имеет место $\Gamma \vdash A \to C_{k-1}$ и $\Gamma \vdash A \to (C_{k-1} \to C_k.)$Требуется показать, что имеет место $\Gamma \vdash A \to C_k$

Г

.

.

.

$A \to C_{k-1}$

$A \to (C_{k-1} \to C_k)$

$\vdash (A \to (C_{k-1} \to C_k)) \to ((A \to C_{k-1}) \to (A \to C_k))$ – *СА2*

$\vdash (A \to C_{k-1}) \to (A \to C_k)$ – *МР*

$\vdash A \to C_k$ – *МР*

Следовательно: $\Gamma \vdash A \to C_k$

Т.о., метатеорема доказана во всех случаях.

Пример применения теоремы дедукции

- ⊦ *(p→(q → r)) →(q →(p → r))*

1. *p→(q → r) -посылка*
2. *q - посылка*
3. *p – посылка*
4. *q → r – MP из 1,3*
5. *r – MP из 2,4*
6. *Т.о., нами построен вывод вида*

p→(q → r),q, p ⊦ r. Однако согласно теореме дедукции (примененную 3 раза) существует вывод вида ⊦ (p→(q → r)) →(q →(p → r)) ч.т.д.

- ⊦ *¬¬p→p – закон снятия двойного отрицания*

1. *(¬p→¬¬p) → (¬p → ¬p) → p – CA9*
2. *¬¬p →(¬p→¬¬p) – CA1*
3. *¬¬p –посылка*
4. *(¬p→¬¬p) – MP из 3,2*
5. *(¬p → ¬p) → p – MP из 4,1*
6. *¬p → ¬p – рдф (ранее доказанная формула)*
7. *p - ч.т.д.*

Комментарий

Мы знаем, исходя из доказанной теоремы дедукции, что ¬¬p мы можем взять в качестве посылки (гипотезы), следовательно, p – это та самая конечная формула, которую необходимо получить в выводе.

Как догадаться, что нужно использовать CA9, и почему она имеет именно такую форму, а не другую? На мысль о том, что, возможно, в доказательстве формулы ¬¬p→p следует использовать CA9: (¬A→¬B) → ((¬A → B) → A) наталкивает то, что в доказуемой формуле имеет знак отрицания, а единственной схемой аксиом со знаком отрицания – это CA9.

Нужно представить CA9 так, чтобы использовать переменные ¬¬p и p. Это можно сделать несколькими способами: (¬p→¬¬p) → (¬p → ¬p) → p или (¬ ¬p→¬¬p) → (¬ ¬p → ¬p) → ¬ p или (¬ ¬p→¬p) → (¬ ¬p → p) → ¬ p , т.е. если мы подставляем вместо ¬A/ ¬ ¬p , то в качестве консеквента мы получаем ¬ p, тогда как нам, исходя из комментария 1 нужно получить p. Поэтому лучше выбрать первую формулу.

Кроме того, видно, что в формуле $(\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg p) \to p$ для того, чтобы по modus ponens получить p, требуется ввести в доказательство отдельные формулы $(\neg p \to \neg\neg p)$ и $(\neg p \to \neg p)$, согласно определению вывода они должны быть либо аксиомами, либо ранее доказанными формулами(теоремами), либо получатся по modus ponens из других формул.

Формула $\neg p \to \neg p$ ранее нами доказывалась, поэтому мы можем включить ее в доказательство

Видно, что оставшаяся формула $(\neg p \to \neg\neg p)$ не является ни аксиомой, ни теоремой. Ее можно получить по modus ponens из какой-нибудь другой формулы(которая сама либо аксиома, либо теорема).

Очевидно, что формулу $(\neg p \to \neg\neg p)$ можно представить как консеквент аксиомы по СА1: $\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg p)$. (в качестве аксиомы по схеме 1 можно представить любую формулу вида: $B \to A$, достаточно поместить консеквент в качестве еще одного антецедента: $A \to (B \to A)$

Т.о. чтобы получить $(\neg p \to \neg\neg p)$ по modus ponens из аксиомы $\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg p)$ необходимо иметь отдельную формулу $(\neg\neg p)$, которую мы можем ввести как посылку согласно теоремы дедукции (см. комментарий 1).

- $\vdash p \to (\neg p \to q)$ - *з. отрицание антецедента*

1. p – *посылка*
2. $\neg p$ – *посылка*
3. $(\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q)$ – *по СА9*
4. $\neg p \to (\neg q \to \neg p)$ – *СА1*
5. $p \to (\neg q \to p)$ – *СА 1*
6. $(\neg q \to \neg p)$ – *МР 2, 4*
7. $(\neg q \to p)$ – *МР 1, 5*
8. $(\neg q \to p) \to q$ – *по МР из 3,6*
9. q – *по МР из 7,8 ч.т.д.*

Комментарий

Согласно теореме дедукции переменные p и ¬ p можно взять в качестве посылок.

Поскольку требуется, тогда получить формулу q в качестве конечной формулы, то можно предположить, что нужно использовать СА9 (¬A→¬B) → ((¬A → B) → A), т.к. она дает одинарную формулу.

Подобрать ее элементарно, т.к. вместо А нам нужно подставить q. Поэтому она будет иметь вид (¬q → ¬p) → ((¬q →p) →q).

Поскольку p и ¬p у нас есть, то получить (¬q → ¬p) и (¬q →p) не составит труда. Достаточно представить их как консеквент СА1.

Закон ниже предлагается сначала доказать самостоятельно

- ⊦ p→¬¬p закон введения двойного отрицания
- Указание: использовать СА 9 (¬A→¬B) → ((¬A → B) → A) и частный случай снятия двойного отрицания ¬¬¬p→¬p. В качестве посылки необходимо взять p, конечной выводимой формулой должна быть ¬¬p

Доказательство

- *⊦ p→¬¬p*

1. *p – посылка*
2. *¬¬¬p→¬p – закон снятия д.о.*
3. *(¬¬¬p→¬p) → ((¬¬¬p→p) →¬¬p) – по СА9*
4. *(¬¬¬p→p) →¬¬p – из 2 и 3 по mp*
5. *p→(¬¬¬p→p) – СА1*
6. *(¬¬¬p→p)- из 1, 5 по MP*
7. *¬¬p –из 4,6 по mp чтд*

- ⊦ (¬q→¬p)→(p→q)
- Указания: (¬q→¬p) и p – посылки, использовать СА9: (¬A→¬B) → ((¬A → B) → A) и СА1: A→(B→A)

Доказательство

- *⊦ (¬q→¬p)→(p→q)*

1. *($\neg q \to \neg p$) – посылка*
2. *p – посылка*
3. *($\neg q \to \neg p$) $\to$ (($\neg q \to p$) $\to q$) – CA 9*
4. *($\neg q \to p$) $\to q$ – из 1,3 по mp*
5. *p$\to$ ($\neg q \to p$) - CA 1*
6. *($\neg q \to p$) – из 2, 5 по mp*
7. *q – из 4,6 по mp ч.т.д.*

- ⊢ $p \to (\neg p \to \neg q)$

Указание: Использовать СА1 и СА9.

- *⊢$p \to (\neg p \to \neg q)$*
- *1) p – посылка*
- *2) $\neg p$ – посылка*
- *3) $p \to (\neg\neg q \to p)$ – CA1*
- *4) $\neg p \to (\neg\neg q \to \neg p)$ – CA1*
- *5) ($\neg\neg q \to p$) – из 1,3 по mp*
- *6) ($\neg\neg q \to \neg p$) – из 2, 4 по mp*
- *7) ($\neg\neg q \to \neg p$) $\to$(($\neg\neg q \to p$) $\to \neg q$)*
- *8) $\neg q$ – из 5,7 и 6,7 по mp ч.т.д.*

Рекомендуемая литература по теме

1) Бочаров В.А., Маркин В.И. Введение в логику: учеб. М.: ИД «Форум»: ИНФРА-М, 2011. 560 с

2) Символическая логика: учебник / Под. ред. Я. А. Слинина, Э. Ф. Караваева, А. И. Мигунова. Изд. СПбГУ 2005. 506 с.

3) Математическая логика: Учебное пособие / В.И. Игошин. - М.: ИНФРА-М, 2012. - 399 с.: 60x90 1/16 + CD-ROM. - (Высшее образование). (переплет, cd rom) ISBN 978-5-16-005204-5, 1000 экз. Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=242738

4) Логика: Учебное пособие / В.К. Батурин. - М.: КУРС: НИЦ Инфра-М, 2012. - 96 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование). (обложка) ISBN 978-5-90555-406-3, 1000 экз

5) Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=262207

6) Логика: Учебник / Демидов И.В.; Под ред. Каверин Б.И., - 7-е изд. - М.:Дашков и К, 2018. - 348 с.: ISBN 978-5-394-02125-1 - Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/332257