УДК 530.1

Проблема устойчивости решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера в неоднородных и нестационарных средах

Problem of stability of solutions of the generalized nonlinear Schrödinger equation in nonuniform and nonstationary media

В.Ю. Белашов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

V.Yu. Belashov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia

Сокращенное название: Проблема устойчивости решений…

Белашов Василий Юрьевич, vybelashov@yahoo.com, 8(9272)-457939

Аннотация. Методом анализа ограниченности гамильтониана изучается устойчивость решений 3-мерного обобщенного нелинейного уравнения Шредингера (3-GNLS), описывающего солитоноподобные волны в неоднородных и нестационарных средах: плазме (включая космическую плазму), оптоволокне и плоских оптических волноводах. Показано, что уравнение 3-GNLS, в зависимости от параметров среды распространения, наряду с неустойчивыми, рассеивающимися со временем решениями, может иметь устойчивые и квазиустойчивые неодномерные решения типа солитонов и бризеров. Результаты аналитического рассмотрения объясняют ранее наблюдавшиеся в численных экспериментах эффекты, подтверждаются результатами выполненного численного моделирования и могут быть полезны при изучении динамики нелинейных волновых структур в физике плазмы, нелинейной оптике и многих других областях физики.

Abstract. Stability of solutions of the 3-dimensional generalized nonlinear Schrödinger equation (3-GNLS), which describes the soliton-like waves in the inhomogeneous and nonstationary media such as a plasma (including space plasma), fiber and planar optical waveguides, is studied using the method of analysis of boundness of the Hamiltonian. It is shown that the 3-GNLS equation, depending on the parameters of the propagation medium, can have stable and quasi-stable multidimensional solutions of the soliton and breather types, along with unstable solutions scattering with time. The results of analytical consideration explain the effects previously observed in numerical experiments, are confirmed by the results of the performed numerical simulation, and can be useful in studying the dynamics of nonlinear wave structures in plasma physics, nonlinear optics, and many other areas of physics.

Ключевые слова: обобщенное нелинейное уравнение Шредингера, солитоны огибающей, бризеры, взаимодействие, неодномерные солитоны, неоднородная нестационарная среда, плазма.

Keywords: generalized nonlinear Schrödinger equation, envelop solitons, breathers, interaction, multidimensional solitons, nonuniform nonstationary medium, plasma.

Введение

Если в системе ВК[1] [Belashov, Vladimirov, 2005; Belashov et al., 2018a]

$$\partial_t u + \hat{\mathrm{A}}(t,u)u = f, \quad f = \sigma\int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u \mathrm{d}x + f', \quad \Delta_\perp = \partial_y^2 + \partial_z^2 \tag{1}$$

[1] Belashov-Karpman (BK) system

оператор имеет вид $\hat{A}(t,u) = i\,[\gamma |u|^2 - \beta \partial_x^2] + \alpha/2$, она представляет собой 3-мерное обобщенное уравнение Шредингера (3-GNLS) [Belashov et al., 2018b]:

$$\partial_t u + i\,\gamma |u|^2 u - i\,\beta\,\partial_x^2 u + (\alpha/2) u = \sigma \int_{-\infty}^{x} \Delta_\perp u \,\mathrm{d}x + f', \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = \varphi(t,x,y,z)$, $f' = f'(t,x,y,z)$, и $(\alpha/2)u$ описывает диссипативные эффекты, а u есть огибающая волнового пакета (импульса). Уравнение 3-GNLS (2) описывает динамику огибающей модулированных нелинейных волн и импульсов (волновых пакетов) в средах с дисперсией и имеет многочисленные важные приложения в физике плазмы (например, описывает распространение ленгмюровских волн в горячей плазме), нелинейной оптике (распространение световых импульсов в кристаллах, оптоволокне и плоских оптических волноводах), оно описывает, в частности такие явления, как турбулентность, волновой коллапс и оптическая самофокусировка. Уравнение (2) используется и в других областях физики – таких, например, как теория сверхпроводимости и физика низких температур (в частности, обычное уравнение NLS есть упрощенная 1D форма уравнения Гинзбурга-Ландау [Гинзбург, Ландау, 1950], впервые введенного ими в 1950 г. при описании сверхпроводимости), гравитационные волны малой амплитуды на поверхности глубокой невязкой жидкости и др. Отметим, что 3D уравнение (2) не является полностью интегрируемым, и его аналитические решения в общем случае не известны (за исключением, пожалуй, гладких решений типа уединенных волн). Однако, с использованием подходов, развитых в [Белашов, 1991, 1999] для других уравнений системы ВК [уравнение GKP, когда в (1) $\hat{A}(t,u) = \alpha u \partial_x - \partial_x^2(\nu - \beta\partial_x - \gamma\partial_x^3)$ и уравнение 3-DNLS, если $\hat{A}(t,u) = 3s\,|p|^2 u^2 \partial_x - \partial_x^2(i\lambda + \nu)$], мы можем исследовать устойчивость возможных решений уравнения 3-GNLS, что и является целью настоящей работы.

Анализ устойчивости решений

Запишем (2) с $\alpha = 0$ (уравнение 3-NLS) в гамильтоновой форме:

$$\partial_t u = \partial_x(\delta \mathrm{H}/\delta u), \tag{3}$$

где $\mathrm{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\gamma}{2} |u|^4 + \beta u u^* \partial_x \varphi + \frac{1}{2}\sigma\left(\nabla_\perp \partial_x w\right)^2 \right] \mathrm{d}\mathbf{r}$, $\partial_x^2 w = u$, $\varphi = \arg(u)$.

Используя метод, подробно изложенный в [Belashov, Vladimirov, 2005; Белашов, 1991, 1999], исследуем устойчивость 2D и 3D решений уравнения (2). При этом, задача для уравнения (3) формулируется в виде вариационного уравнения $\delta(\mathrm{H} + \upsilon P_x) = 0$, $P_x = \frac{1}{2}\int u^2 \,\mathrm{d}\mathbf{r}$

, смысл которого состоит в том, что все финитные решения уравнения (3) есть стационарные точки гамильтониана Н при фиксированном значении проекции импульса P_x. В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости, в динамической системе точки, которые соответствуют минимуму или максимуму гамильтониана Н являются абсолютно устойчивыми. Если же экстремум локальный, ему будут соответствовать локально устойчивые решения.

Рассмотрим деформации Н, сохраняющие проекцию импульса P_x:

$$u\,(x, r_\perp) \to \zeta^{-1/2}\eta^{-1}u\,(x/\zeta,\ \mathbf{r}_\perp/\eta), \qquad \zeta, \eta \in \mathrm{C}.$$

Гамильтониан примет вид $\mathrm{H}(\zeta,\eta) = a\zeta^{-1}\eta^{-2} + b\zeta^{-1} - c\zeta^2\eta^{-2}$ с коэффициентами $a = (\gamma/2)\int |u|^4 \mathrm{d}\mathbf{r}$, $b = \beta\int u u^* \partial_x \varphi \mathrm{d}\mathbf{r}$, $c = (\sigma/2)\int (\nabla_\perp \partial_x w)^2 \mathrm{d}\mathbf{r}$. Из необходимых условий экстремума $\partial_\zeta \mathrm{H} = 0$, $\partial_\eta \mathrm{H} = 0$ сразу же найдем его координаты:

$$\zeta_0 = -ac^{-1}, \quad \eta_0 = \left[-ab^{-1}\left(1 + a^2c^{-2}\right)\right]^{1/2},$$

где b < 0, если $\eta \in \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$, поскольку a > 0, c > 0 по определению, и b > 0, если $\eta \in \mathrm{C}$. Достаточные условия минимума в точке (ζ_i, η_j):

$$\begin{vmatrix} \partial_\zeta^2 \mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) & \partial_{\zeta\eta}^2 \mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) \\ \partial_{\eta\zeta}^2 \mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) & \partial_\eta^2 \mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) \end{vmatrix} > 0, \quad \partial_\zeta^2 \mathrm{H}(\zeta_i,\eta_j) > 0.$$

Решая данную систему неравенств, получим, что для волн в случае b < 0 (положительная нелинейность) $a/c < d = (2\sqrt{2})^{-1}\sqrt{13 + \sqrt{185}}$, откуда следует, что $\mathrm{H} > -3bd/(1 + 2d^2)$, то есть гамильтониан ограничен снизу. При b > 0 (отрицательная нелинейность): замена $b \to -b$ эквивалентна замене $y \to -iy$, $z \to -iz$ и $\mathrm{H} < -3bd/(1 + 2d^2)$, то есть гамильтониан снизу не ограничен (ограничен сверху).

Итак, мы доказали возможность существования устойчивых 3D решений в модели 3-NLS и получили условия их устойчивости, то есть определили области значений коэффициентов уравнения (переменных во времени и пространстве характеристик среды), когда 3D солитоны будут устойчивыми.

Результаты численного моделирования

Результаты численного моделирования уравнения 3-GNLS для общего случая неоднородной и нестационарной среды подтверждают сделанные на основе аналитического рассмотрения проблемы заключения. В качестве иллюстрации на рис. 1 и 2 представлены результаты, полученные при σ = 0 (1D случай) и начальных условиях в виде солитоноподобного импульса огибающей:

$$u\,(x,0) = A\exp\,(-x^2/l)$$

и

$$u\,(x,0) = A\exp\,[-(x-5)^2/l] + A\exp\,[-(x+5)^2/l],$$

соответственно, в простейшем случае уравнения NLS с β, γ = const (стационарная среда); α, f' = 0 при отрицательной нелинейности, β > 0. При этом b > 0 и гамильтониан H > –3bd/(1+2d^2), а значит условие устойчивости для отрицательной нелинейности, H < –3bd/(1+2d^2), не выполняется, и, как видно из рисунков, мы наблюдаем рассеяние импульсов огибающей со временем.

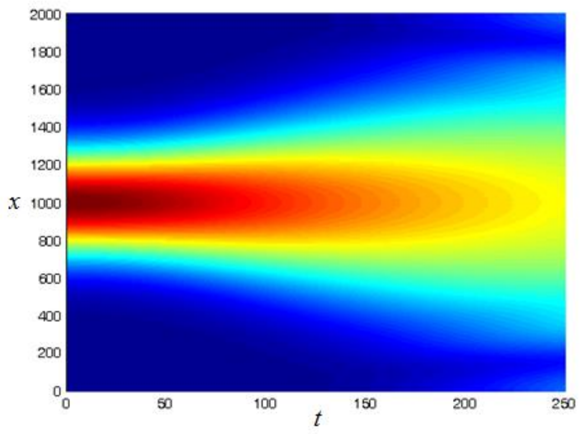

Рис. 1. Эволюция гауссова импульса огибающей при A =2, l =2; β=0.5, γ=0.

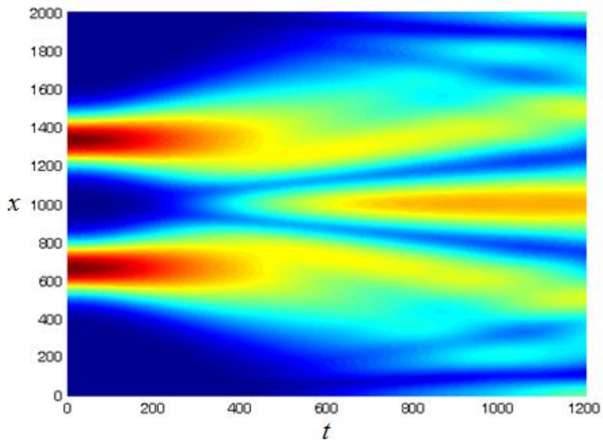

Рис. 2. Эволюция гауссова 2-импульсного возмущения огибающей при A=1, l=4; β=0.5, γ=0.

На рис. 3 представлены два примера результатов эволюции гауссова импульса в нестационарной среде при отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости H < –3bd/(1+2d^2) выполняется. В результате эволюции при этом наблюдается возникновение из начального уединенного импульса мощных устойчивых пульсаций типа бризеров.

Пример взаимодействия солитоноподобных начальных импульсов вида

$$\begin{gathered} u\,(x,0) = A\,[\mathrm{sch}\,(x) + \mathrm{sch}\,(x - s/2) + \mathrm{sch}\,(x + s/2)], \\ u\,(x,0) = A\,[\mathrm{sch}\,(x - s/2) + \mathrm{sch}\,(x + s/2)] \end{gathered} \tag{4}$$

при отрицательной нелинейности в рамках модели GNLS приведен на рис. 4, 5, соответственно. В первом случае, условие устойчивости не выполняется, и мы наблюдаем на первом этапе возникновение одного мощного импульса из 3-импульсного начального возмущения и далее, со временем, его распад на два импульса малой амплитуды. Во втором случае, условие устойчивости выполнено, и имеет место устойчивая эволюция 2-импульсного возмущения. В численных экспериментах было также установлено, что при слабой отрицательной нелинейности, когда условие устойчивости выполняется, переход от устойчивой эволюции к режиму устойчивых пульсаций (бризеров) происходит при уменьшении начального расстояния *s* в (4) между импульсами.

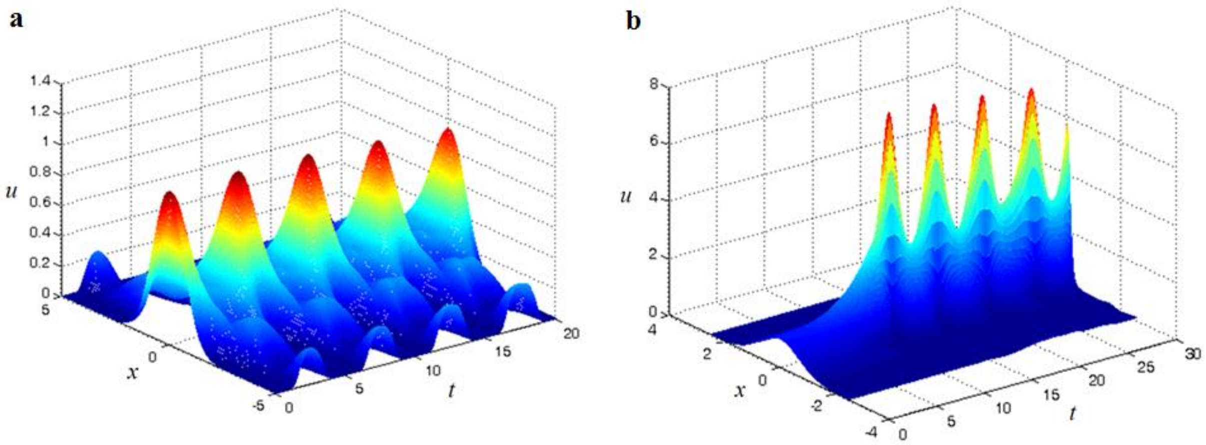

Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при α, $f' = 0$: a) $\beta = 0.5$, $\gamma = -1+0.01\sin 2\pi t$; b) $\gamma = -1$, $\beta(t) = -0.5$ for $t \leq 5$ and $\beta(t) = 0.5(1+0.2\sin 2\pi t)$ for $t > 5$; случаи отрицательной нелинейности.

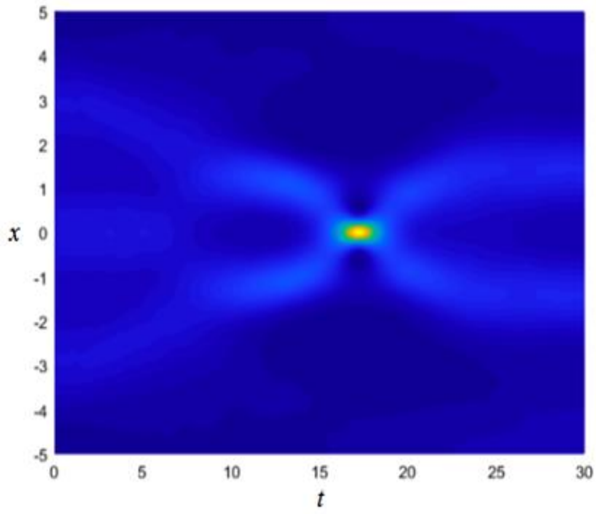

Рис. 4. Взаимодействие трех импульсов GNLS (стационарная среда) при $\gamma = -1$, $\beta = 0.25$; случай слабой отрицательной нелинейности.

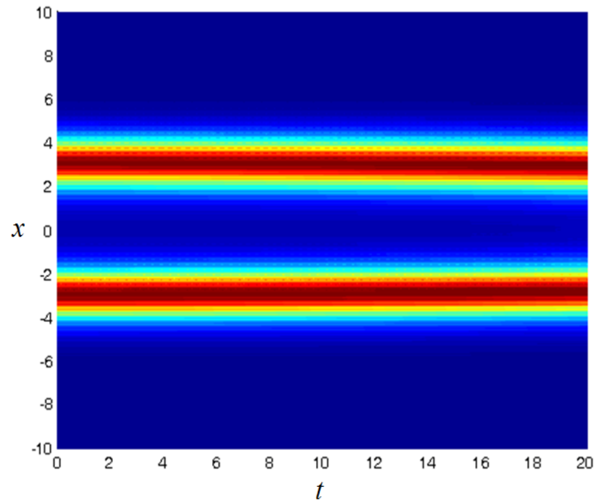

Рис. 5. Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS (стационарная среда) при $\gamma = -1$, $\beta = 0.05$; случай отрицательной нелинейности.

Детальному численному исследованию задач эволюции и взаимодействия 2D и 3D импульсов в модели 3GNLS посвящены работы [Belashov et al., 2018b, 2019a,b; Belashov, Kharshiladze, 2019].

Заключение

Резюмируя результаты, отметим, что в работе аналитически получены условия устойчивости солитоноподобных решений уравнения GNLS, которые подтверждены численным исследованием случаев устойчивой и неустойчивой (с образованием бризеров) эволюции импульсов различной формы, а также взаимодействия 2- и 3-импульсных структур, приводящего к формированию устойчивых и неустойчивых решений.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Список литературы

Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. Solitary Waves in Dispersive Complex Media. Theory, Simulation, Applications. Springer-Verlag GmbH & Co. KG, 2005. 303 p. DOI: 10.1007/b138237.

Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Problem of stability of multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma // Adv. Space Res. 2018a. V. 62. P. 65–70. DOI: 10.1016/j.asr.2018.04.001.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem // J. Astrophys. Aerospace Tech. 2018b. V. 6. P. 38.

Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. О теории сверхпроводимости // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064–1082.

Белашов В.Ю. Об устойчивости двумерных и трехмерных солитонов в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. 1991. Т. 320. С. 85-89.

Белашов В.Ю. Проблема устойчивости трехмерных альфвеновских волн, распространяющихся в замагниченной плазме // Докл. Акад. Наук. 1999. Т. 366, № 4. С. 465-467.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Interaction of multidimensional NLS solitons in nonuniform and nonstationary medium // 2019 Russian Open Conf. on Radio Wave Prop. (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University. Proceedings. IEEE Xplore Digital Library. 2019a. P. 535-538.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Dynamics of multidimensional wave structures of the soliton and vortex types in complex continuous media including atmosphere, hydrosphere and space plasma // 2019 Russian Open Conf. on Radio Wave Prop. (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University. Proc. IEEE Xplore Digital Library. 2019b. P. 19-24.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A. Numerical study of evolution and collisional interaction of the GNLS solitons in nonstationary and non-uniform media // J. Lasers, Optics & Photonics. 2019. V. 6. P. 33-34.

References

Belashov V.Yu., Vladimirov S.V. *Solitary waves in dispersive complex media. Theory, simulation, applications*. Springer-Verlag GmbH & Co. KG, 2005. 303 p. DOI: 10.1007/b138237.

Belashov V.Yu., Belashova E.S., Kharshiladze O.A. Problem of stability of multidimensional solutions of the BK class equations in space plasma. *Adv. Space Res*. 2018, vol. 62, pp. 65-70. DOI: 10.1016/j.asr.2018.04.001.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Interaction of the multidimensional NLS solitons in non-uniform and nonstationary medium: modeling and stability problem. *J. Astrophys. Aerospace Tech*. 2018, vol. 6, p. 38.

Ginzburg V.L., Landau L.D., 1950. On the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*. 1950, vol. 20, pp. 1064-1082.

Belashov V.Yu. On stability of two-dimensional and three-dimensional solitons in a weakly dispersive media. *DAN SSSR*. 1991, vol. 320, no. 1, pp. 85-89 (in Russian).

Belashov V.Yu. Problem of stability of the three-dimensional Alfvén waves propagating in a magnetized plasma. *Dokl. Acad. Nauk*. 1999, vol. 366, no. 4, pp. 465-467 (in Russian).

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Interaction of multidimensional NLS solitons in nonuniform and nonstationary medium. *2019 Russian Open Conf. on Radio Wave Prop. (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University*. Proc. IEEE Xplore Digital Library. 2019, pp. 535-538.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A., Rogava J.L. Dynamics of multidimensional wave structures of the soliton and vortex types in complex continuous media including atmosphere, hydrosphere and space plasma. *2019 Russian Open Conf. on Radio Wave Prop. (RWP), Kazan, Russia, July 1–6, 2019, Kazan Federal University*. Proc. IEEE Xplore Digital Library. 2019, pp. 19-24.

Belashov V.Yu., Kharshiladze O.A. Numerical study of evolution and collisional interaction of the GNLS solitons in nonstationary and non-uniform media. *J. Lasers, Optics & Photonics*. 2019, vol. 6, pp. 33-34.

Подписи к рисункам к ст. В.Ю. Белашов «Проблема устойчивости решений обобщенного нелинейного уравнения Шредингера в неоднородных и нестационарных средах»

Рис. 1. Эволюция гауссова импульса огибающей при $A = 2$, $l = 2$; $\beta = 0.5$, $\gamma = 0$.

Рис. 2. Эволюция гауссова 2-импульсного возмущения огибающей при A=1, $l = 4$; $\beta = 0.5$, $\gamma = 0$.

Рис. 3. Эволюция гауссова импульса огибающей в нестационарной среде при α, $f' = 0$: a) $\beta = 0.5$, $\gamma = -1+0.01\sin 2\pi t$; b) $\gamma = -1$, $\beta(t) = -0.5$ при $t \leq 5$ и $\beta(t) = 0.5(1+0.2\sin 2\pi t)$ при $t > 5$; случаи отрицательной нелинейности.

Рис. 4. Взаимодействие трех импульсов GNLS (стационарная среда) при $g = -1$, $b = 0.25$; случай слабой отрицательной нелинейности.

Рис. 5. Отсутствие взаимодействия импульсов GNLS (стационарная среда) при $g = -1$, $b = 0.05$; случай отрицательной нелинейности.