

Краткое сообщение, представленное Р.З. Даутовым

О.А. ЗАДВОРНОВ, Г.О. ТРИФОНОВА

## ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

*Аннотация.* В данной работе рассматривается первая краевая задача для нелинейного уравнения в ограниченной области с точечным источником. Решение задачи ищется в виде суммы трех функций. Первая функция представляется в явном виде и является решением линейного уравнения с точечным источником с постоянными коэффициентами. Вторая функция находится из решения линейной однородной краевой задачи с постоянными коэффициентами. Для поиска третьей функции используется итерационный процесс, сходящийся сильно в Соболевском пространстве со скоростью геометрической прогрессии.

*Ключевые слова:* точечный источник, нелинейная краевая задача, итерационный процесс.

УДК: 517.957

DOI: 10.26907/0021-3446-2022-5-74-79

### ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного уравнения в ограниченной области  $\Omega \subset R^n$ ,  $n \geq 2$ , с источником интенсивности  $q$ , сосредоточенным в начале координат (нуль — внутренняя точка области):

$$-\operatorname{div} g(x, \nabla w(x)) = q \delta(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

здесь  $\Gamma$  — Липшиц-непрерывная граница  $\Omega$ , функция  $w_\gamma$  является следом некоторой функции из пространства Соболева  $W_2^{(1)}(\Omega)$ .

Задачу (1), (2) понимаем следующим образом: *найти функцию  $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$ , удовлетворяющую условию (2) и вариационному уравнению*

$$\int_{\Omega} (g(x, \nabla w(x)), \nabla \eta(x)) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega).$$

---

Поступила в редакцию 15.03.2022, после доработки 15.03.2022. Принята к публикации 08.04.2022.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030"). Аффiliation: Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет.

Относительно функции  $g : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$  будем предполагать выполненными следующие условия:

1) сильная монотонность по  $\lambda$  для всех  $x \in \Omega$ :

$$(g(x, \lambda) - g(x, \mu), \lambda - \mu) \geq m|\lambda - \mu|^2,$$

2) Липшиц–непрерывность по  $\lambda$  для всех  $x \in \Omega$ :

$$|g(x, \lambda) - g(x, \mu)| \leq M|\lambda - \mu|,$$

3) измеримость по  $x \in \Omega$  для каждого  $\lambda \in R^n$  и равенство

$$g(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

4) существуют постоянная  $\alpha$ , удовлетворяющая неравенству

$$\alpha > \alpha^* = \frac{n-2}{2}, \quad n \geq 2,$$

и симметричная, положительно определенная матрица  $G$  такие, что выполнено следующее условие:

$$|g(x, \lambda) - G\lambda| \leq c|x|^\alpha|\lambda| + C \quad \forall \lambda \in R^n, \quad \forall x \in B_r(0) \subset \Omega,$$

где  $r, c, C > 0$  – положительные постоянные,  $B_r(y) = \{x \in R^n : |x - y| < r\}$ .

Краевая задача (1), (2) при выполнении этих условий, как следует из [1], имеет решение, а в силу 1) оно единственно. Представим его в виде  $w = \Phi + u_0 + u$ , где функция  $u$  принадлежит пространству  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , а функция  $w_0 = \Phi + u_0$  из пространства  $W_1^{(1)}(\Omega)$  удовлетворяет задаче

$$\int_{\Omega} (G\nabla w_0(x), \nabla \eta(x)) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3)$$

$$w_0(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

### 1. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Для поиска  $w_0 = \Phi + u_0$  воспользуемся частным решением задачи (3) без учета краевых условий (4). Непосредственно подставляя, можно убедиться, что функция

$$\Phi(x) = -q \frac{\phi_n(G^{-1/2}x)}{\sqrt{\det G}} \quad (5)$$

удовлетворяет вариационному уравнению (3). Функция  $\phi_n$  в формуле (5) – это фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|), \quad \phi_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3,$$

где  $\sigma_n = \text{mes } S$  – площадь единичной сферы  $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ .

Функцию  $u_0$  в разложении  $w_0 = \Phi + u_0$  определим как решение следующей краевой задачи:

$$-\text{div}(G\nabla u_0(x)) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (6)$$

$$u_0(x) = w_\gamma(x) - \Phi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (7)$$

В силу условия на  $w_\gamma$ , условий симметричности и положительной определенности на матрицу  $G$  и гладкости функции  $\Phi$  в окрестности границы  $\Gamma$  существует единственное решение задачи (6), (7), и это решение из пространства  $W_2^{(1)}(\Omega)$ .

Таким образом, решение краевой задачи (3), (4) нами сведено к нахождению функции  $\Phi(x)$  по формуле (5) и решению линейной эллиптической (с постоянными коэффициентами) задачи (6) с условиями (7).

## 2. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $u(x)$

Далее для поиска функции  $u$  (и тем самым функции  $w$  — решения задачи (1), (2)) рассмотрим итерационный процесс, интерпретируемый в дальнейшем, как метод простой итерации для операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Зададим произвольно функцию  $u^{(1)} \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$  (можно положить  $u^{(1)} \equiv 0$ ), а последовательность  $\{u^{(k)}\}$  получим, решая вариационные задачи ( $\eta$  произвольная функция из  $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ ):

найти  $u^{(k+1)} \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$  при  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\int_{\Omega} (\nabla u^{(k+1)}, \nabla \eta) dx = \int_{\Omega} (\nabla u^{(k)}, \nabla \eta) dx - \tau \int_{\Omega} (g(x, \nabla u^{(k)} + \nabla w_0) - G \nabla w_0, \nabla \eta) dx.$$

**Лемма 1.** Пусть относительно функции  $g(x, \lambda) : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$  выполнены условия 1)–4), функция  $v$  произвольная из пространства  $W_2^{(1)}(\Omega)$ , а  $w_0 = \Phi + u_0$ . Тогда вектор-функция  $P(x) \equiv g(x, \nabla v(x) + \nabla w_0(x)) - G \nabla w_0(x)$  принадлежит пространству  $[L_2(\Omega)]^n$ .

Таким образом, интегралы, входящие в определение итерационного метода для поиска функции  $u$ , ограничены.

С целью исследования введенного итерационного процесса сформулируем его в операторном виде. Для этого введем скалярное произведение и норму на пространстве  $V = \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ :

$$(u, \eta)_V = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \eta) dx, \quad \|u\|_V^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u, \eta \in V.$$

Из леммы 1 следует, что для функции  $u \in V$  и произвольной функции  $\eta \in V$  определена линейная и непрерывная по  $\eta$  форма (функционал  $l_u : V \rightarrow R^1$ )

$$l_u(\eta) = \int_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G \nabla w_0, \nabla \eta) dx.$$

По теореме Рисса–Фишера существует элемент из пространства  $V$  (обозначим его  $H(u)$ ) такой, что  $(H(u), \eta)_V = l_u(\eta)$  для произвольной функции  $\eta$  из пространства  $V$ . Введем оператор  $H : V \rightarrow V$ :

$$(Hu, \eta)_V = \int_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G \nabla w_0, \nabla \eta) dx.$$

Тогда итерационный процесс для нахождения функции  $u$  запишем в виде

$$(u^{k+1}, \eta)_V = (u^k, \eta)_V - \tau (Hu^k, \eta)_V \quad \forall \eta \in V,$$

или, более коротко, в операторном виде

$$u^{k+1} = u^k - \tau Hu^k. \quad (8)$$

Таким образом, рассматриваемый итерационный метод есть метод простой итерации для решения уравнения  $Hu = 0$ . Запишем это уравнение в вариационном виде

$$\int_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0) - G\nabla w_0, \nabla \eta) dx = 0 \quad \forall \eta \in V. \quad (9)$$

Вспомним, что для поиска функции  $w_0$  использовалось вариационное равенство (3), пользуясь (9), получим равенства

$$\int_{\Omega} (g(x, \nabla u + \nabla w_0), \nabla \eta) dx = \int_{\Omega} (G\nabla w_0, \nabla \eta) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in V.$$

Поскольку функция  $u$  из  $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$ , а  $w_0$  удовлетворяет граничному условию (4), то функция  $w = u + w_0$  является решением исходной задачи (1), (2).

Для оператора  $H$  справедлива

**Лемма 2.** Пусть относительно функции  $g(x, \lambda) : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$  выполнены условия 1)–4). Тогда для оператора  $H$  выполнены условия сильной монотонности

$$(Hu - Hv, u - v)_V \geq m\|u - v\|_V^2,$$

Липшиц-непрерывности

$$\|Hu - Hv\|_V \leq M\|u - v\|_V.$$

Используя лемму 2 и рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3.4 ([2], с. 104), получаем ключевой результат настоящей работы.

**Теорема.** Пусть относительно функции  $g(x, \lambda) : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$  выполнены условия 1)–4). Тогда итерационный процесс (8) сходится в норме  $V$  со скоростью геометрической прогрессии с показателем  $q = q(\tau) = \sqrt{1 - 2m\tau + M^2\tau^2} < 1$ , если  $\tau$  выбрано из интервала  $(0, 2m/M^2)$  справедлива оценка

$$\|u^k - u\|_V \leq \frac{q^k \tau}{1 - q} \|Hu^0\|_V.$$

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решение краевой задачи (1), (2) представлено в виде  $w = \Phi + u_0 + u$ . Функция  $\Phi(x) \in W_1^{(1)}(\Omega)$  имеет явный вид и является решением линейной эллиптической (с постоянными коэффициентами) дифференциальной задачи с источником интенсивности  $q$ . Функция  $u_0 \in W_2^{(1)}(\Omega)$  находится из решения эллиптической однородной краевой задачи (6) с постоянными коэффициентами и краевыми условиями (7). Для поиска функции  $u(x)$  использован итерационный процесс (8) (на каждом шаге необходимо решать уравнение Лапласа), сходящийся в норме  $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(\Omega)$  со скоростью геометрической прогрессии.

В качестве примера краевой задачи (1), (2), для которой выполнены предположения 1)–4), приведем задачу из теории фильтрации несжимаемой жидкости в двух- и трех-мерном пространствах, следующей нелинейному закону

$$g(x, \lambda) = \frac{|\lambda| + \kappa(x)[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|} \lambda, \quad (10)$$

где функции  $\mu, \kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измеримы и ограничены, а функция  $[\cdot]_+$  — "срезка":

$$0 \leq \mu(x) \leq \bar{\mu}, \quad -1 < \underline{\kappa} \leq \kappa(x) \leq \bar{\kappa}, \quad [s]_+ = \begin{cases} 0, & s < 0; \\ s, & s \geq 0. \end{cases}$$

Введем функцию  $p(x, s) \equiv s + \kappa(x)[s - \mu(x)]_+$ , тогда  $g(x, \lambda) = p(x, |\lambda|)|\lambda|^{-1} \lambda$ . Очевидно, для всех  $x \in \Omega$  функция  $p(x, s)$  сильно монотонна по  $s \geq 0$  с константой  $m = \min\{1, 1 + \underline{\kappa}\}$  и Липшиц-непрерывна с константой  $M = \max\{1, 1 + \bar{\kappa}\}$ . Тогда и функция  $g(x, \lambda)$  для всех  $x \in \Omega$  сильно монотонна и Липшиц-непрерывна по  $\lambda \in \mathbb{R}^n$  с теми же константами  $m$  и  $M$ . Таким образом, условия 1) и 2) выполнены, условие 3), очевидно, имеет место. Покажем теперь, что выполнено условие 4).

Пусть существуют положительные постоянные  $r, c$  и  $\beta > 0$  при  $n = 2$ ,  $\beta > 0.5$  при  $n = 3$  такие, что выполнено условие

$$|\kappa(x) - \kappa(0)| \leq c|x|^\beta \quad \forall x \in B_r(0) \subset \Omega, \quad (11)$$

т. е. функция  $\kappa$  непрерывна по Гёльдеру в начале координат (в точке сосредоточения источника) с показателем  $\beta$ , тогда в окрестности нуля  $B_r(0)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} |g(x, \lambda) - (1 + \kappa(0))\lambda| &= \left| \frac{(\kappa(x) - \kappa(0))[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|} \lambda + \frac{\kappa(0)([|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|)}{|\lambda|} \lambda \right| \leq \\ &\leq |\kappa(x) - \kappa(0)| |\lambda| \left| \frac{[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|} \right| + |\kappa(0)([|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|)| \leq c|x|^\beta |\lambda| + |\kappa(0)| \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция, определенная в (10), удовлетворяет условию 4) с  $\alpha = \beta$  и матрицей  $G = (1 + \kappa(0))I$  ( $I$  — единичная матрица).

Частным случаем (10) является линейный закон. Пусть  $g(x, \nabla w(x)) = c(x)\nabla w(x)$  и выполнено неравенство  $0 < \underline{c} \leq c(x) \leq \bar{c}$ . Тогда, положив  $\mu(x) \equiv 0$ ,  $\kappa(x) = c(x) - 1$ ,  $\underline{\kappa} = \underline{c} - 1$ , и предполагая выполненным условие Гёльдера (11) для функции  $c(x)$  с указанными выше для  $n = 2, 3$  показателями, получим условие 4) с матрицей  $G = c(0)I$ .

Другие примеры нелинейных краевых задач с точечным источником в правой части приведены в [3]–[5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Задворнов О.А. *Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников*, Учен. зап. Казанск. ун-та, Сер. Физ.-матем. науки **152** (1), 155–163 (2010).
- [2] Гаевский Х., Грегер К., Захарияс К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).
- [3] Задворнов О.А., Задворнова Г.О. *О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника*, Дифференц. уравнения **50** (7), 984–988 (2014).
- [4] Бадриев И.Б., Бандеров В.В., Задворнов О.А. *Существование решения задачи о равновесии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечной нагрузки*, Учен. зап. Казанск. ун-та, Сер. Физ.-матем. науки. **152** (1), 93–102 (2010).
- [5] Задворнов О.А. *Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника*, Изв. вузов. Матем. (1), 25–30 (2005).

Олег Анатольевич Задворнов

Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Oleg.Zadvornov@kpfu.ru

*Галина Олеговна Трифонова*

*Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,*

*e-mail: GaOZadvornova@kpfu.ru*

*O.A. Zadvornov, G.O. Trifonova*

**Iterative method for solving a non-linear edge problems with a point source**

*Abstract.* In this paper, we consider the first boundary value problem for a quasilinear equation in a bounded domain with a point source. The solution of the problem is sought in the form of the sum of three functions. The first function is represented explicitly and is the solution of a linear equation with a point source with constant coefficients. The second function is found from the solution of a linear homogeneous boundary value problem with constant coefficients. To search for the third function an iterative process is used that converges strongly in the Sobolev space at the rate of a geometric progression.

*Keywords:* point source, non-linear boundary value problem, iterative process.

*Oleg Anatolevich Zadvornov*

*Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

*e-mail: Oleg.Zadvornov@kpfu.ru*

*Galina Olegovna Trifonova*

*Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,*

*e-mail: GaOZadvornova@kpfu.ru*