УДК 510.5 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
DOI 10.33048/mattrudy.2023.26.205 2023, том 26, № 2, 86 - 128

НЕГАТИВНЫЕ НУМЕРАЦИИ В ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВАХ, II

И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко, М. Х. Файзрахманов

В статье приводятся конструкции, используемые для доказательства основного результата работы тех же авторов “Негативные нумерации в допустимых множествах, I”, которые базируются на автоморфизмах и свойствах пространства Кантора.

Ключевые слова и фразы: Σ-подмножество, структура, пространство Кантора, автоморфизм, вычислимое множество, вычислимо перечислимое множество, допустимое множество.

§ 1. Введение и основные понятия

В работе излагаются утверждения, носящие в большей степени технический характер, необходимые для получения основных результатов из [1]. Все предварительные сведения, используемые здесь, приводятся там же. Методы работы с автоморфизмами структур фактически не выходят за рамки понятийного аппарата (при необходимости детального их рассмотрения следует обратиться к [2]).

Напомним структуру, играющую здесь ключевую роль, а также основное утверждение.

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ — семейство всех арифметических подмножеств натуральных чисел.

Определение 1. Определим $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$ как модель сигнатуры $\sigma_0 \rightleftharpoons \{\mathrm{s}^2, \mathrm{S}^1, \mathrm{R}^2\}$ следующим образом:
• основным множеством служит $\omega \uplus \biguplus\{P_A \mid A \in \mathcal{S}\}$, причём множество P_A бесконечно для каждого $A \in \mathcal{S}$;
• s интерпретируется как график функции $\lambda x.(x \dot{-} 1)$ на ω (а именно, $\mathrm{s}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}} \rightleftharpoons \{\langle n+1, n\rangle \mid n \in \omega\} \cup \{\langle 0, 0\rangle\}$; данное условие обеспечивает наличие структуры натуральных чисел в $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$);
• S интерпретируется как множество кодов элементов семейства $\mathcal{S}$, а R интерпретируется как отношение принадлежности натуральных чисел множествам семейства $\mathcal{S}$, которые кодируются соответствующими элементами (а именно, $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}} \rightleftharpoons \biguplus\{P_A \mid A \in \mathcal{S}\}$ и $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}} \rightleftharpoons \{\langle x, n\rangle \mid x \in P_A$ и $n \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{S}\}$; отношение $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}}$ и множество $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}}$ позволяют в структуре $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$ закодировать все множества семейства $\mathcal{S}$, при этом каждое такое множество будет иметь бесконечно много кодов). $\diamond$

Работа первого и третьего авторов поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944), работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, базовый проект № FWNF-2022-0012 (Классификационные вопросы синтаксиса и семантики логических систем).

Часто будем записывать просто S вместо интерпретации $\mathrm{S}^{\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}}$.

Теорема. *Семейство $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}))$ всех Σ-подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ имеет негативную вычислимую $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумерацию, но не имеет позитивных вычислимых $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-нумераций.*

В дальнейшем в качестве наследственно конечной надстройки будем рассматривать модель $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ сигнатуры $\sigma_0^* \leftrightharpoons \sigma_0 \uplus \{\mathrm{U}^1, \in^2, \varnothing\}$ (подробности см. в [1]); в частности, все формулы на структуре $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ (необязательно Σ-формулы) будут рассматриваться в этой сигнатуре.

Работа состоит из трёх параграфов: в первом содержатся свойства автоморфизмов на параметрах Σ-формул, сохраняющие их решения; во втором содержится способ оптимизации количества параметров Σ-формул, который базируется на свойствах автоморфизмов и всевозможных представлениях Σ-подмножеств в наследственно конечных надстройках; в третьем приводится представление Σ-формулы арифметическим подмножеством натуральных чисел, обладающим определёнными свойствами единственности.

Отметим, что любой автоморфизм f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ действует тождественно на $\omega \subseteq \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$ и, к тому же, единственным образом продолжается до автоморфизма $f^{\#}$ структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, причём $f^{\#}(a) = \{f^{\#}(z) \mid z \in a\}$ для любого $a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \setminus \mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$. Поэтому f однозначно задаётся действием на множестве S. Более того, справедливо следующее утверждение, доказанное в [1] (лемма 1).

Лемма 1. *Существует частичная инъективная Σ-функция F, для которой справедливы соотношения $\rho F = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ и $\delta F \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S})$.*

Эта лемма позволяет в дальнейшем рассматривать только элементы множества $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ в качестве множества решений формул, а в качестве параметров — элементы из S.

Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{v})$ — Σ-формула сигнатуры σ_0^* и пусть $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{v})}$; тогда запись $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ будет означать, что данная Σ-формула рассматривается с набором $\overrightarrow{s}$ параметров.

§ 2. Автоморфизмы и Σ-формулы

Пусть $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$ — Σ-формулы; будем называть их *Σ-эквивалентными* и обозначать это обстоятельство как $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, если имеет место соотношение

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')).$$

Отметим, что отношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$ равносильно тому, что эти формулы с соответствующими параметрами определяют одно и то же множество. В частности, заданное отношение Σ-эквивалентности индуцирует отношение эквивалентности на парах вида $\langle\Phi, \overrightarrow{s}\rangle$, где $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ — Σ-формула (ср. с конструкцией универсального Σ-предиката из теоремы 2.6.2 [3]).

Будем говорить, что функция f, $\delta f \cup \rho f \subseteq \mathrm{S}$, *сохраняет решение Σ-формулы* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, если выполняется соотношение $\Phi(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi(x, f(\overrightarrow{s}))$. Это понятие будет в основном использоваться в случаях, когда f является подстановкой на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ или автоморфизмом структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$.

Напомним одно простое, но ключевое свойство, которое будем активно использовать ниже. Пусть Ψ — формула сигнатуры σ_0^* (необязательно Σ-формула) без параметров, $\overrightarrow{s}$ — набор элементов из S и пусть f — автоморфизм структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$. Тогда имеет место следующая эквивалентность:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Psi(\overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Psi(f(\overrightarrow{s})). \tag{1}$$

Заметим, что свойство сохранения решения для Σ-формул инвариантно относительно автоморфизмов, действующих на параметрах Σ-эквивалентных Σ-формул. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$ таковы, что имеет место соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, и пусть f — автоморфизм структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$. Тогда f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, если и только если f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$.*

Доказательство. Пусть $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$ — Σ-эквивалентные Σ-формулы, а f — автоморфизм структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$. Докажем лишь импликацию в прямом направлении: обратная импликация доказывается точно так же. Пусть f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$. Тогда утверждение вытекает из следующей системы эквивалентностей (здесь $a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$):

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Phi_0(a, f(\overrightarrow{s})) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Phi_0(a, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Phi_1(a, \overrightarrow{s}') \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \Phi_1(a, f(\overrightarrow{s}'))$$

(первая эквивалентность вытекает из того, что f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$; вторая эквивалентность следует из того, что Σ-эквивалентны Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$; а третья эквивалентность является частным случаем (1), где в качестве Ψ, $\overrightarrow{s}$ и f выступают соответственно формула $\forall x(\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \Phi_1(x, \overrightarrow{s}'))$, набор $\overrightarrow{s}\,\hat{}\,\overrightarrow{s}'$ и автоморфизм f). $\square$

Заметим, что автоморфизмы, сохраняющие фиксированное решение Σ-формулы, образуют группу. Более точно, выполняются следующие условия для автоморфизмов f_0, f_1 структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$ и Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s})$:

• тождественный автоморфизм $\mathrm{id_S}$ сохраняет решение $\Phi(x,\overrightarrow{s})$;
• если f_0 сохраняет решение Σ-формулы $\Phi(x,\overrightarrow{s})$, то f_0^{-1} сохраняет решение $\Phi(x,f_0(\overrightarrow{s}))$;
• если f_0 и f_1 сохраняют решения Σ-формул $\Phi(x,\overrightarrow{s})$ и $\Phi(x,f_0(\overrightarrow{s}))$ соответственно, то $f_1\circ f_0$ сохраняет решение $\Phi(x,\overrightarrow{s})$.

Тем самым, следующее несложное утверждение позволяет значительно расширить класс рассматриваемых автоморфизмов.

Лемма 3. *Пусть $\Phi(x,\overrightarrow{s})$ — Σ-формула и пусть f — автоморфизм модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Тогда f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi(x,\overrightarrow{s})$.*

Доказательство. В самом деле, имеет место соотношение
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})\models\forall x(\Phi(x,\overrightarrow{s})\leftrightarrow\Phi(x,f(\overrightarrow{s}))),$$
поскольку по условию выполняется равенство $f(\overrightarrow{s})=\overrightarrow{s}$. □

Прежде, чем перейти к процедурам удаления параметров, приведём ещё один универсальный способ построения автоморфизмов.

Лемма 4. *Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})$ и $\Phi_1(x,\overrightarrow{s}')$ таковы, что имеют место следующие соотношения:*
• $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')\neq\varnothing$;
• $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})\equiv_\Sigma\Phi_1(x,\overrightarrow{s}')$.

Тогда для любых $r_0\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$ и автоморфизма f, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\setminus\{r_0\}$, имеет место соотношение $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})\equiv_\Sigma\Phi_0(x,f(\overrightarrow{s}))$.

Доказательство. Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})$, $\Phi_1(x,\overrightarrow{s}')$ и элемент $r_0\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$ удовлетворяют посылке леммы. Кроме того, пусть автоморфизм f действует тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\setminus\{r_0\}$. Для того, чтобы доказать, что f сохраняет решение $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})$, представим его в виде композиции трёх автоморфизмов (а именно, $f=h_2\circ h_1\circ h_0$), каждый из которых будет сохранять решение соответствующей Σ-формулы.

Если $f(r_0)\in[r_0]_\mathrm{R}\setminus(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\cup\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}'))$, то положим $h_0\leftrightharpoons\mathrm{id_S}$, т. е. $h_0(s)=s$ для всех $s\in\mathrm{S}$. Предположим теперь, что $f(r_0)\in\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$; берём автоморфизм h_0 структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и переводящий $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ в $\mathrm{S}\setminus\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$. Такой автоморфизм можно построить с помощью челночной конструкции (более того, он может быть выбран финитарной инволюцией). По лемме 3, h_0 сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x,\overrightarrow{s})$, а по лемме 2, данный автоморфизм сохраняет также решение Σ-формулы $\Phi_1(x,\overrightarrow{s}')$; следовательно, имеем $\Phi_1(x,\overrightarrow{s}')\equiv_\Sigma$

$\Phi_1(x, h_0(\overrightarrow{s}'))$ и $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_0(x, h_0(\overrightarrow{s}))$. Отметим, что имеют место соотношения $h_0(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{s}$ и $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') \cap \mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s}')) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$; следовательно, выполняется система отношений

$$f(r_0) \in [h_0(r_0)]_{\mathrm{R}} \setminus (\mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s})) \cup \mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s}'))) = [r_0]_{\mathrm{R}} \setminus (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s}'))).$$

Возьмём теперь автоморфизм h_1 структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$, действующий тождественно на $h_0^{\#}(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}) \cup h_0^{\#}(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')) = (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}) \cup \mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s}'))$ и переводящий r_0 в $f(r_0)$. В качестве такого автоморфизма можно взять, к примеру, транспозицию $(r_0\, f(r_0))$. По лемме 3, автоморфизм h_1 сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_1(x, h_0(\overrightarrow{s}'))$, а по лемме 2, данный автоморфизм сохраняет также решение $\Phi_0(x, h_0(\overrightarrow{s}))$. Следовательно, $(h_1 \circ h_0)$ сохраняет решение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$.

Положим $h_2 \leftrightharpoons f \circ (h_1 \circ h_0)^{-1}$; тогда автоморфизм h_2 действует тождественно на $f(\overrightarrow{s}) = (h_1 \circ h_0)(\overrightarrow{s})$, а по лемме 3, автоморфизм h_2 сохраняет решение $\Phi_0(x, (h_1 \circ h_0)(\overrightarrow{s}))$.

Таким образом, f сохраняет решение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$. $\square$

§ 3. Оптимизация параметров

В дальнейшем все рассуждения будем проводить, рассматривая лишь структуру $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$ на множестве $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, при этом отождествляя структуру $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$ сигнатуры σ_0 и модель сигнатуры $\sigma_1 \leftrightharpoons \{\mathrm{R}^2\} \cup \{\mathbf{m} \mid m \in \omega\}$, заданную на том же множестве, в которой символ R интерпретируется как прежде, множество S служит одним из сортов, а константные символы выделяют соответствующие элементы множества ω (см. определения 3, 5, лемму 2 [1]). Другими словами, будем предполагать наличие двухсортной структуры в качестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$, в которой переменные принимают только значения из $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$: носителем другого сорта является множество $\{a \in \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) | \mathrm{sp}(a) \cap \omega \neq \varnothing\}$; это возможно, в силу сведения бинарного отношения $\lambda x.\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}}(x, n)$, где $n \in \omega$, к счётному семейству $\{\mathrm{R}^{\mathfrak{M}_\mathcal{S}}(\cdot, \mathbf{n}) | n \in \omega\}$ унарных отношений, а также наличия инъективной частичной Σ-функции, действующей из некоторого $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$-вычислимого подмножества $HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ на множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$, что следует из леммы 1.

Здесь и далее будет использоваться обозначение $\mathrm{R}_l(\cdot)$ для формулы $\mathrm{R}(\cdot, \mathbf{l})$ наряду с обычным использованием данной формулы $(l \in \omega)$.

Кроме того, все Σ-формулы в настоящей работе будут рассматриваться в сигнатуре σ_0^* с попарно различными параметрами из S.

В дальнейшем, дополнительные переменные будем часто отождествлять с параметрами, которые они принимают в качестве своих значений.

Метод представления Σ-подмножеств в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S})$ в виде т. н. вычислимых дизъюнкций $\exists$-формул на $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$ подробно излагается в [1] (более точно, даются эффективное и притом почти однозначное представление элементов (определение 2), а также собственно представление Σ-подмножеств (теоремы 1, 2)). Согласно замечанию 1 [1], формулы сигнатуры σ_1 задаются стандартной гёделевой нумерацией, в которой по $n \in \omega$ эффективно находится номер константного символа $\mathbf{n}$. В результате приходим к следующему утверждению (лемма 3 [1]).

Лемма 5. *По любой Σ-формуле $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ строится и притом эффективно вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, удовлетворяющая следующему соотношению:*

$$\begin{gathered}\{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} | \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s})\} = \\ = \{t_l(\overrightarrow{a}) | l \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_l},\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \\ \text{для некоторой } \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in A_l,\ \mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_l,\ \mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\}.\end{gathered} \tag{2}$$

В обратную сторону, если последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, вычислима, то она задаёт и притом эффективно некоторую Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ (в смысле (2)).

Пусть даны множество $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, определимое в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ Σ-формулой $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ (возможно, невычислимая) множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, где $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}^{<\omega}_{\neq}$ —набор параметров. Будем говорить, что $\{A_n\}_{n\in\omega}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров *задаёт* D (или, что то же самое, множество D *задаётся* последовательностью $\{A_n\}_{n\in\omega}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров), если имеет место равенство (2). При этом последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ с набором $\overrightarrow{s}$ параметров будем обозначать как $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$. Более того, для каждой последовательности в формулировках утверждений и их доказательствах набор заданных с ней параметров будет фиксирован, поэтому в таких случаях записи $\{A_n\}_{n\in\omega}$ и $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ будут равноправными.

Чтобы не возникало проблем с восприятием, запись "*последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ вычислима (с оракулом $A \subseteq \omega$)*" означает, что соответствующая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$ множеств формул от основных и дополнительных переменных является таковой (с тем же оракулом), при этом сложность набора параметров не будет учитываться.

Если последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ задаёт множество, определимое Σ-формулой $\Psi(x, \overrightarrow{s}')$ сигнатуры σ_0^*, то будем писать просто "$\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ *задаёт* $\Psi(x, \overrightarrow{s}')$" (здесь набор $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}^{<\omega}_{\neq}$ может отличаться от $\overrightarrow{s}$, даже с точностью до порядка элементов в кортеже).

Ниже активно будем использовать представление Σ-подмножеств в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ с помощью аппроксимаций. Сначала зададим сильно вычислимую последовательность $\{\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)\}_{n\in\omega}$ структур сигнатуры σ_0^* (см. определение 4 [1]). Тогда она будет удовлетворять теореме 3 [1]. Как и выше, модель $\mathfrak{M}_n$ можно отождествить со структурой сигнатуры $\sigma_1^{(n)} \leftrightharpoons \{\mathrm{R}^2\} \cup \{\mathbf{m} \mid m \in \omega, m \leqslant n\}$, заданной на том же множестве, в которой R интерпретируется как прежде, а константные символы также будут выделять соответствующие элементы множества ω ($n \in \omega$). Рассмотрение стандартной гёделевой нумерации для σ_1 будет гарантировать свойство последовательности $\{\mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n)\}_{n\in\omega}$ быть сильно вычислимой при таком отождествлении.

Введём ещё одно обозначение, также играющее ключевую роль в настоящей работе. Пусть каждый из наборов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ составлен из элементов в точности одного из множеств S или S_n, где $n \in \omega$. Будем использовать запись $\langle \overrightarrow{a}; = \rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; = \rangle$, если выполняются равенство $\mathrm{lh}(\overrightarrow{a}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{b})$, а также соотношение $(a_i = a_j) \Leftrightarrow (b_i = b_j)$, для всех $i, j \in \omega$ $(0 \leqslant i < j < \mathrm{lh}(\overrightarrow{a}))$.

Теоретико-модельное описание последовательности $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ структур в последовательности $\{\sigma_1^{(n)}\}_{n\in\omega}$ сигнатур содержится в следующем замечании.

Замечание 1. Пусть $m \in \omega$ и пусть $\varphi(\overrightarrow{y})$ — бескванторная формула сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ от свободных переменных $\overrightarrow{y}$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{y}) \leqslant 2m + 2$ (свободными могут быть как основные, так и дополнительные переменные). Тогда имеют место следующие соотношения:

(1): для любых $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ и $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_m^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_m \models \varphi(\overrightarrow{b}),$$

как только выполняются соотношения

$$\gamma_m(\overrightarrow{b}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{a}) \restriction (m+1) \text{ и } \langle \overrightarrow{a}; = \rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; = \rangle;$$

(2): для любых $n \in \omega$, $n > m$, кортежей $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ и $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_m^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{y})}$ справедлива эквивалентность

$$\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_m \models \varphi(\overrightarrow{b}),$$

как только выполняются соотношения

$$\gamma_m(\overrightarrow{b}) = \gamma_n(\overrightarrow{a}) \restriction (m+1) \text{ и } \langle \overrightarrow{a}; = \rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}; = \rangle.$$

Условия (**1**), (**2**) являются переформулировками для множества бескванторных предложений структуры $(\mathfrak{M}_m, \overrightarrow{b})$, где $\overrightarrow{b}$ — кортеж элементов $\mathfrak{M}_m$. $\diamond$

Сначала формулы, принадлежащие множествам последовательности, определённой в лемме 5, приведём к ещё более простому виду, при наличии автоморфизмов структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующих на параметрах, которые сохраняют решение выбранной Σ-формулы. Начнём изложение с формулировки следующего соглашения.

Соглашение 1. Пусть $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ и $\{A_n\}_{n\in\omega}$ — соответственно Σ-подмножество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_S)$ и последовательность (возможно, невычислимая) множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, такие что последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}(\overrightarrow{s})$ задаёт D, где $\overrightarrow{s}$ — набор параметров из S.

(1) Будем предполагать, что справедливы следующие условия (здесь и далее $k = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$, $l \in \omega$, $\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{n_l-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}) \in A_l$):

(1.1): A_l *замкнуто относительно группы* $\mathfrak{S}_l$, т. е. $A_l = A_l^{\mathfrak{S}_l}$, где $\mathfrak{S}_l$ задана в определении 2 [1] (для обеспечения данного условия следует рассмотреть замыкание множества A_l относительно операции $(\varphi, \pi) \mapsto \varphi^\pi$, где $\varphi \in A_l$ и $\pi \in \mathfrak{S}_l$);

(1.2): формула φ представляет собой *конъюнкцию атомарных формул и/или их отрицаний* (сначала любую бескванторную формулу приведём к ДНФ, а затем её элементарную конъюнкцию поместим в соответствующее множество последовательности);

(1.3): к тому же, φ не содержит в качестве конъюнктов одновременно атомарной формулы и её отрицания (иначе заменим φ на $\bot \leftrightharpoons \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$);

(1.4): если $n_l + k = 0$, то A_l может содержать только $\bot$ или тождественно истинное предложение $\top \leftrightharpoons (\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$.

Кроме того, поскольку в качестве аргументов терма t_l и параметров могут выступать попарно различные элементы множества S, будем предполагать, что все конъюнкты от переменных $u_0, u_1, \ldots, u_{n_l-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$, содержащие символ $\approx$ и входящие в формулу $\varphi \notin \{\bot, \top\}$, будут составлять в точности следующий список конъюнктов (наличие двух последних пп. в нём во многом связано со свойством совместимости формулы φ):

(1.5): $\neg(u_i \approx u_j)$ $(i, j \in \omega,\ i < j < n_l)$;

(1.6): $\neg(v_i \approx v_j)$ $(i, j \in \omega,\ i < j < k)$;

(1.7): для каждой пары $\langle i, j\rangle \in \omega^2$ $(i < n_l,\ j < k)$ существует не более одной формулы из совокупности $\{(u_i \approx v_j), \neg(u_i \approx v_j)\}$;

(1.8): каково бы ни было $i_0 \in \omega$ $(i_0 < n_l)$, существует не более одной пары $\langle i_0, j_0\rangle \in \omega^2$ $(j_0 < k)$, для которой $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ встречается в качестве конъюнкта в φ;

(1.9): каково бы ни было $j_0 \in \omega$ $(j_0 < k)$, существует не более одной пары $\langle i_0, j_0\rangle \in \omega^2$ $(i_0 < n_l)$, для которой $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ встречается в качестве конъюнкта в φ.

(2, *F*) Пусть $F \subseteq \{j \in \omega | 0 \leqslant j < k\}$; дополнительно ко всем условиям из (**1**) данного соглашения будет выполняться следующее условие для чисел $l, k \in \omega$ и формулы $\varphi \notin \{\bot, \top\}$, заданных в разделе (**1**):

(2.10): для любой пары $\langle i, j\rangle \in \omega^2$ $(i < n_l,\ j < k,\ j \notin F)$ формула $(u_i \approx v_j)$ входит в качестве подформулы в φ (в противном случае воспользуемся эквивалентностью $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv (\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge ((u_i \approx v_j) \vee \neg(u_i \approx v_j))) \equiv ((\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge (u_i \approx v_j)) \vee (\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge \neg(u_i \approx v_j)))$; тем самым, приходим к рассмотрению двух формул $(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge (u_i \approx v_j))$, $(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge \urcorner(u_i \approx v_j))$ вместо φ; при необходимости следует продолжить данный процесс).

Множество $F \subseteq \omega$ будем в дальнейшем отождествлять с множеством параметров, являющихся значениями переменных v_j, где $j \in F$. $\diamond$

Пусть последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ такова, что A_k состоит из конъюнкций атомарных формул и/или их отрицаний сигнатуры σ_1 от переменных u_0, u_1, …, u_{n_k-1} для каждого $k \in \omega$, и пусть $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Определим последовательность $\{E_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ следующим образом (при этом трансформацию, которая сопоставляет последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}$ последовательность $\{E_k\}_{k\in\omega}$, обозначим как $(\mathbf{AE(r)})$). Возьмём любые число $k \in \omega$ и формулу $\varphi \in A_k$.

• Если $(u_i \approx r)$ не является конъюнктом формулы φ ни для какого $i \in \omega$, $i < n_k$, то поместим формулу φ в E_k.

• Пусть теперь $(u_{i_0} \approx r)$ является конъюнктом формулы φ для некоторого $i_0 \in \omega$, $i_0 < n_k$; сначала найдём наименьшее число $m_0 \in \omega$ так, чтобы выполнялось неравенство $m_0 + 1 \geqslant \max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}), n+1\}$, где, в свою очередь, $n \in \omega$ — наименьшее число такое, что φ является формулой сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$. Отметим, что это неравенство связано с определением $\mathbb{HF}_{m_0}(\mathfrak{M}_{m_0})$, что позволяет использовать методы, касающиеся аппроксимации. Зададим соответствие ς_φ между натуральными числами и множеством $\{0, 1\}$ так:

$$\varsigma_\varphi(l, \varepsilon) \Leftrightarrow \big(\mathrm{R}_l^\varepsilon(u_{i_0}) \text{ или } \mathrm{R}_l^\varepsilon(r) \text{ – конъюнкт } \varphi\big).$$

Обозначим через F_φ множество всех бинарных строк $\tau \trianglerighteq \varsigma_\varphi$ длины m_0+1.

(a) Если ς_φ не является функцией, то полагаем $F_\varphi \leftrightharpoons \varnothing$ и помещаем формулу $\urcorner(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ в E_k.

(b) Далее, пусть теперь $F_\varphi \neq \varnothing$; тогда положим в качестве $\psi_{\varphi,\tau}$ формулу

$$\left(\bigwedge_{j=0}^{n_0} (\mathrm{R}_j^{\tau(j)}(u_{i_0}) \wedge \mathrm{R}_j^{\tau(j)}(r))\right) \wedge \varphi$$

и поместим все элементы множества $\{\psi_{\varphi,\tau} | \tau \in F_\varphi\}$ в E_k, не помещая при этом самой формулы φ (разумеется, следует оставить по одному каждому конъюнкту среди повторяющихся, удалив дубликаты, чтобы, с одной стороны, сохранить отношение её истинности и/или ложности на кортежах, а с другой стороны, все её конъюнкты были попарно различными). Здесь фактически впервые используется свойство компактности пространства Кантора (подробности см. в доказательстве леммы 12).

Тем самым, приходим к следующему утверждению.

Лемма 6. *Пусть даны* Σ*-формула* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, *множество* $F \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, *элемент* $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F$ *и вычислимая последовательность* $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, *удовлетворяющая соглашению 1*$(2,\, F)$, *а также задающая* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$. *Пусть также последовательность* $\{E_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ *получена из последовательности* $\{A_k\}_{k\in\omega}$ *с помощью* $(\mathbf{AE(r)})$. *Тогда последовательность* $\{E_k\}_{k\in\omega}$ *будет также вычислимой, удовлетворять соглашению 1*$(2,\, F)$ *и задавать* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$.

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, множество $F \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и элемент $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F$, а также последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ и $\{E_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют посылке леммы.

Так как последовательность $\{E_k\}_{k\in\omega}$ строится эффективно по вычислимой последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}$, то и $\{E_k\}_{k\in\omega}$ также вычислима.

Перейдём теперь к доказательству того, что $\{E_k\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет соглашению $1(2,\, F)$. Из того, что последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет соглашению $1(2,\, F)$, сразу получаем, что $\{E_k\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{1.2})$–$(\mathbf{1.9})$, $(\mathbf{2.10})$ соглашения $1(2,\, F)$. Для проверки условия $(\mathbf{1.1})$ соглашения 1 разберём все варианты появления формулы $\psi \in E_k$, где $k \in \omega$. Если ψ не содержит конъюнктов вида $(u \approx r)$, где u — основная переменная, то ψ есть $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ или $\psi \in A_k$; следовательно, $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})^\pi$ есть $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, или $\psi^\pi \in A_k \cap E_k$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_k$. Пусть теперь ψ содержит конъюнкт вида $(u \approx r)$ для некоторой основной переменной u; тогда ψ имеет вид $\psi_{\varphi,\tau}$ для некоторых $\varphi \in A_k$ и $\tau \in F_\varphi$. Сначала заметим, что $F_\varphi = F_{\varphi^\pi}$ и $\psi_{\varphi^\pi,\tau}$ есть $\psi^\pi_{\varphi,\tau}$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_k$. Таким образом, имеем $\psi^\pi \in E_k$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_k$, поскольку $\{A_k\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет условию $(\mathbf{1.1})$ соглашения 1.

Перейдём, наконец, к проверке того, что последовательность $\{E_k\}_{k\in\omega}$ задаёт $\Phi(x, \overrightarrow{s})$. Возьмём $k \in \omega$ и $\varphi \in A_k$; для достижения нашей цели достаточно доказать, что найдётся конечное множество $F_0 \subseteq E_k$, для которого имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee F_0(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}),$$

для всех $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$. Снова разберём все варианты для формулы φ. Пусть $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$ — любой кортеж.

Если $\varphi \in A_k$ не содержит конъюнктов вида $(u \approx r)$, где u — основная переменная, то $\varphi \in E_k$; следовательно, можно положить $F_0 \leftrightharpoons \{\varphi\}$.

Если же $\varphi \in A_k$ содержит конъюнкт $(u \approx r)$ для некоторой (единственной!) основной переменной u, но ς_φ не является функцией (т. е. $F_\varphi = \varnothing$), то имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \neg \bigwedge\{R^\varepsilon_l(r) | l \in \omega,\, \varepsilon \in \{0,1\},\, \varsigma_\varphi(l,\varepsilon)\}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \neg\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$, поэтому можно положить $F_0 \leftrightharpoons \{\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\}$.

Пусть теперь $F_\varphi \neq \varnothing$; покажем, что в качестве F_0 может выступать $\{\psi_{\varphi,\tau} | \tau \in F_\varphi\}$. В самом деле, пусть сначала $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; так как $(u \approx r)$ является конъюнктом φ для некоторой (снова единственной) основной переменной u, приходим к тому, что выполняется соотношение

$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigwedge\{R_l^{\varepsilon}(r) | l \in \omega,\ \varepsilon \in \{0,\ 1\},\ \varsigma_{\varphi}(l, \varepsilon)\}$. Далее, возьмём единственную строку $\tau_0 \in F_{\varphi}$ с условием $\tau_0 \trianglelefteq \gamma_{\mathcal{S}}(r)$; тогда выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_{\varphi,\tau_0}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ и, в конечном итоге, имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee F_0(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. В обратную сторону, пусть выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee F_0(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; тогда найдётся строка $\tau_1 \in F_{\varphi}$, для которой справедливо соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_{\varphi,\tau_1}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; непосредственно из задания формулы ψ_{φ,τ_1} получаем, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. □

Теперь мы готовы к описанию алгоритма удаления подформул, содержащих одновременно фиксированный параметр r_0, основную переменную и отношение $\approx$ равенства.

Лемма 7. *Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, множество $F \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и элемент $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F$ таковы, что для любых $r \in [r_0]_{\mathrm{R}} \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и автоморфизма f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$ и переводящего r_0 в r, выполняется соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_{\Sigma} \Phi_0(x, f(\overrightarrow{s}))$.*

Пусть также вычислимая последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяет соглашению 1(2, F) и задаёт $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$; кроме того, любая формула $\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$ не содержит $(u \approx s)$ в качестве подформул, где u — основная переменная, а $s \in F$. Пусть, к тому же, последовательность $\{E_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ получена из $\{A_k\}_{k\in\omega}$ с помощью $(\mathbf{AE(r_0)})$.

Пусть, наконец, последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ получена из $\{E_k\}_{k\in\omega}$ согласно следующему правилу:

(7.1): *формула φ получена из некоторой формулы $\psi \in E_k$ путём удаления из неё всех конъюнктов вида $\neg(u \approx r_0)$ и $(u \approx r_0)$ (здесь u — основная переменная), для всех $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$.*

Тогда последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}$ будет удовлетворять также следующим условиям:

(7.2): *$\{B_k\}_{k\in\omega}$ вычислима и удовлетворяет соглашению 1(2, $F \cup \{r_0\}$);*

(7.3): *любая формула $\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} B_k$ не содержит $(u \approx r)$ в качестве подформул, где u — основная переменная, а $r \in F \cup \{r_0\}$;*

(7.4): *данная последовательность задаёт $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$.*

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, множество $F \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, элемент $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F$, а также последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ и $\{E_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют посылке леммы.

Сначала покажем, что любая формула $\psi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} E_k$ не содержит $(u \approx s)$ в качестве подформул, где u — основная переменная, а $s \in F$. Всюду следует воспользоваться тем, что $\{A_k\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет данному условию.

В самом деле, если ψ есть $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ или $\psi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$, то утверждение очевидным образом выполняется; если же ψ имеет вид $\psi_{\varphi,\tau}$ для некоторых

$\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$ и $\tau \in F_\varphi$, то непосредственно из задания формулы ψ получаем, что утверждение также справедливо.

Непосредственно из построения последовательности $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ (см. условие (**7.1**)) вытекает справедливость условий (**7.2**), (**7.3**).

Перейдём теперь к доказательству того, что $\{B_k\}_{k\in\omega}$ задаёт Σ-формулу $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ (см. условие (**7.4**)). Для этого разберём последовательно два случая для формулы $\varphi \in E_k$, где $k \in \omega$: (**A**) сначала из формулы удалим все конъюнкты вида $\neg(u \approx r_0)$, где u — основная переменная; (**B**) затем из полученной формулы удалим при необходимости конъюнкт вида $(u \approx r_0)$, где u также является основной переменной.

(A) Пусть $k \in \omega$ и $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \in E_k$; так как формула (скажем, $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$) будет получена в результате удаления конъюнктивных членов из конъюнкции φ, достаточно доказать справедливость импликации

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee E_k(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}))$$

для любого $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$, поскольку условие $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}))$ выполняется автоматически. Пусть также $\neg(u_i \approx r_0)$ является конъюнктом формулы φ, $i \in \omega$ ($i < n_k$).

A1) *Для некоторого* $j \in \omega$, $j < n_k$, $j \neq i$, *формула* $(u_j \approx r_0)$ *входит в* φ *в качестве конъюнкта.* Проделываем данную процедуру последовательно для каждого $i \in \omega$ такого, что $\neg(u_i \approx r_0)$ является конъюнктом для φ. Перед каждым шагом будем действовать с формулой φ_0, полученной из φ. Если для некоторого $j \in \omega$, $j < n_k$, $j \neq i$, формула $(u_j \approx r_0)$ входит в φ_0 в качестве конъюнкта, то формулу φ_0 можно заменить на эквивалентную ей формулу $[\varphi_0]^{\neg(u_i\approx r_0)}_{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})}$, поскольку в φ_0 в качестве конъюнкта входит также одна из формул $\neg(u_j \approx u_i)$ или $\neg(u_i \approx u_j)$; а следовательно, формула $(\neg(u_i \approx r_0) \wedge (u_j \approx r_0))$ равносильна формулам $((u_j \approx r_0) \wedge \neg(u_i \approx u_j))$ и $((u_j \approx r_0) \wedge \neg(u_j \approx u_i))$. Предположим, что в результате всех таких удалений приходим от формулы $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ к формуле $\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$. Отметим, что выполняется соотношение $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \equiv \varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$; к тому же, в полученной формуле встречается лишь одна подформула вида $(u \approx r_0)$ (здесь u — основная переменная), являющаяся при этом конъюнктом. Положим $H_0 \leftrightharpoons \varnothing$.

A2) *Для некоторого* $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus (F \cup \{r_0\})$ *формула* $(u_i \approx r)$ *входит в* φ *в качестве конъюнкта.* Как и прежде, проделываем данную процедуру последовательно для каждого $i \in \omega$ такого, что $\neg(u_i \approx r_0)$ является конъюнктом для φ. Как и выше, перед каждым шагом будем иметь дело с формулой φ_0, полученной из φ. Формулу φ_0 также можно заменить на формулу $[\varphi_0]^{\neg(u_i\approx r_0)}_{(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})}$, эквивалентную φ_0, если $(u_i \approx r)$ — конъюнкт φ для некоторого $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus (F \cup \{r_0\})$, поскольку в формулу φ_0 в качестве конъюнкта входит также одна из формул $\neg(r_0 \approx r)$ или $\neg(r \approx r_0)$; а следовательно, формула $(\neg(u_i \approx r_0) \wedge (u_i \approx r))$ равносильна формулам $((u_i \approx r) \wedge \neg(r_0 \approx r))$ и $((u_i \approx r) \wedge \neg(r \approx r_0))$. Предположим, что в результате всех таких удалений приходим от формулы $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ к формуле $\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$. Отметим, что, как и выше, выполняется соотношение $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \equiv \varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$. Далее, формула φ_1 удовлетворяет следующему условию: если $j \in \omega$, $j < n_k$, таково, что $\neg(u_j \approx r_0)$ входит в качестве конъюнкта в φ_1, то формула $\neg(u_j \approx r)$ также является конъюнктом φ_1 для любого $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F$. Положим

$$H_0 \leftrightharpoons \{j \in \omega | j < n_k,\ \neg(u_j \approx r_0) \text{ — конъюнкт } \varphi_1\}.$$

Заметим, что если $H_0 \neq \varnothing$, то для каждого $j \in \{m \in \omega | m < n_k\} \setminus H_0$ найдётся и притом единственный элемент $r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus (F \cup \{r_0\})$, для которого $(u_j \approx r)$ является конъюнктом формулы φ_1; более того, такое соответствие между номерами и элементами является инъективным, что вытекает из соглашения 1(2, F) для $\{E_k\}_{k\in\omega}$. Если же формула $(u_{i_0} \approx r_0)$ входит в качестве конъюнкта в φ_1 для некоторого и притом единственного $i_0 \in \omega$, $i_0 < n_k$, то выполняется равенство $H_0 = \varnothing$, согласно (**A1**).

A3) Пусть $H_0 \neq \varnothing$; возьмём любой кортеж $\overrightarrow{a} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n_k-1}\rangle \in \mathrm{S}^{n_k}$. В качестве формулы $\varphi_2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ берём $[\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})]^{\langle\neg(u_j\approx r_0)|j\in H_0\rangle}_{\langle(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})|j\in H_0\rangle}$, совпадающую, как легко видеть, с формулой $[\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})]^{\langle\neg(u_j\approx r_0)|j\in\omega,\, j<n_k\rangle}_{\langle(\mathbf{0}\approx\mathbf{0})|j\in\omega,\, j<n_k\rangle}$. Нетрудно понять, что справедливо соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}).$$

Тем самым, достаточно показать, что выполняется следующее соотношение для всех $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Rightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{s}).$$

Пусть $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$ таково, что $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. Разберём всевозможные случаи, которые реализуются на кортеже $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$.

1) $a_i \neq r_0$ для всех $i \in \omega$, $i < n_k$. Тогда $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ и, следовательно, имеем $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{s})$.

2) $a_{i_0} = r_0$, для некоторого $i_0 \in \omega$, $i_0 < n_k$. Непосредственно из (**A2**) следует, что $i_0 \in H_0$; докажем, что и в этом случае также выполняется соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{s})$.

Сначала покажем, что существует $c_0 \in \mathrm{S} \setminus (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{a}))$ такой, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}, \overrightarrow{s})$. Возьмём автоморфизм f_0 структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на множестве $(\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}) \setminus \{a_{i_0}\}) \cup (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\})$ и переводящий r_0 в элемент $c_0 \in \mathrm{S} \setminus (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{a}))$, имеющий тот же $\gamma_{\mathcal{S}}$–код, что и $r_0 (= a_{i_0})$ (к примеру, в качестве f_0 можно взять транспозицию $(r_0\, c_0)$). Далее, представим (разумеется, с точностью до перестановки конъюнктов) формулу $\varphi_2(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ в виде $(\psi_0 \wedge \psi_1)$ следующим образом.

• *ψ_1 состоит в точности из конъюнктов формулы φ_2, в которых встречаются дополнительные переменные, принимающие значения из $F \cup \{r_0\}$.* Тогда $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_1([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}, \overrightarrow{s})$, поскольку формула ψ_1 основных переменных не содержит (это вытекает из задания формулы φ_2).

• *ψ_0 состоит из конъюнктов формулы φ_2, не входящих в ψ_1.* Тогда $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_0([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}, \overrightarrow{s})$, поскольку имеет место равенство $f_0(\overrightarrow{a}) = [\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}$; кроме того, f_0 действует тождественно на множестве $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$, а формула ψ_0 не содержит дополнительной переменной, принимающей значение r_0.

Следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}, \overrightarrow{s})$; наконец, имеем условие $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{c_0}, \overrightarrow{s})$, поскольку выполняются соотношения $c_0 \neq r_0$ и $a \neq r_0$ для всех $a \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{a}) \setminus \{a_{i_0}\}$.

Возьмём теперь автоморфизм f_1 структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}) \cup (\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}) \setminus \{a_{i_0}\})$ и переводящий $\langle r_0, c_0\rangle$ в $\langle c_0, r_0\rangle$ (к примеру, снова можно взять транспозицию $(r_0\, c_0)$). По условию леммы, f_1 сохраняет решение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$. Однако, имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1(\overrightarrow{a}, f_1(\overrightarrow{s}))$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, f_1(\overrightarrow{s}))$, поэтому выполняется соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{s})$.

(B) Пусть $k \in \omega$ и $\varphi \in E_k$; если в φ отсутствует конъюнкт вида $(u \approx r_0)$, где u — основная переменная, то и доказывать нечего; поэтому будем считать, что $(u \approx r_0)$ является конъюнктом данной формулы для подходящей основной переменной u. Тогда в качестве φ_2 возьмём формулу $[\varphi_1]^{\langle (u_i \approx r_0) | i \in \omega,\, i < n_k\rangle}_{\langle (\mathbf{0} \approx \mathbf{0}) | i \in \omega,\, i < n_k\rangle}$, где φ_1 получена в рамках процедуры (**A**) или, что то же самое в данном случае, в рамках (**A1**).

Возьмём любой кортеж $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$. Как и выше, имеем соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_1(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Rightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}),$$

поскольку φ_2 получена из φ_1 в результате удаления конъюнктов.

Перейдём теперь к доказательству соотношения

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Rightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(a), \overrightarrow{s}). \tag{3}$$

Поскольку $(u_{i_0} \approx r_0)$ является конъюнктом φ для некоторого $i_0 \in \omega$, $i_0 < n_k$, для бескванторной формулы φ найдутся $m_0 \in \omega$ и $\tau_0 \in \{0, 1\}^{m_0}$, для которых φ — формула сигнатуры $\sigma_1^{(m_0)}$, а также выполняются соотношения $m_0 + 1 \geqslant \max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\}$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigwedge\limits_{j=0}^{m_0} (\mathrm{R}_j^{\tau_0(j)}(r_0) \wedge \mathrm{R}_j^{\tau_0(j)}(a_{i_0}))$ и $\gamma_{\mathcal{S}}(r_0) \trianglerighteq \tau_0$ (см. $(\mathbf{AE(r_0)})$).

Сначала покажем, что выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s})$, где $\overrightarrow{c} \leftrightharpoons [\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{r_0}$. В самом деле, справедливы соотношения $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (c_{i_0} \approx r_0)$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigwedge\limits_{j=0}^{m_0} (\mathrm{R}_j^{\tau_0(j)}(r_0) \wedge \mathrm{R}_j^{\tau_0(j)}(c_{i_0}))$. Представим теперь формулу φ_2 в виде

$(\psi_0 \wedge \psi_1)$ (снова с точностью до перестановки конъюнктов) так, что ψ_0 содержит все конъюнкты φ_2, в которые входит переменная u_{i_0}, а ψ_1 состоит из остальных конъюнктов формулы φ_2. Далее, имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_1([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{r_0}, \overrightarrow{s})$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_0([\overrightarrow{a}]^{a_{i_0}}_{r_0}, \overrightarrow{s})$ (первое условие следует из того, что u_{i_0} не встречается в ψ_1; второе условие вытекает из того, что φ_2 не содержит подформул вида $(u \approx r_0)$ ни для какой основной переменной u, а также конъюнктов вида $(u_{i_0} \approx s)$, где $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ (см. соглашение 1(2, F) для $\{E_k\}_{k\in\omega}$ и задание формулы φ_1). Таким образом, выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s})$.

Возьмём теперь кортежи $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}^{n_k}_{m_0}$ и $\overrightarrow{t} \in \mathrm{S}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{m_0}$ так, чтобы выполнялись условия $\gamma_{m_0}(\overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{c}\hat{\ }\overrightarrow{s}) \restriction (m_0+1)$ и $\langle \overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{c}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle$; по замечанию 1(1), имеем $\mathfrak{M}_{m_0} \models \varphi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t})$. Так как выполняется равенство $c_{i_0} = r_0$, имеет место соотношение $|\mathrm{sp}(\overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t})| \leqslant 2\cdot m_0+1 < 2\cdot m_0+2 \leqslant 2^{m_0+1}$ (это единственный момент в настоящей работе, где используется соответствующая оценка количества переменных, предложенная в замечании 1!). Следовательно, существует элемент $d \in \mathrm{S}_{m_0} \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t})$, удовлетворяющий условию $\gamma_{m_0}(d) = \gamma_{\mathcal{S}}(r_0) \restriction (m_0 + 1)$; пусть $d_0 \in \mathrm{S}_{m_0} \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t})$ — любой такой элемент. Из условия леммы следует, что f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ для любых $r \in [r_0]_{\mathrm{R}} \setminus (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{c}))$ и автоморфизма f, действующего тождественно на $(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{c})) \setminus \{r_0\}$ и переводящего r_0 в r (в качестве такого автоморфизма можно взять, например, транспозицию $(r_0\, r)$). Так как выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi([\overrightarrow{c}]^{r_0}_{r}, [\overrightarrow{s}]^{r_0}_{r})$, имеем $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k([\overrightarrow{c}]^{r_0}_{r}), \overrightarrow{s})$, а по замечанию 1(1), выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{m_0} \models \varphi([\overrightarrow{b}]^{b_{i_0}}_{d_0}, [\overrightarrow{t}]^{b_{i_0}}_{d_0})$. Нетрудно проверить, что справедлива эквивалентность

$$\big((d_0 \notin (\mathrm{sp}(\overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t}) \setminus \{b_{i_0}\})) \wedge (\gamma_{m_0}(d_0) = \gamma_{\mathcal{S}}(r_0) \restriction (m_0 + 1))\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_{m_0} \models \varphi_2([\overrightarrow{b}]^{b_{i_0}}_{d_0}, \overrightarrow{t})$$

для всех $d_0 \in \mathrm{S}_{m_0}$. По доказанному и по теореме 3 [1], выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_{m_0} \models \varphi_2([\overrightarrow{b}]^{b_{i_0}}_{d_0}, \overrightarrow{t}) \Rightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(h([\overrightarrow{b}]^{b_{i_0}}_{d_0})), h(\overrightarrow{t})) \qquad (4)$$

для любого вложения $h : \mathbb{HF}_{m_0}(\mathfrak{M}_{m_0}) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, удовлетворяющего условиям $h(\overrightarrow{t}) = \overrightarrow{s}$ и $h(b_i) = a_i$ для всех $i \in \omega$ $(i < n_k,\ i \neq i_0)$.

Пусть, наконец, выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi_2(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; согласно замечанию 1(1), справедливо соотношение $\mathfrak{M}_{m_0} \models \varphi_2(\overrightarrow{b}^0, \overrightarrow{t})$, где кортеж $\overrightarrow{b}^0$ удовлетворяет условиям $\gamma_{m_0}(\overrightarrow{b}^0\hat{\ }\overrightarrow{t}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{s}) \restriction (m_0 + 1)$ и $\langle \overrightarrow{b}^0\hat{\ }\overrightarrow{t}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle$. Из (4) получаем, что справедливо условие

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi_0(t_k(h_0(\overrightarrow{b}^0)), h_0(\overrightarrow{t})),$$

где вложение $h_0 : \mathbb{HF}_{m_0}(\mathfrak{M}_{m_0}) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ удовлетворяет условиям

$h_0(\overrightarrow{t}) = \overrightarrow{s}$ и $h_0(b_i^0) = a_i$ для всех $i \in \omega$ ($i < n_k$, $i \neq i_0$). Остаётся лишь взять h_0 так, чтобы выполнялось соотношение $h_0(\overrightarrow{b}^0) = \overrightarrow{a}$.

Таким образом, выполняется (3), а вместе с ним и (**7.4**). □

Сейчас перейдём к изложению методов удаления самих параметров.

Лемма 8. *Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и элемент $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют следующим условиям:*

(8.1): *для любых элемента $r \in [r_0]_{\mathrm{R}} \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и автоморфизма f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$ и переводящего r_0 в r, имеет место соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_{\Sigma} \Phi_0(x, f(\overrightarrow{s}))$;*

(8.2): $[r_0]_{\mathrm{R}} \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \neq \{r_0\}$.

Тогда найдётся Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, для которой имеют место соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$ и $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_{\Sigma} \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$.

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и элемент $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют посылке леммы. Из леммы 5 и соглашения 1 следует существование вычислимой последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, удовлетворяющей соглашению 1(2, $\varnothing$) и задающей $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$. Последовательно применяя леммы 6, 7 для $\{A_k\}_{k\in\omega}$ и $F = \varnothing$, придём к последовательности $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, являющейся вычислимой и, к тому же, удовлетворяющей следующим условиям:

• данная последовательность задаёт Σ-формулу $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, а также удовлетворяет соглашению 1(2, $\{r_0\}$);

• для каждых $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$ формула вида $(u \approx r_0)$ (здесь u — основная переменная) не встречается в качестве подформулы в φ.

Зафиксируем теперь $r_1 \in [r_0]_{\mathrm{R}_0} \cap (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\})$ (что возможно, ввиду (**8.2**)). Пусть кортеж $\overrightarrow{s}'$ попарно различных элементов таков, что имеет место соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$, и пусть $\{B_k^0\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}')$ — вычислимая последовательность, полученная из $\{B_k\}_{k\in\omega}$ в результате всех замен следующего вида (здесь $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$):

• каждую подформулу формулы φ вида $\mathrm{R}_l(r_0)$ заменим на $\mathrm{R}_l(r_1)$, где $l \in \omega$;

• остальные конъюнкты, в которых встречается r_0, удалим из φ.

Возьмём снова $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$; положим в качестве $\varphi_0 \in B_k^0$ формулу, полученную из φ в результате замен, приведённых выше. Отметим, что выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')). \tag{5}$$

Справедливость соотношения (5) вытекает непосредственно из определений последовательностей $\{B_k\}_{k\in\omega}$ и $\{B_k^0\}_{k\in\omega}$, а также отношения равенства $\gamma_{\mathcal{S}}(r_0) = \gamma_{\mathcal{S}}(r_1)$. Отсюда заключаем, что последовательность $\{B_k^0\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}')$ задаёт Σ-формулу $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$, как и последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}$.

Кроме того, из эффективного построения последовательности $\{B_k^0\}_{k\in\omega}$ по $\{B_k\}_{k\in\omega}$ следует, что $\{B_k^0\}_{k\in\omega}$ вычислима; по лемме 5, найдётся Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, определяющая множество

$$\{t_l(\overrightarrow{a})|l \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_l},\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}')$$

для некоторой формулы $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in B_l^0$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_l$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}')\}$.

Таким образом, имеем $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$. □

Лемма 9. *Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и множество $F_0 \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют следующим условиям:*

(9.1): *для любых элементов $r_0 \in F_0$, $r \in [r_0]_\mathrm{R}$ и автоморфизма f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$ и переводящего r_0 в r, имеет место соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_0(x, f(\overrightarrow{s}))$;*

(9.2): $[r_0]_\mathrm{R} \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) = \{r_0\}$ *для всех* $r_0 \in F_0$.

Тогда найдётся Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, для которой имеют место соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F_0) \cup \{r_1\}$ для подходящего $r_1 \in \mathrm{S}$ такого, что $r_1 \not\sim_\mathrm{R} s$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, и $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$.

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$ и множество $F_0 \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяют посылке леммы.

Если $F_0 = \varnothing$, то возьмём конечное множество $G \subseteq \omega$ такое, что справедливо неравенство $\gamma_{\mathcal{S}}(s) \neq G$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, а также элемент $r_1 \in \mathrm{S}$, для которого имеет место равенство $\gamma_{\mathcal{S}}(r_1) = G$. В качестве $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$ в этом случае следует взять $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$; эта процедура правомерна, поскольку имеет место соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$.

Будем теперь считать, что $|F_0| > 0$. Возьмём кортеж

$$\langle r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(p)}\rangle \in \mathrm{S}_{\neq}^{p+1},\ p \in \omega,$$

так, что $F_0 = \{r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(p)}\}$; кроме того, будем предполагать, что имеет место система неравенств $\gamma_{\mathcal{S}}(r^{(0)}) \sqsubset \gamma_{\mathcal{S}}(r^{(1)}) \sqsubset \ldots \sqsubset \gamma_{\mathcal{S}}(r^{(p)})$.

Далее, используя лемму 5, выберем последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, являющуюся вычислимой, удовлетворяющую соглашению $1(2, \varnothing)$ и задающую $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$.

Применяя последовательно леммы 6, 7 для элемента $r^{(i)}$ вместо r_0, множества $\{r^{(k)}|k \in \omega,\ k < i\}$ вместо F, $0 \leqslant i \leqslant p$, начиная с последовательности $\{A_k\}_{k\in\omega}$, построим вычислимую последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, удовлетворяющую следующим условиям:

• последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}$ задаёт Σ-формулу $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$;

• для каждых $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$ формула вида $(u \approx r_0)$ (здесь u — основная переменная, а $r_0 \in F_0$) не встречается в качестве подформулы в φ;

• данная последовательность удовлетворяет соглашению $1(2, F_0)$.

Далее, пусть $C_0 \sqsubset C_1 \sqsubset \ldots \sqsubset C_{q-1}$, $q \in \omega \setminus \{0\}$, — набор арифметических множеств, являющихся в точности $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодами множеств из

$\{\gamma_{\mathcal{S}}(s) | s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})\}$. Возьмём r_1 так, чтобы выполнялось следующее условие (здесь $n \in \omega$):

$$\gamma_{\mathcal{S}}(r_1)(n) = \begin{cases} 1 - C_n(n), & \text{если } n < q; \\ \bigoplus\{\gamma_{\mathcal{S}}(r_0) | r_0 \in F_0\}(n-q), & \text{если } n \geqslant q. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что $r_1 \not\sim_{\mathrm{R}} s$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Осуществим сейчас следующий список замен (здесь $k \in \omega$ и $\varphi \in B_k$):

• подформулу $\mathrm{R}(r^{(j)}, \mathbf{l})$ заменим на $\mathrm{R}(r_1, (\mathbf{p}+1) \cdot \mathbf{l} + \mathbf{j} + \mathbf{q})$, для любых чисел $l, j \in \omega$, $0 \leqslant j \leqslant p$;

• из полученной формулы удаляем все конъюнкты, в которые входят параметры из F_0.

Пусть кортеж $\overrightarrow{s}'$ попарно различных элементов таков, что имеет место равенство $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus F_0) \cup \{r_1\}$, и пусть $\{B_k^0\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}')$ — вычислимая последовательность, полученная из последовательности $\{B_k\}_{k\in\omega}$ с помощью приведённых выше замен. Заметим, что если $\varphi_0 \in B_k^0$ получена из $\varphi \in B_k$ в результате данных замен, то имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}') \leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}))$; поэтому последовательность $\{B_k^0\}_{k\in\omega}$ также задаёт $\Phi_0(x, \overrightarrow{s})$. По лемме 5, существует Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, определяющая множество

$$\{t_l(\overrightarrow{a}) | l \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_l},\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}')$$

для некоторой формулы $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in B_l^0$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_l$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}')\}$.

Таким образом, имеем $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}) \equiv_{\Sigma} \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$. □

Перейдём теперь к исследованию свойств видов кортежей параметров.

Определение 2. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s})$ — Σ-формула и $\overrightarrow{r} = \langle r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\rangle$, $n \in \omega$, — набор попарно различных элементов из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, в точности лежащих в $[a]_{\mathrm{R}}$ для наперёд заданного $a \in \mathrm{S}$. Будем говорить, что кортеж $\overrightarrow{r}$ *имеет вид* I *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, если любой автоморфизм f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r})$, сохраняет решение Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s})$; кортеж $\overrightarrow{r}$ *имеет вид* II *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, если он не имеет вид I для $\Phi(x, \overrightarrow{s})$. ◇

Заметим, что кортеж λ имеет вид I для любой Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s})$.

Докажем свойство инвариантности вида кортежей для Σ-эквивалентных Σ-формул.

Лемма 10. *Пусть $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$ — Σ-формулы, для которых справедливо соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) \equiv_{\Sigma} \Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$.*

Пусть также наборы $\overrightarrow{r}^0 \in (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0))_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0)}$ и $\overrightarrow{r}^1 \in (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^1))_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^1)}$ таковы, что множество $\mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0{}^\frown\overrightarrow{r}^1)$ состоит в точности из элементов $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0{}^\frown\overrightarrow{s}^1)$, *имеющих $\gamma_{\mathcal{S}}$–коды одного и того же наперёд заданного множества. Тогда $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид* I *для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, если и только если $\overrightarrow{r}^1$ имеет вид* I *для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$.*

Доказательство. Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$, а также наборы $\overrightarrow{r}^0$ и $\overrightarrow{r}^1$ элементов из S удовлетворяют посылке леммы. Докажем только, что если $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, то $\overrightarrow{r}^1$ имеет вид I для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$: ввиду симметрии, обратная импликация доказывается точно так же.

Пусть кортеж $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$. Докажем, что если f — автоморфизм модели $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^1) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^1)$, то f сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$. Сначала заметим, что выполняется равенство $f = (h_1 \circ h_0)$, где автоморфизмы h_0 и h_1 заданы так (здесь и далее $\mathrm{T} \leftrightharpoons \bigcup\limits_{r \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0 \hat{\ } \overrightarrow{r}^1)} [r]_{\mathrm{R}}$):

$$h_0(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \mathrm{S} \setminus \mathrm{T}; \\ f(x), & \text{если } x \in \mathrm{T}; \end{cases}$$

$$h_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \mathrm{S} \setminus \mathrm{T}; \\ x, & \text{если } x \in \mathrm{T}. \end{cases}$$

Тогда h_0 действует тождественно на $(\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^1)) \setminus \mathrm{T}$. Следовательно, h_0 сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, поскольку $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, а по лемме 2, h_0 сохраняет решение Σ-формулы $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$.

Далее, автоморфизм h_1 действует тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^1) \cup \mathrm{T}$. Следовательно, h_1 действует тождественно и на $\mathrm{sp}(h_0(\overrightarrow{s}^1))$, а по лемме 3, имеем $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi_1(x, h_0(\overrightarrow{s}^1)) \leftrightarrow \Phi_1(x, h_1(h_0(\overrightarrow{s}^1))))$.

Таким образом, f сохраняет решение $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$. □

Опишем теперь способ нахождения минимальных наборов параметров с помощью автоморфизмов. Сначала доопределим отношение $\sim_{\mathrm{R}}$ эквивалентности на $\mathrm{S} \cup \{\lambda\}$, как $\sim_{\mathrm{R}} \cup \{\langle \lambda, \lambda \rangle\}$.

Лемма 11. *Для любого $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. подмножества $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ найдётся Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, определяющая множество D и удовлетворяющая следующим условиям для любых набора $\overrightarrow{r} \in (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}))_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{r})}$, образованного в точности из $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодов одного и того же наперёд заданного множества, и $\overrightarrow{r}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{r})}$:*

I) *если $\overrightarrow{r}$ имеет вид* I *для $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, то $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}) \leqslant 1$ в совокупности, причём будет выполняться соотношение*

$$\overrightarrow{r} \sim_{\mathrm{R}} \overrightarrow{r}' \Longrightarrow \big(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \Phi(x, [\overrightarrow{s}]^{\overrightarrow{r}}_{\overrightarrow{r}'}))\big);$$

II) *если* $\overrightarrow{r}$ *имеет вид* II *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s})$, *то* $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}) \geqslant 1$ *и будет выполняться соотношение*

$$\big(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \Phi(x, [\overrightarrow{s}]^{\overrightarrow{r}}_{\overrightarrow{r}'}))\big) \Longrightarrow \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}) = \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}').$$

Доказательство. Возьмём Σ-формулу $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, определяющую множество D из условия леммы. Пусть также набор $\overrightarrow{r}^0 = \langle r^0_0, r^0_1, \ldots, r^0_{n-1}\rangle \in (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0))^n_{\neq}$, $n \in \omega$, образован элементами из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0)$, являющимися в точности $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодами одного и того же наперёд заданного арифметического множества.

I) Пусть $\overrightarrow{r}^0$ *имеет вид* I *для* $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$. Докажем, что можно добиться справедливости соотношения (I) для некоторой Σ-формулы $\Phi_3(x, \overrightarrow{s}^3)$, определяющей D.

I.1) Сначала докажем, что если $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0) \geqslant 1$, то *найдётся* Σ-*формула* $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$ *такая, что имеют место соотношения* $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^1) = (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0)) \cup \{r^0_0\}$ *и* $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$. Пусть натуральное число j_0 таково, что $1 \leqslant j_0 \leqslant n$; обозначим через $\overrightarrow{s}^0[j_0]$ и $\overrightarrow{r}^0[j_0]$ наборы всех попарно различных элементов из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \{r^0_j | j \in \omega, j_0 \leqslant j < n\}$ и $\mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0) \setminus \{r^0_j | j \in \omega, j_0 \leqslant j < n\}$ соответственно. Так как набор $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, используя лемму 8, нетрудно доказать, что

$$\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) = \Phi^{[n]}(x, \overrightarrow{s}^0[n]) \equiv_\Sigma \Phi^{[n-1]}(x, \overrightarrow{s}^0[n-1]) \equiv_\Sigma$$
$$\equiv_\Sigma \ldots \equiv_\Sigma \Phi^{[1]}(x, \overrightarrow{s}^0[1]) = \Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$$

для некоторых Σ-формул $\Phi^{[j_0]}(x, \overrightarrow{s}^0[j_0])$, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$. По лемме 10, $\overrightarrow{r}^0[j_0]$ имеет вид I для $\Phi^{[j_0]}(x, \overrightarrow{s}^0[j_0])$, для всех $j_0 \in \omega$, $1 \leqslant j_0 \leqslant n$, и, в частности, r^0_0 имеет вид I для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$; остальные кортежи вида I или II для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, согласно лемме 10, остаются таковыми и для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}^1)$.

I.2) Пусть теперь $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}^2)$ — Σ-формула, определяющая множество D и удовлетворяющая, к тому же, следующему условию: каждый набор параметров вида I для $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}^2)$ состоит не более, чем из одного элемента (скажем, F_0 — совокупность таких элементов). Этого можно добиться, применяя соотношение (**I.1**) последовательно для каждого набора параметров вида I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, используя при этом лемму 10. По лемме 9, существует Σ-формула $\Phi_3(x, \overrightarrow{s}^3)$, для которой имеют место соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^3) = (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^2) \setminus F_0) \cup \{r_1\}$ для подходящего $r_1 \in \mathrm{S}$ такого, что $r_1 \not\sim_{\mathrm{R}} s$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^2)$, и $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}^2) \equiv_\Sigma \Phi_3(x, \overrightarrow{s}^3)$. По лемме 10, параметр r_1 имеет вид I для $\Phi_3(x, \overrightarrow{s}^3)$; кортежи вида I для $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}^2)$ переходят в λ, а кортежи вида II для $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}^2)$ (а, по доказанному, и для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$) остаются таковыми и для $\Phi_3(x, \overrightarrow{s}^3)$, снова по лемме 10.

II) Пусть $\overrightarrow{r}^0$ *имеет вид* II *для* $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$. Тогда нетрудно понять, что имеет место неравенство $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0) \geqslant 1$. Предположим, что существует кортеж $\overrightarrow{r}^1 \in (\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0))^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0)}_{\neq}$, не удовлетворяющий условию (II) леммы, но для которого выполняется соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) \equiv_\Sigma \Phi_0(x, [\overrightarrow{s}^0]^{\overrightarrow{r}^0}_{\overrightarrow{r}^1})$; следовательно, имеем соотношение

$$\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \mathrm{sp}([\overrightarrow{s}^0]^{\overrightarrow{r}^0}_{\overrightarrow{r}^1}) = \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^1) \neq \varnothing.$$

Достаточно только доказать, что существует Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, определяющая D, а также удовлетворяющая соотношению $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \{r_0\}$, где $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \mathrm{sp}([\overrightarrow{s}^0]^{\overrightarrow{r}^0}_{\overrightarrow{r}^1})$.

В самом деле, для любых элемента $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \mathrm{sp}([\overrightarrow{s}^0]^{\overrightarrow{r}^0}_{\overrightarrow{r}^1})$ и автоморфизма f структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \{r_0\}$, имеет место соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) \equiv_\Sigma \Phi_0(x, f(\overrightarrow{s}^0))$, согласно лемме 4. Если $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0) = 1$, то непосредственно из определения получаем, что $\overrightarrow{r}^0$ имеет вид I для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, противоречие; поэтому справедливо неравенство $\mathrm{lh}(\overrightarrow{r}^0) > 1$. По лемме 8, найдётся Σ-формула $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, для которой имеют место соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \{r_0\}$ и $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$. По лемме 10, элементы из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0) \setminus \{r_0\}$ образуют кортеж вида II для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$; кортежи, составленные из попарно различных элементов множества $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}^0) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{r}^0)$, имеющих один и тот же $\gamma_\mathcal{S}$–код, имеют тот же вид I или II для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}')$, что и для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}^0)$, согласно лемме 10. □

В [1] понятия видов кортежей Σ-формул основаны фактически на утверждении леммы 11 (см. определение 6 [1]).

Замечание 2. Если $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула, для которой r имеет вид I, а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида II, то вычислимая последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, задающая $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и удовлетворяющая соглашению 1(1), может быть выбрана так, что будет выполняться первое условие; однако любая такая последовательность будет удовлетворять второму условию (см. леммы 6, 7):

1) для любого $k \in \omega$ не существует формулы $\varphi \in B_k$, в которой встречалась бы формула вида $(u \approx r)$ в качестве подформулы, где u — основная переменная;

2) для любого $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ найдутся $k \in \omega$ и формула $\varphi \in B_k$, что в φ будет входить подформула вида $(u \approx s)$, где u — основная переменная.

Другими словами, параметр r вида I может использоваться только в качестве $\gamma_\mathcal{S}$–кода некоторого подмножества натуральных чисел (фактически играет роль оракула), а параметры из кортежей вида II — в качестве точек, — хотя и могут быть использованы также в качестве $\gamma_\mathcal{S}$–кодов подмножеств натуральных чисел. Однако, благодаря операции сочленения, параметры, входящие в наборы вида II, могут быть избавлены от использования их в виде оракулов: вся информация о задании натуральных чисел будет содержаться в $\gamma_\mathcal{S}$–коде параметра r. ◇

§ 4. Представления натуральными числами

По теореме 1 [4], имеем $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(\omega) = \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})) \cap \mathcal{P}(\omega) = \mathcal{S}$ (отметим, что в вышеупомянутой статье рассматриваются семейства, заданные только положительно, поэтому следует воспользоваться тем, что данное семейство Σ-эквивалентно в смысле определения 1.4 [4], к примеру, семейству своих характеристических функций). Далее, каждой Σ-формуле $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, удовлетворяющей лемме 11 (здесь r — параметр вида I для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных параметров составлен из кортежей вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$), сопоставим некоторое $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-вычислимое подмножество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ натуральных чисел, задающее последовательность (возможно, невычислимую) множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1 с набором $\overrightarrow{s}$ параметров, задающую, в свою очередь, множество $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Прежде, чем перейти к заданию множества $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, определим несколько вспомогательных понятий и конструкций.

Определение 3. Возьмём сначала числа $m, k \in \omega$, для которых имеет место неравенство $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$ (что позволяет использовать метод аппроксимаций). Под *СДНФ сигнатуры* $\sigma_1^{(m)}$ будем понимать бескванторную формулу

$$\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1})$$

рассматриваемой сигнатуры, полученную как результат следующей подстановки СДНФ логики высказываний, где x — пропозициональная переменная, $\top$ и $\perp$ — константные символы, которые интерпретируются как соответственно тождественно истинное предложение и тождественно ложная формула:

• $\perp$ заменяется на $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$;

• $\top$ заменяется на $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$;

• x можно заменить на одну из следующих атомарных формул (в скобках указано общее количество попарно различных атомарных формул сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ соответствующего вида):

- $\mathrm{R}_l(u_i)$, где $i, l \in \omega$, $l \leqslant m$, $i < n_k$ (их количество равняется $n_k \cdot (m+1)$);

- $(u_i \approx v_j)$, где $i, j \in \omega$, $i < n_k$, $j < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ (их количество равняется $n_k \cdot \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$);

- $(u_i \approx u_j)$, где $i, j \in \omega$, $i < j < n_k$ (их количество равняется $\frac{n_k \cdot (n_k - 1)}{2}$; формулы такого вида входят только непосредственно после знака отрицания);

• для каждого $i_0 \in \omega$ $(i_0 < n_k)$ существует не более одного $j_0 \in \omega$ $(j_0 < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}))$, для которого $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ является конъюнктом;

• для каждого $j_0 \in \omega$ ($j_0 < \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$) существует не более одного $i_0 \in \omega$ ($i_0 < n_k$), для которого $(u_{i_0} \approx v_{j_0})$ является конъюнктом. $\diamond$

Тем самым, любая элементарная конъюнкция (рассмотрением СДНФ такого вида мы и ограничимся) будет состоять либо из одного конъюнкта, либо из $\frac{1}{2}\cdot(n_k\cdot(n_k+2\cdot m+2\cdot\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})+1))$ конъюнктов. Кроме того, полагаем, что позиции атомарных формул (вместе со своими отрицаниями) в СДНФ однозначно задаются порядком на их номерах в гёделевой нумерации.

Важным инструментом для работы с СДНФ будет замечание 1, описывающее истинность формул на аппроксимации. Нетрудно также понять, что множества решений различных совместимых элементарных конъюнкций СДНФ от одного и того же фиксированного набора параметров различны, а при фиксации m — не пересекаются. Кроме того, каковы бы ни были элемент $a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$, набор $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$ и число $m \in \omega$, удовлетворяющие неравенству $m+1 \geqslant \max\{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}), \mathrm{rnk}(a), |\mathrm{sp}(a)|\}$, найдётся элементарная конъюнкция СДНФ $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ от наборов $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ попарно различных основных и дополнительных переменных длин $|\mathrm{sp}(a)|$ и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ соответственно, такая что $a = t_k(\overrightarrow{a})$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ для подходящих $k \in \omega$ и $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{\neq}^{|\mathrm{sp}(a)|}$.

Пусть также переменные списка $\overrightarrow{v}$ принимают в качестве значений попарно различные параметры, составляющие набор $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_0\hat{\ }\overrightarrow{s}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\overrightarrow{s}_{q-1}$, где $q \in \omega$, причём непустой набор $\overrightarrow{s}_i$ является кортежом вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, составленный из $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодов множества $C_i \subseteq \omega$, для любого $i \in \omega$, $i < q$; кроме того, имеет место система неравенств $C_0 \sqsubset C_1 \sqsubset \ldots \sqsubset C_{q-1}$. Будем также считать, что выполняется равенство $\gamma_{\mathcal{S}}(r) = A \subseteq \omega$. Отметим, что в формулах, участвующих в определении $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, параметр r встречаться не будет.

Пусть $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — вычислимая последовательность, задающая Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а также удовлетворяющая соглашению $1(2, \{r\})$; кроме того, любая формула $\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$ не содержит подформул вида $(u \approx r)$ ни для какой основной переменной u. Такую последовательность можно получить, используя последовательно следующие утверждения:

• лемму 5 (строим подходящую последовательность, задающую Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ с тем же набором параметров и удовлетворяющую, к тому же, соглашению $1(2, \varnothing)$);

• а также леммы 6, 7 (преобразуем построенную последовательность в новую, удовлетворяющую соглашению $1(2, \{r\})$ и также задающую Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, удаляя при этом все подформулы вида $(u \approx r)$, где u — основная переменная).

Далее, пусть $k \in \omega$ и $\varphi \in A_k$; определим сначала конечное соответствие $\zeta_{\varphi,r}$, заданное на натуральных числах, так (здесь $\varepsilon \in \{0,\, 1\}$, $i \in \omega$):

$$\zeta_{\varphi,r}(i) = \varepsilon \Leftrightarrow (\mathrm{R}_i^{\varepsilon}(r) \text{ — конъюнкт } \varphi).$$

Определим теперь формулу $\Psi_r(\varphi)$ следующим образом:

• если $\zeta_{\varphi,r} \trianglelefteq A$, то $\Psi_r(\varphi)$ получается из формулы φ удалением в точности всех подформул, в которых встречается параметр r;

• если же $\zeta_{\varphi,r} \not\trianglelefteq A$ или $\zeta_{\varphi,r}$ даже не является функцией, то положим $\Psi_r(\varphi) \leftrightharpoons \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$.

Отметим, что в обоих случаях имеет место следующая эквивалентность для всех $k \in \omega$, $\varphi \in A_k$ и $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}, r) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \Psi_r(\varphi)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}).$$

Следовательно, A-вычислимая последовательность $\{\Psi_r(A_k)\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяет соглашению $1(2,\, \varnothing)$ и также задаёт Σ-формулу $\Phi(x,\, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Определение 4. Зададим теперь $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ как множество, удовлетворяющее следующим условиям:

(C1): $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если выполняется следующее (здесь $m, k \in \omega$ и φ — гёделев номер формулы):

a: $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant m+1$ и $t_k(\overrightarrow{b}) \in \mathbb{HF}_m(\mathfrak{M}_m)$ для подходящего непустого кортежа $\overrightarrow{b} \in (\mathrm{S}_m)^{n_k}_{\neq}$ (это обстоятельство равносильно тому, что имеют место соотношения $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$ и $n_k > 0$);

b: $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ — элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, не совпадающая ни с $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, ни с $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ (здесь $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$);

c: $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u}\, \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$;

d: $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\})$ для любых $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$;

(C2): производим (**C1**) для всех $m, k \in \omega$ и формул φ из (**C1a**), (**C1b**);

(C3): $\langle\!\langle 0, m, k, (\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если $m, k \in \omega$ таковы, что $n_k = 0$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{s})$ для некоторой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)$, а также $t_k(\lambda) \in \mathbb{HF}_m(\mathfrak{M}_m)$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant m+1$ (последние два условия равносильны тому, что $\max\{\log_2(r_k), \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$);

(C4): $\langle\!\langle 0, m_0, k_0, \neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если после обработки всех формул φ из (**C1a**), (**C1b**) и (**C3**) для заданных $m_0, k_0 \in \omega$, удовлетворяющих неравенству $\max\{\log_2(r_{k_0}), n_{k_0}, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m_0+1$, множество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ не приобрело элементов вида $\langle\!\langle 0, m_0, k_0, \boldsymbol{\cdot}\rangle\!\rangle$;

(C5): $\langle\!\langle i+2, m\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если $m \in C_i$ $(m, i \in \omega;\ i < q)$;

(C6): $\langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если $\langle\!\langle 1, i\rangle\!\rangle \notin C_i$ $(i \in \omega,\ i < q)$;

(C7): $\langle\!\langle 1, p_0^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_0)} \cdot p_1^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_1)} \cdot \ldots \cdot p_{q-1}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_{q-1})}\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, где p_i, $i \in \omega$ — простое число с номером i в порядке возрастания (к примеру, $p_0 = 2$,

$p_1 = 3$, $p_2 = 5, \ldots$); если $q = 0$ (или, что то же самое, $\overrightarrow{s} = \lambda$), то $\langle\!\langle 1, 1\rangle\!\rangle$ помещаем в $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$;

(C8): множество $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ формируется полностью к данному моменту.$\diamond$

Конструкция построения множества $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ может быть выбрана вычислимой относительно оракула $(A \oplus (C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{q-1}))'$, поэтому $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r} \in \mathcal{S}$. В самом деле, условия (**C1a**) и (**C1b**) вычислимы; соотношения (**C1d**), (**C3**) вычислимы относительно $(A \oplus (C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{q-1}))'$, в силу компактности пространства $\{0,\,1\}^{\omega}$ с заданной на нём топологией Кантора, открытые множества которого задаются базой $\{V_\tau \mid \tau \in \{0,\,1\}^{<\omega}\}$, где $V_\tau \leftrightharpoons \{f \in \{0,\,1\}^{\omega} \mid \tau = f \restriction \mathrm{lh}(\tau)\}$ для всех $\tau \in \{0,\,1\}^{<\omega}$ (см. лемму 12; разумеется, здесь следует рассмотреть сужение данного пространства на характеристические функции арифметических множеств). Процедуры (**C2**), (**C4**), (**C7**) вычислимы, поскольку множество всех СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ от фиксированного набора $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ переменных является конечным, а также последовательность $\langle \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}_i) \mid i \in \omega,\, i < q\rangle$ натуральных чисел фиксирована. Далее, процедуры (**C1c**), (**C5**), (**C6**) являются вычислимыми относительно $(C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{q-1})$, согласно замечанию 1(1).

Отметим, что для элементарных конъюнкций СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$ условия, налагаемые на кортежи в замечании 1, выполняются автоматически.

Кроме того, замечание 1(2) вместе с условиями (**C1**)–(**C4**) позволяют утверждать наличие свойства максимальности для бескванторных формул сигнатуры σ_1, участвующих в построении $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, при переходе от $m \in \omega$ к $n \in \omega$, $n > m$. А именно, если $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, где $\varphi \notin \{\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})\}$, то и $\langle\!\langle 0, m+1, k, \varphi^{\overrightarrow{\varepsilon}}\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ для формулы $\varphi^{\overrightarrow{\varepsilon}} \leftrightharpoons \varphi \wedge \bigwedge\limits_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_{m+1}^{\varepsilon_i}(u_i)$ для любого кортежа $\overrightarrow{\varepsilon} = \langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k-1}\rangle \in \{0,\,1\}^{n_k}$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u} \varphi^{\overrightarrow{\varepsilon}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ (формула $\varphi^{\overrightarrow{\varepsilon}}$ здесь рассматривается, разумеется, с точностью до перестановки конъюнктов); верно и обратное в предположении условия $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant m+1$.

Лемма 12. *Следующие условия эквивалентны для любых чисел $k, m \in \omega$, наборов $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$, $\overrightarrow{s} \in \mathrm{S}_{\neq}^{<\omega}$ и формулы $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, удовлетворяющих условиям* (**C1a**)–(**C1c**)*:*

(12.1): $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\})$;

(12.2): $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F_0\})$ *для некоторого конечного множества $F_0 \subseteq \Psi_r(A_k)$;*

(12.3): *найдутся $n \in \omega$, $n \geqslant m$, конечное множество $F_0 \subseteq \Psi_r(A_k)$ формул сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ и кортеж $\overrightarrow{t} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$ такие, что*

$$\mathfrak{M}_n \models (\varphi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F_0\})$$

для всех $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_n^{n_k}$, *причём* $\gamma_n(\overrightarrow{t}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$.

Доказательство. ((**12.3**)⇒(**12.2**)) Возьмём $n \in \omega$, конечное множество $F_0 \subseteq \Psi_r(A_k)$ формул сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ и кортеж $\overrightarrow{t} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющие условию (**12.3**). Пусть кортеж $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$ таков, что выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; тогда берём кортеж $\overrightarrow{b} \in \mathrm{S}_n^{n_k}$ такой, что имеют место соотношения $\gamma_n(\overrightarrow{b}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{a}) \upharpoonright (n+1)$ и $\langle \overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}\hat{\ }\overrightarrow{t}; =\rangle$; по замечанию 1(1), имеем $\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t})$. Далее, из (**12.3**) получаем $\mathfrak{M}_n \models \bigvee\{\psi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F_0\}$; снова используя замечание 1(1), приходим к тому, что справедливо соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F_0\}$.

((**12.2**)⇒(**12.1**)) Очевидно. ((**12.1**)⇒(**12.3**)) Пусть имеет место соотношение (**12.1**); прежде, чем перейти к доказательству условия (**12.3**), приведём некоторые следствия условия (**12.1**). Отметим, что если кортежи $\overrightarrow{a}^0 \in \mathrm{S}^{n_k}$ и $\overrightarrow{a}^1 \in \mathrm{S}^{n_k}$ таковы, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s}) \wedge \varphi(\overrightarrow{a}^1, \overrightarrow{s}))$, то выполняется условие $\langle \overrightarrow{a}^{0}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{a}^{1}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle$, что непосредственно следует из определения 3.

Далее, пусть кортеж $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$ таков, что справедливо соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; положим

$$\overrightarrow{a}' \leftrightharpoons \langle a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{l-1}}\rangle,\ \overrightarrow{a}'' \leftrightharpoons \langle a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_{m-1}}\rangle,$$

$i_0 < i_1 < \ldots < i_{l-1}$, $j_0 < j_1 < \ldots < j_{m-1}$, $n_k = l + m$, где наборы $\overrightarrow{a}'$ и $\overrightarrow{a}''$ удовлетворяют условиям

$$\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}') \cup \mathrm{sp}(\overrightarrow{a}'') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{a}),$$

$$\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}') \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) = \varnothing,$$

$$\mathrm{sp}(\overrightarrow{a}'') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}).$$

Отметим, что кортежи $\overrightarrow{a}'$ и $\overrightarrow{a}''$ состоят из попарно различных элементов и определяются однозначно. Положим также $\overrightarrow{u}' \leftrightharpoons \langle u_{i_0}, u_{i_1}, \ldots, u_{i_{l-1}}\rangle$, $\overrightarrow{u}'' \leftrightharpoons \langle u_{j_0}, u_{j_1}, \ldots, u_{j_{m-1}}\rangle$; поместим формулу $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)$ в F', если выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u} \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \text{ и } \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}) \Rightarrow \big(\langle \overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{c}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle\big),$$

для всех $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}^{n_k}$ (здесь следует воспользоваться тем, что $\{\Psi_r(A_k)\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ удовлетворяет соглашению 1(2, $\varnothing$)).

Если $\overrightarrow{a}' = \lambda$, то положим $F_0 \leftrightharpoons \{\psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\} \subseteq F'$ (формула $\psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ выбирается так, чтобы выполнялось соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_0(\overrightarrow{a}'', \overrightarrow{s})$; такой выбор возможен, поскольку выполняются условия (**12.1**) и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}'', \overrightarrow{s})$).

Пусть теперь $\mathrm{lh}(\overrightarrow{a}') = l > 0$; возьмём формулу $\theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'$, для которой имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u}(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \wedge \theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}))$, и определим формулу $\varrho(\varphi \wedge \theta)(u)$, помещая в неё в точности следующие конъюнкты (здесь $\varepsilon \in \{0, 1\}$, а $q \in \omega$, $C_i \subseteq \omega$ ($i \in \omega$, $i < q$) определены выше и отвечают за параметры):

• $\mathrm{R}_i^\varepsilon(u)$, если $C_i(i) \neq \varepsilon$, $i \in \omega$, $i < q$;
• $\mathrm{R}^\varepsilon(u, \mathbf{l}{\cdot}\mathbf{p} + \mathbf{g} + \mathbf{q})$, если $\mathrm{R}_p^\varepsilon(u_{i_g})$ — конъюнкт $(\varphi \wedge \theta)$, где $p, g \in \omega$, $g < l$.
Определим формулу $\varrho(\varphi)$ похожим образом, помещая в неё в точности следующие конъюнкты:
• $\mathrm{R}_i^\varepsilon(u)$, если $C_i(i) \neq \varepsilon$, $i \in \omega$, $i < q$;
• $\mathrm{R}^\varepsilon(u, \mathbf{l}{\cdot}\mathbf{p} + \mathbf{g} + \mathbf{q})$, если $\mathrm{R}_p^\varepsilon(u_{i_g})$ — конъюнкт φ, где $p, g \in \omega$, $g < l$.

Наконец, зафиксируем некоторое взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее набору $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$, который удовлетворяет условию $\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$, элемент $d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}} \in \mathrm{S}$ согласно следующим правилам (здесь $d \in \mathrm{S}$):
(D1) $\gamma_\mathcal{S}(d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}})(n) = \begin{cases} 1 - C_n(n), & \text{если } n \in \omega,\ n < q; \\ \gamma_\mathcal{S}(a_{i_g})(p), & \text{если } n = l \cdot p + g + q\,(p, g \in \omega,\ g < l); \end{cases}$
(D2) $d_{\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s}} = d_{\overrightarrow{a}^1, \overrightarrow{s}} \Rightarrow \overrightarrow{a}^0 = \overrightarrow{a}^1$, для всех $\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{a}^1 \in S^{n_k}$;
(D3) $\gamma_\mathcal{S}(d) = \gamma_\mathcal{S}(d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}}) \Rightarrow \exists \overrightarrow{a}^0 \in \mathrm{S}^{n_k} \big(\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varphi(\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s}) \wedge (d = d_{\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s}})\big)$.
Условия (**D1**), (**D2**) и (**D3**) можно гарантировать ввиду замкнутости семейства $\mathcal{S}$ относительно операции сочленения, а также свойства быть счётными каждых класса относительно R-эквивалентности и множества соответствующих кортежей наперёд заданной длины, причём в данных кортежах имеется возможность зафиксировать лишь конечное число элементов в качестве параметров (здесь следует воспользоваться наличием соответствующих автоморфизмов).

Сначала докажем справедливость следующего соотношения:

$$\forall d \in \mathrm{S}\big(\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varrho(\varphi)(d) \Rightarrow \exists \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}((\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})) \wedge (d = d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}}))\big). \quad (6)$$

В самом деле, пусть элемент $d \in \mathrm{S}$ таков, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varrho(\varphi)(d)$; тогда возьмём кортеж $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}_{\neq}^{n_k}$, удовлетворяющий следующим условиям:
• кортеж $\langle c_{j_0}, c_{j_1}, \ldots, c_{j_{m-1}} \rangle$ состоит из соответствующих элементов $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, т. е. параметров; все элементы данного кортежа реализуют все конъюнкты формулы φ, в которые не входят переменные из набора $\overrightarrow{u}'$;
• пусть кортеж $\langle c_{i_0}, c_{i_1}, \ldots, c_{i_{l-1}} \rangle$ не содержит элементов из $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ и удовлетворяет соотношению $\gamma_\mathcal{S}(c_{i_g})(n) = \gamma_\mathcal{S}(d)(l \cdot n + g + q)$ для всех $g, n \in \omega$, $g < l$ (выбор таких элементов возможен, ввиду того, что для каждого $g \in \omega$, $g < l$, множество $\gamma_\mathcal{S}(c_{i_g})$ арифметическое, как только выполняется условие $d \in \mathrm{S}$, а $\gamma_\mathcal{S}$–кодов каждого арифметического множества бесконечно много);
• выполняется соотношение $\mathfrak{M}_\mathcal{S} \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s})$, что непосредственно вытекает из определения формулы $\varrho(\varphi)$.

Следовательно, элемент $d_{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}}$ задан, причём справедливо равенство $\gamma_\mathcal{S}(d) = \gamma_\mathcal{S}(d_{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{s}})$. Из свойства (**D3**) вытекает, что найдётся $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$, для которого имеют место соотношения $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ и $d = d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}}$. Тем самым, справедливость условия (6) доказана.

Проверим сейчас, что выполняется эквивалентность

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi \wedge \theta)(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi \wedge \theta)(d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}}) \tag{7}$$

для всех формул $\theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'$ и кортежей $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$, удовлетворяющих условию $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. В самом деле, пусть $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$ таково, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$; тогда задан элемент $d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}}$. Далее, если $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \theta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$, то непосредственно из (**D1**) и задания операции ϱ вытекает, что имеет место $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi \wedge \theta)(d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}})$; в обратную сторону, если же $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi \wedge \theta)(d_{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}})$, то снова из (**D1**) и задания операции ϱ получаем, что $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \theta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. Тем самым, соотношение (7) также выполняется.

Далее, пусть $\xi(u)$ — формула сигнатуры σ_1, имеющая один из следующих видов: $\varrho(\varphi)$ или $\varrho(\varphi \wedge \theta)$ для подходящей формулы $\theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u}(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \wedge \theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}))$. Сопоставим формуле ξ конечное множество F_ξ бинарных строк, как предлагается ниже, и положим $V_\xi \leftrightharpoons \bigcup\limits_{\tau \in F_\xi} V_\tau$. Пусть

$$n_\xi \leftrightharpoons \max\{n | \mathrm{R}_n(u) \text{ — подформула } \xi\} + 1.$$

Помещаем строку τ в F_ξ, если $\mathrm{lh}(\tau) = n_\xi$ и она служит продолжением функции ς_ξ, определённой так (здесь $i \in \omega$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$):

$$\varsigma_\xi(i) = \varepsilon \Leftrightarrow \mathrm{R}_i^\varepsilon(u) \text{ — конъюнкт } \xi.$$

Докажем теперь, что справедливо соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \xi(d) \Leftrightarrow \gamma_{\mathcal{S}}(d) \in V_\xi \tag{8}$$

для любого $d \in \mathrm{S}$. В самом деле, если $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \xi(d)$, то $\gamma_{\mathcal{S}}(d)$ является продолжением ς_ξ и, следовательно, $\gamma_{\mathcal{S}}(d) \in \bigcup\limits_{\tau \in F_\xi} V_\tau = V_\xi$; в обратную сторону, если $\gamma_{\mathcal{S}}(d) \in V_\tau$ для некоторой строки $\tau \in F_\xi$, то $\gamma_{\mathcal{S}}(d)$ продолжает τ, а строка τ продолжает ς_ξ и, следовательно, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \xi(d)$. Тем самым, соотношение (8) выполняется.

Сейчас перейдём к доказательству справедливости включения

$$V_{\varrho(\varphi)} \subseteq \bigcup \{V_{\varrho(\varphi \wedge \psi)} | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'\}. \tag{9}$$

В самом деле, пусть $f \in V_{\varrho(\varphi)}$; тогда возьмём элемент $d \in \mathrm{S}$ такой, что выполняется равенство $\gamma_{\mathcal{S}}(d) = f$. По условию (8), имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi)(d)$, а из условия (6) следует, что $d = d_{\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s}}$ для некоторого $\overrightarrow{a}^0 \in \mathrm{S}^{n_k}$ такого, что выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s})$. Непосредственно из условия (**12.1**) и определения множества F' следует, что $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{a}^0, \overrightarrow{s})$ для подходящей формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'$. Далее, из (7) приходим к соотношению $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi \wedge \psi)(d)$, а, используя снова условие (8), приходим к тому, что выполняется соотношение $\gamma_{\mathcal{S}}(d) \in V_{\varrho(\varphi\wedge\psi)} \subseteq \bigcup\{V_{\varrho(\varphi\wedge\psi)} | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F'\}$. Тем самым, соотношение (9) доказано.

В силу компактности пространства $\{0, 1\}^{\omega}$, существуют $z \in \omega$ и конечное множество $F_0 = \{\psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \psi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \ldots, \psi_z(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\} \subseteq F'$, для которых имеет место соотношение

$$V_{\varrho(\varphi)} \subseteq V_{\varrho(\varphi\wedge\psi_0)} \cup V_{\varrho(\varphi\wedge\psi_1)} \cup \ldots \cup V_{\varrho(\varphi\wedge\psi_z)}. \tag{10}$$

Далее, пусть $F_0 = \{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_z\}$ для некоторого $z \in \omega$; возьмём натуральное число $n \geqslant m$ такое, что

$$(\varphi \to ((\ldots(\psi_0 \vee \psi_1) \vee \ldots) \vee \psi_z))$$

является формулой сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$, а также набор $\overrightarrow{t} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_n(\overrightarrow{t}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$; докажем, что имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}_n \models (\varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{t}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{t}) \mid \psi \in F_0\}) \tag{11}$$

для всех $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}_n^{n_k}$.

Пусть кортеж $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}_n^{n_k}$ таков, что выполняется условие $\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{t})$. По замечанию 1(1), имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}, \overrightarrow{s})$ для подходящего кортежа $\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}} \in \mathrm{S}_{\neq}^{n_k}$ такого, что имеют место соотношения $\langle \overrightarrow{c}\,\hat{}\,\overrightarrow{t}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}\,\hat{}\,\overrightarrow{s}; =\rangle$, $\gamma_n(\overrightarrow{c}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}) \upharpoonright (n+1)$. Если выполняется включение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, то приходим к тому, что выполняется импликация

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}, \overrightarrow{s}) \to \psi(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}, \overrightarrow{s})),$$

где $F_0 = \{\psi\}$; поэтому будем считать, что имеет место соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}) \nsubseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Тогда существует $d = d_{\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}, \overrightarrow{s}} \in \mathrm{S}$, для которого имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi)(d)$; из условия (8) приходим к тому, что выполняется соотношение $\gamma_{\mathcal{S}}(d) \in V_{\varrho(\varphi)}$, а из условия (10) получаем, что справедливо соотношение $\gamma_{\mathcal{S}}(d) \in V_{\varrho(\varphi\wedge\psi)}$ для некоторой формулы $\psi \in F_0$. Снова воспользуемся (8) для того, чтобы прийти к соотношению $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varrho(\varphi \wedge \psi)(d)$; затем, применяя (7), получим условие $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{d}_{\overrightarrow{c}}, \overrightarrow{s})$.

По замечанию 1(1), имеем $\mathfrak{M}_n \models \psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{t})$. Таким образом, справедливо соотношение (11), а вместе с ним и условие (**12.3**). $\square$

Сформулируем одно из основных свойств множества $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\,\hat{}\,r}$.

Лемма 13. *Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула, удовлетворяющая заключению леммы 11, причём параметр r имеет вид* I*, а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида* II*. Тогда выполняется следующее соотношение:*

$$\begin{gathered}\{a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S} | \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)\} = \{t_k(\overrightarrow{a}) | k \in \omega,\ \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторых } m \in \omega \text{ и } \langle\!\langle 0, m, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\}.\end{gathered} \tag{12}$$

Более того, соглашение 1(2, $\varnothing$) выполняется для $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$, где $B_k \leftrightharpoons \{\varphi \mid \langle\!\langle 0, m, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ для некоторого $m \in \omega\}$, для всех $k \in \omega$.

Доказательство. Пусть посылка леммы выполняется для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а вычислимая последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ задаёт эту Σ-формулу и удовлетворяет соглашению 1(2, $\{r\}$), а также следующему условию: любая формула $\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$ не содержит подформул вида $(u \approx r)$, где u — основная переменная. Тогда возьмём $\gamma_{\mathcal{S}}(r)$-вычислимую последовательность $\{\Psi_r(A_k)\}(\overrightarrow{s})$, также задающую $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и, к тому же, удовлетворяющую соглашению 1(2, $\varnothing$). Построение такой последовательности уже проводилось перед определением 4.

Через $A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ обозначим соответственно левую и правую части равенства (12). Для того, чтобы доказать лемму, достаточно доказать равенство $A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) = B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, для чего, в свою очередь, достаточно проверить справедливость двух включений.

$A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \subseteq B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Пусть $a \in A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$; тогда существуют $k \in \omega$ и $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)$ такие, что $a = t_k(\overrightarrow{a})$ для подходящего набора $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, для которого выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. Если $n_k = 0$, то, используя (**C3**), получим, что имеет место соотношение

$$\langle\!\langle 0, m, k, (\mathbf{0} \approx \mathbf{0}) \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$$

для подходящего $m \in \omega$, а следовательно, $a \in B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$; поэтому будем считать, что $n_k > 0$.

Пусть далее $\varphi(\in \Psi_r(A_k))$ — формула сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$. Найдём сначала число $m \in \omega$ такое, что выполняется неравенство $m + 1 \geqslant \max\{\log_2(r_k), n+1, n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\}$. Так как имеет место импликация

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \big(\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\}\big), \tag{13}$$

из (**C1a**)–(**C1d**) вытекает, что найдётся конечное множество $G \subseteq \omega$, для которого выполняется соотношение $\langle\!\langle 0, m, k, \theta \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ для всех $\theta \in G$, причём имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \leftrightarrow \bigvee\limits_{\theta\in G} \theta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}))$ (отметим, что здесь снова используем свойство компактности пространства Кантора). Следовательно, существует $\theta \in G$ такое, что выполняется условие $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \theta(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. Таким образом, $a = t_k(\overrightarrow{a}) \in B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

$B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \subseteq A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Пусть $a \in B(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$; тогда найдётся число $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ такое, что $a = t_k(\overrightarrow{a})$ для подходящего набора $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, для которого выполняется соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$. Непосредственно из определения множества $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ (см. (**C1**)–(**C4**)) вытекает справедливость соотношения (13), а следовательно, имеет место включение $\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})\} \subseteq A(\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Для завершения доказательства следует вспомнить, что $\{\Psi_r(A_k)\}_{k\in\omega}$ удовлетворяет соглашению 1(2, $\varnothing$), а также воспользоваться определением 3. $\square$

Далее, пусть Σ-формула $\widetilde{\Phi}(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }\tilde{r})$ такова, что имеет место соотношение $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \equiv_{\Sigma} \widetilde{\Phi}(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }\tilde{r})$, причём выполняется равенство $\gamma_{\mathcal{S}}(\tilde{r}) = A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. Так как имеет место соотношение (**C6**), заключаем, что $\tilde{r} \not\sim_{\mathrm{R}} s$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ (здесь, как и ранее, $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s}_0\hat{\ }\overrightarrow{s}_1\hat{\ }\ldots\hat{\ }\overrightarrow{s}_{q-1}$, $C_i = \gamma_{\mathcal{S}}(s)$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$, где $i \in \omega$, $i < q$; кроме того, имеет место система неравенств $C_0 \sqsubset C_1 \sqsubset \ldots C_{q-1}$). По лемме 10, параметр $\tilde{r}$ имеет вид I для $\widetilde{\Phi}(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }\tilde{r})$, а кортеж $\overrightarrow{s}$ составлен из тех же наборов вида II для $\widetilde{\Phi}(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }\tilde{r})$, что и для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Сейчас зададим понятие минимальности кортежа параметров, участвующих в определении Σ-формулы. Данное свойство будет задаваться для набора, составленного из кортежей вида II, а кортеж вида I всегда будет состоять из одного элемента.

Определение 5. Пусть даны $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$-в.п. множество $D \subseteq HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ и набор $\overrightarrow{s}$ попарно различных элементов из S. Будем называть $\overrightarrow{s}$ *минимально возможным набором параметров для* D, если будут выполняться следующие условия:
• существует Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, определяющая D, при этом параметр r имеет вид I для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида II для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$;
• если Σ-формула $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$ определяет D, причём параметр r' имеет вид I для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$, а набор $\overrightarrow{s}'$ составлен из кортежей вида II для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$, то выполняется соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$. $\diamond$

Будем использовать сокращение '$\overrightarrow{s}$ — *минимально возможный набор* (или *кортеж*) *для* $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$', если этот набор является таковым для решения Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Определение 6. Зададим теперь подмножество $W_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ натуральных чисел, изменив при этом конструкцию из [5] (здесь Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и набор $\overrightarrow{s}\hat{\ }r$ её параметров описаны перед определением 4; кроме того, считаем, что $\overrightarrow{s}$ минимально возможен для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$). Натуральное число $\langle\!\langle n_w, \mathfrak{G}_w \rangle\!\rangle$ помещаем в $W_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, если оно обладает следующими свойствами:

(W1): все необходимые свойства такие, как быть минимально возможным для набора и отсутствия сохраняемости решения перестановками, будут проверяться на образе элемента $\mathbb{HF}_{n_w}(\mathfrak{M}_{n_w})$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$ (см. определение 7);

(W2): группа $\mathfrak{G}_w$ перестановок на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$, и отвечающая за свойство сохраняемости решения Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ (а именно, имеет место отношение $\pi \in \mathfrak{G}_w$, если и только если справедливо отношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \leftrightarrow \Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r)))$; аппроксимация действия группы $\mathfrak{G}_w$ описывается в (**N1**), (**N2**); здесь и далее $\mathfrak{G}_w$ отождествляется со своим сильным индексом;

(W3): $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) \leqslant n_w + 1$;

(W4): $C_i \upharpoonright (n_w + 1) \sqsubset C_j \upharpoonright (n_w + 1)$ для всех $i, j \in \omega$, $i < j < q$ (как выше, $C_i = \gamma_{\mathcal{S}}(s)$ для всех $s \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$, $i \in \omega$, $i < q$). $\diamond$

Нас будет прежде всего интересовать наименьший элемент множества, заданного в определении 6 (разумеется, если $W_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r} \neq \varnothing$; здесь следует вспомнить принцип наименьшего числа для множества натуральных чисел).

Определение 7. Пусть даны Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $\langle\!\langle n_w, \mathfrak{G}_w \rangle\!\rangle \in W_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, как в определении 6. *Аппроксимации* отношения равенства Σ-множеств, задаваемого группой $\mathfrak{G}_w$ перестановок, и свойства минимальности для набора параметров определим следующим образом:

(N1): пусть даны $n \in \omega$, перестановка $\pi \in \mathfrak{G}_w$ и набор $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n + 1)$; тогда имеет место следующее равенство для всех $k \in \omega$:

$$\begin{aligned}&\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} = \\ &= \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{x})) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\};\end{aligned} \tag{14}$$

(N2): пусть даны перестановка π на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, удовлетворяющая соотношению $\pi \notin \mathfrak{G}_w$ и действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$, и набор $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_{n_w})^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{n_w}(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n_w + 1)$; тогда найдётся $k \in \omega$, для которого выполняется следующее:

$$\begin{aligned}&\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{n_w}^{n_k}, \mathfrak{M}_{n_w} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \\ &\qquad \text{для некоторого } \langle\!\langle 0, n_w, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \neq \\ &\neq \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_{n_w}^{n_k}, \mathfrak{M}_{n_w} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{x})) \\ &\qquad \text{для некоторого } \langle\!\langle 0, n_w, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\};\end{aligned}$$

(N3): если $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) > 0$, то найдётся кортеж $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_{n_w})^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_{n_w}(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n_w + 1)$, такой что для каждого кортежа $\overrightarrow{x}' \in (\mathrm{S}_{n_w})^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}_{\neq}$, удовлетворяющего соотношению $\mathrm{sp}(\overrightarrow{x}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{x})$, существует $k \in \omega$, для которого имеет место неравенство

$$\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n_w + 1,$$

а также выполняется следующее соотношение (здесь $n = n_w$):

$$\{t_k(\overrightarrow{a})|\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k},\, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}) \text{ для некоторого } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{}r}\} \neq \\ \neq \{t_k(\overrightarrow{a})|\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k},\, \mathfrak{M}_n \models \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}')\}, \tag{15}$$

для любой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ от наборов $\overrightarrow{u} = \langle u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}\rangle$, $\overrightarrow{v} = \langle v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-2}\rangle$ попарно различных соответственно основных и дополнительных переменных. $\diamond$

Покажем теперь, что приведённые выше соотношения действительно служат хорошим приближением отношения равенства на Σ-множествах. Сначала рассмотрим условия, касающиеся группы $\mathfrak{G}$ перестановок на множестве $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующих инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$, и сохраняющих решение Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$.

Лемма 14. *Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$ удовлетворяет лемме 11, причём параметр r имеет вид* I, *а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей $\overrightarrow{s}_i$ вида* II, *для всех $i \in \omega$, $i < q$. Пусть также π — перестановка на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$. Тогда следующие условия равносильны:*

(14.1): $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r) \leftrightarrow \Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{}r))$*;*

(14.2): *выполняется соотношение (14) для всех $k, n \in \omega$ и кортежа $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющего равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$;*

(14.3): *для всех $k, n \in \omega$ существует кортеж $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$, а также соотношению (14).*

Доказательство. Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$ и перестановка π удовлетворяют посылке леммы. Пусть также последовательность $\{A_k\}_{k\in\omega}$ вычислима, удовлетворяет соглашению $1(2, \{r\})$ и задаёт Σ-формулу $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$, причём φ не содержит подформул вида $(u \approx r)$, где u — основная переменная и $\varphi \in \bigcup\limits_{k\in\omega} A_k$. Пусть далее $\{\Psi_r(A_k)\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s})$ — $\gamma_{\mathcal{S}}(r)$-вычислимая последовательность, определённая выше, которая удовлетворяет соглашению $1(2, \varnothing)$ и также задаёт $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$. Построение такой последовательности уже проводилось перед определением 4.

Для любых $n, k \in \omega$ и кортежа $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющего равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$, положим $C(\overrightarrow{x}, k, n) \leftrightharpoons$
$\leftrightharpoons \{t_k(\overrightarrow{a})|\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}_n^{n_k}, \mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x})$ для некоторого $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{}r}\}$.

((**14.1**)$\Rightarrow$(**14.2**)) Пусть имеет место соотношение

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x(\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r) \leftrightarrow \Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{}r));$$

докажем, что выполняется соотношение (14) для любых $k, n \in \omega$ и набора $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющего равенству $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$. Возьмём $n \in \omega$ и кортеж $\overrightarrow{x}^0 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий соотношению $\gamma_n(\overrightarrow{x}^0) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$; достаточно доказать, что выполняется отношение $C(\overrightarrow{x}^0, k, n) \subseteq C(\pi(\overrightarrow{x}^0), k, n)$ включения для каждого $k \in \omega$; для доказательства обратного включения следует рассмотреть Σ-формулу $\Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r)$ и перестановку π^{-1} вместо $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и π соответственно. Если $C(\overrightarrow{x}^0, k, n) = \varnothing$ или $n_k = 0$, то рассматриваемое утверждение выполняется (см. (**C1**)–(**C4**)), поэтому будем считать, что $C(\overrightarrow{x}^0, k, n) \neq \varnothing$ и $n_k > 0$; в частности, должно выполняться неравенство $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n+1$. Пусть $a \in C(\overrightarrow{x}^0, k, n)$; тогда $a = t_k(\overrightarrow{a})$ для подходящего кортежа $\overrightarrow{a} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{n_k}$, удовлетворяющего соотношению $\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}^0)$ для некоторого $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. Далее, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{s})$, по замечанию 1(1) (здесь кортеж $\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}} \in \mathrm{S}^{n_k}$ удовлетворяет условиям $\gamma_n(\overrightarrow{a}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}) \restriction (n+1)$ и $\langle \overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{x}^0; = \rangle \equiv \langle \overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}\hat{\ }\overrightarrow{s}; = \rangle$); согласно (**C1d**), имеем

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee\{\psi(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\},$$

а из (**14.1**) получаем, что имеет место соотношение

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u} \Big(\bigvee\{\psi(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bigvee\{\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) | \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \Psi_r(A_k)\} \Big).$$

Снова используя (**C1d**), приходим к тому, что $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi^* \rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ для некоторой (единственной!) формулы $\varphi^*(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, удовлетворяющей соотношению

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u} (\varphi^*(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})) \leftrightarrow \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})).$$

Тогда имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{s})$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\varphi(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \overrightarrow{s}) \to \varphi^*(\overrightarrow{b}_{\overrightarrow{a}}, \pi(\overrightarrow{s})))$; снова используя замечание 1(1), получаем, что имеют место соотношения $\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}^0)$ и $\mathfrak{M}_n \models (\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}^0) \to \varphi^*(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{x}^0)))$. Таким образом, $a = t_k(\overrightarrow{a}) \in C(\pi(\overrightarrow{x}^0), k, n)$.

((**14.2**)⇒(**14.3**)) Очевидно. ((**14.3**)⇒(**14.1**)) Пусть теперь для любых чисел $n, k \in \omega$ найдётся кортеж $\overrightarrow{x}^{k,n} \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, удовлетворяющий равенствам $\gamma_n(\overrightarrow{x}^{k,n}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+1)$ и $C(\overrightarrow{x}^{k,n}, k, n) = C(\pi(\overrightarrow{x}^{k,n}), k, n)$; докажем, что имеет место $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall x (\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \leftrightarrow \Phi(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r))$. Покажем только, что справедлива импликация $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \Rightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r)$ для всех $a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$: аналогично доказывается обратная импликация. Пусть $a \in HF(\mathrm{S}) \cup \mathrm{S}$ таково, что имеет место соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$; возьмём $k \in \omega$ и набор $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}_{\neq}$, для которых выполняется равенство $a = t_k(\overrightarrow{a})$. Если $n_k = 0$ и, в частности, $\overrightarrow{a} = \lambda$, то утверждение выполняется, поэтому будем считать, что $n_k > 0$. По лемме 13, имеем $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s})$ для некоторого $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. Возьмём вторую координату $n \in \omega$ из данной четвёрки; из (**C1**) следует справедливость неравенства $\max\{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}), n_k, \log_2(r_k)\} \leqslant n + 1$ и того, что φ — элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$, совместимая с $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$. Далее, из замечания 1(1) вытекает, что $\mathfrak{M}_n \models \varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^{k,n})$, где кортеж $\overrightarrow{c} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}_{\neq}$ таков, что имеют место соотношения $\gamma_n(\overrightarrow{c}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{a}) \upharpoonright (n+1)$ и $\langle \overrightarrow{c}\hat{\ }\overrightarrow{x}^{k,n}; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{a}\hat{\ }\overrightarrow{s}; =\rangle$.

Тем самым, имеем $t_k(\overrightarrow{c}) \in C(\overrightarrow{x}^{k,n}, k, n) = C(\pi(\overrightarrow{x}^{k,n}), k, n)$. Снова по замечанию 1(1), справедливо соотношение $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi^*(\overrightarrow{a}, \pi(\overrightarrow{s}))$ для некоторого $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi^*\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. По лемме 13, справедливо соотношение $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \Phi(a, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r)$. □

Следующее утверждение демонстрирует, что действие перестановок на заданных приближениях обладает свойством монотонности.

Лемма 15. *Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ удовлетворяет лемме 11, причём параметр r имеет вид* I, *а набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей $\overrightarrow{s}_i$ вида* II *для всех $i \in \omega$, $i < q$. Пусть также π — перестановка на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}_i)$ для всех $i \in \omega$, $i < q$. Далее, пусть числа $k, n \in \omega$ и кортеж $\overrightarrow{x} \in (\mathrm{S}_n)^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$, для которых выполняется равенство $\gamma_n(\overrightarrow{x}) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$, удовлетворяют также соотношению (14). Тогда имеет место соотношение (14) для $\overrightarrow{x}' \in (\mathrm{S}_{n-1})^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}_{\neq}$, k и $n-1$ вместо $\overrightarrow{x}$, k и n соответственно, где $\overrightarrow{x}'$ удовлетворяет условию $\gamma_{n-1}(\overrightarrow{x}') = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright n$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, k, n, $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{x}'$ удовлетворяют посылке леммы. Докажем только включение в прямую сторону в (14) для $\overrightarrow{x}'$ и $n-1$ вместо $\overrightarrow{x}$ и n соответственно: в обратную сторону включение доказывается так же. Пусть формула $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n-1)}$ такова, что $\langle\!\langle 0, n-1, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, где наборы $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ попарно различных основных и дополнительных переменных удовлетворяют условиям $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$. Докажем, что выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_{n-1} \models \forall \overrightarrow{u}\Big(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}') \to \bigvee\{\psi(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{x}')) \mid \langle\!\langle 0, n-1, k, \psi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\}\Big). \tag{16}$$

Если $n_k = 0$ или φ есть $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, то соотношение (16) очевидным образом выполняется, поскольку решения формул $(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ и $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$ сохраняются при действии любой перестановки; поэтому будем считать, что $n_k > 0$ и формула $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ отличается от $\neg(\mathbf{0} \approx \mathbf{0})$, где $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ — наборы попарно различных основных и дополнительных переменных длин n_k и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ соответственно. Пусть набор $\overrightarrow{a} \in (\mathrm{S}_{n-1})^{n_k}$ таков, что имеет место соотношение $\mathfrak{M}_{n-1} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{x}')$. Тогда, согласно замечанию 1(2), для любого набора $\overrightarrow{c}_{\overrightarrow{a}} \in (\mathrm{S}_n)^{n_k}$, удовлетворяющего условиям $\langle \overrightarrow{a}\hat{}\overrightarrow{x}'; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{c}_{\overrightarrow{a}}\hat{}\overrightarrow{x}; =\rangle$ и $\gamma_{n-1}(\overrightarrow{a}) = \gamma_n(\overrightarrow{c}_{\overrightarrow{a}}) \upharpoonright n$, существует $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k-1}\rangle \in \{0, 1\}^{n_k}$, для которого будет выполняться соотношение $\mathfrak{M}_n \models [(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}) \wedge \bigwedge\limits_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_n^{\varepsilon_i}(u_i))]^{\overrightarrow{u}}_{\overrightarrow{c}_{\overrightarrow{a}}}$.

Следовательно, $\langle\!\langle 0, n, k, (\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \wedge \bigwedge\limits_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_n^{\varepsilon_i}(u_i))\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$ (разумеется, четвёртая координата рассматривается с точностью до перестановки конъюнктов). Из справедливости соотношения (14) вытекает, что выполняется соотношение $\langle\!\langle 0, n, k, \psi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$, где ψ пробегает, снова с точностью до перестановок конъюнктов, формулы $\left(\varphi(\overrightarrow{u}, \pi^{-1}(\overrightarrow{v})) \wedge \bigwedge\limits_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_n^{\varepsilon_i}(u_i)\right)$, в которых кортеж $\langle \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_k-1}\rangle \in \{0, 1\}^{n_k}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{M}_n \models \exists \overrightarrow{u}\left(\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n_k-1} \mathrm{R}_n^{\varepsilon_i}(u_i)\right).$$

В частности, формула $\varphi(\overrightarrow{u}, \pi^{-1}(\overrightarrow{v}))$ эквивалентна некоторой элементарной конъюнкции СДНФ $\varphi^*(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n-1)}$, для которой имеет место соотношение $\langle\!\langle 0, n-1, k, \varphi^*\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{}r}$. □

Леммы 14, 15 гласят, что на уровне n_w обеспечивается обстоятельство, что любая перестановка $\pi \notin \mathfrak{G}_w$ не сохраняет решение рассматриваемой Σ-формулы. Для того, чтобы гарантировать свойство сохраняемости её решения для всякой перестановки $\pi \in \mathfrak{G}_w$, следует проверять соотношение (14) на всех уровнях.

Перейдём теперь к исследованию минимально возможных наборов параметров.

Лемма 16. *Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$ удовлетворяет лемме 11, причём параметр r имеет вид* I *для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$, а $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида* II *для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$. Тогда следующие условия равносильны:*

(16.1): *$\overrightarrow{s}$ — минимально возможный набор параметров для Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{}r)$;*

(16.2): *если $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) > 0$, то, каков бы ни был кортеж $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, для которого справедливо соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, выполняется следующее условие для некоторых $n, k \in \omega$, удовлетворяющих неравенству $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n+1$:*

(*) существуют кортежи $\overrightarrow{x}^0 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, $\overrightarrow{x}^1 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, *удовлетворяющие следующим соотношениям:*

- $\gamma_n(\overrightarrow{x}^0) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$;
- $\langle \overrightarrow{x}^0{}^\frown \overrightarrow{x}^1; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{s}{}^\frown \overrightarrow{s}'; =\rangle$;
- *а также* (15) *для любых бескванторной формулы* $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *сигнатуры* $\sigma_1^{(n)}$, *где* $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$ *и* $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{x}^1)$, *а также* $\overrightarrow{x}^0$, $\overrightarrow{x}^1$ *вместо наборов* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x}'$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть посылка леммы выполняется для $\Phi(x, \overrightarrow{s}{}^\frown r)$. Если $\overrightarrow{s} = \lambda$, то лемма выполняется, поэтому будем считать, что $\mathrm{lh}(\overrightarrow{s}) > 0$.

((**16.2**)⇒(**16.1**)) Доказывать будем методом от противного. Возьмём Σ-формулу $\Phi'(x, \overrightarrow{s}''{}^\frown r')$, для которой $r' \in \mathrm{S}$ имеет вид I для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}''{}^\frown r')$, набор $\overrightarrow{s}''$ составлен из кортежей вида II для $\Phi'(x, \overrightarrow{s}''{}^\frown r')$, а также удовлетворяет соотношениям $\Phi(x, \overrightarrow{s}{}^\frown r) \equiv_\Sigma \Phi'(x, \overrightarrow{s}''{}^\frown r')$ и $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}'') \neq \varnothing$. Далее, возьмём $r_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}'')$; по лемме 4, для любого автоморфизма f структуры $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, действующего тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}{}^\frown r) \setminus \{r_0\}$, имеем $\Phi(x, \overrightarrow{s}{}^\frown r) \equiv_\Sigma \Phi(x, f(\overrightarrow{s}{}^\frown r))$. Так как, согласно лемме 10, параметр r_0 не может иметь вид I для $\Phi(x, \overrightarrow{s}{}^\frown r)$, должно выполняться соотношение $[r_0]_{\mathrm{R}} \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) = [r_0]_{\mathrm{R}} \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}{}^\frown r) \neq \{r_0\}$; по лемме 8, найдём Σ-формулу $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'{}^\frown r)$, для которой выполняются соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{r_0\}$ и $\Phi(x, \overrightarrow{s}{}^\frown r) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}'{}^\frown r)$.

Пусть теперь числа $n, k \in \omega$ и кортежи $\overrightarrow{x}^0 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, $\overrightarrow{x}^1 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_n(\overrightarrow{x}^0) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$, $\langle \overrightarrow{s}{}^\frown \overrightarrow{s}'; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{x}^0{}^\frown \overrightarrow{x}^1; =\rangle$ и $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n+1$. Тогда в качестве бескванторной формулы $\psi(u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-2})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ возьмём

$$\bigvee\{\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{n_k-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-2}) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi_1, \overrightarrow{s}'{}^\frown r}\}.$$

Остаётся лишь доказать, что выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_n \models \forall \overrightarrow{u} \big(\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^1) \leftrightarrow \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^0) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}{}^\frown r}\}\big) \tag{17}$$

(напомним, что $n, k \in \omega$ фиксированы). В самом деле, нетрудно построить конечное множество G элементарных конъюнкций СДНФ вида $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$, для которого имеет место универсальное замыкание эквивалентности (снова вспоминаем свойство компактности пространства Кантора)

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u} (\bigvee\{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) | \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in G\} \leftrightarrow \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}'));$$

тем самым, приходим к соотношению

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall \overrightarrow{u} \big(\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}') \to \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}{}^\frown r}\}\big).$$

Из существования вложения $h : \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, удовлетворяющего равенствам $h(\overrightarrow{x}^0) = \overrightarrow{s}$ и $h(\overrightarrow{x}^1) = \overrightarrow{s}'$, вытекает справедливость соотношения

$$\mathfrak{M}_n \models \forall \overrightarrow{u}(\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^1) \to \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^0) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\}). \qquad (18)$$

Пусть теперь формула $\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ такова, что $\langle\!\langle 0, n, k, \varphi_0\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$; в частности, $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \exists \overrightarrow{u}\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$. Используя леммы 6, 7, а также неравенство $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}')\} \leqslant n+1$, приходим к тому, что *существует бескванторная формула* $\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')$ *сигнатуры* $\sigma_1^{(n)}$*, удовлетворяющая соотношениям*

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models (\exists \overrightarrow{u}\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}') \wedge \forall \overrightarrow{u}(\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \to \varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')),$$
$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}) \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}') \to \Phi(t_k(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{s}))$$

(для того, чтобы получить φ_1, необходимо из φ_0 удалить все конъюнкты, содержащие r_0).

Снова из существования вложения $h : \mathbb{HF}_n(\mathfrak{M}_n) \leqslant_{\mathrm{end}} \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_{\mathcal{S}})$, удовлетворяющего равенствам $h(\overrightarrow{x}^0) = \overrightarrow{s}$ и $h(\overrightarrow{x}^1) = \overrightarrow{s}'$, вытекает справедливость соотношения

$$\mathfrak{M}_n \models \forall \overrightarrow{u}\big(\bigvee\{\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^0) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \to \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}^1)\big). \qquad (19)$$

Из (18), (19) приходим к соотношению (17). Таким образом, получаем противоречие с условием (**16.2**).

((**16.1**)⇒(**16.2**)) Доказывать опять будем методом от противного. Выберем кортеж $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$ такой, что имеет место соотношение $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, но не выполняется условие (*). Докажем существование Σ-формулы $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$ для подходящего $r' \in \mathrm{S}$, имеющего вид I для $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$, к тому же удовлетворяющей соотношению $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r') \equiv_{\Sigma} \Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, что заведомо будет противоречить условию (**16.1**). Для этой цели построим $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$-вычислимую последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}(\overrightarrow{s}')$ множеств, состоящих из бескванторных формул сигнатуры σ_1, задающую $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Пусть $k \in \omega$; перейдём к заданию множества B_k. Возьмём любые число $n \in \omega$ и кортежи $\overrightarrow{x}^0 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, $\overrightarrow{x}^1 \in (\mathrm{S}_n)_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

- $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n+1$;
- $\gamma_n(\overrightarrow{x}^0) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \upharpoonright (n+1)$;
- $\langle \overrightarrow{x}^0\hat{\ }\overrightarrow{x}^1; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{s}\hat{\ }\overrightarrow{s}'; =\rangle$.

Тогда существует бескванторная формула $\psi_{n,k}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ (здесь $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}')$), для которой выполняется соотношение

$$\mathfrak{M}_n \models \psi_{n,k}(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^1) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_n \models \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{x}^0) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\}, \qquad (20)$$

для любого $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}_n^{n_k}$. По замечанию 1(1), имеем

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi_{n,k}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}') \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) | \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\},$$

для любого $\overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}$. Поместим формулу $\psi_{n,k}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')$ в B_k. По лемме 13, последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}$ задаёт $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Возьмём теперь $r' \in \mathrm{S}$ так, чтобы этот элемент являлся $\gamma_{\mathcal{S}}$–кодом множества $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$. Так как трёхместное отношение (20) от n, k, $\psi_{n,k}$ вычислимо относительно $A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}$, последовательность $\{B_k\}_{k\in\omega}$ легко преобразуется в вычислимую последовательность с набором $\overrightarrow{s}'\hat{\ }r'$ параметров, задающую $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$, согласно лемме 5. Для завершения доказательства остаётся заметить, что имеет место соотношение $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \equiv_{\Sigma} \Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$. □

Отметим, что при доказательстве ((**16.1**)⇒(**16.2**)) в случае отсутствия монотонности соотношения (*) по $n \in \omega$ также можно было бы прийти к построению Σ-формулы с мѐньшим числом параметров (для этого достаточно выбрать только формулы вида $\psi_{n,k}$, удовлетворяющие соотношению (20)). Покажем, что такой приём не возможен. А именно, перейдём к доказательству свойства монотонности для приближения условия для набора параметров быть минимально возможным.

Лемма 17. *Пусть Σ-формула $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ удовлетворяет лемме 11, причём параметр r имеет вид* I *для $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а непустой набор $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида* II *для Σ-формулы $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Пусть также кортеж $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$ удовлетворяет соотношению $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') \subseteq \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, для которого выполняется (*) из условия леммы 16 для $n, k \in \omega$. Тогда $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$ удовлетворяет соотношению (*) для $n+1, k$ вместо чисел n, k.*

Доказательство. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, $\overrightarrow{s}' \in \mathrm{S}_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, $n, k \in \omega$ удовлетворяют посылке леммы. Тогда имеет место соотношение
• $\max\{\log_2(r_k), n_k, \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})\} \leqslant n+1$.

Доказывать лемму будем методом от противного. Следовательно, для всех $\overrightarrow{y}^0 \in (\mathrm{S}_{n+1})_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})}$, $\overrightarrow{y}^1 \in (\mathrm{S}_{n+1})_{\neq}^{\mathrm{lh}(\overrightarrow{s})-1}$, удовлетворяющих соотношениям
• $\gamma_{n+1}(\overrightarrow{y}^0) = \gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s}) \restriction (n+2)$;
• $\langle \overrightarrow{y}^0\hat{\ }\overrightarrow{y}^1; =\rangle \equiv \langle \overrightarrow{s}\hat{\ }\overrightarrow{s}'; =\rangle$;
выполняется для всех $\overrightarrow{c} \in \mathrm{S}_{n+1}^{n_k}$ свойство
• $\mathfrak{M}_{n+1} \models \bigvee\{\varphi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{y}^0) \mid \langle\!\langle 0, n+1, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \Leftrightarrow \mathfrak{M}_{n+1} \models \psi(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{y}^1)$
для некоторой бескванторной формулы $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры $\sigma_1^{(n+1)}$ от наборов $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ попарно различных основных и дополнительных переменных длин $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$ и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s}')$ соответственно.

Согласно замечанию 1(1), имеем равенство

$$\{t_k(\overrightarrow{a}) | \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k}, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторой } \langle\!\langle 0, n+1, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi, \overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\ \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \psi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}')\} (= D).$$

По лемме 5, возьмём Σ-формулу $\Psi(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r)$, определяющую множество D; тогда непосредственно из определения 4 (для $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$) вытекает справедливость включения

$$\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторой } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} \subseteq$$
$$\subseteq \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторой } \langle\!\langle 0, n+1, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\}.$$

Наконец, перейдём к доказательству справедливости равенства

$$\{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}) \text{ для некоторой } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}\} =$$
$$= \{t_k(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in \mathrm{S}^{n_k},\, \mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \varphi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{s}') \text{ для некоторой } \langle\!\langle 0, n, k, \varphi\rangle\!\rangle \in A_{\Psi,\overrightarrow{s}'\hat{\ }r}\}. \quad (21)$$

Для этого следует проверить два включения. Так как любая элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(n)}$ с набором $\overrightarrow{s}'$ параметров представима в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций СДНФ той же сигнатуры с набором $\overrightarrow{s}$ параметров, то, используя (**C1d**), приходим к справедливости включения ($\supseteq$) в соотношении (21). Для того, чтобы показать обратное включение, к формуле $\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s})$, участвующей в определении левой части равенства (21), следует применить леммы 3, 6, 7, а также условие (**C1d**), поскольку множество D задаётся формулой $\psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')$. Тем самым, придём к некоторой формуле $\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}')$ из правой части, удовлетворяющей при этом соотношениям $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall\overrightarrow{u}(\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \to \varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}'))$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}} \models \forall\overrightarrow{u}(\varphi_1(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}') \to \psi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}'))$.

В завершение воспользуемся замечанием 1(1); таким образом, придём к противоречию с посылкой леммы. □

Определение 8. Пусть $\Phi(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ — Σ-формула с параметром r, имеющим вид I, и набором $\overrightarrow{s}$ параметров, составленным из кортежей вида II, причём набор $\gamma_{\mathcal{S}}(\overrightarrow{s})$ составлен из подмножеств натуральных чисел, возрастающих относительно $\sqsubseteq$; пусть также π — перестановка на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, действующая инвариантно на классах R-эквивалентности. Зададим *действие* $\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$ перестановки π на множестве $A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ как $\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}) \leftrightharpoons A_{\Phi,\pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r}$. Другими словами, $\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$ определяется следующим образом:
(1) для всех $i \geqslant 1$ и $m \in \omega$ имеет место соотношение $\langle\!\langle i, m\rangle\!\rangle \in \pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}) \Leftrightarrow \langle\!\langle i, m\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$;
(2) помещаем $\langle\!\langle 0, m, k, \psi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle$ в $\pi^{\#}(A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$, если ψ_0 — элементарная конъюнкция СДНФ сигнатуры $\sigma_1^{(m)}$, $\langle\!\langle 0, m, k, \varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\rangle\!\rangle \in A_{\Phi,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ и

$$\mathfrak{M}_m \models \forall\overrightarrow{u}(\psi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})) \leftrightarrow \varphi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})))$$

(отметим, что ψ_0 находится единственным образом по $\varphi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{v}))$ при учёте свойства совместимости формулы и количества её основных переменных, где $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$ и $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$). ◇

Лемма 18. *Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$ таковы, что выполняется соотношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$, причём соответственно параметры r и r' имеют вид* I, *наборы $\overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{s}'$ попарно различных параметров составлены из кортежей вида* II *для Φ_0 и Φ_1, а элементы, образующие кортежи $\gamma_\mathcal{S}(\overrightarrow{s})$ и $\gamma_\mathcal{S}(\overrightarrow{s}')$, расположены в порядке возрастания относительно $\sqsubseteq$; кроме того, наборы $\overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{s}'$ минимально возможны для решений данных Σ-формул. Тогда $\pi^\#(A_{\Phi_0,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}) = A_{\Phi_1,\overrightarrow{s}'\hat{\ }r'}$ для некоторой перестановки π на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$ ($\pi(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{s}'$), действующей инвариантно на классах* R*-эквивалентности.*

Доказательство. Пусть Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$ удовлетворяют посылке леммы.

Покажем сначала, что выполняется равенство

$$\{\langle\langle i,m\rangle\rangle | i \geqslant 1,\ m \in \omega\} \cap A_{\Phi_0,\overrightarrow{s}\hat{\ }r} = \{\langle\langle i,m\rangle\rangle | i \geqslant 1,\ m \in \omega\} \cap A_{\Phi_1,\overrightarrow{s}'\hat{\ }r'}.$$

Для этого достаточно доказать, что $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$. Допустим, что это не так. Разберём здесь только случай, когда $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}') \neq \varnothing$: другой случай рассматривается так же. Возьмём $s_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$; по лемме 10, имеем $s_0 \neq r'$ и, следовательно, $s_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}\hat{\ }r) \setminus \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$. По лемме 4, любой автоморфизм структуры $\mathfrak{M}_\mathcal{S}$, действующий тождественно на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}\hat{\ }r) \setminus \{s_0\}$, сохраняет решение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$. Так как кортеж $\overrightarrow{s}$ составлен из кортежей вида II для $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$, а $s_0 \in \mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$, имеет место неравенство $[s_0]_\mathrm{R} \cap \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \neq \{s_0\}$. По лемме 8, найдётся Σ-формула $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}''\hat{\ }r)$, для которой выполняются соотношения $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}'') = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) \setminus \{s_0\}$ и $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \equiv_\Sigma \Phi_2(x, \overrightarrow{s}''\hat{\ }r)$. По лемме 10, набор $\overrightarrow{s}''$ составлен из кортежей вида II для $\Phi_2(x, \overrightarrow{s}''\hat{\ }r)$; пришли к противоречию с тем, что $\overrightarrow{s}$ — минимально возможный набор для решения Σ-формулы $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$.

Тем самым, имеет место равенство $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s}) = \mathrm{sp}(\overrightarrow{s}')$, откуда получаем, что функция π, удовлетворяющая равенству $\pi(\overrightarrow{s}) = \overrightarrow{s}'$, является перестановкой на $\mathrm{sp}(\overrightarrow{s})$. Отсюда также вытекает справедливость первого условия задания $\pi^\#(A_{\Phi_0,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$, поскольку из того, что π должна сохранять отношение $\sqsubseteq$ между элементами кортежей $\gamma_\mathcal{S}(\overrightarrow{s})$ и $\gamma_\mathcal{S}(\overrightarrow{s}')$, она действует инвариантно на классах R-эквивалентности. Далее, поскольку имеет место отношение $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r) \equiv_\Sigma \Phi_1(x, \pi(\overrightarrow{s})\hat{\ }r')$, выполняется соотношение

$$\big(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{s}) \to \Phi_0(t_k(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{s}\hat{\ }r))\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \big([\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_\mathcal{S}) \models \forall \overrightarrow{u}(\varphi_0(\overrightarrow{u}, \pi(\overrightarrow{s})) \to \Phi_1(t_k(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{s}'\hat{\ }r'))\big),$$

для всех $k \in \omega$ и элементарной конъюнкции СДНФ $\varphi_0(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ сигнатуры σ_1 от наборов $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ попарно различных основных и дополнительных переменных, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{u}) = n_k$, $\mathrm{lh}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{lh}(\overrightarrow{s})$. Применяя лемму 5, а также определения операторов Ψ_r и $\Psi_{r'}$ для соответствующих вычислимых последовательностей с наборами $\overrightarrow{s}\hat{\ }r$ и $\overrightarrow{s}'\hat{\ }r'$ параметров соответственно, получаем второе условие в задании $\pi^\#(A_{\Phi_0,\overrightarrow{s}\hat{\ }r})$. $\square$

Отметим, что если $w \in W_{\Phi_0,\overrightarrow{s}\hat{\ }r}$ имеет вид $\langle\!\langle n_w, \mathfrak{G}_w \rangle\!\rangle$, то будет выполняться соотношение $\langle\!\langle n_w, \pi \circ \mathfrak{G}_w \circ \pi^{-1} \rangle\!\rangle \in W_{\Phi_1,\overrightarrow{s}'\hat{\ }r'}$ (разумеется, группы $\mathfrak{G}_w$ и $\pi \circ \mathfrak{G}_w \circ \pi^{-1}$ изоморфны, хотя они, в общем случае, различны), где $\Phi_0(x, \overrightarrow{s}\hat{\ }r)$ и $\Phi_1(x, \overrightarrow{s}'\hat{\ }r')$ удовлетворяют посылке леммы 18.

В работе [1] приведённая во введении теорема была доказана с использованием лемм 2–18, которые, в свою очередь, доказаны в настоящей статье. Таким образом, основной результат работы [1] доказан полностью.

Список литературы

1. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г., Файзрахманов М.Х.* Негативные представления на дорпустимых множествах, I// *Матем. тр.* 2023. Т. 59, № 1. С. 66–83.

2. *Hodges W. Model Theory.* Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

3. *Ершов Ю.Л. Определимость и Вычислимость.* Новосибирск: Научная книга (НИИМИОО НГУ), 1996.

4. *Калимуллин И.Ш., Пузаренко В.Г.* О сводимости на семействах // *Алгебра и логика.* 2009. Т. 48, № 1. С. 31–53.

5. *Пузаренко В.Г.* О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$-нумерациях // *Алгебра и логика.* 2002. Т. 41, № 5. С. 568–584.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский)
федеральный университет,
Научно-образовательный
математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, 35
Казань, 420008, РОССИЯ
E-mail: ikalimul@gmail.com

Поступила в редакцию
22 июля 2023
Получена после доработки
22 октября 2023
Принята к публикации
20 ноября 2023

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4.
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1.
Новосибирск, 630090, РОССИЯ
E-mail: vagrig@math.nsc.ru

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский)
федеральный университет,
Научно-образовательный
математический центр ПФО,
ул. Кремлевская, 35
Казань, 420008, РОССИЯ
E-mail: marat.faizrahmanov@gmail.com