МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАБЕРЕЖНОЧЕЛНИНСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВТОНОМНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО

УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л.С. Харасова, Г.А. Якупова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

для практических занятий и самостоятельной работы студентов

ВЫСШЕЙ ИНЖЕНЕРНОЙ ШКОЛЫ

Набережные Челны

2018

УДК 51 (076)

Печатается по решению кафедры математики Высшей Инженерной школы Набережночелнинского института Казанского (Приволжского) федерального университета

Рецензенты:

Н.С. Габбасов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Набережночелнинского института К(П)ФУ

И.А. Шакиров, кандидат физико-математических наук, доцент НГПУ

Харасова Л.С., Якупова Г.А.

Дифференциальные уравнения: Учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов ВЫСШЕЙ ИНЖЕНЕРНОЙ ШКОЛЫ

– Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2018. – 62с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для студентов технических направлений подготовки бакалавров, изучающих раздел математики – дифференциальные уравнения. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе.

Материал учебно-методического пособия представлен в виде отдельных практических занятий, для каждого из которых изложен краткий теоретический материал, подробно разобрано решение типовых задач, приведены задачи для самостоятельного решения. Все задачи для самостоятельного решения снабжены ответами. На последних страницах пособия помещены необходимые справочные материалы.

Учебно-методическое пособие адресовано студентам как дневной, так и заочной формы обучения.

УДК 51 (076)

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения занимают в математике особое место. Математическое исследование разнообразных природных явлений часто приводит к необходимости решения таких уравнений. Например, по скорости V и времени t находят путь точки S. Дифференциальные уравнения (ДУ) – это уравнения, в которые входят неизвестные функции, их производные или дифференциалы и независимые переменные.

Примеры: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5\frac{dy}{dx} + sinx = 0$; $y' = 8y + x$ и так далее.

Если все неизвестные функции зависят от одной независимой переменной, то такое дифференциальное уравнение называется обыкновенным ДУ. Если же есть функции нескольких аргументов, то это дифференциальное уравнение в частных производных. Порядок ДУ определяется наивысшим порядком производных или дифференциалов, входящих в уравнение. В предлагаемом курсе мы будем иметь дело лишь с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

§1. Дифференциальные уравнения I порядка

Определение: Уравнение вида

$$F(x, y, y')=0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция; y' – её первая производная, называется дифференциальным уравнением I порядка. Если уравнение (1) можно разрешить относительно «y'», то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и называется уравнением I порядка, разрешенным относительно производной. Пока будем рассматривать именно такие уравнения. В некоторых случаях уравнение (2) удобно записать в виде: $dy/dx = f$(x, y) или в виде $f(x, y)dx - dy = 0$, что является частным случаем уравнения более общего вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – известные функции. Такое уравнение в симметричной форме (3) удобно тем, что переменные *«x»* и *«y»* в нем равноправны, то есть каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Примеры уравнений в форме (2): $y' = xy$; $y' = ylnx/x$; $y' = x + y$ или в виде (3) $xdy + ydx = 0$.

I. Решение дифференциального уравнения I порядка. Теорема Коши.

Решением ДУ I порядка называется функция $y = \varphi(x) \in (a, b)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Множество (a, b) может быть как конечным, так и бесконечным интервалом. Например, функция $y = x^3$, где $x \in (-\infty ; +\infty)$, является решением уравнения $3y - xy' = 0$; то есть при подстановке в уравнение она обращает его в тождество: $3x^3 - x3x^2 \equiv 0$. График решения дифференциального уравнения $y = \varphi (x)$ называется интегральной кривой.

Ответ на вопрос, при каких условиях уравнение (2) имеет решение, даёт теорема Коши, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2) и является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема Коши: Если в уравнении

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

функция $f(x, y)$ и её частная производная $\frac{df}{dy}$ по переменной *"y"* непрерывны в некоторой области G на плоскости OXY, содержащей некую точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения

$$y = \varphi(x), \tag{5}$$

удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{6}$$

Геометрический смысл теоремы Коши состоит в том, что существует, причём единственная, функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$. То есть через каждую внутреннюю точку области G проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что в области G уравнение (4) имеет бесчисленное множество различных решений.

II. Задача Коши

Теорема Коши позволяет по виду дифференциального уравнения (4) решать вопрос о существовании и единственности его решения. Это особенно важно, если заранее неизвестно, имеет ли данное дифференциальное уравнение решение или нет. Условие (6), в силу которого функция $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение "y_0" в заданной точке "x_0", называют начальным условием и записывают обычно так,

$$y|_{x=x_0} = y_0 \tag{7}$$

В силу него функция $y = \varphi(x)$ принимает в точке $x = x_0$ конкретное, заданное заранее значение $y = y_0$.

Отыскание решения уравнения (4), удовлетворяющего условию (7) – одна из важнейших задач теории дифференциальных уравнений. Эта задача называется задачей Коши. С геометрической точки зрения решить её −

означает выделить из множества интегральных кривых ту, которая проходит через заданную точку (x_0; y_0) плоскости ОХУ. Точки плоскости, через которые проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются особыми точками данного уравнения.

III. Общее и частное решения дифференциального уравнения

Определение: Общим решением уравнения (4) в некоторой области G плоскости ОХУ называется функция у = φ(х, С), зависящая от “х” и от произвольной постоянной “С”, если

а) она является решением уравнения (2) при любом значении С,

б) для любого начального условия (5), то есть $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию (здесь $(x_0; y_0) \in G$).

Определение: Частным решением уравнения (4) в области G называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$. Геометрически общее решение вида $y = \varphi(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на ОХУ, зависящих от общей произвольной постоянной С. Частное решение представляет собой одну интегральную кривую этого семейства $y = \varphi(x, C_0)$, проходящую через заданную точку $(x_0; y_0)$. Иногда начальные условия (5) называют условиями Коши, а частным решением называют решение какой-нибудь одной задачи Коши.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' = 3x^2$.

Решение: Это дифференциальное уравнение I порядка. Оно удовлетворяет всем условиям теоремы Коши, так как функция $f(x, y) = 3x^2$ и производная $f'_{y} = 0$ определены и непрерывны на всей ОХУ. Очевидно, что функция $y = x^3 + C$, где С – произвольная постоянная, является общим решением данного уравнения на всей плоскости ОХУ. Геометрически — это семейство кубических парабол. При подстановке различных значений постоянной “C”, мы получаем различные решения исходного ДУ. Например, если $C = 0$, то $y = x^3$, при $C = 2$ получаем: $y = x^3 + 2$ и так далее. Для решения какой-нибудь задачи Коши, то есть для отыскания частного решения, зададим произ- вольные начальные условия типа (5): $y|_{x=x_0} = y_0$. Подставляя эти значения “x_0” и “ y_0” вместо “x” и “y” в общее решение: $y = x^3 + C$, получаем равенство: $y_0 = x_0^3 + C$, откуда $C = y_0 - x_0^3$. Таким образом, найдено частное решение $y = x^3 + y_0 - x_0^3$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $y' = -\frac{y}{x}$.

Решение: Это ДУ I порядка. Функции $f(x, y)' = -\frac{y}{x}$, $f'_y = -\frac{1}{x}$ непрерывны при $x \neq 0$. Следовательно, на всей плоскости ОХУ, кроме оси ОУ, это уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши. Нетрудно проверить, что общим решением данного уравнения в областях : $y > 0$ и $y < 0$ является функция $y = \frac{C}{x}$, где С – произвольная постоянная. Найдем частное решение, удовлетворяющее, например, начальным условиям: $x_0 = 1$; $y_0 = 1$. Имеем $1 = \frac{C}{1} \Rightarrow C = 1$ и искомое частное решение имеет вид: $y = \frac{1}{x}$. Геометрически общее решение данного ДУ есть семейство гипербол вида: $y = \frac{C}{x}$, каждая из которых изображает частные решения данного уравнения. Задавая начальное условие: $y|_{x=1} = 1$, выделяем из всего семейства ту гиперболу, что проходит через точку (1; 1) на плоскости ОХУ. Заметим, что на оси ОУ нет ни одной точки, через которую проходит хоть одна интегральная кривая, то есть все точки оси ОУ представляют собой особые точки данного дифференциального уравнения: $y' = -\frac{y}{x}$.

Необходимо отметить, что геометрический смысл дифференциального уравнения (2) состоит в том, что оно устанавливает зависимость между координатами точки (x, y) и угловым коэффициентом $k = y'_x$ в уравнении касательной к графику интегральной кривой $y = \varphi(x)$ в той же точке. То есть, зная "x" и "y" можно указать направление касательной к этой интегральной кривой в точке (x, y).

Задача 1. Убедиться, что данные функции являются решениями указанных дифференциальны
х уравнений:

$$y(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{x}, \quad y' + 2y = e^{x}$$

$$y(x) = 2 + \sqrt{1 - x^2}, \quad (1 - x^2)y' + xy = 2x$$

§2. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Уравнение вида

$$y' = f_1(x)f_2(y), \tag{1}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – непрерывные функции, называется ДУ с разделяющимися переменными. Для отыскания решения нужно разделить в нём переменные, отделив их друг от друга по разные стороны равенства. Для этого заменим в (1) y' на $\frac{dy}{dx}$, разделим обе части на $f_2(y)$, предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, и затем умножим обе части на " dx ":

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx\ . \tag{2}$$

Здесь уже “x” входит только в правую, а “y” – только в левую часть – переменные разделены! Предполагая, что функция: y = φ(x) есть решение уравнения и подставляя её в формулу (2), получаем тождество. Интегрируя его, получаем интегральное равенство:

$\int \frac{dy}{f_2(y)} + C_1 = \int f_1(x)dx + C_2$ или, объединяя C_1 и C_2, получим новую произвольную постоянную: $C = C_2 - C_1$, то есть

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \tag{3}$$

Соотношение (3) определяет неявным образом общее решение уравнения (1). Вначале мы разделили в нем переменные, получив уравнение (2). Это уравнение с разделенными переменными (2), которое можно интегрировать и отыскивать общее решение ДУ.

Пример 1: Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}$.

Решение: Это уравнение вида (1), где $f_1(x) = \frac{1}{x}$ и $f_2(y) = y$.

Разделяя переменные, получим: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, имеем: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + C$, представим, что C = ln $|C_1|$ - это возможно, так как ln | C_1 |, как и “C” может принимать любое значение от “- ∞” до “+ ∞” (C1 > 0).

$\frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|$, или проинтегрировав, имеем, $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|$. Потенцируя, получаем | y | = $|C_1|$| x |, или y = ± C_1x. Полагая, что ± C_1 =C , окончательно получаем общее решение нашего дифференциального уравнения:

$$y = Cx \tag{4}$$

Здесь $C \neq 0$ есть произвольная постоянная. Заметим, что $y = 0$ – также решение ДУ, хотя оно и было временно потеряно при делении на $y \neq 0$. Такое решение имеет место при $C = 0$. Геометрически общее решение (4) есть семейство прямых, проходящих через начало координат (пучок прямых на плоскости ОХУ). Пусть требуется выделить из решения (4) частное решение, удовлетворяющее начальному условию ($x_0 = 1$; $y_0 = 2$). Подставляя его в (4), получим, что $2 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $y = 2x$, при начальном условии: $y_0|_{x_0=1} = 2$.

Итак, дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$, где $y' = \frac{dy}{dx}$ может иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y), \tag{5}$$

где $f_1(x)$ зависит только от " x ", а $f_2(y)$ зависит только от " y ". Такое ДУ называется уравнением <u>с разделяющимися переменными</u>. Его общий интеграл имеет вид:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C.$$

При этом ДУ вида:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{6}$$

называется уравнением <u>с разделенными переменными</u>.

Общий интеграл его имеет вид:

$$M(x)dx + N(y)dy = C, \text{ или } \int N(y)dy = -\int M(x)dx + C.$$

Дифференциальное уравнение вида:

$$M_1(x)\, N_1(y)dx + M_2(x)\, N_2(y)dy = 0 \qquad (7)$$

называется собственно уравнением с разделяющимися переменными. Оно может быть приведено к виду (6), то есть к уравнению с разделенными переменными посредством деления (7) на выражение $N_1(y) \cdot M_2(x)$, и тогда: $\frac{M1(x)}{M2(x)}dx + \frac{N2(y)}{N1(y)}dy = 0$, и далее оно решается по вышеуказанной схеме.

Пример 2: Решить уравнение $(2-y^2)\,y' + 2(y^2x + x) = 0$

Решение: Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно записать в виде (7).

Действительно, осуществив в исходном уравнении замену $y' = dy/dx$ и умножив его затем на dx, получим: $2x(y^2+1)dx + (2-y^2)dy = 0$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим обе части уравнения $2x(y^2+1)dx + (2-y^2)dy = 0$ на множитель (y^2+1), получим ДУ с разделёнными переменными: $2xdx + \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = 0$.

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$\int 2xdx + \int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = C$, где C - произвольная постоянная.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int 2xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2,$$

$\int \frac{2-y^2}{y^2+1}dy = \int \frac{3-(y^2+1)}{y^2+1}dy = \int\left(\frac{3}{y^2+1} - 1\right)dy = 3\int \frac{dy}{y^2+1} - \int dy = 3arctgy - y$. Тогда общее решение дифференциального уравнения запишется в виде:

$$3arctg\, y - y + x^2 = C\,.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

В задачах 2.1-2.18 найти общие решения следующих ДУ с разделяющимися переменными:

2.1 $\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

2.2 $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

2.3 $xyy' = 1 - x^2$.

2.4 $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

2.5 $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

2.6 $xy' + y = y^2$.

2.7 $y' = 10^{x+y}$.

2.8 $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 3xy^2dx$.

2.9 $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = yx^2dy$.

2.10 $\cos y dx = 2\sqrt{1+x^2}\,dy + \cos y \cdot \sqrt{1+x^2}\,dy$.

2.11 $y - xy' = 1 + x^2y'$.

2.12 $\sqrt{9+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$.

2.13 $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{x^2+2}\,dy = 0$.

2.14 $(e^{2x}+5)\,dy + ye^{2x}\,dx = 0$.

2.15 $y(4+e^x)\,dy - e^x\,dx = 0$.

2.16 $y\ln y + xy' = 0$.

2.17 $\sqrt{3+y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,y' = 0$.

2.18 $y(1+\ln y) + xy' = 0$.

В задачах 2.19-2.24 найти частные решения ДУ, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

2.19 $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

2.20 $y'ctgx + y = 2$, $y(0) = -1$.

2.21 $(1+e^x)y \cdot y' = e^x$, $y(0) = 1$.

2.22 $xy(1+x^2)y' = 1 + y^2$, $y(1) = 1$.

2.23 $y'\sin x = y\ln y$, $y(\pi/2) = 1$.

2.24 $(1+y^2)dx - xydy = 0$, $y(1) = 0$.

ОТВЕТЫ:

2.1 $\arcsin x + \sqrt{3+y^2} = C$ **2.2** $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$ **2.3** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$

2.4 $y = \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}$ **2.5** $1 + y^2 = C(1 - x^2)$ **2.6** $Cx = (y-1)/y$

2.7 $10^x + 10^{-y} = C$ **2.8** $4 + 3y^2 = C(x^2+1)$ **2.9** $\sqrt{4+y^2} = arctgx + C$

2.10 $2\ln\left|tg(\pi/4 + y/2)\right| + y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$ **2.11** $y = 1 + Cx/(x+1)$

2.19 $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$ **2.20** $y = 2 - 3\cos x$ **2.21** $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x)$

2.22 $(1+y^2)(1+x^2) = 4x^2$ **2.23** $y = 1$ **2.24** $x^2 - y^2 = 1$

§3. Однородные дифференциальные уравнения I порядка

Определение: Функция *f(x,y)* называется однородной функцией n-го измерения относительно переменных “x” и ”y”, если при любом $\lambda \in R$ справедливо тождество: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Пример 1. **а)** $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ есть однородная функция I измерения, так как $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x,y)$;

б) $f(x,y) = xy^2 - y^2$ есть однородная функция II измерения, так $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \cdot \lambda y - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2) = \lambda^2 f(x,y)$;

в) $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$ есть однородная функция нулевого измерения, так как $\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \cdot \lambda y} = \frac{\lambda^2(x^2 - y^2)}{\lambda^2 \cdot xy} = x^2 - y^2$, то есть $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 \cdot f(x, y)$.

Определение: Уравнение I порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

называется однородным относительно “x” и “y”, если функция f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно “x” и “y”.

Решение однородного уравнения.

По условию f(λx, λy) = f(x, y). Положив в этом тождестве $\lambda = \frac{1}{x}$, получим: f(x, y) = $f(1, \frac{y}{x})$, то есть однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения своих аргументов “$\frac{y}{x}$”. Уравнение (1) в этом случае примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) \ . \tag{2}$$

Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$, то есть $y = ux$. Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{d(ux)}{dx}$ и поскольку $y'_x = (ux)'_x = u \cdot x'_x + u'_x \cdot x = u + u'_x \cdot x$, получаем равенство

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Подставляя правую часть $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (2), получим: $u + \frac{du}{dx} x = f(1, u)$, а это – уравнение с разделяющимися переменными:

$x \frac{du}{dx} = f(1,u) - u \,|\, : [x(f(1,u) - u)] \ \Rightarrow \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$, то есть после интегрирования получаем следующее равенство:

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо “u” отношение “$\frac{y}{x}$”, получим общий интеграл дифференциального уравнения (2).

Пример 2. Решить ДУ: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$.

Решение: Справа стоит однородная функция нулевого измерения относительно *“x”* и *“y”*. Следовательно, имеет место однородное ДУ. Делаем замену $u = \frac{y}{x}$, тогда, $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$, то есть $u + \frac{du}{dx}x = \frac{x\,ux}{x^2-(ux)^2}$ или $u + \frac{du}{dx}x = \frac{x^2u}{x^2(1-u^2)}$ $\Rightarrow$ $\frac{du}{dx}x = \frac{u}{(1-u^2)} - u$ или $\frac{du}{dx}x = \frac{u-u+u^3}{(1-u^2)}$;

то есть $x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}$, разделяя переменные, будем иметь:

$\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x}$, или $\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$, откуда, интегрируя, получаем $\int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \int \frac{dx}{x} + ln|C_1|$, то есть $-\frac{1}{2u^2} - ln|u| = ln|x| + ln|C_1| \Rightarrow -\frac{1}{2u^2} = ln|uxC_1|$.

Подставляя $u = \frac{y}{x}$, получаем равенство: $\frac{x^2}{y^2} = -2ln|C_1y|$. Получить “y” в явном виде от “x” в элементарных функциях невозможно. Зато легко выразить “x” через “y”:

$$x^2 = -y^2 ln|Cy^2| \;\Rightarrow\; x = y\sqrt{-ln|Cy^2|}\text{, где } C=C_1^2.$$

Пример 3. Решить ДУ: $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$

Решение: Данное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка, так как его можно записать в виде $y' = f(y/x)$. Действительно, выполнив преобразования: $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y'(2y - 3x) = 3y - 4x \Rightarrow y' = \dfrac{3y - 4x}{2y - 3x}$, получим $y' = \dfrac{3(y/x) - 4}{2(y/x) - 3} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

С помощью подстановки $y = x \cdot u$, $y' = u + xu'$ уравнение $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ или $y' = \dfrac{3(y/x) - 4}{2(y/x) - 3}$ приведём к ДУ с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $u(x)$. Получим: $u + xu' = \dfrac{3u - 4}{2u - 3} \Rightarrow$

$$xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3} - u = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textit{учитываем, что} \\ u' = \dfrac{du}{dx} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$xdu + \frac{2u^2 - 6u + 4}{2u - 3} dx = 0 .$$

Последнее уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными. Сведём его, разделив обе части уравнения на множитель $x \cdot \left(\dfrac{2u^2 - 6u + 4}{2u - 3} \right)$ к уравнению с разделёнными переменными. Получим: $\dfrac{dx}{x} + \dfrac{(2u - 3)du}{2u^2 - 6u + 4} = 0$.

Общее решение последнего уравнения найдём интегрированием каждого слагаемого по своей переменной и запишем в виде:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(2u - 3)du}{2u^2 - 6u + 4} = C \text{, где } C \text{ - произвольная постоянная.}$$

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого):

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|;$$

$$\int \frac{(2u-3)du}{2u^2-6u+4} = \frac{1}{2}\int \frac{(2u-3)du}{u^2-3u+2} = \begin{bmatrix} \text{выделим в знаменателе полный квадрат} \\ u^2-3u+2=(u-3/2)^2-1/4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2u-3)du}{(u-3/2)^2-1/4} = \begin{bmatrix} \text{сделаем замену} \\ u-3/2=t \Rightarrow u=t+3/2 \\ du=(t+3/2)'dt=dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2(t+3/2)-3}{t^2-1/4}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2t+3-3)dt}{t^2-1/4} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2-1/4} = \begin{bmatrix} \text{сделаем замену} \\ 2tdt=d(t^2)=d(t^2-1/4) \\ t^2-1/4=z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| = \left[z=t^2-\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}\ln|t^2-1/4| = \left[t=u-\frac{3}{2}\right] = \frac{1}{2}\ln\left|\left(u-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u^2-3u+2|$$

Тогда общее решение последнего дифференциального уравнения запишется в виде: $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|u^2-3u+2|=C$ или, используя свойства логарифмов, в виде: $x^2\cdot(u^2-3u+2)=C_1$, где $\pm e^{2C}=C_1$- новая произвольная постоянная.

Теперь в найденном решении вернёмся к старой неизвестной функции $y(x)$, выполнив обратную замену $u=y/x$. В итоге получим:

$$x^2\left((y/x)^2-3(y/x)+2\right)=C_1 \quad \text{или} \quad y^2-3xy+2x^2=C_1,$$

где C_1 - произвольная постоянная.

<u>Упражнения для самостоятельного решения</u>.

В задачах 3.1-3.15 найти общие решения следующих однородных дифференциальных уравнений:

3.1 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3.2 $xdy - ydx = ydy$.

3.3 $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

3.4 $y' = x/y + y/x$.

3.5 $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3.6 $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

3.7 $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy = 0$.

3.8 $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$.

3.9 $y = x\left(y' + e^{y/x}\right)$.

3.10 $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

3.11 $xy' - y = (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$.

3.12 $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

3.13 $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3.14 $xy' - y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$.

3.15 $x\left(y' + e^{\frac{y}{x}}\right) = y$.

В задачах 3.16-3.21 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

3.16 $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$, $y(4) = 0$.

3.17 $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

3.18 $(xy' - y)arctg\dfrac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$.

3.19 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 1$.

3.20 $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$, $y(1) = 1$.

3.21 $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, $y(1) = 1$.

ОТВЕТЫ:

3.1 $arctg(y/x) = \ln C\sqrt{x^2 + y^2}$ **3.2** $\ln|y| + x/y = C$ **3.3** $x^2 + y^2 = Cy$

3.4 $y^2 = 2x^2 - \ln Cx$ **3.5** $x^2 = C^2 + 2Cy$ **3.6** $y = Ce^{y/x}$ **3.7** $\sin(y/x) = \ln(C/x)$

3.8 $ctg\left(0.5\ln(y/x)\right) = \ln Cx$ **3.9** $e^{y/x} = \ln Cx$ **3.10** $y^2\ln Cx = x^2$

3.11 $\ln|(x+y)/x| = Cx$ **3.12** $arctg(y/x) - 2\ln\left|x^2 - y^2\right| + 3\ln|x| = C$

3.16 $(x-2)^2 - y^2 = 4$ **3.17** $y^3 = y^2 - x^2$ **3.18** $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{(y/x)arctg(y/x)}$

3.19 $y = xe^{1-x}$ **3.20** $(x+y)^2 = 4x^3e^{(y-x)/2(y+x)}$ **3.21** $\ln|y| + 2\sqrt{x/y} = 2$

§4. Линейные дифференциальные уравнения I порядка

Определение: Уравнение вида:

$$y' + p(x)\,y = f(x), \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется линейным ДУ I порядка. Название объясняется тем, что “y” и “y' ” входят в уравнение (1) в I степени, то есть ЛИНЕЙНО.

Если $f(x) \equiv 0$, то (1) – линейное однородное уравнение. В противном случае ($f(x) \neq 0$) - линейное неоднородное уравнение. Для нахождения общего решения можно применить метод вариации произвольной постоянной. Сначала находим общее решение линейного однородного уравнения

$$y' + p(x)\,y = 0, \qquad (2)$$

соответствующего данному неоднородному ДУ (1). Однородное уравнение (2) – уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

интегрируя это равенство, получаем формулу:

$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx + ln|C_1|$, или $ln|y| = -\int p(x)dx + ln|C_1|$

откуда, потенцируя, находим общее решение уравнения (2):

$y = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx}$ или

$$y = \pm C e^{-\int p(x)dx}, \qquad (3)$$

где $C = \pm C_1$ – произвольная постоянная.

Теперь найдем общее решение уравнения (1) в виде (3), где “C” будем считать новой неизвестной функцией от “x” (см. название метода, в этом представлении и есть его смысл), то есть в виде:

$$y = \pm C(x) e^{-\int p(x)dx} \qquad (4)$$

Чтобы найти $C(x)$, то есть найти решение в форме (4), подставим функцию (4) в исходное неоднородное уравнение (1).

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C'(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$ или

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \qquad (5)$$

Итак, чтобы функция (4) являлась решением уравнения (1), функция *C(x)* должна удовлетворять уравнению (5). Интегрируя (5), находим:

$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x)dx}\, dx + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная.

Подставляя *C(x)* в соотношение (4), получаем общее решение линейного ДУ (1) :

$$y = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx}\, dx. \qquad (6)$$

При решении конкретных примеров проще каждый раз производить приведенные выкладки, чем использовать формулу (6).

Пример 1. Найти общее решение ДУ: $y'+3y = e^{2x}$

Решение. Данное уравнение является линейным, здесь $p(x) = 3, f(x) = e^{2x}$.
1) Решаем сначала однородное уравнение: $y'+3y = 0$. Разделяя переменные, получаем равенство: $\frac{dy}{y} = -3dx \Rightarrow ln|y| = -3x + ln|C_1|$ или $y = Ce^{-3x}$ – это решение однородного ДУ.

2) Ищем общее решение неоднородного ДУ в виде $y = C(x)e^{-3x}$. Дифференцируя это равенство, имеем соотношение для производной

$y' = C'(x)e^{-3x} - 3xC(x)e^{-3x}$.

Подставляя выражения для “ y ” и “ y′ ” в исходное ДУ, получаем:

$C'(x)e^{-3x} - 3xC(x)e^{-3x} + 3C(x)e^{-3x} = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad C'(x)e^{-3x} = e^{2x}$,
или $C'(x) = e^{2x}e^{3x} = e^{5x}$, то есть $dC(x) = e^{5x}dx$, и после интегрирования получаем “произвольную постоянную” *C(x)* в виде функции:

$C(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + C_1$,

где C_1 – действительно произвольная постоянная. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид:

$y = C(x)e^{-3x} = (\frac{1}{5}e^{5x} + C_1)e^{-3x}$, или

$$y = \frac{1}{5}e^{2x} + C_1 e^{-3x}.$$

Замечание. Общее решение ЛДУ первого порядка можно также найти с помощью подстановки $y = uv$, где $u(x), v(x)$ - новые неизвестные функции. Одну из них, например $u(x)$, находят в виде $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x)$, тогда другую неизвестную функцию $v(x)$ находят в виде общего решения ДУ: $v'(x) = \frac{q(x)}{u(x)}$. В итоге будет найдено и общее решение исходного уравнения (6) в виде $y = uv$.

Частное решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$ получают из общего решения данного уравнения при конкретном значении произвольной постоянной $C = C_0$. Находят C_0 как решение уравнения, получаемого подстановкой в общее решение начального условия.

Пример 2. Найти общее и частное решения линейного ДУ первого порядка, предварительно установив его тип: $y' - 3x^2 y = x^2$, $y(0) = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) первого порядка, так как его можно записать в виде $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x) = -3x^2$, $q(x) = x^2$.

Сначала найдем общее решение линейного ДУ первого порядка. Его ищем в виде $y = u\,v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - новые неизвестные функции.

Функцию $u(x)$ найдём в виде $u(x) = e^{-\int p(x)dx}$, где $\int p(x)dx$ - какая-нибудь первообразная для функции $p(x) = -3x^2$. Вычислив интеграл, получим $\int p(x)dx = -3\int x^2 dx = -3 \cdot \frac{x^3}{3} = -x^3$. Тогда $u(x) = e^{-\int p(x)dx} = e^{x^3}$.

Функцию $v = v(x)$ найдём как общее решение ДУ: $v'(x) = \frac{q(x)}{u(x)}$, где $u(x) = e^{x^3}$, $q(x) = x^2$. Данное уравнение $v'(x) = x^2\, e^{-x^3}$ является простейшим ДУ первого порядка. Его общее решение найдём интегрированием и запишем в виде $v(x) = \int x^2 e^{-x^3} dx + C$. Вычислив интеграл (с точностью до постоянной), получим:

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \left[\begin{array}{c} \textit{сделаем замену} \\ x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3) = -\frac{1}{3} d(-x^3) \\ -x^3 = t \end{array} \right] = -\frac{1}{3}\int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t =$$

$$= \left[t = -x^3 \right] = -\frac{1}{3}\, e^{-x^3} .$$

Таким образом $v(x) = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C$.

Тогда общее решение исходного уравнения запишется в виде:

$$y = u\,v = e^{x^3} \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C \right) = Ce^{x^3} - \frac{1}{3} .$$

Теперь найдём частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$. Его получим из общего решения $y=Ce^{x^3}-\frac{1}{3}$ при конкретном значении произвольной постоянной $C=C_0$, которое найдём из уравнения, полученного подстановкой начального условия $y(0)=0$ в общее решение. В результате получим: $0=Ce^{0^3}-\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $C=C_0=\frac{1}{3}$. Тогда частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$, запишется в виде:

$$y=\frac{1}{3}e^{x^3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(e^{x^3}-1\right).$$

Ответ: $y=Ce^{x^3}-\frac{1}{3}$ - общее решение; $y=\frac{1}{3}\left(e^{x^3}-1\right)$ частное решение.

<u>Упражнения для самостоятельного решения</u>.

В задачах 4.1-4.12 найти общие решения следующих линейных дифференциальных уравнений:

4.1 $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

4.2 $y'+2y=4x$.

4.3 $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$.

4.4 $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=(1+x^2)$.

4.5 $y'+y=\cos x$.

4.6 $y'-tgx\cdot y=2\cos^2 x$.

4.7 $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

4.8 $x^2y'+xy+1=0$.

4.9 $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$.

4.10 $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$.

4.11 $y=x(y'-x\cos x)$.

4.12 $(xy'-1)\ln x=2y$.

В задачах 4.13-4.30 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

4.13 $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}, y(\pi) = 1.$

4.14 $xy' + y - e^x = 0, \ y(1) = 2.$

4.15 $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, y(1) = 0.$

4.16 $y' = 2y + e^x - x, \ y(0) = 1/4.$

4.17 $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x (x+1)^2, y(0) = 1.$

4.18 $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1, \ y(1) = 1.$

4.19 $(2e^y - x)y' = 1, \ y(0) = 0.$

4.20 $(\sin^2 y + xctgy)y' = 1, y(0) = \pi/2.$

4.21 $y' + y\, tgx = \cos^2 x, \ \ y(0) = 1.$

4.22 $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \ y(-1) = \dfrac{3}{2}.$

4.23 $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

4.24 $y' + \dfrac{2xy}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \ y(0) = \dfrac{2}{3}.$

4.25 $y' - y\,ctgx = 2x\sin x, \ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

4.26 $y' + \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)e^x, \quad y(1) = e.$

4.27 $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.28 $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

4.29 $y' - \dfrac{y}{x+1} = e^x (x+1), \quad y(0) = 1.$

4.30 $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

<u>ОТВЕТЫ:</u>

4.1 $y = e^{-x^2}(C + x^2/2)$ **4.2** $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ **4.3** $y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$

4.4 $y = (x+C)(1+x^2)$ **4.5** $y = Ce^{-x} + (\cos x + \sin x)/2$ **4.6** $y = 2tgx - \dfrac{2\sin^3 x}{3\cos x} + \dfrac{C}{\cos x}$

4.7 $xy = (x^3 + C)e^{-x}$ **4.8** $xy = C - \ln|x|$ **4.9** $y = (x^2 - 1) + C\sqrt{x^2 - 1}$

4.10 $y = e^x(\ln|x| + x^2/2) + Ce^x$ **4.11** $y = x(C + \sin x)$ **4.12** $y = \ln^2 x - \ln x$

4.13 $y = \sin x - \cos x$ **4.14** $y = (e^x + 2 - e)/x$ **4.15** $y = (x^2 - x + x\ln|x|)/(x+1)$

4.16 $y = e^{2x} - e^{x} + x/2 + 1/4$ **4.17** $y = (x+1)^2 e^{x}$ **4.18** $y = x\ln x + 1/x$

4.19 $x = e^{y} - e^{-y}$ **4.20** $x = -\sin y \cos y$

§5. Уравнение Бернулли

Рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \ . \qquad (1)$$

В уравнении (1) функции $\{P(x)$ и $Q(x)\} \subset C^0\ \{X\}$, показатель $n \neq 0$ и $n \neq 1$; иначе получаем известное нам линейное уравнение. Уравнение (1) называется уравнение Бернулли. Оно приводится к линейному уравнению следующим преобразованием: разделим все члены уравнения (1) на “ y^n ”:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x).y^{-n+1} = Q(x) \qquad (2)$$

Вводится следующая замена переменной $z = y^{-n+1}$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Подставляя “ z ” в уравнение (2), будем иметь линейное ДУ:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x).z = (-n+1)Q(x).$$

Найдя его общий интеграл и подставив вместо “z” выражение y^{-n+1}, получим общее решение (общий интеграл) уравнения Бернулли.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3 \qquad (3)$$

Решение. Делим всё на “y^3 ”:

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y^2}=x^3 \qquad (4)$$

$z = y^{-2}$, тогда $z' = -2y^{-3}y'$, получаем что:

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3 \qquad (5)$$

Найдём общий интеграл этого линейного уравнения I порядка:

1) $\frac{dz}{dx}-2xz=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z}=2xdx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dz}{z}=\int 2xdx+ln|C_1| \quad \Rightarrow$ $ln|z|=x^2+ln|C_1|$.

2) $\begin{cases} z=C(x)e^{x^2} \\ z'=C'(x)e^{x^2}+2xC(x)e^{x^2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ подставим в (5)

$C'(x)e^{x^2}+\cancel{2xC(x)e^{x^2}}-\cancel{2xC(x)e^{x^2}}=-2x^3; \qquad \int dC=-2\int\frac{x^3dx}{e^{x^2}}+C.$

Интегрируя по частям, получаем: $z=x^2+1+Ce^{x^2}$, то есть общее решение уравнения (3) имеет вид: $y^{-2}=x^2+1+Ce^{x^2}$, или в окончательном виде

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1+Ce^{x^2}}}.$$

Замечание. Решение уравнения Бернулли, также как и линейного, можно найти подстановкой $\boxed{y=u\cdot v}$.

<u>Упражнения для самостоятельного решения</u>.

В задачах 5.1 - 5. 8 найти общие решения уравнений Бернулли:

5.1 $y'=\frac{y}{x}+\frac{x^2}{y}$ **.** **5.5** $y'-ytgx+y^2\cos x=0$**.**

5.2 $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$.

5.6 $y' + 4xy = 2\sqrt{y}xe^{-x^2}$.

5.3 $y' + 2xy = 2x^3y^2$.

5.7 $y' = yctgx + \frac{y^3}{\sin x}$.

5.4 $xy' + y = y^2 \ln x$.

5.8 $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

ОТВЕТЫ:

5.1 $y^2 = x^2(C + 2x)$ **5.2** $y^2 = x\ln(C/x)$ **5.3** $y = 1\Big/\left(1 + x^2 + Ce^{x^2}\right)$

5.4 $y = \frac{1}{1 + \ln x + Cx}$ **5.5** $y = (x + C)/\cos x$ **5.6** $y = e^{-2x^2}(C + x^2/2)^2$

5.7 $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2\cos x + C}}$ **5.8** $y = \frac{1}{(1+x)(C + \ln|x+1|)}$

§6. Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение: Уравнение вида *F (x, y, y', y'') = 0*, где “*x*”– независимая переменная, “*y*”– искомая функция, “ *y'* ” и “ *y''* ” – её производные I и II порядка, называется дифференциальное уравнение II порядка (ДУ II).

Обычно изучают уравнения, которые могут быть разрешены относительно второй производной

$$y'' = f\ (x, y, y'). \tag{1}$$

Как и для ДУ I порядка, решением уравнения (1) называется функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$, которая при подстановке в (1) обращает его в тождество. График решения называется так же, как и ранее: интегральная кривая.

Для ДУ II порядка также имеет место теорема существования и единственности его решения (теорема Коши). Она утверждает тот факт, что через заданную точку $(x_0;\ y_0)$ на плоскости OXY проходит единственная интегральная кривая с заданным угловым коэффициентом наклона касательной " y_0' " в этой точке. Единственное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (1) удовлетворяет в точке $(x_0;\ y_0)$ условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{2}$$

Эти условия называются <u>начальными условиями</u> решения и могут иметь вид:

$$y|_{\,x=x_0} = y_0;\quad y'|_{\,x=x_0} = y'_0 \tag{3}$$

Как и для ДУ I , <u>задачу отыскания решения по заданным начальным условиям</u> называют <u>задачей Коши</u>.

Функция $y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2)$, зависящая от "$x$" и от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, называется общим решением уравнения (1) в некоторой области "G", если она является решением уравнения (1) при любых значениях постоянных C_1 и C_2, и если при любых начальных условиях (3) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Любая функция $y = \varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0)$, получающаяся из общего решения $y = \varphi(x,\ C_1,\ C_2)$ уравнения (1) при определенных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, называется <u>частным решением</u> уравнения (1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение: $y'' = 2$.

Решение. Это ДУ II порядка. Общее решение ДУ найдем двукратным последовательным интегрированием. Сначала находим, что: $y' = 2x + C_1$, затем находим общее решение: $y = x^2 + C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (ПП). Геометрически такое общее решение есть семейство парабол, причем через каждую точку проходит бесконечное множество парабол, имеющих различные наклоны касательных в этой точке (поскольку определены 2 постоянные C_1 и C_2). Для выделения одной параболы надо помимо точки $(x_0; y_0)$, то есть $y(x_0) = y_0$, через которую должна проходить парабола, еще задать угловой коэффициент y'_0 наклона касательной к параболе в этой точке ($y'_0 = tg\, \alpha$).

Найдем, например, частное решение данного уравнения при начальных условиях: для функции " y " и её производной " y' ": $y(1) =1$; $y'(1) =1$. Подставляя эти значения в общее решение и уравнение для " y' ", решаем систему уравнений:

$\begin{cases} 1 = 1^2 + C_1 \times 1 + C_2 \\ 1 = 2 \times 1 \quad + C_1 \end{cases}$, откуда находим, что $C_1 = -1$ и $C_2 = 1$, следовательно, искомое частное решение есть функция: $y = x^2 - x + 1$, график которой есть парабола, проходящая через точку (1; 1) с угловым коэффициентом наклона касательной: $y'(1) = 1$ (то есть $tg\alpha = 1$, $\angle\alpha = 45°$).

Уравнение II порядка, допускающие понижение порядка.

Рассмотрим 3 частных случая, когда решение уравнения (1) с помощью замены переменной сводится к решению уравнения I порядка. Такое преобразование называется понижением порядка.

I. Уравнение вида $y'' = f(x)$. Оно не содержит "y" и "y'". Введем новую функцию $z(x)$, полагая $z(x) = y'(x)$. Тогда $z'(x) = y''(x)$ и получаем уравнение I порядка: $z'(x) = f(x)$. Решая его, находим, что: $z(x) = \int f(x)dx + C_1 \Rightarrow y' = \int f(x)dx + C_1$, отсюда, интегрируя еще раз, получаем искомое решение: $y = \int[\int f(x)dx + C_1]dx + C_2$ или $y = \int[\int f(x)dx]dx + C_1 x + C_2$, где "$C_1$" и "$C_2$" – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = x$.

Вводим новую переменную: $z(x) = y' \Rightarrow z'(x) = y'' \Rightarrow z' = x$ $\Rightarrow z = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow \int dy = \int \frac{x^2}{2} dx + C_1 x + C_2 \Rightarrow$ $= y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$

II. Уравнения вида $y'' = f(x, y')$. Оно не содержит "y". Введем снова функцию $z(x) = y'(x)$, то есть $z' = y''$ и получаем ДУ I порядка относительно $z(x)$: $z' = f(x, z)$. Решая его, находим, что $z(x) = \varphi(x, C_1)$. Так как $z(x) = y'$, то $y' = \varphi(x, C_1)$. Отсюда, интегрируя еще раз, получаем общее решение:

$y = \int\varphi(x, C_1)dx + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 3\frac{y'}{x} = x.$$

Решение. Вводя функцию $z(x) = y'$, получаем линейное ДУ первого порядка $z' - 3\frac{z}{x} = x$. Решая его, найдем $z(x) = C_1 x^3 - x^2 \Rightarrow y' = C_1 x^2 - x^2$, значит, искомое общее решение имеет вид

$$y = C_1\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_2.$$

III. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$. Уравнение не содержит "x". Вводим новую функцию "z", полагая $z = y'$. Тогда $y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z$. Тогда исходное уравнение имеет вид: $z\frac{dz}{dy} = f(y, z)$. Решая его, найдём, что $z = \varphi(y, C_1)$. Поскольку $z = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$, отсюда получаем равенство: $\frac{dy}{\varphi(y, C1)} = dx$. Это уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим общее решение данного уравнения: $\int \frac{dy}{\varphi\,(y,C1)} = x + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 4. Найти общее решение ДУ II: $yy''-2(y')^2 = 0$.

Решение. Полагая, что $y' = z(y)$ и учитывая, что $y'' = z\frac{dz}{dy}$, получаем равенство: $zy\frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$. Это ДУ с разделяющимися переменными. Приводим его к виду: $\frac{dz}{z} = \frac{2dy}{y}$. Интегрируя это равенство, получаем: $ln|z| = 2ln|y| + ln|C_1|$, откуда $z = C_1\ y^2$. Учитывая, что $z = \frac{dy}{dx}$, решаем уравнение: $\frac{dy}{dx} = C_1\ y^2$, которое после разделения переменных приобретает вид: $\frac{dy}{y^2} = C_1 dx$. После его интегрирования, получаем, что $-\frac{1}{y} = C_1 x + C_2$ или, окончательно: $y = -\frac{1}{yC_1 x + C_2}$.

При сокращении на “z” было потеряно решение: $z = y' = 0$, то есть $y = C = const$. В данном случае оно содержится в общем решении, так как получается из него при $C_1 = 0$, за исключением решения $y = 0$.

Пример 5. Найти общее решение ДУ II порядка: $y'' = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение. Данное уравнение дважды проинтегрируем. После первого интегрирования получим: $y' = \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx + C_1$. Интеграл вычислим (с точностью до постоянного слагаемого) методом интегрирования по частям. Получим:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow v = \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{array} \right] = \ln x \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x}\, \frac{dx}{x} =$$

$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$. Тогда $y' = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1$.

После второго интегрирования получим: $y = \int (2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C_1)dx + C_2 = 2\int \sqrt{x}\ln x dx - 4\int \sqrt{x}\, dx + C_1 \int dx + C_2$.

Вычислим интегралы (с точностью до постоянного слагаемого). Получим:

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \left[\begin{array}{c} \textit{вычислим} \\ \textit{методом} \\ \textit{интегрирования} \\ \textit{по частям} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = \sqrt{x}dx \Rightarrow v = \int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right]$$

$$= \ln x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} \cdot x^{3/2};$$

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2}; \quad \int dx = x.$$

Тогда $y = 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \dfrac{4}{9} x^{3/2} \right) - 4 \cdot \dfrac{2}{3} x^{3/2} + C_1 x + C_2 =$

$$= \frac{4}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{32}{9} x^{3/2} + C_1 x + C_2.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

В задачах 6.1-6.27 найти общие решения ДУ**,** допускающих понижение порядка:

6.1 $y'' = x + \sin x$.

6.2 $y'' = arctgx$.

6.3 $y'' = \ln x$.

6.4 $xy'' = y'$.

6.5 $y'' = y' + x$.

6.6 $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

6.7 $(y')^2 + y' = xy''$.

6.8 $x^2 y'' = (y')^2$.

6.9 $xy'' = y' - xy'$.

6.10 $(1 + e^x)y'' + y' = 0$.

6.11 $y''' = (y'')^2$.

6.12 $y''' tg3x = 3y''$.

6.13 $xy'' + y' = \ln x$.

6.14 $(y'')^2 = y'$.

6.15 $y^3 y'' = 1$.

6.16 $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

6.17 $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

6.18 $y'' = 2x + \sin 3x$

6.19 $y'' = \frac{4}{x^3}$

6.20 $y'' = e^{2x}$

6.21 $y'' = x^3 - \sin 2x$

6.22 $y'' = 4 + \cos 2x$

6.23 $y'' = x^2 - \cos 3x$

6.24 $y'' = \frac{2}{\sqrt{x}}$

6.25 $y'' = e^{-3x}$

6.26 $y'' = 3 - \sin 4x$

6.27 $y'' = \frac{3}{x^4}$

ОТВЕТЫ:

6.1 $y = x^3/6 - \sin x + C_1x + C_2$ **6.2** $y = 0.5arctgx(x^2 - 1) - 0.5x\ln(1 - x^2) + C_1x + C_2$

6.3 $y = 0.5x^2(\ln x - 3/2) + C_1x + C_2$ **6.4** $y = C_1x^2 + C_2$ **6.5** $y = C_1e^x + C_2 - x - x^2/2$

6.6 $y = x^3/3 + C_1x^2 + C_2$ **6.7** $y = -\frac{1}{C_1}\ln|1 - C_1x| - x + C_2$ **6.8** $yC_1^2 = xC_1 - \ln|C_1x + 1| + C_2$

6.9 $y = C_1e^{-x}(1 + x) + C_2$ **6.10** $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$ **6.11** $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1)$

6.12 $y = C_1\sin 3x + C_2x + C_3$ **6.13** $y = (x + C_1)\ln x - 2x + C_2$ **6.14** $y = (x + C_1)^3/12 + C_2$

6.15 $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$ **6.16** $y^3 = C_1(x + C_2)^2$ **6.17** $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$

§7. Дифференциальные уравнения высших порядков

Определение. Уравнение вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, где $y = y(x)$ - искомая функция, называется дифференциальным уравнением n-го порядка.

Функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение в тождество, называется решением уравнения, а график этой функции – интегральной кривой. Если решение уравнения задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется интегралом уравнения.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, называется уравнением, разрешённым относительно старшей производной. Эту форму записи ДУ n-го порядка называют нормальной.

Условия $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0,\ y_0,\ y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа, называются начальными условиями. Задача нахождения решения уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется <u>задачей Коши</u>.

Общим решением ДУ n-го порядка называется решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, зависящее от n произвольных постоянных $C_1,C_2,\dots,C_n$, такое, из которого при надлежащем выборе значений постоянных $C_1=C_{10},C_2=C_{20},\dots,C_n=C_{n0}$ можно получить решение $y=\varphi(x,C_{10},C_{20},\dots,C_{n0})$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,\dots,C_n)=0$, называется общим интегралом уравнения.

Частным решением ДУ n-го порядка называется решение $y=\varphi(x,C_{10},\dots,C_{n0})$, получаемое из общего при конкретных значениях постоянных $C_1=C_{10},\dots,C_n=C_{n0}$. Частное решение, заданное в неявном виде $\Phi(x,y,C_{10},\dots,C_{n0})=0$, называется частным интегралом.

Если для искомого частного решения $y=\varphi(x,C_{10},\dots,C_{n0})$ уравнения $y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ заданы начальные условия $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ и известно общее решение $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ уравнения, то значения $C_{10},C_{20},\dots,C_{n0}$ произвольных постоянных определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y_0 \\ \varphi'(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y'_0 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,\dots,C_n)=y_0^{(n-1)} \end{cases}.$$

Определение. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ называется простейшим дифференциальным уравнением n -го порядка.

Его общее решение находят, выполняя последовательно n интегрирований, и записывают в виде

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)dx}_{n \text{ раз}} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ III порядка $y'''= e^x$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y \mid_{x_0=0} = 0; \ y' \mid_{x_0=0} = 0; \ y'' \mid_{x_0=0} = 1$$

Решение. Последовательно интегрируя, находим общие решения уравнений, понижая при этом их порядок. При этом появляются новые произвольные постоянные C_1 ,C_2 и C_3:

$$\frac{d(y'')}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad y'' = e^x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y' = e^x + C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow$$

$$y' = e^x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Подставляем НУ: $1 + C_3 = 0$; $1 + C_2 = 0$; $1 + C_1 = 1$. Откуда находим: $C_1 = 0$; $C_2 = -1$; $C_3 = -1$. Итак, частное решение нашего ДУ имеет вид:

$$y \quad = e^x - x - 1.$$

<u>**Упражнения для самостоятельного решения**</u>**.**

В задачах 7.1-7.8 найти частные решения следующих уравнений при указанных начальных условиях:

7.1 $y'' = xe^{x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

7.2 $y''(x^2+1) = 2xy'$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

7.3 $xy'' - y' = x^2e^x$, $y(1)=1$, $y'(1)=e$.

7.4 $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2)=-2$, $y'(2)=1$.

7.5 $yy'' = (y')^2 - (y')^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=-1$.

7.6 $y'' = e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

7.7 $y''y^3 + 1 = 0$, $y(1)=-1$, $y'(1)=-1$.

7.8 $4y''\sqrt{y} = 1$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

<u>ОТВЕТЫ:</u>

7.1 $y = xe^x - 2e^x + x + 3$ **7.2** $y = x^3 + 3x + 1$ **7.3** $y = e^x(x-1)+1$ **7.4** $y = \ln(x^2/4) - 2$
7.5 $y = x - 2\ln|y|$ **7.6** $y = -\ln|x-1|$ **7.7** $y^2 = 2x - 1$ **7.8** $y = (1 - 3x/4)^{4/3}$

§8. Однородное линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, $1 \le k < n$, не содержащее явно искомой функции $y(x)$, с помощью подстановки $y^{(k)} = z$, где $z = z(x)$- новая неизвестная функция, приводится к уравнению $(n-k)$ порядка $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$.

Определение. Функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \ldots, y_m = y_m(x)$ называются линейно зависимыми на (a, b), если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_m y_m = 0$ для всех $x \in (a,b)$. Если равенство выполняется для всех $x \in (a,b)$ только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m$, то данные функции называются линейно независимыми на (a, b).

Определение. Определитель

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_m' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского (вронскианом).

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ линейно зависимы на (a, b), то определитель Вронского $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] = 0$ для всех $x \in (a,b)$ (необходимое условие линейной зависимости).

Если $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_m] \neq 0$ хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ линейно независимы на (a, b) (достаточное условие линейной независимости).

Определение. Уравнение вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n-го порядка , где коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$- непрерывные функции или постоянные. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным. Однородное линейным уравнение n-го порядка имеет вид $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$.

Определение. Любая система из n линейно независимых частных решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ однородного линейного уравнения называется фундаментальной системой его решений (ФСР).

Общее решение однородного линейного уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальная система его решений; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.

Фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного ЛДУ с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ строится на основе характера корней <u>характеристического уравнения</u> $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

А именно:

1) если λ - действительный простой корень характеристического уравнения, то ему в ФСР соответствует частное решение $e^{\lambda x}$ дифференциального уравнения;

2) если λ - действительный корень кратности k, то ему в ФСР соответствует k линейно независимых частных решений: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$;

3) если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - пара простых комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения, то ей в ФСР соответствует два линейно независимых частных решения: $e^{\alpha x} cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$;

4) если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней кратности k, то ей в ФСР соответствует $2k$ линейно независимых частных решений:

$e^{\alpha x}cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$, $\ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}cos\beta x$, $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение однородного линейного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами $ay''+by'+cy=0$ имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где $\{y_1,y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений; C_1,C_2 - произвольные постоянные.

Фундаментальная система решений $\{y_1,y_2\}$ строится на основе характера корней характеристического уравнения $a\lambda^2+b\lambda+c=0$.

А именно:

1) если λ_1,λ_2 - пара различных действительных корней характеристического уравнения, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$. Общее решение имеет вид: $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2}$.

2) если λ_1,λ_2 - пара одинаковых $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda)$ действительных корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$. Общее решение имеет вид: $y=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$.

3) если $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ - пара комплексно-сопряжённых корней, то ФСР имеет вид $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$. Общее решение имеет вид: $y=e^{\alpha x}(C_1cos\beta x+C_2sin\beta x)$.

Корни характеристического уравнения $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, являющегося квадратным, находят на множестве комплексных чисел по формулам:

1) если дискриминант уравнения $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

2) если дискриминант уравнения $D < 0$, то $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -\dfrac{b}{2a} \pm i\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения II порядка: $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 + k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = 1;\ k_2 = -2$ различные вещественные числа. Соответственно, частные решения такого уравнения: $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$. ФСР $\{e^x; e^{-2x}\}$. Общее решение имеет вид: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 2k + 1 = 0$. Его корни $k_1 = k_2 = 1$ вещественные и равные. Соответствующие частные решения имеют вид: $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$. ФСР $\{e^x; xe^x\}$. Общее решение ДУ представляется в виде: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x(C_1 + C_2 x)$.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 4k + 13 = 0$. Его корни $k_1 = 2 + i3$, $k_2 = 2 - i3$ комплексные. Соответствующие частные решения имеют вид: $y_1 = e^{2x}cos3x;\ y_2 = e^{2x}sin3x;$. ФСР $\{e^{2x}cos3x; e^{2x}sin3x\}$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = e^{2x}(C_1cos3x + C_2sin3x)$.

Пример 4. Найти общее и частное решения однородного линейного ДУ 2-ого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 5y' - 6 = 0,$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Решение. Сначала найдём общее решение ДУ в виде: $y = C_1y_1 + C_2y_2$, где $\{y_1, y_2\}$ - фундаментальная система его частных решений.

Для нахождения ФСР, составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ для данного дифференциального уравнения и найдём его корни на множестве комплексных чисел. Так как дискриминант $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 \geq 0$, то $\lambda_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$, то есть характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Следовательно, ФСР имеет вид $\{e^{-x}, e^{6x}\}$.

Тогда общее решение данного ДУ запишется в виде: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{6x}$.

Теперь найдём частное решение данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Для этого сначала найдём производную $y'(x)$ общего решения: $y' = (C_1e^{-x} + C_2e^{6x})' = -C_1e^{-x} + 6C_2e^{6x}$. Затем подставим начальные данные в выражения для общего решения и его производной, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1e^{-0}+C_2e^{6\cdot 0}=1 \\ -C_1e^{-0}+6C_2e^{6\cdot 0}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_1+6C_2=0 \end{cases}.$$

Решив систему, найдём: $C_1=6/7$, $C_2=1/7$. Тогда частное решение данного ДУ запишется в виде: $y=\frac{6}{7}e^{-x}+\frac{1}{7}e^{6x}$.

Ответ: Общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{6x}$; частное решение: $y=\frac{6}{7}e^{-x}+\frac{1}{7}e^{6x}$.

<u>Упражнения для самостоятельного решения</u>.

В задачах 8.1-8.12 найти общие решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

8.1 $y''+y'-2y=0$.

8.2 $y''-4y'=0$.

8.3 $y''-9y=0$.

8.4 $y''+y=0$.

8.5 $y''+6y'+13y=0$.

8.6 $4y''-8y'+5y=0$.

8.7 $y''-2y'+y=0$.

8.8 $y'''-5y''+4y'=0$.

8.9 $y'''+9y'=0$.

8.10 $y'''-13y'-12y=0$.

8.11 $y^{IV}+2y'''+y''=0$.

8.12 $y^{V}-6y^{IV}+9y'''=0$.

В задачах 8.13-8.24 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

8.13 $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=10$.

8.14 $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 15$.

8.15 $4y'' + 4y' + y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

8.16. $2y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3/2$.

8.17 $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

8.18 $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

8.19 $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$

8.20 $y'' - 5y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

8.21 $y'' + 6y' + 25y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

8.22 $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

8.23 $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$

8.24 $2y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$

§9. Неоднородное линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

Общее решение неоднородного ЛДУ $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, где $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения.

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется методом неопределённых коэффициентов в виде $\tilde{y}=x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x+T_N(x)\sin\beta x]$, где $k=0$, если число $\lambda=\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\lambda=\alpha+i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N=\max\{m,l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0,1,2,3,\ldots$ соответственно являются: A, $Ax+B$, Ax^2+Bx+C, $Ax^3+Bx^2+Cx+D,\ldots$. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\tilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ равно сумме частных решений $\tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями f_1, f_2 (принцип суперпозиции частных решений).

Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с любой правой частью $f(x)$ может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Для дифференциального уравнения второго порядка $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ метод состоит в следующем. Если известна фундаментальная система решений y_1, y_2 однородного уравнения $y''+a_1y'+a_2y=0$, то частное решение соответствующего неоднородного уравнения ищется в виде

$\tilde{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, где неизвестные функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}.$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общее решение неоднородного ЛДУ 2-го порядка $ay'' + by' + cy = f(x)$ имеет вид $y = y_0 + \tilde{y}$, где $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение данного неоднородного уравнения. Частное решение $\tilde{y}$ уравнения с правой частью специального вида $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$ ищется *методом неопределённых коэффициентов* в виде $\tilde{y} = x^k e^{\alpha x}[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где $k = 0$, если число $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, и k равно кратности корня $\lambda = \alpha + i\beta$ в противном случае; $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - полные многочлены степени $N = \max\{m, l\}$ с неопределёнными коэффициентами. Примерами полных многочленов с неопределёнными коэффициентами степени $0, 1, 2, 3, \ldots$ соответственно являются: a, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$, $ax^3 + bx^2 + cx + d$,…. Для нахождения коэффициентов многочленов $S_N(x)$ и $T_N(x)$, надо подставить решение $\tilde{y}$ в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях полученного равенства. В результате получим систему уравнений, решив которую, найдём значения коэффициентов.

Частное решение $\tilde{y}$ неоднородного ЛДУ с правой частью $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ равно сумме частных решений $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ неоднородных уравнений с той же левой частью и правыми частями f_1, f_2 *(принцип наложения решений).*

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + y = x + 1$$

Решение: Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид: $y_0 = e^x(C_1 + C_2x)$ (см. **Пример 4**). Так как правая часть уравнения – многочлен I степени, и ни один из корней характеристического уравнения $p^2 - 2p + 1 = 0$ не равен нулю ($p_1 = p_2 = 1$), то частное решение ищем в виде : $\tilde{y} = (Ax + B)x^0 = Ax + B$, где A и B – неизвестные коэффициенты. Дважды дифференцируя правую часть $\tilde{y} = Ax + B$ и подставляя $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное дифференциальное уравнение, получим равенство: $0 - 2A + Ax + B = x + 1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях “x” в обеих частях этого равенства: $A=1;\ -2A+B = 1$, получаем: $A=1;\ B=3$. Итак, частное решение $\tilde{y}$ данного уравнения имеет вид: $\tilde{y}(x) = x + 3$, а его общее решение приобретает окончательный вид: $y = e^x(C_1 + C_2x) + x + 3$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

Решение: Характеристическое уравнение $p^2 - 4p + 3 = 0$ имеет корни $p_1 = 1$, $p_2 = 3$. Значит, общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид: $y_0 = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Среди корней характеристического уравнения один корень, а именно $p_1 = 1$, т. е. совпадает с числом $\alpha = 1$, стоящим в показателе экспоненты в правой части заданного уравнения. Значит, показатель k = 1. Поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = (Ax + B)xe^x$, или $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^x$. Дифференцируя (дважды) и подставляя в исходное уравнение найденные $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$, получаем равенство: $-4Ax + 2A - 2B = x$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях "х" в обеих частях равенства, находим А и В: А = –1/4, В = –1/4. Подставляя их в вы- ражение для $\tilde{y}$, получаем частное решение исходного уравнения: $\tilde{y} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Общее решение имеет вид: $y=C_1e^x + C_2e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' = \sin x$$

Решение: Характеристическое уравнение $p^2 + 1 = 0$ имеет корни $p_1 = i$; $p_2 = -i$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 \cos x + {}$ $+ C_2 \sin x$. В правой части данного уравнения $f(x)$ содержит "$\sin x$", то есть $\alpha=0$, $S_N(x)=0$ и $T_N(x)=1$, $\beta = 1$. Так как $i\beta = i$ – один из комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения ($p_1 = i$), то $k = 1$ и частное решение надо искать в виде: $\tilde{y} = (A\cos x + B\sin x)x$.

Дважды дифференцируя и подставляя в исходное уравнение результаты , получаем: $2(-A\sin x + B\cos x) = \sin x$, откуда , решая два уравнения относительно А и В, находим А = – 1/2, В = 0. То есть, частное решение имеет вид: $\tilde{y} = -\frac{1}{2}x\cos x$.

Общее решение запишем в виде: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{2}x\cos x$.

Упражнения для самостоятельного решения.

В задачах 9.1-9.8 для каждого из неоднородных линейных ДУ с постоянными коэффициентами написать общие решения уравнений (числовых значений коэффициентов в частных решениях не находить):

9.1 $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если: **а)** $f(x) = 2x^3 - 30$;

б) $f(x) = e^x(3 - 4x)$; **в)** $f(x) = \sin 2x$; **г)** $f(x) = e^x \cos 3x$.

9.2 $y'' + y = f(x)$, если: **а)** $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

б) $f(x) = e^x(x^2 + x + 2)$; **в)** $f(x) = \cos x$; **г)** $f(x) = e^x \sin 2x$.

9.3 $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.

9.4 $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.

9.5 $y''' + y' = \sin x + x \cos x$.

9.6 $y'' - 5y' + 4y = x^2 e^{4x}$.

9.7 $y'' - 2y' + 2y = e^x + x \cos x$.

9.8 $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{3x} - 2e^{-3x} \cos x$.

ОТВЕТЫ:

9.1 $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \tilde{y}$, где **а)** $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$;

б) $\tilde{y} = e^x(Ax^2 + Bx)$; **в)** $\tilde{y} = A\cos 2x + B\sin 2x$;

г) $\tilde{y} = e^x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

9.2 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \tilde{y}$, где **а)** $\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$;

б) $\widetilde{y} = e^{x}(Ax^2 + Bx + C)$;

в) $\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x)$;

г) $\widetilde{y} = e^{x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

9.3 $(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{4x} + xe^{4x}\left[(Ax+B)\cos 2x + +(Cx+D)\sin 2x\right]$.

9.4 $C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x} + e^{-2x}\left[(Ax+B)\cos 5x + (Cx+D)\sin 5x\right]$.

9.5 $C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x\left[(Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right]$.

9.6 $C_1 e^{x} + C_2 e^{4x} + e^{4x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$.

9.7 $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{x} + Ae^{x} + (Bx + C)\cos x + (Dx + E)\sin x$.

9.8 $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-3x} + (Ax + B)e^{3x} + xe^{-3x}(C\cos x + D\sin x)$.

В задачах 9.9-9.24 для каждого из неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами найти их общие решения:

9.9 $y'' + 4y' - 5y = 1$

9.10 $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

9.11 $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

9.12 $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

9.13 $2y'' + y' - y = 2e^{x}$.

9.14 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

9.15 $y'' + y = \cos x$.

9.17 $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$

9.18 $y'' - 7y' = (x-1)^2$

9.19 $y'' - 5y' + 6y = 2\cos x$

9.20 $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$

9.21 $y'' + 7y' = e^{-7x}$

9.22 $y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x$

9.23 $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$

9.16 $y'' - 4y' + 4y = x^2$ **9.24** $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$

ОТВЕТЫ:

9.9 $C_1e^{x} + C_2e^{-5x} - 1/5$ **9.10** $e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + x + 1$

9.11 $e^{3x}(C_1 + C_2x) + 2x^2/9 + 5x/27 + 11/27$

9.12 $C_1e^{6x} + C_2e^{x} + 5cosx/74 + 7\sin x/74$ **9.13** $C_1e^{-x} + C_2e^{x/2} + e^{x}$

9.14 $e^{2x}(C_1 + C_2x) + 1.5x^2e^{2x}$ **9.15** $C_1\cos x + C_2\sin x + 0.5x\sin x$

В задачах 9.25-9.28 найти частные решения уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

9.25 $y'' - y' = 2(1-x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

9.26 $y'' - y = -\sin 2x$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

9.27 $y'' - 2y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 1/4$.

9.28 $y'' - 3y' + 2y = \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

ОТВЕТЫ:

9.25 $y = e^{x} + x^2$ **9.26** $y = \sin 2x/3 - \sin x/3 - \cos x$

9.27 $y = 0.25(e^{x} + xe^{x} + e^{-x})$ **9.28** $y = 0.1(2e^{2x} - 5e^{x} + 3\cos x + \sin x)$

§10. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t) \end{cases},$$

где x_1 , x_2 - искомые функции от t; a_{ij} - постоянные числа; $f_1(t)$, $f_2(t)$ - заданные функции, называется системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка.

Такую систему методом исключения можно привести к одному линейному уравнению не выше второго порядка. Решение этой задачи рассмотрим на примере.

Пример.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 3x_2 + 2t \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + 1.$$

Подставляем сюда из системы уравнений производные

$$\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt},$$

получим

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = x_1 + x_2 + t - 4x_1 - 3x_2 + 2t + 1 = -3x_1 - 2x_2 + 3t + 1.$$

Из первого уравнения системы

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} - x_1 - t,$$

Тогда

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -3x_1 - 2\left(\frac{dx_1}{dt} - x_1 - t\right) + 3t + 1 =$$

$$= -x_1 - 2\frac{dx_1}{dt} + 5t + 1.$$

Таким образом,

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\frac{dx_1}{dt} + x_1 = 5t + 1$$

- линейное уравнение; решая его известным способом, найдем

$$x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9;$$

далее, x_2 находим из соотношения

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} - x_1 - t = -(C_1 + C_2 t)e^{-t} + C_2 e^{-t} + 5 - (C_1 + C_2 t)e^{-t} - 5t + 9 - t =$$

$$x_2 = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14.$$

Общее решение системы :

$$\begin{cases} x_1 = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9 \\ x_2 = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 t)e^{-t} - 6t + 14 \end{cases}.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

В задачах 10.1-10.8 найти методом исключения общие решения однородных систем ДУ:

10.1 $\begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 3x + 4y. \end{cases}$ **10.2** $\begin{cases} x'(t) = x - y, \\ y'(t) = y - 4x. \end{cases}$

10.3 $\begin{cases} x'(t) = x + y, \\ y'(t) = 3y - 2x. \end{cases}$ **10.4** $\begin{cases} x'(t) = x - 3y, \\ y'(t) = 3x + y. \end{cases}$

10.5 $\begin{cases} x'(t) = -x - 5y, \\ y'(t) = x + y \end{cases}.$ **10.6** $\begin{cases} x'(t) = 2x + y, \\ y'(t) = 4y - x. \end{cases}$

10.7 $\begin{cases} x'(t) = 2y - 3x, \\ y'(t) = y - 2x. \end{cases}$ **10.8** $\begin{cases} x'(t) = 5x + 3y, \\ y'(t) = -3x - y. \end{cases}$

В задачах 10.9-10.15 найти методом исключения общие решения неоднородных систем уравнений:

10.9 $\begin{cases} x'(t) = y + 2e^t \\ y'(t) = x + t^2 \end{cases}.$ **10.10** $\begin{cases} x'(t) = y - 5\cos t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}.$

10.11 $\begin{cases} x'(t) = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y'(t) = x + 2y \end{cases}.$ **10.12** $\begin{cases} x'(t) = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ y'(t) = 2x - 2y \end{cases}.$

ОТВЕТЫ:

10.1 $x = C_1e^t + C_2e^{5t}$**;** $y = -C_1e^t + 3C_2e^{5t}$**.**

10.2 $x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$**;** $y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$**.**

10.3 $x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$**;** $y = e^{2t}\left[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t\right]$**.**

10.4 $x = e^t(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t)$**;** $y = e^t\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right)$**.**

10.5 $x = (2C_2 - C_1)\cos 2t - (2C_1 + C_2)\sin 2t$ **;** $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$ **.**

10.6 $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$ **;** $y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}$ **.**

10.7 $x = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$ **;** $y = (C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{-t}$ **.**

10.8 $x = (C_1 + 3C_2 t)e^{2t}$ **;** $y = (C_2 - C_1 - 3C_2 t)e^{2t}$ **.**

10. 9 $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2$ **;** $y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + (t-1)e^t - 2t$ **.**

10.10 $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - 2\sin t - \cos t$ **;** $y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + \sin t + 3\cos t$ **.**

10.11 $x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t}$ **;** $y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t}$ **.**

10.12 $x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t)$ **;** $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$ **.**

ПРИЛОЖЕНИЯ.

ПРИЛОЖЕНИЕ №1

Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. **2.** $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

3. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ **4.** $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

5. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

6. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$**, где** $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})\big/2a$.

Действия с натуральными логарифмами.

1. $\ln a + \ln b = \ln(a b)$. **2.** $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$. **3.** $-\ln a = \ln(1/a)$.

4. $b \ln a = \ln(a^b)$. **5.** $\ln e^a = a$

Формулы тригонометрии.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$. **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$.

Формулы сложения:

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ **6.** $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$

Формулы двойных углов:

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Преобразование суммы функций в произведение:

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

Понижение степени:

13. $\cos^2\alpha = (1+\cos 2\alpha)/2$ **14.** $\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha)/2$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Значения некоторых функций:

$\arcsin 0 = 0$, $arctg 0 = 0$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $e^0 = 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

Предельные значения некоторых функций.

$arctg(+\infty) = \pi/2$, $arctg(-\infty) = -\pi/2$, $\ln(+0) = -\infty$, $\ln(+\infty) = +\infty$, $e^{+\infty} = +\infty$, $e^{-\infty} = 0$, $ctg(\pm 0) = \pm\infty$, $P_n(\infty) = \infty$,

$\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ - факториал числа n.

ПРИЛОЖЕНИЕ №2

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^k \quad (k \in R)$	$k\,x^{k-1}$	$k\,x^{k-1}dx$
2	$a^x \ (a>0, \neq 1)$	$a^x \ln a$	$a^x \ln a dx$
3	e^x	e^x	$e^x dx$
4	$\log_a x \ (a>0, \neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{dx}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{dx}{1+x^2}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{dx}{1+x^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ №3

Таблица основных неопределенных интегралов.

№ п/п	$\int f(x)dx$	№ п/п	$\int f(x)dx$
1	$\int dx = x + C$	2	$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$
3	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	4	$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	6	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (k \in R, k \neq -1)$
7	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	8	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + C$
9	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	10	$\int e^x dx = e^x + C$
11	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	12	$\int \cos xdx = \sin x + C$
13	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	14	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
15	$\int tgxdx = -\ln\|\cos x\| + C$	16	$\int ctgxdx = \ln\|\sin x\| + C$
17	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$	18	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
19	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	20	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$
21	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	22	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
23	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$		
24	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$		

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М. Математика. Общий курс: Учебник для бакалавров. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. 960с. ISBN: 978-5-8114-0445-2 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=634).
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2-х ч. Ч.1: Тридцать шесть лекций.- М.: Айрис-пресс, 2008. -288с.
3. Шипачев В.С. Высшая математика. Учебник для вузов. -М. Высшая школа, 2005. -479 с.

Дополнительная литература:

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. - СПб.: Профессия, 2007. -432с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Часть I: -М: ОНИКС: Мир и образование, 2008. -368с.
6. Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дегтярёва О.М. Математика в примерах и задачах: Учеб пособие. –М.: ИНФРА-М, 2010. –372с. ISBN 978-5-16-003841-4 (http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=209484).
7. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2010. -464с. ISBN 978-5-8114-0912-9 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=149).
8. Соловьёв И.А., Шевелёв В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Интегрирование функций одной переменной, функции многих переменных, ряды: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2009. -288с. ISBN: 978-5-8114-0819-1 (http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=371).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……………………………………………………………………….3

§1. Дифференциальные уравнения I порядка…………………………….....3

§2. Уравнения с разделяющимися переменными……………………….......8

§3.Однородные дифференциальные уравнения I порядка…….………...13

§4. Линейные дифференциальные уравнения I порядка……………..….19

§5. Уравнение Бернулли……………………………………………………..…26

§6. Дифференциальные уравнения второго порядка……………………..…28

§7. Дифференциальные уравнения высших порядков……………………35

§8. Однородное линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами ………………………………………………………………38

§9. Неоднородное линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами ……………………………..…………………………45

§10. Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка……………………………………….52

ПРИЛОЖЕНИЯ ……………………………………………….…......……..57

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА…….………..………………….……61