

УДК 5530.12+531.51+517.944+519.713+514.774+519.711.3+551.5.001.57+517.957

© Игнатьев Ю. Г., Самигуллина А. Р., 2019

ЧИСЛЕННО – АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ. IV. РАСШИРЕНИЕ ВИЗУАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПАКЕТА DIFEQTOOLS, ТЕСТИРОВАНИЕ НА ТОЧНОСТЬ И СКОРОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ*Игнатьев Ю. Г.^{a,1}, Самигуллина А. Р.^{a,2}^a Казанский федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия.

Описаны инструменты автоматической визуализации численных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и усреднения численных решений на основе авторского прикладного пакета программ DifEqTools, а также приведены примеры применения этих инструментов к исследованию нелинейных задач механики и космологии.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений, сплайновая аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, нелинейная механика, космология, прикладные математические пакеты.

NUMERICALLY – ANALYTICAL METHODS FOR MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS IN CAS MAPLE. IV. TESTING PACKAGE ON ACCURACY AND SPEED OF CALCULATIONSIgnat'ev Yu. G.^{a,1}, Samigullina A. R.^{a,2}^a Kazan Federal University, Kazan, 420008, Russia.

The tools for automatic visualization of numerical solutions of systems of nonlinear ordinary differential equations and averaging of numerical solutions on the basis of the author's application package of DifEqTools programs are described, and examples of application of these tools to the study of nonlinear problems in mechanics and cosmology are given.

Keywords: nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations, spline approximation, numerical integration methods, computational visualization, nonlinear mechanics, cosmology, applied mathematical packages.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.Cq, 96.50.S, 52.27.Ny, 02.60.Cb, 07.05.Tr, 04.25.-g

DOI: 10.17238/issn2226-8812.2019.3.45-68

Введение

В ряде предыдущих работ Авторам [1], [2], [3] были описаны численно-аналитические методы исследования нелинейных динамических систем, а в работах [4], [5] был представлен Авторский пакет DifEqTools, предназначенный для автоматизированного исследования и визуализации нелинейных динамических систем произвольной размерности. В работах [6]³, [8] с помощью этого

*This work was founded by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities.

¹E-mail: ignat'ev_yu@rambler.ru

²E-mail: alsu_sam@rambler.ru

³см. также [7]

пакета было проведено усреднение динамических функций стандартной космологической модели (СКМ) на стадии доминирования скалярного поля. Эти исследования подтвердили необходимость развития численно-аналитических методов исследования нелинейных динамических систем и важность автоматизации процесса их исследования и визуализации соответствующих моделей для качественного проведения фундаментальных исследований. В процессе разработки специализированного пакета, предназначенного, в первую очередь, для физиков - теоретиков, остались нерешенными вопросы о точности и скорости вычислений. Решение этих вопросов необходимо для исследователей, проводящих конкретные вычисления, с целью выбора оптимальных параметров процедур численного интегрирования, а именно, методов численного интегрирования, минимальных порогов точности вычислений, максимального количества шагов интегрирования, т.е., таких параметров, которые, с одной стороны, обеспечивают необходимую точность интегрирования, а с другой стороны – приемлемое время построения численной модели. В данной работе мы, с одной стороны, представляем дополнительные программные процедуры, позволяющие проводить автоматизированное тестирование программ `DifEqTools` на точность и скорость вычислений, а с другой стороны – специализированные программы тестирования пакета на основе сравнения численного решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), как с известными точными решениями, так и численными решениями повышенной точности. Кроме того, последняя версия СКМ Maple (версия 2017) предоставляет дополнительные возможности визуализации математических моделей, которые учтены в расширенной версии авторского пакета `DifEqTools` 2018 года. Сам модернизированный пакет `DifEqTools` будет предоставлен в свободное пользование на сайте журнала в ближайшее время.

Следует подчеркнуть принципиальную важность описываемого пакета особенно в космологических и астрофизических исследованиях, в которых в последние годы рассматривается все большее число нелинейных моделей, основанных на фундаментальных физических полях с большим числом неизвестных пока параметров. В этих условиях исследователю необходимы инструменты быстрого и надежного тестирования различных моделей с целью выбора оптимальных параметров полевых моделей и начальных условий. Громоздкая рутинная работа по построению компьютерных моделей в этих условиях часто становится теми «деревьями», из-за которых не видно «леса». Автоматизация процесса построения численных моделей и степень сервисности представления результатов моделирования могут стать ключевыми факторами в успешности и оперативности таких исследований и дать понимание особенностей космологических и астрофизических моделей.

1. Команды автоматизированного численного интегрирования ОДУ и визуализации решений

1.1. Опции команд построения графиков численных решений

Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенных относительно старших производных, достигается в пакете `DifEqTools` командой `NumDsolve(Eqs, IC, method)`, где `Eqs` - список ОДУ, `IC` - список начальных условий, `method` - список параметров численного интегрирования, который, как минимум должен содержать метод численного интегрирования, например, `method=rkf45`. При этом численное решение выводится командой

```
>X:=DifEqTools[NumDsolve](Eqs, IC, method);
```

и имеет следующий формат

```
>X(t_1);
```

```
[[x1(t1), ..., xk(t1), [x'1(t1), (...), x'k(t1), (...)], [(D@@(n1-1))(x1)(t1), (...), ((D@@(nk-1))(xk)(t1)]
```

Автоматизированный вывод графиков численных решений ОДУ достигается командами

- `DifEqTools[GraphConf1](Eqs,ICS,method,k,t,c,s,p);`
- `DifEqTools[GraphPhase2d]((Eqs,ICS,method,k,t,c,s,p);`
- `DifEqTools[GraphPhase3d]((Eqs,ICS,method,k,t,c,s);`

Здесь: `EQS` - система дифференциальных уравнений, `ICS` - начальные условия, `method` - метод интегрирования:

- `rkf45` — метод Рунге-Кутты-Фелберга 4-5 порядка
- `dverk78` — метод Рунге-Кутты 7-8 порядка
- `stiff` — метод решение жестких уравнений
- `rosenbrock` — метод Розенброка
- `classical` — классический метод
- `taylorseries` — метод разложения в ряд Тейлора

Далее: `k` – список `[[i,j]]`, который задает выводимую динамическую переменную и ее производную – `i` - номер этой переменной в списке дифференциальных уравнений `EQS`, т.е., номер уравнения, разрешенного относительно старшей производной этой переменной, `j` - порядок выводимой производной этой переменной;

`t` – интервал интегрирование, либо конечное значение временной переменной $t = t1$, либо временной интервал $[t0, t1]$;

`c` – цвет графика (ввод `color` или `COLOR(RGB,θ,θ,θ)`); `s` – стиль графика;

`p` – `IVP` - информация о решаемой системе и начальные условия в подписи (`caption`), `coord` - информация о координатах решения при наведении курсора на график, при любом другом значении `p` при наведении курсора на график появляется информация о решаемой системе (начальные условия и координаты для конфигурационных и фазовых траекторий).

1.2. Некоторые примеры численных решений

Приведем некоторые примеры визуализации численного решения системы ОДУ.

1. Автоматизированный вывод конфигурационной траектории численного решения задачи Коши для нелинейной системы трех уравнений второго порядка с кубическими нелинейностями:

$$\text{Eqs3n} : \left[\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{d}{dt}y(t) - x(t)^3, \frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - y(t)^3, \frac{d^2}{dt^2}z(t) = 0 \right] \quad (1.1)$$

с начальными условиями:

$$\text{ICS3} : [x(0) = 0, D(x)(0) = 1, y(0) = 0, D(y)(0) = 1, z(0) = 0, D(z)(0) = 1] \quad (1.2)$$

Соответствующая система и начальные условия вводятся следующим образом:

```
> Eqs3n:=[(D@@2)(x)(t)=-D(y)(t)-x(t)^3,(D@@2)(y)(t)=D(x)(t)-y(t)^3,(D@@2)(z)(t)=0];
> ICS3:=[x(0)=0,D(x)(0)=1,y(0)=0,D(y)(0)=1,z(0)=0,D(z)(0)=1];
```

а численное решение в графическом представлении получается с помощью простой команды (см. Рис. 1):

```
> DifEqTools[GraphConf1](Eqs3n,ICS3,[method=rkf45],[[1,0]],[1,10],black,dash,IVP);
```

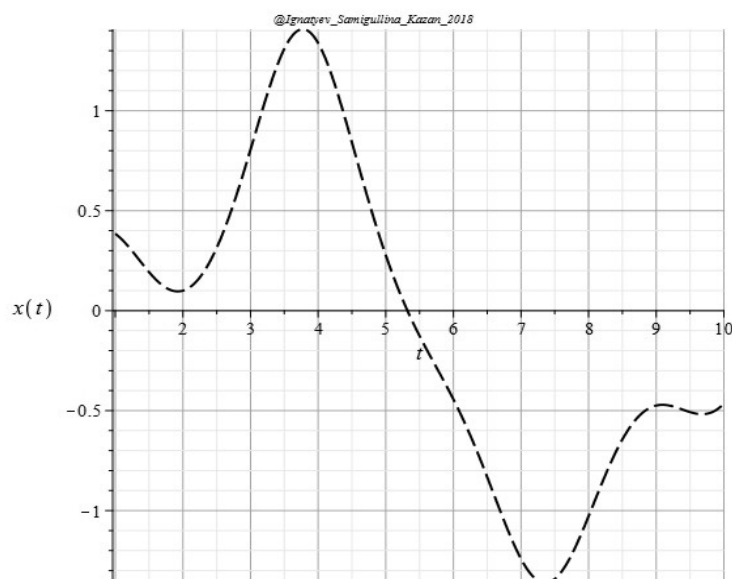


Рис. 1. Конфигурационная траектория численного решения задачи Коши (1.1)– (1.2). Численное решение получено с помощью метода `rkf45`, стилевая опция `dash` представляет график штрих-пунктирной линией. Выводится нулевая производная первой динамической функции $[[1,0]]$, т.е., $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$ на интервале $t \in [1, 10]$. Названия координатных осей выводятся автоматически.

2. Автоматизированный вывод фазовой траектории численного решения задачи Коши (1.1)– (1.2).

Графический вывод двумерной фазовой траектории осуществляется с помощью команды:

```
> DifEqTools[GraphPhase2d][Eqs3n, ICS3, [method=dverk78], [[2, 0], [2, 1]],
  [0, 100], black, solid, 1];
```

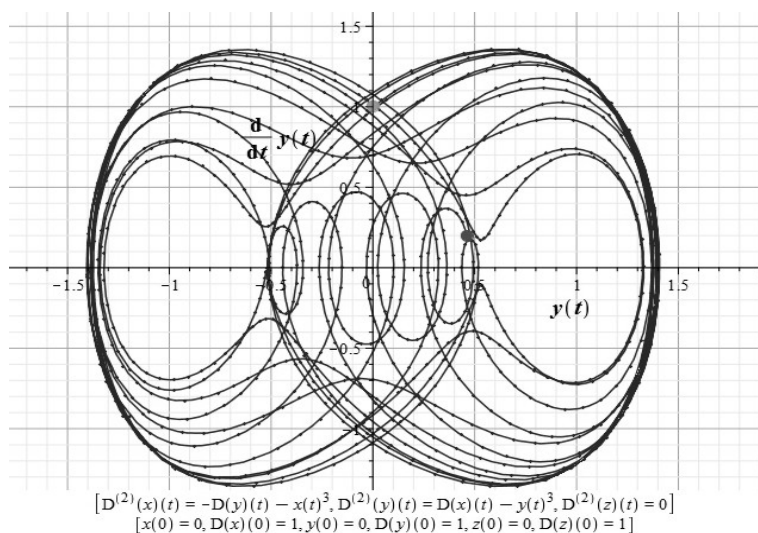


Рис. 2. Фазовая траектория численного решения задачи Коши (1.1)– (1.2). Численное решение получено с помощью метода `dverk78`, стилевая опция `solid` дает представление графика сплошной линией. Выводится нулевая и первая производные второй динамической функции $[[2,0],[2,1]]$, т.е., $y^{(0)}(t) \equiv y(t)$ и $y^{(1)}(t) \equiv y'(t)$ на интервале $t \in [0, 100]$. Названия координатных осей записываются автоматически. Зеленой точкой автоматически помечается начало траектории, красной – ее конец. На представленном рисунке эти точки отображены в черно-белом формате.

3. Автоматизированный вывод трехмерной фазовой траектории численного решения задачи Коши.

Графический вывод трехмерной фазовой траектории осуществляется с помощью команды GraphPhase3d, в которой мы для примера указали необязательные опции: abserr=10⁻⁷ и relerr=10⁻⁷ – максимально допустимые абсолютную и относительную ошибки. При этом выводятся нулевые производные первой, второй и третьей динамических функций, т.е., x(t), y(t), z(t) на интервале [0,100].

```
>DifEqTools[GraphPhase3d](Eqs3n,ICS3,[method=dverk78,abserr=10^(-7),relerr=10^(-7)],
[[1,0],[2,0],[3,0]],[0,100],black,solid,IVP);
```

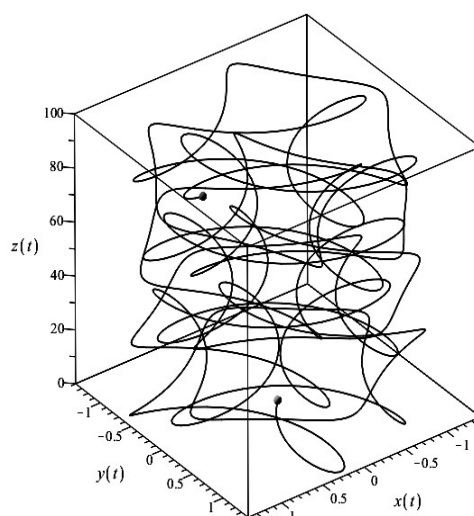


Рис. 3. Трехмерная фазовая траектория численного решения задачи Коши (1.1) – (1.2). Зеленой точкой автоматически помечается начало траектории, красной – ее конец. На представленном рисунке эти точки отображены в черно-белом формате.

2. Расширенные программные процедуры визуализации математических моделей

В обновленной версии пакета DifEqTools, основанной на версии СКМ Maple 2017 (или более поздней), программные процедуры визуализации решений системы нелинейных ОДУ содержат новый параметр, позволяющий интерактивно извлекать информацию о решаемой системе при наведении курсора на графики полученных решений в форме всплывающего окна.

Продемонстрируем сказанное на примере динамического уравнения скалярного поля в однородной космологической модели [3]

```
EqF:=(Lambda)->[(D@@2)(Phi)(tau)=-sqrt(3*Pi)*sqrt(Lambda+8*Pi*((D(Phi)(tau))^2+
+Phi(tau)^2))*D(Phi)(tau)-Phi(tau)];
```

$$\text{EqF} : = \lambda \rightarrow [D^{(2)}(\Phi)(\tau) = -\sqrt{(3\pi)}\sqrt{\lambda + 8\pi(D(\Phi)(\tau)^2 + \Phi(\tau)^2)}D(\Phi)(\tau) - \Phi(\tau)]. \quad (2.3)$$

Зададим начальные условия

```
ICF:=(x0,y0)->[Phi(0)=x0,D(Phi)(0)=y0]:
ICF(1,0);
```

$$\text{ICF} : [\Phi(0) = 1, D(\Phi)(0) = 0] \quad (2.4)$$

и выведем фазовую траекторию одной из динамических переменных, $[\Phi(t), \frac{d}{d\tau}\Phi(\tau)]$, с помощью команды GraphPhase2d:

```
DifEqTools[GraphPhase2d](EqF(0.001),ICF(1,0),[method=dverk78,maxfun=5000000],
[[1,0],[1,1]],[900,950],navy,solid,1);
```

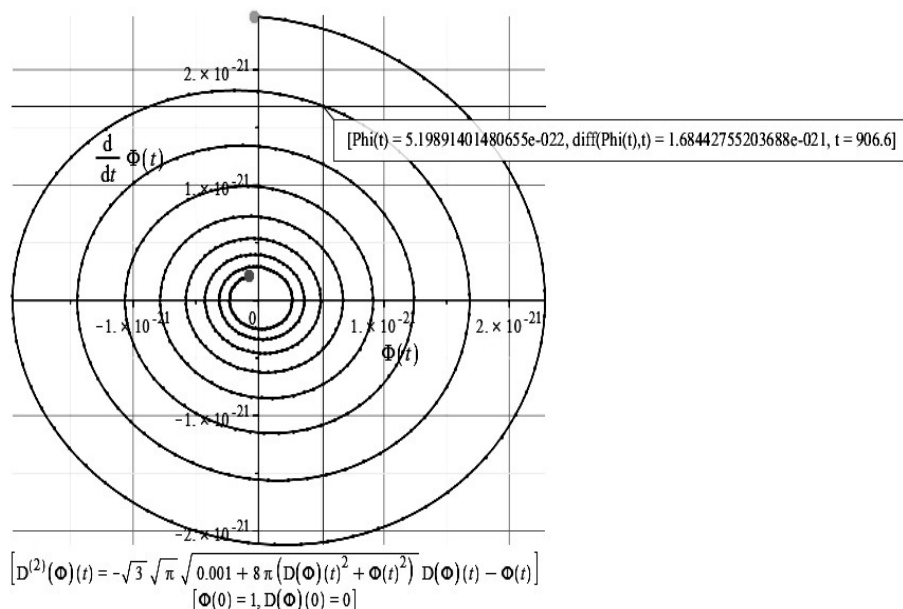


Рис. 4. Интерактивный вывод информации о координатах при наведении курсора на график

Далее, для отображений графиков двух различных функций с различными масштабами предусмотрена команда UnionPlot(G1,G2), которая создает график с двумя ординатами, расположенными в левой и правой сторонах графика.

```
>G1:=DifEqTools[GraphConf1](EqF(0.001),ICF,[method=rkf45,maxfun = 50000000],[[1,0]],
[300,310],navy,dash,IVP,NoTime):
```

```
>G2:=DifEqTools[GraphConf1](EqF(0.001),ICF,[method=rkf45,maxfun=50000000],[[1,1]],
[300,310],black,solid,IVP,NoTime):
```

```
DifEqTools[UnionPlot](G2,G1);
```

Далее, команда TabTextPlot отображает графики (конфигурационные, фазовые и анимационные) в табличной форме, что удобно для сравнения различных результатов численного моделирования. Эта команда содержит следующие опции.

```
>DifEqTools[TabTextPlot](sp,w,l,c):
```

```
sp[[G_1,...,G_n],[ "name_1",...,"name_n" ]] -- список списков графиков(G_n) и
написи (name_n) к ним. Выводит в виде таблицы -
первая строка создается первым списком, вторая строка вторым списком и т.д.;
w -- ширина таблицы в % от ширины окна Maple;
l -- внутренние границы таблицы скрыты при значении none,
а при 0 отображает внутренние границы;
c -- цвет фона таблицы.
```

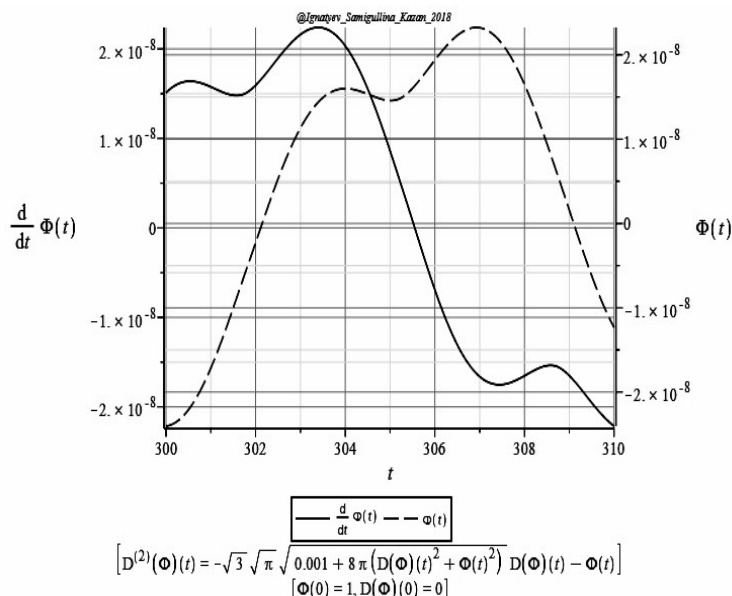


Рис. 5. Конфигурационные траектории численного решения задачи Коши (2.3). Численное решение получено с помощью метода rkf45. Выводятся нулевая $([1,0])$ и первая производные первой динамической функции $([1,1])$, т.е., $[\Phi(t), 0]$, $[\Phi(t), \frac{d}{dt}\Phi(t)]$ на интервале $t \in [300, 310]$. Легенда графика в нижней его части показывает стиль отображения функций. Интегрируемая система уравнений выводится автоматически.

Приведем пример одновременного вывода трех графиков с результатами численного интегрирования системы (2.3) – (2.4): G1 – графика функции $\Phi(t)$ на интервале $t \in [300, 310]$, G2 – графика функции $d\Phi/dt$ на интервале $t \in [300, 310]$ и G3 – графика функции $\Phi(t)$ на интервале $t \in [200, 310]$ с подписями [a., b., c.] под графиками.

```
>G1:=DifEqTools[GraphConf1](EqF(0.001),ICF(1,0),[method=rkf45,maxfun = 50000000],
    [[1,0]], [300,310],navy,dash,IVP):
>G2:=DifEqTools[GraphConf1](EqF(0.001),ICF(1,0),[method=rkf45,maxfun = 50000000],
    [[1,1]], [300,310],black,solid,IVP):
>G3:=DifEqTools[GraphConf1](EqF(0.001),ICF(1,0),[method=rkf45,maxfun = 50000000],
    [[1,0]], [200,310],navy,dash,IVP):
>DifEqTools[TabTeXPlot]([[G1,G2,G3],["a.", "b.", "c."],70,none,White);
```

Заметим, что вместо (или в добавление) надписей a,b,c мы могли бы добавить и рисунки G4,G5<G6, а также и дополнительные строки таблицы.

В обновленном пакете DifEqTools описанные выше программные процедуры объединены в одну программную процедуру GraphSol. Команда GraphSol позволяет выводить как конфигурационные, так и фазовые траектории, конфигурационные и фазовые траектории для алгебраических функций динамических переменных, а также проводить качественный анализ для двумерной динамической системы. Формат этой универсальной программной процедуры следующий: DifEqTools[GraphSol](EQS,IC,method,k,t,c,s,V,sp,T). Параметры EQS,IC,method,k,t,c,s,p описаны выше, при значении параметра p=V необходимо дополнительно ввести список sp, состоящий из трех параметров: [матрица (M0),особая точка A(a,b),индикатор I] (При I=0 - выводится график с информацией об особой точке (в титуле указывается тип особой точки, в легенде (подписи) – обозначения цвета точек начала, конца траектории и собственного вектора), при любых других значениях I информация выводится таблица с информацией об особой точке и графика; T - вывод времени построения графика.

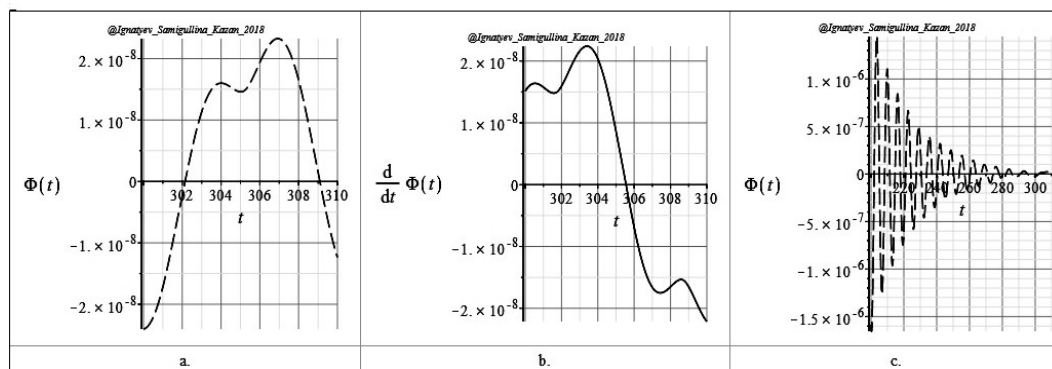


Рис. 6. Объединение графиков G1,G2,G3, полученных с помощью команды `GraphConf1`, в таблицу с подписями a,b,c с помощью команды `TabTeXPlot`. Задан белый цвет фона (опция `White`) и установлена ширина таблицы 70% от ширины окна.

Рассмотрим пример применения программной процедуры `GraphSol` для качественного исследования двумерной динамической системы

$$\text{Eqs} := (a, b) \rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a + x^2(t)y(t) - (b + 1)x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - x^2(t)y(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\text{Inits} := [x(0) = 1, y(0) = 0]. \quad (2.6)$$

Приравнявая производные нулю, найдем координаты единственной особой точки $M0(a, b/a)$, в которой матрица динамической системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Введем координаты особой точки и матрицу динамической системы:

```
>M0:=(a,b)->[a,b/a]:
```

```
>A:=(a,b)->matrix([[b-1,a^2],[-b,-a^2]]):
```

и построим график решения задачи Коши (2.5) – (2.6) при значениях параметров $a = 2.5; b = 0.7$ (Рис. 7):

```
>DifEqTools[GraphSol](Eqs(2.5,0.7),Inits,[method=rkf45,maxfun = 5000000],
[[1,0],[2,0]],[0,10], "Maroon", solid, V, [A(2.5,0.7),M0(2.5,0.7),0], NoTime)
```

3. Программы тестирования пакета на точность и скорость численного интегрирования систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

Перейдем к программам тестирования процедур пакета на точность и скорость вычислений.

3.1. Параметры автоматизированного численного интегрирования систем ОДУ, влияющие на точность и скорость вычислений

Необязательные, но, тем не менее, важные для численного решения ОДУ, параметры численного интегрирования могут быть следующие.

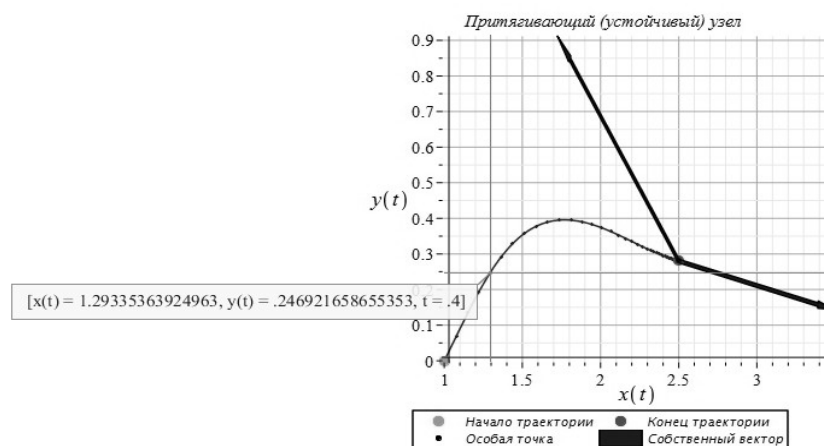


Рис. 7. Пример применения команды `GraphSol` для проведения качественного анализа двумерной динамической системы (2.5). В заголовке к рисунку автоматически выводится тип особой точки. Показан момент интерактивного вывода численного решения.

- `maxfun` – максимальное число итераций при численном решении системы ОДУ. Значение `maxfun=0` отключает опцию. Значения этого параметра по умолчанию для различных методов численного интегрирования:
`✓ classical` – 50000; `dverk78` – 0; `lsode` – 0; `gear` – 0; `rkf45` – 30000; `ck45` – 30000; `rosenbrock` – 30000.
- `abserr` - абсолютная погрешность. Значения этого параметра по умолчанию для различных методов численного интегрирования следующие:
`✓ classical` – не поддерживает, поскольку все классические методы реализованы с фиксированным размером шага и без контроля ошибок; `dverk78` – 10^{-8} ; `lsode` – 10^{-7} ; `gear` – 10^{-7} ; `rkf45` – 10^{-7} ; `ck45` – 10^{-7} ; `rosenbrock` – 10^{-6} .
- `relerr` - относительная погрешность. Значения этого параметра по умолчанию для различных методов численного интегрирования следующие:
`✓ classical` – не поддерживает эти параметры, поскольку все классические методы реализованы с фиксированным размером шага и без контроля ошибок; `dverk78` – 10^{-8} ; `lsode` – 10^{-7} ; `gear` – 10^{-7} ; `rkf45` – 10^{-6} ; `ck45` – 10^{-6} ; `rosenbrock` – 10^{-6} .

3.2. Программные процедуры автоматизированного тестирования пакета на точность и скорость вычислений

Как протестировать пакет на точность численного интегрирования? В принципе, возможно указать два ответа на этот вопрос. Первый из них заключается в сравнении полученного численного решения системы ОДУ с известным точным решением. Обозначим это решение $\mathbf{r}_0(t)$, где $\mathbf{r}_0(t)$ – n -мерный вектор. В случае линейной системы ОДУ нахождение этого вектора не представляет принципиальной сложности и достигается применением стандартных алгоритмов теории дифференциальных уравнений, заложенных, в том числе, и в пакете `Maple`. В случае нелинейных систем ОДУ нахождение точных решений почти всегда является результатом некоторого везения. Примеры отдельных точных решений задачи Коши для нелинейных систем ОДУ можно найти, например, в книге А.Ф. Филиппова [9]. В случаях, когда не представляется возможным найти точное решение нелинейной системы ОДУ¹, приходится в качестве базового решения ОДУ выбирать достаточно надежное численное решение соответствующей задачи Коши на данном интервале. Таким образом, будем говорить о некотором эталонном решении системы ОДУ $\mathbf{r}_0(t)$, которое может

¹а таких случаях подавляющее множество

быть, как точным, так и численным на заданном интервале. Пусть теперь $\mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}(t_i)$ есть численное решение задачи Коши на интервале $t \in [t_0, t_n]$, полученное каким-либо методом интегрированием. Вычислим приращение радиуса-вектора

$$\Delta \mathbf{r}(t_i) = \mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}_0(t_i). \quad (3.7)$$

Введем далее суммарную относительную среднеквадратичную погрешность численного решения в точке t_i :

$$\delta \mathbf{r}^2(t_i) = \frac{\Delta \mathbf{r}^2(t_i)}{\mathbf{r}_0^2(t_i)} = \sum_{k=1}^n \frac{(x^k(t_i) - x_0^k(t_i))^2}{(x_0^k(t_i))^2}. \quad (3.8)$$

Уравнение

$$\frac{\Delta \mathbf{r}^2(t_i)}{\mathbf{r}_0^2(t_i)} = \text{Const} \quad (3.9)$$

описывает n -мерный эллипс в фазовом пространстве динамической системы. Таким образом, формула (3.8) описывает интегральную среднеквадратичную ошибку для динамической системы. Константа в правой части (3.9) есть квадрат радиуса среднеквадратичной ошибки.

Для всестороннего тестирования пакета, а также для обеспечения пользователей полноценным набором инструментов контроля процесса численного интегрирования пакет `DifEqTools` версии 2018 года содержит универсальную программную процедуру `GRelErrNum`, позволяющую автоматизированно выводить информацию об относительных погрешностях вычислений $\delta \mathbf{r}^2$ (3.8) различными методами в формате графика, а также программную процедуру `GTime`, позволяющую выводить время, необходимое для вывода графика:

Команда `DifEqTools[GRelErrNum](EQS, ICS, Method, L, N, n, exact)`

визуализирует минимальные и максимальные среднеквадратичные относительные ошибки вычислений на заданном интервале интегрирования.

- `EQS` – система дифференциальных уравнений;
- `ICS` – начальные условия;
- `Method= [method1, method2, . . . ,]` – список сравниваемых численных методов интегрирования;
- `L` – интервал интегрирования;
- `N` – число отрезков разбиения интервала;
- `n = -lg(δ)`, где δ – относительная погрешность вычислений;
- `exact` – пустой список или список известного точного решения системы ОДУ; Описание первых 5-ти параметров этой процедуры приведено выше, кроме того, имеются еще один новый параметр: `exact` – точное решение в формате списка или пустой список.

Команда `DifEqTools[GTime](EQS, ICS, Method, k, t, c, s, T, n, L)`,

- `EQS` – система ДУ;
- `ICS` – начальные условия;
- `Method` – метод интегрирования (при наличии нескольких методов вводятся в виде списка, в этом случае графики формируются в формате таблицы);
- `k = [[i, j]]` задает выводимую динамическую переменную и ее производную: `i` – номер этой переменной в списке дифференциальных уравнений `EQS` т.е., номер уравнения, разрешенного относительно старшей производной этой переменной, `j` – порядок выводимой производной этой переменной;
- `t` – интервал интегрирования;
- `c` – цвет графика, ввод `color` или `COLOR(RGB,0,0,0)`;
- `s` – стиль графика;

- T – при значении Time параметра T выводит время построение графика, а при значении NoTime не выводит;
- n – toller (относительная погрешность);
- L – относительная ширина таблицы в % от ширины окна.

3.3. Результаты тестирования на точность вычислений

В качестве точных решений задачи Коши существенно нелинейных систем ОДУ мы выбирали решения систем ОДУ, приведенных в книге А.М. Филиппова [9], подобрав значения произвольных констант в решениях, соответствующих заданным начальным условиям, и переписав решения в параметрическом виде. Приведем два примера такого тестирования. Рассмотрим нелинейную систему ОДУ 1-го порядка:

$$2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = z + y. \quad (3.10)$$

Общее точное решение этой системы есть [9]:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{C_1} + \frac{C_1}{2}(x + C_2) - \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 \\ z &= \frac{C_1}{4}(x + C_2)^2 + \frac{1}{C_1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Преобразуем (3.10) в нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений ($x \equiv t$):

$$\text{Eqs1} : \begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = \frac{y(t)^2 - z(t)^2 + 1}{2z(t)} \\ \frac{d}{dt}z(t) = z(t) + y(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

с начальными условиями

$$\text{Inits_Eqs1} : \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 1 \quad (3.13)$$

Найдем частное решение (3.11), соответствующее начальным условиям (3.13)

$$\text{ES1} : \quad y(t) = -1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t^2, \quad z(t) = \frac{1}{4}t^2 + 1 \quad (3.14)$$

Запишем систему (3.12) в пакете Maple² с начальными условиями (3.13)

```
>Eqs1:=[diff(y(t),t)=(y(t)^2-z(t)^2+1)/(2*z(t)),diff(z(t),t)=z(t)+y(t)]:
```

```
>Inits_Eqs1:=[y(0)=-1,z(0)=1]:
```

и присвоим имя найденному точному решению (3.14) задачи Коши (3.12) –(3.13):

```
>ES1:=[-1+(1/2)*t-(1/4)*t^2,1/4*t^2+1]:
```

Выведем численное решение задачи Коши (3.12) –(3.13) в формате графика фазовой траектории на отрезке $t \in [0, 2]$ (Рис. 8):

```
>DifEqTools[GraphPhase2d](Eqs1,Inits_Eqs1,[method=dverk78],[[1,0],[2,0]],[0,2],
  black,solid,coord);
>G_ER_Eqs1_0:=DifEqTools[GRelErrNum](Eqs1,Inits_Eqs1,[rkf45,rosenbrock,stiff],
  [0,5],20,[3,9],[ ]);
```

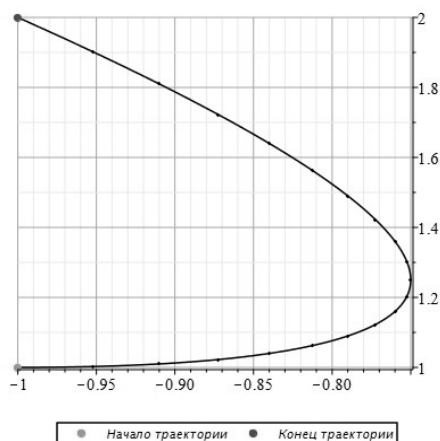


Рис. 8. Вывод фазовой траектории системы (3.12) – (3.13) на основе численного решения методом Рунге-Кутты 7-8 порядка с помощью команды GraphPhase2d.

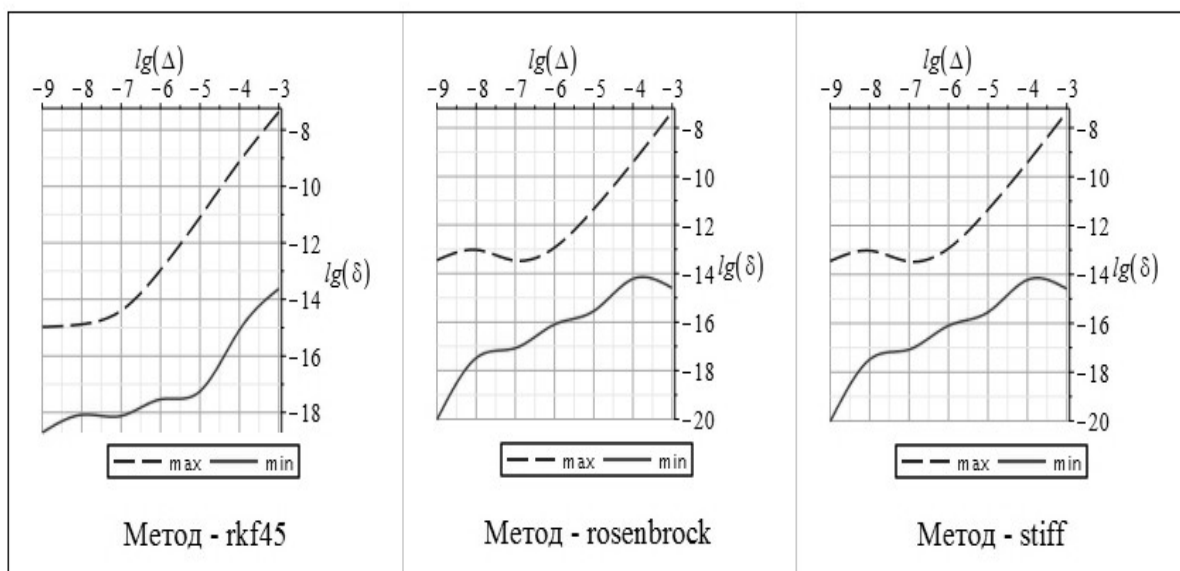


Рис. 9. Результаты тестирования программы на точность вычислений для системы (3.12) – (3.13) для методов [rkf45, rosenbrock, stiff]. По оси абсцисс отложены значения десятичных логарифмов опции `relel` относительной ошибки метода интегрирования: $\Delta = \lg(\text{relel})$, по оси ординат – десятичный логарифм фактической относительной ошибки интегрирования (3.8) относительно наиболее точного численного решения, полученного методом `dverk78`.

Пустая скобка `[]` в опциях процедуры указывает на то, что результаты сравниваются с *наиболее точным численным решением задачи*. Результаты тестирования показаны на Рис.9.

Протестируем теперь программу на точность численных решений в сравнении их с точным решением ES1 (3.14) (Рис. 10).

```
>G_ER_Eqs1:=DifEqTools[GRelErrNum](Eqs1,Inits_Eqs1,[rkf45,dverk78,rosenbrock,stiff],
[0,5],20,[5,9],ES_1);
```

²обращаем внимание на обязательность квадратных скобок, т.е., на запись системы ОДУ в форме списка даже в случае одиночного уравнения

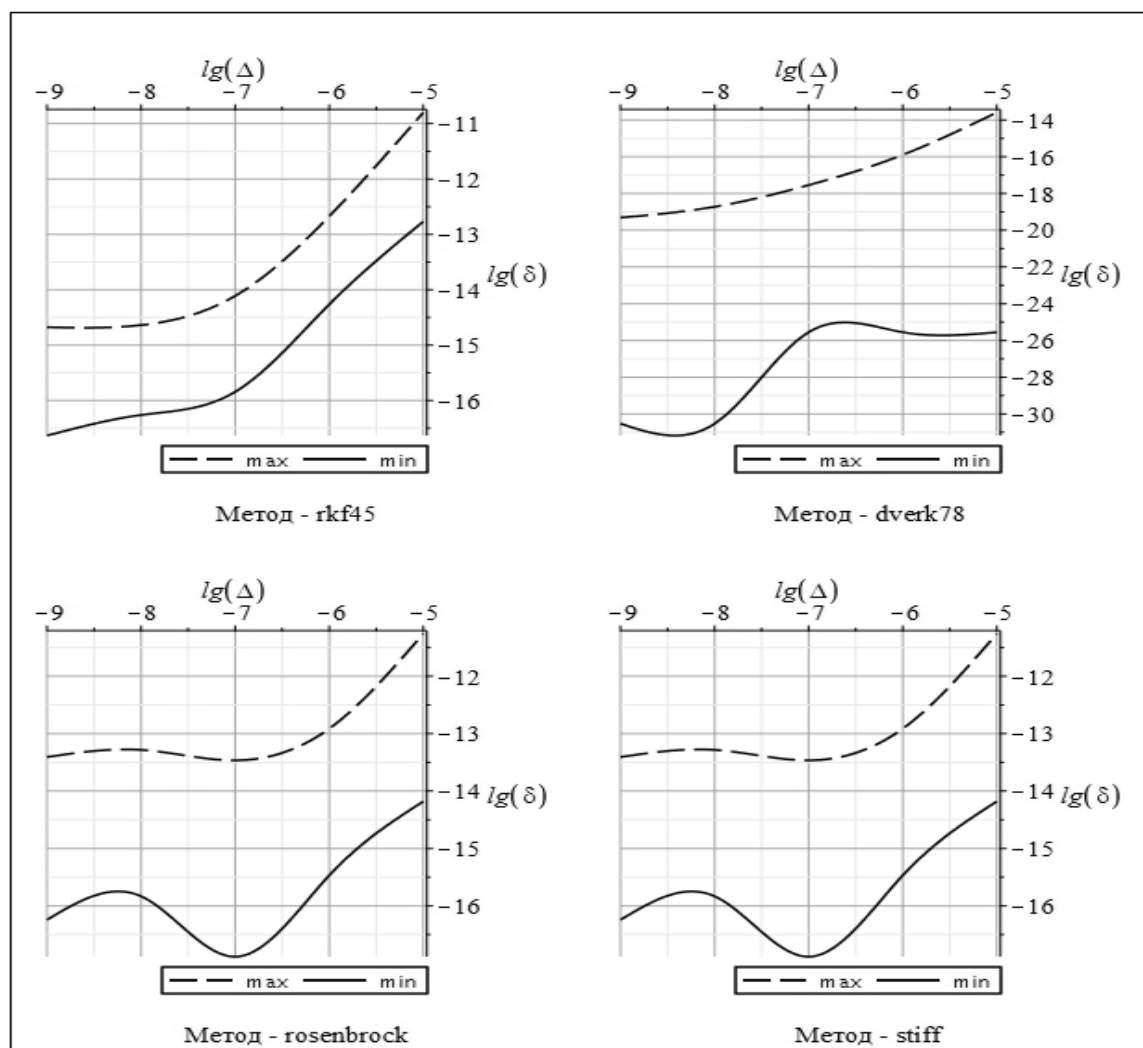


Рис. 10. Результаты тестирования программы на точность вычислений для системы (3.12) – (3.13) для методов [rkf45, dverk78, rosenbrock, stiff]. По оси абсцисс отложены значения десятичных логарифмов опции `relel` относительной ошибки метода интегрирования: $\Delta = \lg(\text{relel})$, по оси ординат – десятичный логарифм фактической относительной ошибки интегрирования (3.8) относительно **точного** решения (3.14) – ES_1.

3.4. Результаты тестирования скорости вычислений в зависимости от метода интегрирования

Скорость вычислений является важным фактором при численном интегрировании нелинейных систем ОДУ, особенно с большим числом степеней свободы, когда процесс численного интегрирования может длиться часами и даже сутками. Поэтому исследователь, приступающий к численному моделированию, должен иметь инструмент оценки скорости вычислений в зависимости от метода численного интегрирования и тонкой настройки для выбора «золотой середины» между точностью результата и скоростью его получения. При этом надо понимать, что скорость вывода графичек данных существенно зависит от параметров компьютера – его несущей частотой, количеством ядер и памятью. Параметры персонального компьютера, на котором были получены результаты по скорости вычислений, следующие: Intel(R) Core(TM) i7-3770 GPU@3,40 GHz; 3,40GHz; ОЗУ: 16,0ГБ; 8 ядер; 64 разрядная ОС Windows 8. Параметры тестирующей скорость

построения графиков команды `GTime` описаны выше. Приведем пример ее использования применительно к задаче Коши (3.12) – (3.13) (Рис. 11).

```
>G_T_Eqs1:=DifEqTools[GTime](Eqs1,Inits_Eqs1,[rkf45,dverk78,rosenbrock,stiff],
[[1,0]],[0,5],black,solid,Time,[5,9],65);
```

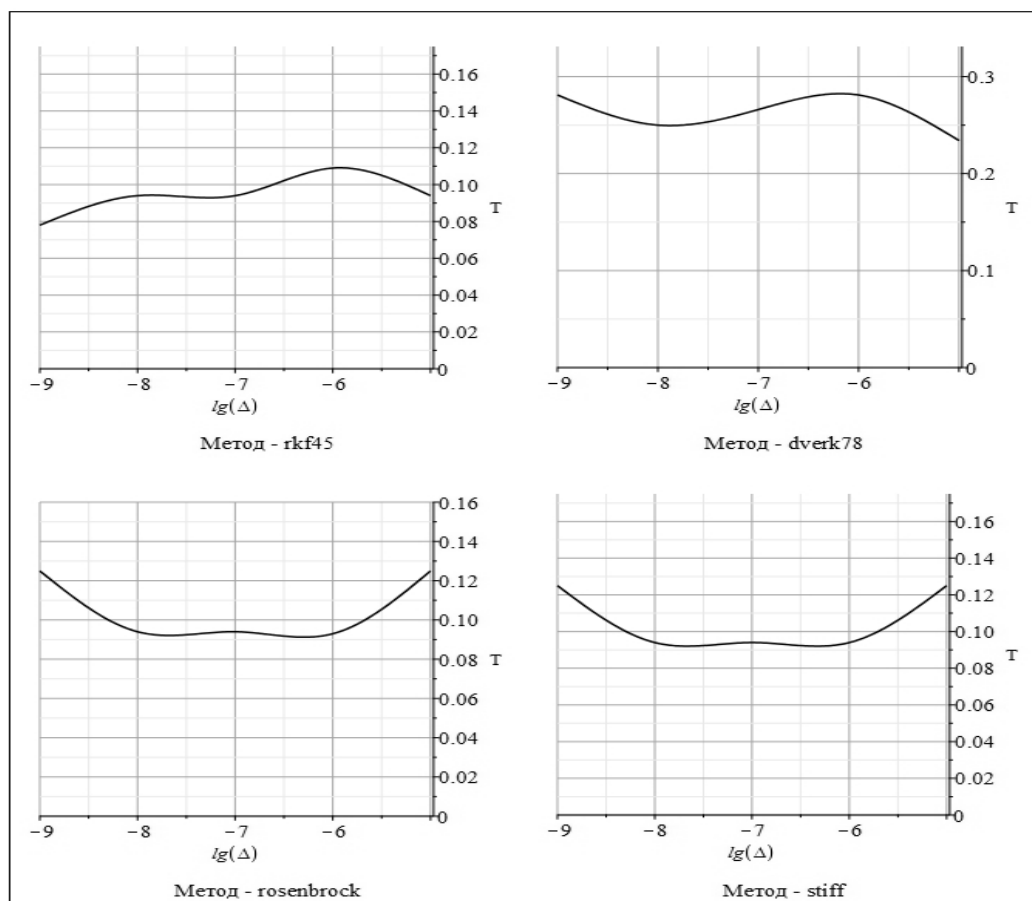


Рис. 11. Зависимость скорости моделирования системы (3.12) – (3.13) от относительной точности метода интегрирования $\Delta = \lg(\text{reller})$ для различных методов интегрирования. Скорость вывода графика функции $y(t) : [1, 0]$ на интервале $t \in [0, 5]$ в сек. отложена на оси ординат. Ширина таблицы установлена в 65% от ширины окна.

4. Моделирование «неудобных» динамических систем с помощью пакета `DifEqTools`

Рассмотрим примеры моделирования «неудобных» для численного интегрирования нелинейных динамических систем. Такие системы могут содержать большие или малые параметры, по отношению к значениям которых системы проявляет критическое поведение, либо включает иррациональности, поведение системы вблизи нулей которых имеет жесткое поведение. Типичными примерами таких нелинейных динамических систем являются модели так называемых *орегонатора* и *брюсселятора*, которые описывают химические реакции, обладающие уникальными свойствами химических часов. Эти реакции впервые исследовали Б.П. Белоусов (1958) и А.М. Жаботинский (1964), поэтому часто они называются реакциями Белоусова - Жаботинского. Математическими моделями реакций типа *Белоусова - Жаботинского* являются модели *орегонатора* и *брюсселятора*.

4.1. Динамическая система Орегонатор

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{y(t) - x(t)y(t) + x(t)(1 - gx(t))}{a}; \\ \text{EqsO : } \frac{d}{dt}y(t) &= -y(t) - x(t)y(t) + 2fz(t); \\ \frac{d}{dt}z(t) &= \frac{x(t) - z(t)}{b} \end{aligned} \quad (4.15)$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – концентрации реагирующих веществ, g, a, b, f – неотрицательные параметры. В пакете Maple запись системы уравнений (4.15) имеет вид:

```
>Eqs0:=(g,a,b,f)->[diff(x(t),t)=(y(t)-x(t)*y(t)+x(t)*(1-g*x(t)))/a,
diff(y(t),t)=(-y(t)-x(t)*y(t)+2*f*z(t)),
diff(z(t),t)=(x(t)-z(t))/b];
```

Зададим пока произвольные начальные условия для системы (4.15)

$$\text{Inits : } (x_0, y_0, z_0) \rightarrow [x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0] : \quad (4.16)$$

```
>Inits:=(x0,y0,z0)->[x(0)=x0,y(0)=y0,z(0)=z0]:
```

С помощью команды GraphSol построим график численного решения задачи Коши (4.15) – (4.16) со значениями параметров $[g = 0.0007, a = .1, b = 0.6, f = 0.75]$ относительно функции $x(t) : [1, 0]$ на отрезке времени $t \in [0, 50]$ (Рис. 12).

```
>G1a3:=DifEqTools[GraphSol](Eqs(0.0007,0.1,0.6,0.75),Inits(0.2,0.4,0.4),
[method=dverk78,maxfun = 50000000],[[1,0]],[0,50],black,solid,IVP,NoTime);
```

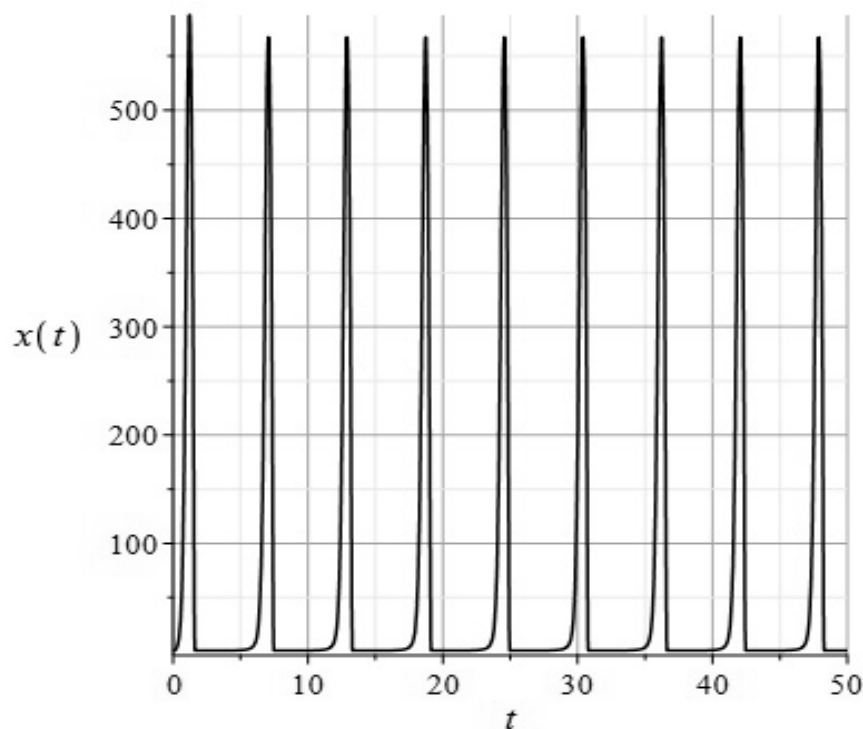


Рис. 12. Орегонатор: (4.15) – (4.16). Выведена зависимость $x(t)$ на отрезке $[0, 50]$ с помощью команды GraphSol методом dverk78 с параметром метода maxfun= 50000000(!)

Построенный график хорошо иллюстрирует неудобные особенности динамической системы (4.15): периодическое чередование плато со значением производной близким к нулю и острых всплесков с очень большим значением производной. Заметим, что аналогичным характером поведения обладала и модель нелинейного отклика магнитоактивной плазмы на гравитационную волну, исследованная в [12] численным методом Адамса в пакете *Mathematica*. Заметим также, что такие большие значения параметра $\text{maxfun} \sim 50000000$ стали доступны в пакете *Maple* лишь начиная с версии 2016 года.

На Рис. 13 показан результат автоматизированного вывода трехмерной фазовой траектории численного решения задачи Коши (4.15) – (4.16) с перечисленными выше параметрами.

```
>G3a3:=DifEqTools[GraphSol](Eqs(0.0007,0.1,0.6,0.75),Inits(0.2,0.4,0.4),
[method=dverk78,maxfun = 50000000],[[1,0],[2,0],[3,0]],[0,20],
black,solid,IVP,NoTime);
```

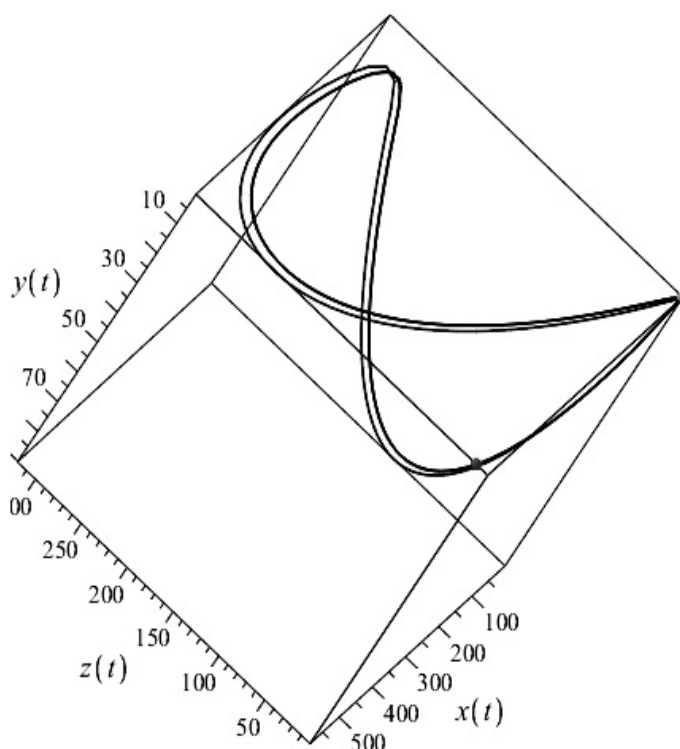


Рис. 13. Трехмерная фазовая траектория $[x(t), y(t), z(t)]$ динамической системы (4.15) – (4.16) на отрезке $t \in [0, 20]$.

4.2. Динамическая система Брюсселятор

Динамическая система *Брюсселятор* описывается системой уравнений [11]:

$$\begin{aligned} \text{EqsB : } \quad \frac{d}{dt}x(t) &= a - (b + 1)x + x^2y; \\ \frac{d}{dt}y(t) &= bx - x^2y, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где a, b – неотрицательные параметры. Зададим начальные условия для системы (4.17):

$$\text{InitsB : } [x(0) = 1, y(0) = 0]. \tag{4.18}$$

В пакете *Maple* задача Коши (4.17) – (4.18) записывается следующим образом:


```
>EqsB:=(a,b)->[diff(x(t),t)=a-(b+1)*x(t)+x(t)^2*y(t),
diff(y(t),t)=b*x(t)-x(t)^2*y(t)];
```

```
>InitsB:=[x(0)=1,y(0)=0]:
```

На Рис. 14 показан результат автоматизированного вывода численного решения задачи Коши (4.17) – (4.18) в формате одного рисунка с двумя различно масштабированными ординатными осями.

```
>G1:=DifEqTools[GraphConf1](Eqs1(2,9.7),Inits1,[method=dverk78,maxfun = 50000000,
reterr=10^(-7)],[[1,0]], [0,50],black,solid,IVP);
>G2:=DifEqTools[GraphConf1](Eqs1(2,6),Inits1,
[method=dverk78,maxfun = 50000000,reterr=10^(-7)],[[2,0]], [0,50],black,dash,IVP);
>DifEqTools[UnionPlot](G1,G2);
```

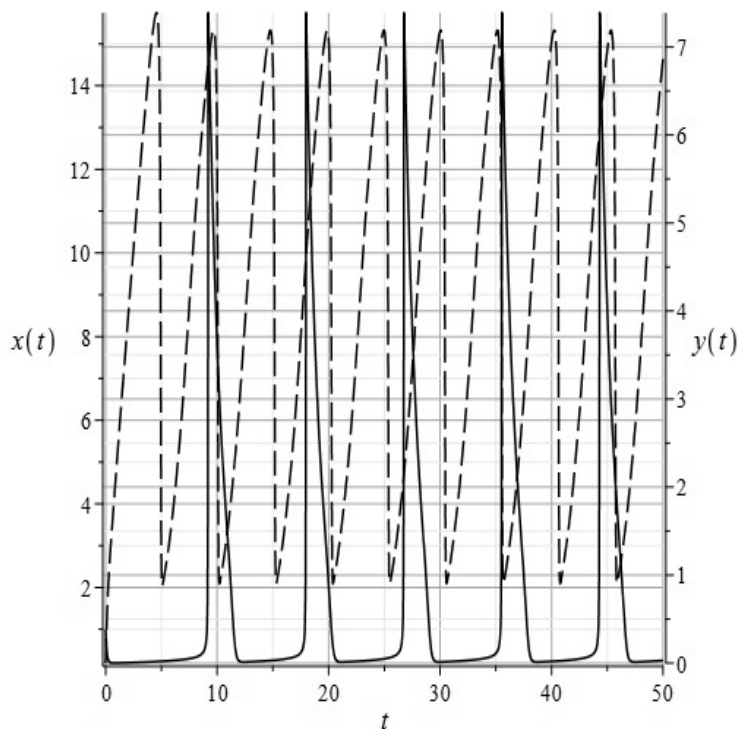


Рис. 14. Брюсселятор (4.17) – (4.18) с параметрами: $a = 1, b = 9.7$ – слева ($x(t)$) и $a = 2, b = 6$ – справа ($y(t)$).

Приведем пример исследования поведения брюсселятора в зависимости от параметра b (Рис. 15):

```
>plots[display](DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,1),InitsB,
[method=dverk78,maxfun = 50000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP),
DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,2),InitsB,
[method=dverk78,maxfun = 50000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP),
DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,3),InitsB,
[method=dverk78,maxfun = 50000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP),
DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,4),InitsB,
```

```
[method=dverk78,maxfun = 5000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP),
DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,5),InitsB,
[method=dverk78,maxfun = 5000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP),
DifEqTools[GraphPhase2d](EqsB(2,6),InitsB,
[method=dverk78,maxfun = 5000000000000],[[1,0],[2,0]],
[0,100],COLOR(RGB,0,0,0),solid,IVP));
```

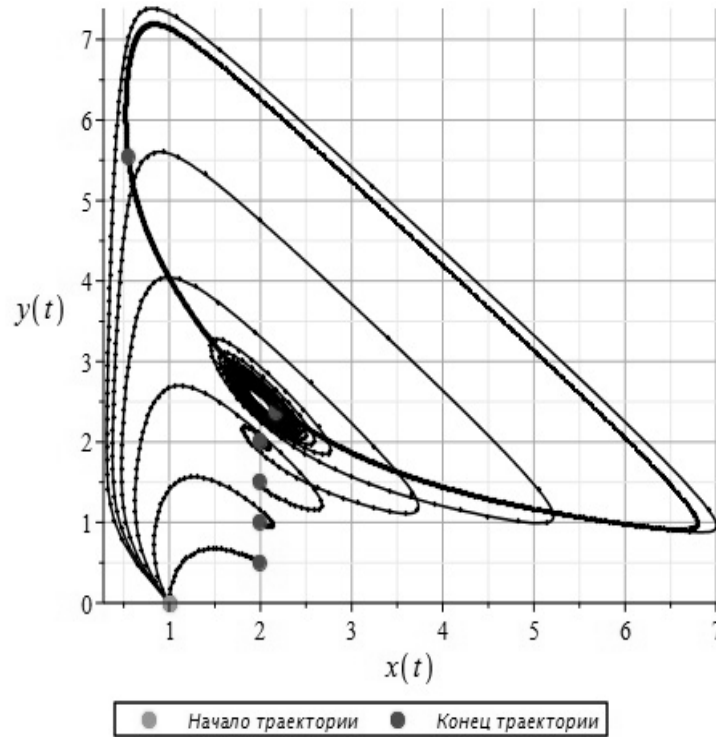


Рис. 15. Исследование влияния параметра b на поведение брюсселятора (4.17) – (4.18). Параметр b изменяется в пределах $2 \div 6$ – Снизу вверх.

Мы видим, что при $t \rightarrow \infty$ траектория становится замкнутой, и образуется *предельный цикл*.

5. Применение пакета **DifEqTools** для исследования космологических моделей

В серии работ [13] – [21] было проведено детальное исследование космологических моделей, основанных на классических и фантомных скалярных полях. Значительное число результатов этих работ было получено с помощью численного моделирования в пакете **DifEqTools**. Математическая модель, положенная в основу этих работ, состоит из нормальной системы уравнений в четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_4 : \{\Phi, Z, \varphi, z\}$

$$\Phi' = Z; \quad Z' = -Z\sqrt{3\mathcal{E}_m} - e\Phi + \alpha_m\Phi^3; \quad (5.19)$$

$$\varphi' = z; \quad z' = -z\sqrt{3\mathcal{E}_m} + \varepsilon\mu^2\varphi - \beta_m\varphi^3, \quad (5.20)$$

где $f' \equiv df/d\tau$, $\tau = mt$,

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_{eff}}{m^2} \equiv \frac{1}{2}(Z^2 + e\Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2}\Phi^4) - \frac{1}{2}(z^2 - \varepsilon\mu^2\varphi^2 + \frac{\beta_m}{2}\varphi^4) + \lambda_m. \quad (5.21)$$

В уравнениях (5.19) – (5.21) введены следующие обозначения для безразмерных параметров:

$$\alpha_m = \frac{\alpha}{m^2}, \quad \beta_m = \frac{\beta}{m^2}, \quad \lambda_m = \frac{\lambda}{8\pi m^2}, \quad \mu \equiv \frac{m}{m}. \quad (5.22)$$

Заметим, что в этих обозначениях все полевые величины $\{\Phi, Z, \varphi, z\}$, как и плотность энергии \mathcal{E}_m , а также постоянная Хаббла $H_m = a'/a$ безразмерны.

В пакете `Maple` система дифференциальных уравнений, описывающих динамическую систему (5.19) – (5.20) имеет вид:

```
>Eqs:=(a,b,e1,e2,m,L)->[(D@@1)(Phi)(t)=Z(t),
    (D@@1)(Z)(t)=-sqrt(3)*Z(t)*sqrt(Z(t)^2+e1*Phi(t)^2-a/2*Phi(t)^4-
    (z(t)^2-e2*m^2*phi(t)^2+b/2*phi(t)^4)+L)-e1*Phi(t)+a*Phi(t)^3,
    (D@@1)(phi)(t)=z(t), (D@@1)(z)(t)=-sqrt(3)*z(t)*sqrt(Z(t)^2+e1*Phi(t)^2-
    a/2*Phi(t)^4-(z(t)^2-e2*m^2*phi(t)^2+b/2*phi(t)^4)+L)+e2*phi(t)*m^2-b*phi(t)^3]:
```

Введем также начальные условия для системы (5.19) – (5.20):

```
>ICS:=(IC1,IC2,IC3,IC4)->[Phi(0) = IC1, Z(0) =IC2, phi(0) = IC3, z(0) = IC4]:
```

и условие вещественности подкоренного выражения в (5.19) – (5.20) ($E_m \geq 0$):

```
>Reg:=(a,b,e1,e2,m,L)->Z^2+e1*Phi^2-(1/2)*a*Phi^4-z^2+e2*m^2*phi^2-
    -(1/2)*b*phi^4+L>=0:
```

Задача Коши для динамической системы (5.19) – (5.20) полностью определяется заданием параметров P и начальных условий I :

$$P = [\alpha, \beta, e, \epsilon, \mu, \Lambda], \quad I = [\Phi(0), Z(0), \varphi(0), z(0)].$$

В дальнейшем мы используем специальную программную процедуру `RealRadical` [23], позволяющую автоматически накладывать на график фазовых траекторий область запрещенных значений фазовых координат. На Рис. 16 показана фазовая траектория динамической системы (5.19) – (5.20) в плоскости Φ, Z , полученная с помощью этой интегрированной программной процедуры (подробности см. в [21]).

```
>RealRadical(Eqs(-1,1,-1,1,1,0),ICS(0.09,0.1,0.1,0.04),Reg(-1,1,-1,1,1,0),
    [method=dverk78,maxfun=5000000],[3,4],[[1,0],[2,0]],[-2.583637,1.8],
    [-1.5,1.5],[-0.8,0.8],"White","LightGrey","Black");
```

Покажем пример совмещения графиков в формате таблицы, позволяющего проследить поведение динамической системы. На Рис. 17 показана эволюция динамической системы (5.19) – (5.20) с параметрами $P = [-1, 1, -1, 1, 1, 0]$ и начальными условиями $I = [0.5, 0.1, 0.5, 0]$ на интервале $\tau = [-1, \tau_1]$ при увеличении $\tau_1 = 0 \div 2$.

```
>G_0:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
    [method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,0],[-1,2],[-1.5,1.5],
    "PeachPuff","Linen","Navy");
```

```
>G_05:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
    [method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,0.5],[-1,2],[-1.5,1.5],
    "PeachPuff","Linen","Navy");
```

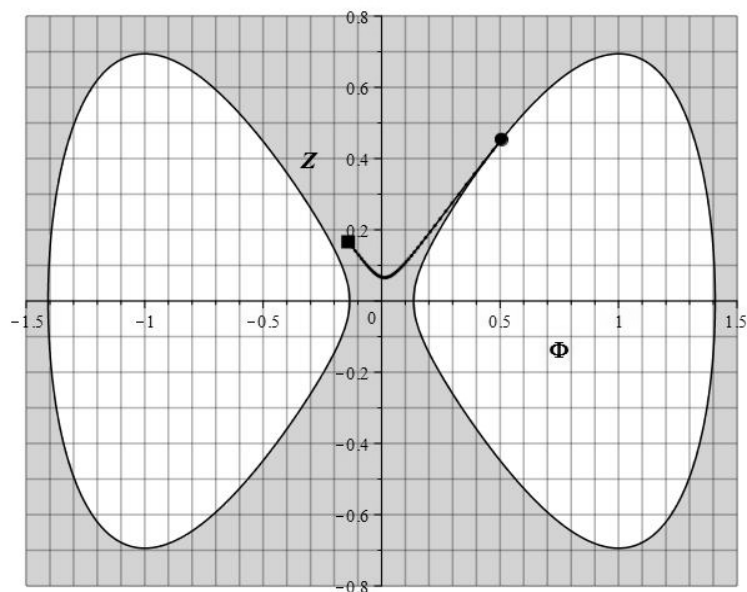


Рис. 16. Фазовая траектория классического поля с параметрами $P = [-1, 1, -1, 1, 1, 0]$ и начальными условиями $I = [0.09, 0.1, 0.1, 0.04]$ на интервале $\tau \in [-0.015, 0.015]$. Серым цветом выделена запрещенная область фазового пространства в конечный момент времени τ , начало траектории отмечено черным квадратом, конец траектории – черным кружком.

```

>G_1:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,1],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>G_2:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,2],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>G_3:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,3],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>G_4:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,4],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>G_5:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,5],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>G_8:=RealRadical(Eqs(1,-1,1,-1,1,0),ICS(0.5,0.1,0.5,0),Reg(1,-1,1,-1,1,0),
[method=dverk78,maxfun =500000],[2,4],[[1,0],[3,0]],[-1,8],[-1,2],[-1.5,1.5],
"PeachPuff","Linen", "Navy");

>DifEqTools[TabTextPlot]([[G_0,G_05,G_1,G_2],[G_3,G_4,G_5,G_8]],100,none,White):

```

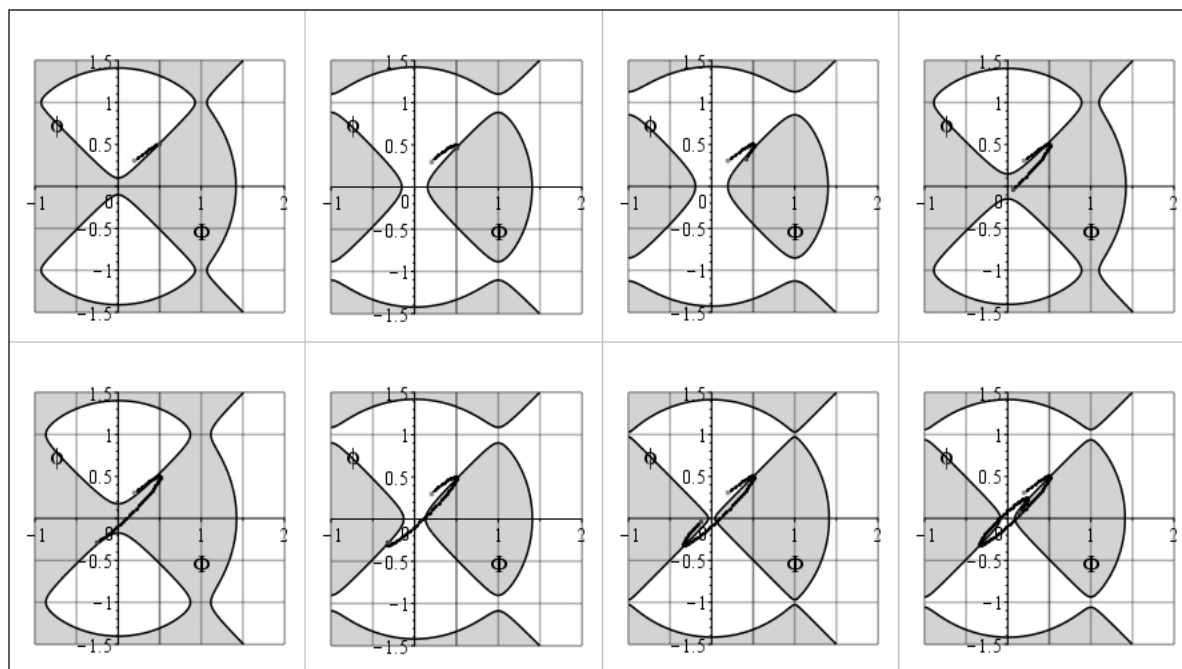


Рис. 17. Эволюция динамической системы (5.19) – (5.20).

Список литературы

1. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. № 4. С. 78–105.
2. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. № 2. С. 74–83.
3. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. III. Визуализация нелинейных динамических систем и приложения к механике и космологии // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2017. № 3. С. 28–56.
4. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2016. № 4. С. 147–148.
5. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple. // *Пакет программ*. URL: <http://www.stfi.ru/ru/software.html>.
6. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu., Samigullina A.R. A Macroscopic View of the Standard Cosmological Model. *Grav. and Cosmol.* 2018; vol. 24, no. 2. Pp. 148–153.
7. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu., Samigullina A.R. A macroscopic view to the standard cosmological model // arXiv:1705.05000 [gr-qc].
8. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Усреднение уравнений стандартной космологической модели по быстрым осцилляциям // *Изв. вузов. Физика*. 2017. Т. 60. № 7. С. 78–84.
9. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск:НИИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 с.
10. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет, 2014. 298 с.
11. Riznichenko G.Yu. Biology of mathematics. <http://www.library.biophys.msu.ru/MathMod/BM.HTML>

12. Ignatyev Yu.G., Agafonov A.A. Bremsstrahlung Response of a Homogeneous Magnetoactive Plasma to a Gravitational Wave. *Grav. and Cosmol.*, 2010; vol. 16, no. 1. Pp. 16–24
13. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on a Classical Massive Scalar Field. *Grav. and Cosmol.*, 2017; vol. 23, no. 2. Pp. 131–141.
14. Ignatyev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model with a Phantom Scalar Field *Russ. Phys. J.*, 2017; vol. 59, Iss. 12. Pp. 2074–2079.
15. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Couplings. I. Qualitative Analysis of the Model. *Russ. Phys. J.*, 2018; vol. 61, no. 6. Pp. 1079–1092.
16. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Couplings. II. Numerical Modeling of Phase Trajectories. *Russ. Phys. J.*, 2019; vol. 61, no. 9. Pp. 1590–1596.
17. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Peculiarities of Cosmological Models Based on a Nonlinear Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Interaction. I. Qualitative Analysis. *Grav. and Cosmol.*, 2019; vol. 25, no. 1. Pp. 24–36.
18. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Peculiarities of Cosmological Models Based on a Nonlinear Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Interaction. II. Numerical Analysis. *Grav. and Cosmol.*, 2019; vol. 25, no. 1. Pp. 37–43.
19. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Connections. III. Multiply-Connected Factor and Character of the Singular Points. *Russ. Phys. J.*, 2019; vol. 62, no. 2. Pp. 242–251
20. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Connections. IV. Numerical Modeling and Types of Behavior of the Model. *Russ. Phys. J.*, 2019; vol. 62, no. 3. Pp. 453–457. <https://doi.org/10.1007/s11182-019-01733-9>
21. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. On Euclidean Limit Cycles in Cosmological Models Based on Scalar Fields. *Russ. Phys. J.*, 2019; vol. 62, no. 4. Pp. 618–626.
22. Игнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс исследования нелинейных динамических космологических систем, основанных на свободных скалярных полях с потенциалом Хиггса // Свидетельство № 2019660135 Российская Федерация. Программный комплекс исследования нелинейных динамических космологических систем, основанных на свободных скалярных полях с потенциалом Хиггса: свидетельство об офиц. регистрации программы для ЭВМ /; заявитель и правообладатель ФГАО ВО Каз.фед.ун-т. № 2019619105.; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 31.07.2019. – [1] с.
23. Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction. *J. Chem. Phys.*, 1974; no. 60. Pp. 1877–84.

References

1. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Numerically - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. *Space, time and fundamental interactions*, 2016, no. 4, pp. 78–105.
2. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Numerically - analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. II. Automation of the mathematical analysis of nonlinear mathematical models. *Space, time and fundamental interactions*, 2017, no. 2, pp. 74–83.
3. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Numerically-analytical methods for mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. III. Visualization of nonlinear dynamics systems and applications to mechanics and cosmology. *Space, time and fundamental interactions*, 2017, no. 3, pp. 28–56.
4. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Program complex for numerical and analytical mathematical modeling of nonlinear dynamic systems in CAS Maple. *Space, time and fundamental interactions*, 2016, no. 4, pp. 147–148.
5. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. The software package numerical-analytical modeling of nonlinear dynamic systems in the SCM Maple. *Space, time and fundamental interactions*, <http://www.stfi.ru/ru/software.html>
6. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu., Samigullina A.R. A Macroscopic View of the Standard Cosmological Model. *Gravitation and Cosmology*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 148–153.
7. Ignat'ev Yu.G., Ignatyev D.Yu., Samigullina A.R. A macroscopic view to the standard cosmological model, *arXiv:1705.05000 [gr-qc]*.

8. Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. Averaging of the Equations of the Standard Cosmological Model over Rapid Oscillations. *Russian Physics Journal*, 2017, vol. 60, no. 7, pp. 1173–1181.
9. Filipov A.F. Collection of problems on differential equations. Izhevsk: SRC « Regular and chaotic dynamics », 2000, 176 p.
10. Ignatyev Yu.G. Mathematical modeling of fundamental objects and phenomena in system of computer mathematics Maple. Lectures for school on mathematical modeling. Kazan: Kazan University, 2014, 298 p.
11. Riznichenko G.Yu. Biology of mathematics. <http://www.library.biophys.msu.ru/MathMod/BM.HTML>
12. Ignatyev Yu.G., Agafonov A.A. Bremsstrahlung Response of a Homogeneous Magnetoactive Plasma to a Gravitational Wave. *Grav. and Cosmol.*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 16–24.
13. Ignat'ev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on a Classical Massive Scalar Field. *Grav. and Cosmol.*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 131–141.
14. Ignatyev Yu.G. Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model with a Phantom Scalar Field. *Russ. Phys. J.*, 2017, vol. 59, iss. 12, pp. 2074–2079.
15. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Couplings. I. Qualitative Analysis of the Model. *Russ. Phys. J.*, 2018, vol. 61, no. 6, pp. 1079–1092.
16. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Couplings. II. Numerical Modeling of Phase Trajectories. *Russ. Phys. J.*, 2019, vol. 61, no. 9, pp. 1590–1596.
17. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Peculiarities of Cosmological Models Based on a Nonlinear Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Interaction. I. Qualitative Analysis. *Grav. and Cosmol.*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 24–36.
18. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Peculiarities of Cosmological Models Based on a Nonlinear Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Interaction. II. Numerical Analysis. *Grav. and Cosmol.*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 37–43.
19. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Connections. III. Multiply-Connected Factor and Character of the Singular Points. *Russ. Phys. J.*, 2019, vol. 62, no. 2, pp. 242–251.
20. Ignat'ev Yu.G., Kokh I.A. Qualitative and Numerical Analysis of a Cosmological Model Based on an Asymmetric Scalar Doublet with Minimal Connections. IV. Numerical Modeling and Types of Behavior of the Model. *Russ. Phys. J.*, 2019, vol. 62, no. 3, pp. 453–457. <https://doi.org/10.1007/s11182-019-01733-9>
21. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. On Euclidean Limit Cycles in Cosmological Models Based on Scalar Fields. *Russ. Phys. J.*, 2019, vol. 62, no. 4, pp. 618–626.
22. Ignat'ev Yu.G., Samigullina A.R. Software package for the study of nonlinear dynamic cosmological systems based on free scalar fields with Higgs potential // Certificate No. 2019660135 Russian Federation. Software package for the study of nonlinear dynamic cosmological systems based on free scalar fields with Higgs potential: official certificate computer program registration / registered in the Computer Program Registry 31.07.2019. – [1] с.
23. Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cycle behavior in a model of a real chemical reaction. *J. Chem. Phys.*, 1974, no. 60, pp. 1877–84.

Авторы

Игнат'ев Юрий Геннадьевич, д. ф.-м. н., профессор, кафедра теории относительности и гравитации, Институт физики, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Самигуллина Алсу Ринатовна, ассистент, кафедра высшей математики и математического моделирования, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский федеральный университет, ул. Кремлевская, 35, г. Казань, 420008, Россия.

E-mail: alsu_sam@rambler.ru

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Игнатьев Ю. Г., Самигуллина А. Р. Численно – аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем. IV. Расширение визуальных возможностей пакета difeqtools, тестирование на точность и скорость вычислений. Примеры исследования // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 3. С. 45–68.

Authors

Ignat'ev Yuri Gennadievich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Physics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya str., 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: ignatev_yu@rambler.ru

Samigullina Alsu Rinatovna, assistant lecturer, Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University, Kremlyovskaya str., 35, Kazan, 420008, Russia.

E-mail: alsu_sam@rambler.ru

Please cite this article in English as:

Ignat'ev Yu. G., Samigullina A. R. Numerically – analytical methods for mathematical modeling of non-linear dynamic systems in CAS Maple. IV. Testing package on accuracy and speed of calculations. *Space, Time and Fundamental Interactions*, 2019, no. 3, pp. 45–68.