Казанский федеральный университет

Е.М. Карчевский

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Упражнения к лекциям

Казань
2024

Оглавление

Стр.

1. Лекция (комплексные числа — 1)

Глава 1. Комплексные числа

§ 1.1. Комплексные числа, алгебраические операции над комплексными числами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/CVqV2UkwcM_Psg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/9n_ktMMpgCfsSQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §1

Упражнение 1. Убедиться, что операции сложения и умножения комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над вещественными числами:
1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — *коммутативность*, или *перестановочность*,
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ — *ассоциативность*, или *сочетательность*,
3) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ — *дистрибутивность*, или *распределительность*.

Указание. Коммутативность операции сложения комплексных чисел проверяется следующим образом. Сумма двух комплексных чисел z_1 и z_2 по определению равна

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

С другой стороны

$$z_2 + z_1 = (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1).$$

Операция сложения вещественных чисел коммутативна, следовательно, вещественные части комплексных чисел в правых частях двух последних равенств совпадают. Точно так же заключаем, что совпадают мнимые части. Следовательно, эти комплексные числа равны, а значит совпадают и левые части этих равенств. Остальные свойства проверьте аналогично.

Упражнение 2. Непосредственной подстановкой показать, что числа

$$z_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad z_2 = p - i\sqrt{q - p^2}$$

есть корни уравнения

$$z^2 - 2pz + q = 0.$$

Решение. Покажем, что выражение $z^2 - 2pz + q$ при

$$z_1 = p + i\sqrt{q - p^2}, \quad z_2 = p - i\sqrt{q - p^2}$$

равно нулю. Для z_1 имеем:

$$(p + i\sqrt{q - p^2})^2 - 2p(p + i\sqrt{q - p^2}) + q =$$

$$p^2 + i2p\sqrt{q - p^2} - (q - p^2) - 2p^2 - i2p\sqrt{q - p^2} + q = 0.$$

Для z_2 вычисления аналогичны:

$$(p - i\sqrt{q - p^2})^2 - 2p(p - i\sqrt{q - p^2}) + q =$$

$$p^2 - i2p\sqrt{q - p^2} - (q - p^2) - 2p^2 + i2p\sqrt{q - p^2} + q = 0.$$

Упражнение 3. Показать, что операции сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в случае, когда операнды вещественны, совпадают с соответствующим операциями над вещественными числами.

Указание. Покажем, что операция сложения комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

в случае, когда операнды вещественны, совпадает с операцией сложения вещественных чисел. Действительно, пусть $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$, т. е. $z_1 = x_1$ и $z_2 = x_2$ являются вещественными числами. Тогда

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2.$$

Оставшуюся часть упражнения выполните аналогично.

§ 1.2. Операция сопряжения. Модуль комплексного числа

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/FfIFMt3cKSI1Uw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/CCoY4pg1BJhOuA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §2

Упражнение 1. Проверить, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$$

Решение. Докажем, что $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$. Действительно,

$$|z_1 z_2|^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 =$$

$$= x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2.$$

Далее,

$$|z_1|^2|z_2|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2.$$

Ясно, что правые части этих двух цепочек равенств совпадают. Следовательно, равны их левые части.

Упражнение 2. Доказать, что для любых вещественных чисел x, y справедливо неравенство

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2. \tag{1.1}$$

Решение. Действительно, $x^2 = |x|^2$, поэтому можно считать, что x и y неотрицательны. Тогда неравенство (1.1) эквивалентно

$$x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0,$$

что, очевидно, верно.

Упражнение 3. Убедиться, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{1.2}$$

Решение. Докажем, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство (1.2). Это неравенство эквивалентно следующему:

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 .$$

Запишем его подробнее для $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leqslant x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Сократим в левой и правой части последнего неравенства равные неотрицательные слагаемые и запишем его в виде

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$

Таким образом, мы свели поставленную задачу к проверке последнего неравенства. Если $x_1x_2 + y_1y_2 < 0$, оно выполняется очевидным образом. Пусть $x_1x_2 + y_1y_2 \geqslant 0$. Возведем его левую и правую части в квадрат. Получим эквивалентное неравенство:

$$x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2),$$

т. е.

$$2x_1y_2x_2y_1 \leqslant x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2,$$

что справедливо в силу неравенства (1.1).

2. Лекция (комплексные числа — 2)

§ 1.3. Геометрическая интерпретация. Тригонометрическая форма комплексного числа

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/ejqqViU-13M51Q
Презентация https://disk.yandex.ru/i/E6AK6_AiJh1BXw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §3

Упражнение 1. Вычислить сумму комплексных чисел

$$z_1 = 1 + i2 \quad \text{и} \quad z_2 = 3 + i4.$$

Сделать рисунок, иллюстрирующий вычисления.

Решение. Сумма этих чисел равна числу

$$z = (1 + i2) + (3 + i4) = (1 + 3) + i(2 + 4) = 4 + i6.$$

Нарисуем комплексную плоскость. Нанесем на нее числа z_1, z_2 и их сумму z. Укажем вещественную и мнимую часть каждого числа.

Упражнение 2. Вычислить разность комплексных чисел

$$z_1 = 1 + i2 \quad \text{и} \quad z_2 = 3 + i4.$$

Сделать рисунок, иллюстрирующий вычисления.

Решение. Разность этих чисел равна числу

$$z = (1 + i2) - (3 + i4) = (1 - 3) + i(2 - 4) = -2 - i2.$$

Нарисуем комплексную плоскость. Нанесем на нее числа z_1, z_2 и их разность z. Укажем вещественную и мнимую часть каждого числа.

Упражнение 3. Вычислить произведение чисел

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Сделать рисунок, иллюстрирующий вычисления.

Решение. По формуле

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

имеем

$$z = z_1 z_2 = 6 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Нарисуем на комплексной плоскости числа z_1, z_2 и их произведение z. Укажем модуль и аргумент каждого числа.

Упражнение 4. Разделить комплексное число

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{на} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Сделать рисунок, иллюстрирующий вычисления.

Решение. По формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

имеем

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Нарисуем на комплексной плоскости числа z_1, z_2 и их частное z. Укажем вещественную и мнимую часть каждого числа.

Упражнение 5. Получите формулу Муавра и сделайте рисунок.

Решение. Получим формулу для вычисления степеней комплексного числа. Используя определение произведения двух комплексных чисел,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

непосредственно получаем, что

$$z^2 = zz = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi),$$

и, вообще, для любого целого числа n (включая нуль и отрицательные целые числа) справедливо равенство

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Эту формулу называют *формулой Муавра*.

Пример. Возведем комплексное число

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

в третью степень. По формуле Муавра получаем

$$z^3 = \rho^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right) = 27\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Сделайте рисунок, иллюстрирующий эти вычисления.

§ 1.4. Извлечение корня из комплексного числа

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Cmv14UwGwzdr1A

Презентация https://disk.yandex.ru/i/m5Sxbzjcdu3Vqg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 1, §4

Упражнение 1. Получите формулу для корня степени n из комплексного числа и сделайте рисунок.

Решение. Дано число

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пусть

$$\widetilde{z} = \widetilde{\rho}(\cos\widetilde{\varphi} + i\sin\widetilde{\varphi}) = \sqrt[n]{z}, \quad n \geqslant 1.$$

Тогда

$$\widetilde{z}^n = \widetilde{\rho}^n(\cos n\widetilde{\varphi} + i\sin n\widetilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z.$$

Из равенства

$$\widetilde{\rho}^n(\cos n\widetilde{\varphi} + i\sin n\widetilde{\varphi}) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

заключаем, что

$$\widetilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad n\widetilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0,1,\ldots,$$

где $\sqrt[n]{\rho}$ — арифметическое значение корня из $\rho \geqslant 0$. Итак,

$$\widetilde{\rho} = \sqrt[n]{\rho}, \quad \widetilde{\varphi} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Значит n чисел вида

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \underline{n-1}, \tag{2.1}$$

дают <u>различные</u> значения корня n-ой степени $\sqrt[n]{z}$. Придавая k значения, большие, чем $n-1$, в силу периодичности тригонометрических функций мы будем повторять циклически уже найденные значения корней.

Пример. Вычислим $\sqrt[4]{z}$, где

$$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

По формуле (2.1) получаем

$$z_k = \sqrt[4]{3}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

У любого комплексного числа (кроме нуля) существует n различных корней степени n, они расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат и делят ее на n равных частей. Нарисуйте на комплексной плоскости окружность и нанесите на нее четыре числа z_k для рассматриваемого примера.

3. Лекция (многочлены)

Глава 2. Многочлены

§ 2.1. Алгебраические операции над многочленами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/oPmGFBS3T5hKVQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/qHH3CnazlBV3CA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 2, §1

Упражнение 1. Разделить

$$P_4(z) = 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 \quad \text{на} \quad Q_2(z) = z^2 - 3z + 1,$$

т. е. найти такие многочлены

$$q_2(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \quad \text{и} \quad r(z) = d_1 z + d_0,$$

что выполняется равенство

$$P_4(z) = Q_2(z) q_2(z) + r(z).$$

Решение. Итак,

$$2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 =$$

$$= (z^2 - 3z + 1)(c_2 z^2 + c_1 z + c_0) + d_1 z + d_0.$$

Подчеркнем слагаемые, содержащие четвертую степень свободной переменной,

$$\underline{2z^4} - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 =$$

$$= (\underline{z^2} - 3z + 1)(\underline{c_2 z^2} + c_1 z + c_0) + d_1 z + d_0,$$

и вычислим c_2:

$$\underline{z^4}: \quad c_2 = 2.$$

Теперь $c_2 = 2$, и из равенства

$$2z^4 \underline{-3z^3} + 4z^2 - 5z + 6 =$$

$$= (\underline{z^2}\,\underline{\underline{\underline{-3z}}} + 1)(\underline{\underline{\underline{2z^2}}} + \underline{c_1 z} + c_0) + d_1 z + d_0$$

вычислим c_1:

$$\underline{z^3}: \quad -3 = c_1 - 3 \cdot 2,$$

т. е.

$$c_1 = -3 + 6 = 3.$$

Теперь $c_2 = 2$, $c_1 = 3$, и из равенства

$$2z^4 - 3z^3 + \underline{4z^2} - 5z + 6 =$$

$$= (\underline{z^2}\,\underline{\underline{\underline{-3z}}} + \underline{\underline{\underline{1}}})(\underline{\underline{\underline{2z^2}}} + \underline{\underline{3z}} + \underline{c_0}) + d_1 z + d_0$$

вычислим c_0:

$$\underline{z^2}: \quad 4 = c_0 - 3 \cdot 3 + 2,$$

т. е.

$$c_0 = 4 + 9 - 2 = 11.$$

Теперь $c_2 = 2$, $c_1 = 3$, $c_0 = 11$, и из равенства

$$2z^4 - 3z^3 + 4z^2\,\underline{-5z} + 6 =$$

$$= (z^2\,\underline{-3z} + \underline{\underline{1}})(2z^2 + \underline{\underline{3z}} + \underline{11}) + \underline{\underline{\underline{d_1 z}}} + d_0$$

вычислим d_1:

$$\underline{z^1}: \quad -5 = -3 \cdot 11 + 1 \cdot 3 + d_1,$$

т. е.

$$d_1 = -5 + 33 - 3 = 25.$$

Теперь $c_2 = 2$, $c_1 = 3$, $c_0 = 11$, $d_1 = 25$, и из равенства

$$2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + \underline{6} =$$

$$= (z^2 - 3z + \underline{1})(2z^2 + 3z + \underline{11}) + 25z + \underline{d_0}$$

вычислим d_0:

$$\underline{z^0}: \quad 6 = 11 + d_0,$$

т. е.

$$d_0 = 6 - 11 = -5.$$

Окончательно получим:

$$2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6 =$$

$$= (z^2 - 3z + 1)(2z^2 + 3z + 11) + 25z - 5.$$

Ответ.

$$P_4(z) = Q_2(z)q_2(z) + r_1(z).$$

где

$$q_2(z) = 2z^2 + 3z + 11, \quad r_1(z) = 25z - 5.$$

§ 2.2. Корни многочленов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/VofFYA39VdCXbQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/VKFsulbD-KjD4w

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 2, §2

Упражнение 1. Получите формулы Вьета.

Решение. Выразим коэффициенты полинома через его корни. Занумеруем корни полинома

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

целыми числами от 1 до n, повторяя каждый корень столько раз, какова его кратность, и запишем $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n).$$

Итак, приравняем слева и справа слагаемые, содержащие множитель z^{n-1},

$$z^n + \underline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + a_0 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n).$$

Тогда

$$a_{n-1} = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n.$$

Из того же равенства, но для z^{n-2},

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \underline{a_{n-2}z^{n-2}} + \cdots + a_0 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n),$$

имеем

$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n.$$

Продолжим аналогичные построения, окончательно, для свободных слагаемых,

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + \underline{a_0} = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n),$$

имеем

$$a_0 = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Ответ. Полученные формулы называются *формулами Вьета*:

$$a_{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n),$$

$$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_0 = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

§ 2.3. Многочлены с действительными коэффициентами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/mG-5Cy-JEsA69A
Презентация https://disk.yandex.ru/i/bHyP-TtVAQuPwA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 2, §3

Упражнение 1. Разложить многочлен

$$P_3(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = z^3 - 6z + 9$$

на неприводимые вещественные множители.

Решение. Нетрудно видеть, что одним из корней этого полинома является число $\alpha = -3$. Разделим многочлен $P_3(z)$ на

$$Q_1(z) = z + b_0 = z + 3,$$

т. е. найдем такой многочлен

$$q_2(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0,$$

что выполняется равенство

$$P_3(z) = Q_1(z) q_2(z).$$

Итак,

$$z^3 - 6z + 9 = (z + 3)(c_2 z^2 + c_1 z + c_0).$$

Вычисления проведем с помощью схемы Горнера. Их удобно оформить в виде таблицы:

<table>
<tr><td rowspan="3">$b_0 = 3$</td><td>$a_3 = 1$</td><td>$a_2 = 0$</td><td>$a_1 = -6$</td><td>$a_0 = 9$</td></tr>
<tr><td></td><td>$c_2 b_0 =$
$= 1 \cdot 3 = 3$</td><td>$c_1 b_0 =$
$= (-3)3 = -9$</td><td>$c_0 b_0 =$
$= 3 \cdot 3 = 9$</td></tr>
<tr><td>$c_2 = a_3 =$
$= 1$</td><td>$c_1 = a_2 - c_2 b_0 =$
$= -3$</td><td>$c_0 = a_1 - c_1 b_0 =$
$= 3$</td><td>$r_0 = a_0 - c_0 b_0 =$
$= 0$</td></tr>
</table>

Таким образом,

$$q_2(z) = z^2 - 3z + 3,$$

а остаток r_0 равен нулю, поскольку многочлен

$$P_3(z) = z^3 - 6z + 9$$

нацело делится на $z + 3$:

$$z^3 - 6z + 9 = (z + 3)\left(z^2 - 3z + 3\right).$$

Очевидно, число $\alpha = -3$ не является корнем полинома

$$q_2(z) = z^2 - 3z + 3.$$

Поэтому α — простой корень полинома

$$P_3(z) = (z + 3)\left(z^2 - 3z + 3\right).$$

Для того, чтобы найти оставшиеся два его корня, надо решить квадратное уравнение

$$z^2 - 3z + 3 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен -3, следовательно, оно не имеет вещественных корней. Таким образом, полином третьего порядка $P_3(z)$ с вещественными коэффициентами мы представили в виде произведения линейного и квадратичного вещественных сомножителей:

$$P_3(z) = (z+3)\left(z^2 - 3z + 3\right).$$

4. Лекция (определители — 1)

Глава 3. Определители второго и третьего порядков

§ 3.1. Определители второго порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/KQmkjMQK8PWkuQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/Q0ScqpOWqswMNQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 3, §1

Упражнение 1. Получите формулы Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Решение. Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 — заданные, вообще говоря, комплексные числа, x_1 и x_2 требуется найти. Решим эту систему используя метод последовательного исключения неизвестных. Этот метод называют еще *методом Гаусса.*

Поделим обе части первого уравнения системы (4.1) на a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{4.2}$$

Умножим это уравнение на a_{21}, получим

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Вычтем почленно это уравнение из второго уравнения системы (4.1), получим

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Отсюда

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})\,x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21},$$

и

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}.$$

Подставим x_2 в первое уравнение исходной системы, записанное в виде (4.2), найдем выражение для x_1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} =$$

$$= \frac{b_1 \left(a_{22}\widehat{a_{11}} - \widetilde{a_{12}a_{21}}\right) - a_{12}\left(b_2\widehat{a_{11}} - \widetilde{b_1 a_{21}}\right)}{\widehat{a_{11}}\left(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}\right)} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}.$$

Понятно, что формулы

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \tag{4.3}$$

имеют смысл, если

$$\Delta = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Полученные формулы полезно записать в несколько ином виде. Введем соответствующие определения и обозначения. Таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют *матрицей второго порядка*. Величину

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

называют *определителем* матрицы A. Используют следующие обозначения:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

В этих обозначениях формулы (4.3) принимают вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы называют *формулами Крамера*.

§ 3.2. Определители третьего порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/cs7Usp0mHvvQZg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/atcziXdi8eifIQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 3, §2

Упражнение 1. Получите формулы Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Решение. Обратимся к системе трех уравнений с тремя неизвестными

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \tag{4.4}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \tag{4.5}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \tag{4.6}$$

Ее коэффициенты составляют *матрицу третьего порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы вычисляется по формуле

$$|A| = \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{4.7}$$

Для запоминания знаков, с которыми слагаемые входят в эту сумму, полезно использовать схему, представленную на рисунке 4.1.

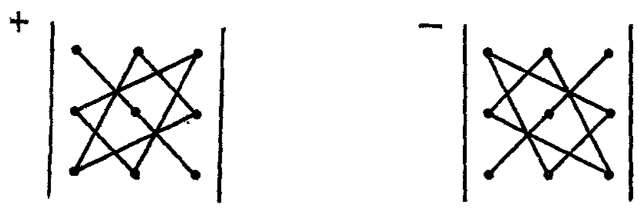

Рисунок 4.1 — Правило расстановки знаков в определителе третьего порядка

Получим формулы для решения системы (4.8)–(4.9), вновь используя метод Гаусса. Поделим обе части уравнения (4.4) на a_{11}:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Это уравнение умножим на a_{21}:

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}.$$

Вычтем построенное уравнение почленно из уравнения (4.5), получим

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}.$$

Аналогично поступим с третьим уравнением (4.4) исходной системы. В результате она преобразуется к следующему виду:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{b_1}{a_{11}}, \tag{4.8}$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21}\right)x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21}\right)x_3 = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{21}, \tag{4.9}$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31}\right)x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31}\right)x_3 = b_3 - \frac{b_1}{a_{11}}a_{31}. \tag{4.10}$$

Теперь из уравнений (4.9) и (4.10) можно исключить неизвестную x_2 по аналогии с тем, как мы исключали неизвестную x_1 из системы двух уравнений с двумя неизвестными, и получить следующее выражение:

$$x_3 = \frac{b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{4.11}$$

Покажем подробнее, как получить это равенство. Умножим левые и правые части уравнений (4.9) и (4.10) на a_{11}. Получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})\,x_3 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \tag{4.12}$$

$$(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})\,x_2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\,x_3 = a_{11}b_3 - b_1a_{31}. \tag{4.13}$$

Положим

$$M_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$M_{32} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{23} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{21} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \quad \Delta_{31} = a_{11}b_3 - b_1a_{31}$$

Мы ввели обозначения для коэффициентов системы (4.12), (4.13). Теперь запишем ее более компактно:

$$M_{33}x_2 + M_{32}x_3 = \Delta_{21},$$
$$M_{23}x_2 + M_{22}x_3 = \Delta_{31}.$$

По формулам Крамера (4.3) для системы двух уравнений имеем

$$x_3 = \frac{\Delta_{31}M_{33} - \Delta_{21}M_{23}}{M_{22}M_{33} - M_{32}M_{23}}. \tag{4.14}$$

Запишем подробнее числитель этой дроби:

$$\Delta_{31}M_{33} - \Delta_{21}M_{23} = (a_{11}b_3 - b_1a_{31})M_{33} - (a_{11}b_2 - b_1a_{21})M_{23} =$$

$$= b_1(a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}) + a_{11}(-b_2M_{23} + b_3M_{33}).$$

Знаменатель записывается аналогично:

$$M_{22}M_{33} - M_{32}M_{23} = (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})M_{33} - (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})M_{23} =$$

$$= a_{13}(a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}) + a_{11}(-a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}).$$

Мы хотим получить формулу (4.11). Среди определителей второго порядка, присутствующих в ее числителе и знаменателе есть M_{23} и M_{33}, которые мы уже определили. Но там есть еще один определитель,

$$M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Поэтому выразим $a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33}$ через M_{13}:

$$a_{21}M_{23} - a_{31}M_{33} = a_{21}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) - a_{31}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$a_{21}a_{11}a_{32} - a_{31}a_{11}a_{22} = a_{11}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}M_{13}.$$

Итак, выражение (4.14) теперь можно записать в виде

$$x_3 = \frac{b_1 M_{13} - b_2 M_{23} + b_3 M_{33}}{a_{13} M_{13} - a_{23} M_{23} + a_{33} M_{33}},$$

что и соответствует формуле (4.11).

Знаменатель дроби в (4.11) представляет собой один из способов вычисления определителем матрицы третьего порядка A. В данном случае он вычислен разложением по третьему столбцу. Формулы разложения определителя третьего порядка по строкам и столбцам подробно изучим в следующем параграфе, а сейчас запишем

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Если раскрыть здесь определители второго порядка, собрать вместе положительные и отрицательные слагаемые, то получится формула (4.7).

Заметим, что числитель дроби в (4.11) аналогичен знаменателю, а именно, множители при определителях второго порядка заменены на b_1, b_2 и b_3 соответственно. Формуле (4.11) поэтому можно придать следующий вид:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{4.15}$$

Используя это выражение для x_3, теперь из уравнения (4.9) можно найти представление для x_2, а затем при помощи уравнения (4.8) найти x_1. Лучше избежать таких громоздких вычислений, действуя следующим образом. Поменяем местами в исходной системе (4.4)–(4.6) слагаемые, содержащие переменные x_2 и x_3, и запишем ее в виде

$$a_{11}x_1 + a_{13}x_3 + a_{12}x_2 = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + a_{22}x_2 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{33}x_3 + a_{32}x_2 = b_3.$$

Теперь, фактически, вновь используя формулу (4.15), имеем

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}}. \tag{4.16}$$

Рассуждая аналогичным образом, получим

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}}. \tag{4.17}$$

В следующем параграфе будет показано, что если в определителе поменять местами два столбца, то знак его изменится на противоположный. Поэтому выражения (4.15)–(4.17) для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными можно записать в виде

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Это искомые *формулы Крамера.*

5. Лекция (определители — 2)

§ 3.3. Свойства определителей третьего порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/9ag38-vpQK46Vw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/V0aFlkqeXS9nqQ
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 3, §3

Упражнение 1. Проиллюстрируйте числовыми примерами свойства определителей третьего порядка.

Решение. Приведем свойства определителей третьего порядка.

1. Матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется *транспонированной* по отношению к исходной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель не меняется при транспонировании матрицы, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Все дальнейшие свойства определителей формулируются в терминах их строк. По свойству 1 они будут справедливы для столбцов.

2. Если все элементы какой-либо строки равны нулю, то определитель тоже равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы двух определителей, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+3 & 2+3 & 3+3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Это свойство *аддитивности.*

Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Это свойство *однородности.*

Свойства аддитивности и однородности приводят к тому, что определитель *линеен* по каждой строке:

$$\begin{vmatrix} \underline{\alpha a_{11}} + \underline{\underline{\beta b_{11}}} & \underline{\alpha a_{12}} + \underline{\underline{\beta b_{12}}} & \underline{\alpha a_{13}} + \underline{\underline{\beta b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{\alpha} \begin{vmatrix} \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} & \underline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \underline{\underline{\beta}} \begin{vmatrix} \underline{\underline{b_{11}}} & \underline{\underline{b_{12}}} & \underline{\underline{b_{13}}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Если две любые строки определителя совпадают, то он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Если в определителе поменять местами две любые строки, то знак его изменится на противоположный, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

6. Если к элементам одной строки определителя прибавить соответствующие элементы любой другой строки, предварительно умноженные на некоторое число, определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7+1(-6) & 8+1(-6) & 9+1(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Говорят, что строки определителя *линейно зависимы*, если существуют числа α, β, γ, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha a_{1j} + \beta a_{2j} + \gamma a_{3j} = 0,\ j = 1{,}2{,}3.$$

Например, для строк определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ справедливы равенства

$$(-1)\cdot 1 + 2\cdot 4 + (-1)\cdot 7 = 0,$$

$$(-1)\cdot 2 + 2\cdot 5 + (-1)\cdot 8 = 0,$$

$$(-1)\cdot 3 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 9 = 0.$$

Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

8. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя $|A|$ называют определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{5.1}$$

Справедлива формула *разложения определителя по строке*,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \\ &= a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + a_{i3}(-1)^{i+3}M_{i3}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь i — номер строки, по которой раскладывается определитель. Имеет место и формула *разложения определителя по столбцу*,

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \\ &= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + a_{3j}(-1)^{3+j}M_{3j}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь j — номер столбца.

Упражнение 2. Используя остальные свойства определителя третьего порядка, получите формулу его разложения по первой строке.

Решение. Используя свойство 3, запишем следующие равенства:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Обозначив через A_{1j} множители при соответствующих элементах первой строки определителя

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

можем написать

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{5.4}$$

Преобразуем определитель:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Кроме того,

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Определители

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

называют *алгебраическими дополнениями* элементов a_{11}, a_{12}, a_{13}. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

получается заменой в $|A|$ элемента a_{ij} единицей, всех остальных элементов i-той строки и j-того столбца нулями.

Это же число получается по формуле (5.1). Напомним, что *минор* M_{ij} элемента a_{ij} есть определитель второго порядка, получающийся из $|A|$ вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, например,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Установим связь (5.1) между алгебраическим дополнениями и минорами. Меняя местами первый и второй столбец, получим

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Выполняя две перестановки столбцов и потому не меняя знака, имеем

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Понятно, что достаточно научиться вычислять определитель

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вычислим два определителя и убедимся, что они равны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11}.$$

Вследствие

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

будем иметь

$$A_{12} = -M_{12}, \quad A_{13} = M_{13}.$$

Поэтому формуле (5.4) можно придать вид

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Итак, мы получили формулу (5.2) для $i = 1$. Аналогичным образом доказывается эта формула для остальных i, а также формула (5.3).

6. Лекция (векторы — 1)

§ 4.1. Векторы. Алгебраические операции над векторами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/sU7LiBUG5XwdGg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/nFIW8PXe2xBORw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §1

Упражнение 1. Интерпретируйте правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов в предельном случае, когда слагаемые коллинеарны. Сделайте рисунки.

Указание. Сформулируем правило параллелограмма и правило треугольника сложения векторов. Сделаем рисунки, иллюстрирующие эти правила.

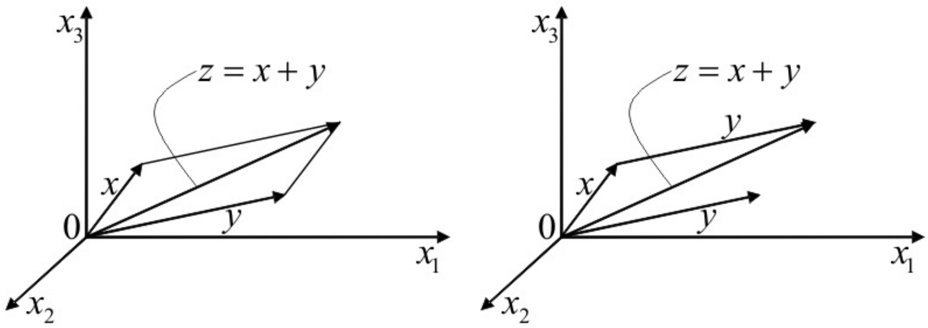

Рисунок 6.1 — К правилу параллелограмма (левая панель) и правилу треугольника (правая панель) сложения векторов.

Вектор z называется суммой векторов x и y, пишут $z = x + y$, если он образует диагональ параллелограмма, построенного на векторах x, y (см. рис. 6.1, левая панель).

Иногда удобнее описывать то же самое правило сложения векторов иначе: от конца вектора x откладывается вектор y, вектор z замыкает треугольник (см. рис. 6.1, правая панель).

Угол между векторами x и y обозначьте α. Устремите α к нулю. Сделайте новые рисунки при $\alpha = 0$. Сформулируйте правило треугольника в этом предельном случае. Попробуйте сформулировать правило параллелограмма при $\alpha = 0$. Теперь устремите угол α к π и проведите те же рассуждения.

Упражнение 2. Дайте определение обобщенного декартова базиса. Сделайте рисунок.

Решение. Будем говорить, что векторы *компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Фиксируем произвольным образом три некомпланарных вектора: e^1, e^2 и e^3. Любой вектор x пространства можно представить в виде

$$x = x_1 e^1 + x_2 e^2 + x_3 e^3.$$

Будем писать также $x = (x_1, x_2, x_3)$.

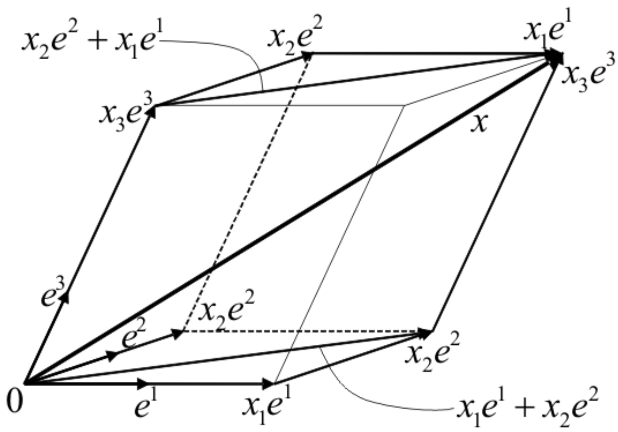

Рисунок 6.2 — Разложение вектора x по обобщенному декартову базису.

Говорят, что векторы e^1, e^2, e^3 образуют *базис* пространства. Числа x_1, x_2, и x_3 называют *координатами вектора в* этом *базисе*. Они однозначно определяются вектором x (если базис фиксирован). Действительно, если предположить, что наряду исходным разложением возможно еще одно разложение

$$x = \widehat{x}_1 e^1 + \widehat{x}_2 e^2 + \widehat{x}_3 e^3,$$

то

$$(\widehat{x}_1 - x_1)e^1 + (\widehat{x}_2 - x_2)e^2 + (\widehat{x}_3 - x_3)e^3 = 0.$$

Но тогда векторы $(\widehat{x}_1 - x_1)e^1$, $(\widehat{x}_2 - x_2)e^2$, $(\widehat{x}_3 - x_3)e^3$ образуют треугольник и, значит, лежат в одной плоскости, чего не может быть, так как по условию векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны.

§ 4.2. Скалярное произведение векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/f9E9U-7rVRWTkw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/8FrOGOVvFv24xQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §2

Упражнение 1. Дайте определение и геометрическую интерпретацию скалярного произведения векторов. Сделайте рисунки.

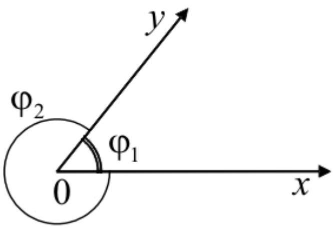

Рисунок 6.3 — К определению скалярного произведения векторов.

Решение. *Скалярным произведением векторов* x и y называется число (x,y), равное произведению длин этих векторов и косинуса угла между ними:

$$(x,y) = |x||y|\cos(x,y).$$

Под углом между двумя векторами договоримся подразумевать тот угол, который не превосходит π. На рисунке 6.3 это угол φ_1.

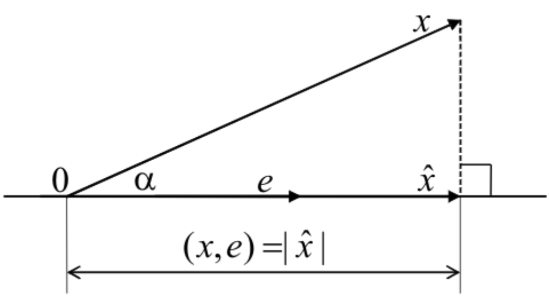

Рисунок 6.4 — Геометрическая интерпретация скалярного произведения.

Понятие скалярного произведения векторов возникает, например, в физике при проектировании силы на заданное направление (см. рис. 6.4). Длина $|\widehat{x}|$

проекции вектора x на прямую, параллельную вектору e единичной длинны, равна скалярному произведению (x,e):

$$(x,e) = |x||e|\cos(x,e) = |x||e|\cos\alpha = |x|\cos\alpha = |x|\frac{|\widehat{x}|}{|x|} = |\widehat{x}|.$$

Упражнение 2. Докажите свойства скалярного произведения векторов (симметрия, однородность, аддитивность, положительная определенность) и сделайте рисунки.

Решение. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $(x,y) = (y,x)$ для любых векторов x,y — *симметрия*,

2) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$ для любых векторов x,y и для любого вещественного числа α — *однородность*,

3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ для любых векторов x,y,z — *аддитивность*,

4) $(x,x) = |x|^2 \geqslant 0$ для любого вектора x, и $(x,x) = 0$, тогда и только тогда, когда $x = 0$ — *положительная определенность*.

Заметим, что из однородности 1) и аддитивности 2) вытекает, что

$$(\alpha x + \beta y,z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$$

для любых векторов x,y,z и для любых вещественных чисел α, β. Это свойство *линейности* скалярного произведения векторов.

Убедимся в справедливости свойств 1)–4).

Симметрия является непосредственным следствием определения:

$$(x,y) = |x||y|\cos(x,y) = |y||x|\cos(y,x) = (y,x).$$

Однородность при $\alpha \geqslant 0$ очевидна:

$$(\alpha x,y) = |\alpha||x||y|\cos(\alpha x,y) = \alpha|x||y|\cos(x,y) = \alpha(x,y).$$

При $\alpha < 0$ надо заметить, что умножение одного вектора на отрицательное число превращает угол между векторами в дополнительный до π (см. рис. 6.5) и, стало быть, меняет знак косинуса угла:

$$(\alpha x,y) = |\alpha x||y|\cos(\alpha x,y) = -\alpha|x||y|\cos(-x,y) =$$

$$= \alpha|x||y|\cos(x,y) = \alpha(x,y).$$

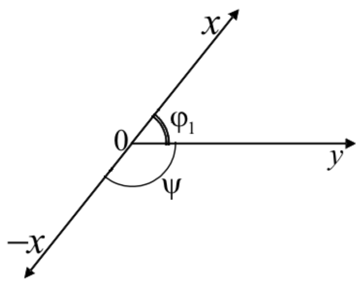

Рисунок 6.5 — К однородности скалярного произведения.

Если $z = 0$, то свойство аддитивности

$$(x + y,z) = (x,z) + (y,z)$$

очевидно, выполняется для любых x, y:

$$0 = 0 + 0.$$

Если $z \neq 0$, то, используя свойство однородности получим

$$(x + y,z) = \left(x + y,|z|\frac{z}{|z|}\right) = |z|(x + y,e), \quad e = \frac{z}{|z|},$$

где $|e| = 1$. Теперь достаточно доказать равенство

$$(x + y,e) = (x,e) + (y,e). \tag{6.1}$$

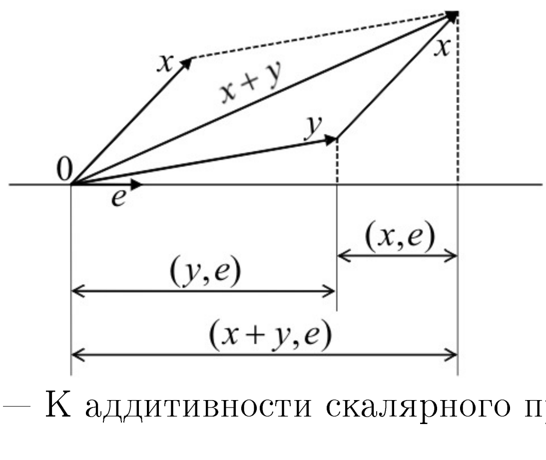

Рисунок 6.6 — К аддитивности скалярного произведения.

Из рисунка 6.6 видно, что $(x+y,e)$ — проекция вектора $x+y$ на прямую, параллельную e, $(x,e)+(y,e)$ — сумма проекций векторов x и y на эту же прямую. Понятно, что две эти величины совпадают, т. е. равенство (6.1) справедливо.

Положительная определенность очевидна:

$$(x,x) = |x||x|\cos(x,x) = |x|^2 \geqslant 0$$

для любого вектора x, и

$$(x,x) = |x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Упражнение 3. Получите выражение для скалярного произведения векторов через их координаты.

Решение. Выразим скалярное произведение векторов

$$x = (x_1,x_2,x_3), \quad y = (y_1,y_2,y_3)$$

через их координаты. Воспользовавшись установленными только что свойствами скалярного произведения, получим

$$(x,y) = (x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (e^k,e^l).$$

Использованный здесь символ означает суммирование по всем значениям индексов $k,l = 1,2,3$ (всего — девять слагаемых). Для вычисления скалярного произведения двух любых векторов надо знать скалярные произведения для всех пар базисных векторов. Проще всего вычисляется скалярное произведение векторов по их декартовым координатам. Действительно, в этом случае

$$(i^k,i^l) = \delta_{kl},$$

следовательно,

$$(x,y) = \sum_{k,l=1}^{3} x_k y_l (i^k,i^l) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

7. Лекция (векторы — 2)

§ 4.3. Векторное произведение векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/fUwiIAazDrV4EA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/xLEsf6pyu6ge-Q

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §3

Упражнение 1. Дайте определение и геометрическую интерпретацию векторного произведения векторов. Сделайте рисунки.

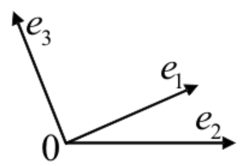

Рисунок 7.1 — Левый базис.

Решение. Пусть в пространстве фиксирован некоторый базис

$$e^1, \quad e^2, \quad e^3.$$

Введем понятие *ориентации базиса*. Будем говорить, что тройка базисных векторов e^1, e^2, e^3 имеет *правую ориентацию*, если с конца вектора e^3 кратчайший поворот от e^1 к e^2 совершается против часовой стрелки. В противном случае тройка имеет *левую ориентацию* (см. рис. 7.1).

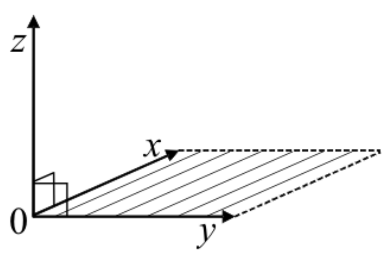

Рисунок 7.2 — К векторному произведению векторов.

Векторным произведением вектора x на вектор y называется вектор z, удовлетворяющий следующим трем условиям (см. рис. 7.2):

1. $|z| = |x||y|\sin(x,y)$,

2. вектор z ортогонален каждому из векторов x и y,

3. вектор z направлен так, что тройка векторов x,y,z имеет ту же ориентацию, что и фиксированный выше базис пространства.

Векторное произведение векторов x, y будем обозначать через $[x,y]$. Отметим, что (см. рис. 7.2)

$$|[x,y]| = |x||y|\sin(x,y)$$

есть площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y.

Упражнение 2. Докажите свойства векторного произведения векторов (антисимметричность, однородность, аддитивность) и сделайте рисунки.

Решение. Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) $[x,y] = -[y,x]$ для любых векторов x,y — *антисимметричность* (*кососимметричность*),

2) $[\alpha x,y] = \alpha[x,y]$ для любых векторов x, y и любого вещественного числа α — *однородность* по первому аргументу,

3) $[x + y,z] = [x,z] + [y,z]$ для любых векторов x, y — *аддитивность* по первому аргументу.

Убедимся в справедливости свойств 1)–3).

Антисимметричность векторного произведения очевидна (см. рис. 7.2):

$$[x,y] = -[y,x].$$

Действительно, если в тройке векторов поменять местами первые два вектора, то тройка меняет ориентацию на противоположную.

Однородность векторного произведения также очевидна (см. рис. 7.2):

$$[\alpha x,y] = \alpha[x,y].$$

Действительно, если умножить x на $\alpha > 0$, то площадь параллелограмма пропорционально увеличиться, а если — на $\alpha < 0$, то еще и тройка поменяет ориентацию на противоположную.

Для проверки аддитивности,

$$[x + y,z] = [x,z] + [y,z], \tag{7.1}$$

заметим, что при $z = 0$ оно выполняется тривиальным образом:

$$0 = 0 + 0.$$

Если $z \neq 0$, то, равенство (7.1) можно записать в виде

$$\left[x + y, |z|\frac{z}{|z|}\right] = \left[x, |z|\frac{z}{|z|}\right] + \left[y, |z|\frac{z}{|z|}\right].$$

Следовательно,

$$|z|\left[x + y, \frac{z}{|z|}\right] = |z|\left[x, \frac{z}{|z|}\right] + |z|\left[y, \frac{z}{|z|}\right],$$

и

$$[x + y, e] = [x, e] + [y, e], \tag{7.2}$$

где $e = z/|z|$. Ясно, что $|e| = 1$. Таким образом, достаточно доказать справедливость равенства (10), где e — произвольный вектор единичной длины.

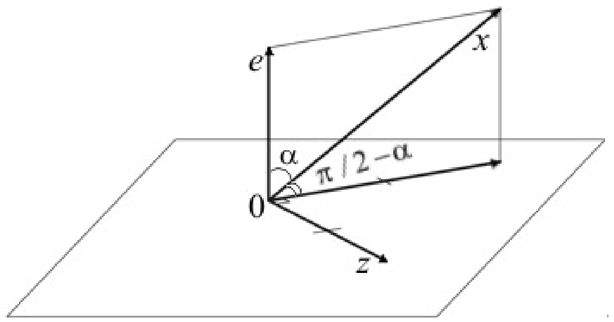

Рисунок 7.3 — Векторное произведение вектора x на вектор e единичной длины, $z = [x, e]$, $|z| = |x| \sin \alpha = |x| \cos(\pi/2 - \alpha)$.

Построение векторного произведения $[x, e]$ можно описать следующим образом (см. рис. 7.3). Сначала вектор x проектируется на плоскость, ортогональную вектору e. Затем полученный вектор поворачивается в этой плоскости так, чтобы он стал ортогональным вектору x и при этом получилась тройка нужной ориентации.

Заметим, что возможность такого описания построения векторного произведения обеспечивается хорошо известным равенством

$$\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Действительно,

$$|z| = |x||e| \sin(x, e) = |x| \sin \alpha = |x| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

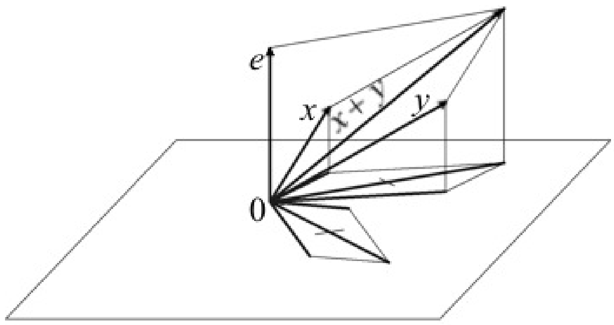

Рисунок 7.4 — К доказательству равенства $[x + y,e] = [x,e] + [y,e]$.

После выполнения этих геометрических построений (см. рис. 7.4) равенство $[x + y,e] = [x,e] + [y,e]$ становится очевидным.

Упражнение 3. Получите выражение для векторного произведения векторов через их координаты.

Решение. Пусть

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, \quad y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3.$$

Тогда

$$[x,y] = [x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3,y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] =$$

$$= x_1[e^1,y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + x_2[e^2,y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] + x_3[e^3,y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3] =$$

$$= -x_1[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,e^1] - x_2[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,e^2] - x_3[y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,e^3].$$

Будем учитывать, что для любого вектора z

$$[z,z] = 0.$$

Теперь

$$[x,y] =$$

$$= -x_1[y_1e^1 + \underline{y_2}e^2 + \underline{\underline{y_3}}e^3,e^1] - x_2[\underline{y_1}e^1 + y_2e^2 + \underline{\underline{\underline{y_3}}}e^3,e^2] - x_3[\underline{\underline{y_1}}e^1 + \underline{\underline{\underline{y_2}}}e^2 + y_3e^3,e^3] =$$

$$= (x_1\underline{y_2} - x_2\underline{y_1})[e^1,e^2] + (x_1\underline{\underline{y_3}} - x_3\underline{\underline{y_1}})[e^1,e^3] + (x_2\underline{\underline{\underline{y_3}}} - x_3\underline{\underline{\underline{y_2}}})[e^2,e^3].$$

Таким образом, нужно уметь строить векторные произведения базисных векторов, чтобы вычислять векторное произведение произвольных векторов по их координатам:

$$[x,y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1,e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1,e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2,e^3].$$

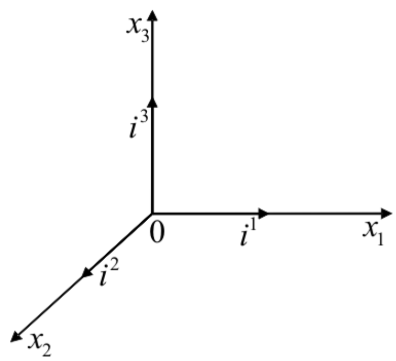

Рисунок 7.5 — К доказательству равенств $[i^1,i^2]=i^3$, $[i^1,i^3]=-i^2$, $[i^2,i^3]=i^1$.

Для векторов декартова базиса имеем

$$[i^1,i^2]=i^3,\quad [i^1,i^3]=-i^2,\quad [i^2,i^3]=i^1.$$

Следовательно, в декартовых координатах

$$[x,y]=(x_1y_2-x_2y_1)[i^1,i^2]+(x_1y_3-x_3y_1)[i^1,e^3]+(x_2y_3-x_3y_2)[i^2,i^3]=$$

$$=(x_1y_2-x_2y_1)i^3+(x_1y_3-x_3y_1)(-i^2)+(x_2y_3-x_3y_2)i^1=$$
$$=(x_2y_3-x_3y_2)i^1-(x_1y_3-x_3y_1)i^2+(x_1y_2-x_2y_1)i^3.$$

Для запоминания этого результата полезна следующая запись:

$$[x,y]=\begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Действительно, формально разложим этот определитель по первой строке:

$$[x,y]=(x_2y_3-x_3y_2)i^1-(x_1y_3-x_3y_1)i^2+(x_1y_2-x_2y_1)i^3.$$

8. Лекция (векторы — 3)

§ 4.4. Смешанное произведение векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/P4hl_gmFlDqFiw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/VP0TJBWpBZrgPQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §4

Упражнение 1. Получить выражение для смешанного произведения векторов через их координаты.

Указание. По определению, *смешанным произведением векторов* x, y, и z называется число

$$(x,y,z) = ([x,y],z).$$

Поясним, что сначала составляется вектор $[x,y]$, затем этот вектор скалярно умножается на вектор z. Пусть

$$x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3,$$

$$y = y_1e^1 + y_2e^2 + y_3e^3,$$

$$z = z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3.$$

Тогда, используя формулу

$$[x,y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1,e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1,e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2,e^3],$$

можем написать

$$(x,y,z) = ((x_1y_2 - x_2y_1)[e^1,e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1,e^3]+ \\ + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2,e^3], z_1e^1 + z_2e^2 + z_3e^3).$$

Раскройте здесь скобки, используйте линейность и симметрию скалярного произведения, правило изменения знака смешанного произведения (какое?), а также то, что если два сомножителя в смешанном произведении совпадают, то оно равно нулю (почему?). Получите равенство

$$(x,y,z) = \{(x_1y_2 - x_2y_1)z_3 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)z_1\}(e^1,e^2,e^3).$$

В этом равенстве выражение в фигурных скобках — разложение определителя третьего порядка по последней строке. Поэтому

$$(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} (e^1,e^2,e^3).$$

Если базис декартов, то, очевидно (почему?),

$$(i^1,i^2,i^3) = 1,$$

т. е. в декартовых координатах

$$(x,y,z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Упражнение 2. Показать, что векторы взаимного базиса некомпланарны, причем ортогональны основным.

Решение. Пусть векторы e^1, e^2, e^3 некомпланарны, Положим

$$e_1 = Q^{-1}[e^2,e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1,e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1,e^2].$$

где

$$Q = (e^1, e^2, e^3).$$

Покажем, что векторы e_1, e_2, e_3 некомпланарны, причем

$$(e_k,e^l) = \delta_{kl}, \quad k,l = 1,2,3.$$

Говорят, что векторы

$$e_1 = Q^{-1}[e^2,e^3], \quad e_2 = -Q^{-1}[e^1,e^3], \quad e_3 = Q^{-1}[e^1,e^2],$$

где

$$Q = (e^1, e^2, e^3),$$

образуют *взаимный базис*. Базис e^1, e^2, e^3 называют при этом *основным*. Равенство, служащее для вычисления векторного произведения,

$$[x,y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e^1,e^2] + (x_1y_3 - x_3y_1)[e^1,e^3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e^2,e^3],$$

дает правило вычисления компонент вектора $[x,y]$ при разложении его по взаимному базису, если известны компоненты векторов при разложении по основному.

Заметим, что вектор e_3 одновременно ортогонален векторам e^1 и e^2, вектор e_2 ортогонален векторам e^1 и e^3, вектор e_1 ортогонален векторам e^2 и e^3. Следовательно, векторы e_1, e_2 и e_3 некомпланарны, а их скалярные произведения с векторами основного базиса, с несовпадающими номерами, равны нулю. Вычислим оставшиеся скалярные произведения:

$$(e_1,e^1) = \frac{(e^2,e^3,e^1)}{(e^1,e^2,e^3)} = \frac{(e^1,e^2,e^3)}{(e^1,e^2,e^3)} = 1,$$

$$(e_2,e^2) = -\frac{(e^1,e^3,e^2)}{(e^1,e^2,e^3)} = \frac{(e^1,e^2,e^3)}{(e^1,e^2,e^3)} = 1, \quad (e_3,e^3) = \frac{(e^1,e^2,e^3)}{(e^1,e^2,e^3)} = 1.$$

Упражнение 3. Вычислить скалярное произведение, разлогая один вектор по основному базису, а второй по взаимному.

Решение. Пусть $x = x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. Тогда

$$(x,y) = (x_1e^1 + x_2e^2 + x_3e^3, y_1[e^2,e^3] - y_2[e^1,e^3] + y_3[e^1,e^2])Q^{-1} =$$

$$= (x_1y_1(e^1,e^2,e^3) - x_2y_2(e^2,e^1,e^3) + x_3y_3(e^3,e^1,e^2))Q^{-1} =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

§ 4.5. Примеры задач, решаемых методами векторной алгебры

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/B17rvTnI-gZnAw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/PwWMdg5PplX8pg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §5

Упражнение 1. Получить формулу для вычисления площади треугольника по координатам его вершин на плоскости. Сделать рисунок.

Указание. Рассмотрим плоскость, отнесенную к декартовой системе координат x_1, x_2 и на этой плоскости треугольник с вершинами (см. рис. 8.1)

$$x = (x_1,x_1), \quad y = (y_1,y_2), \quad z = (z_1,z_2).$$

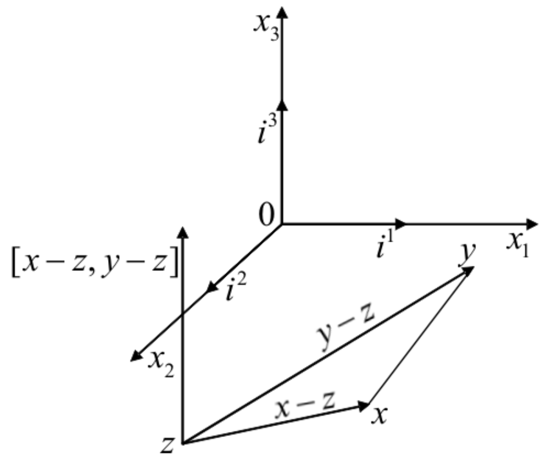

Рисунок 8.1 — К упражнению 1.

Выразим площадь S треугольника через координаты его вершин. Будем трактовать плоскость x_1, x_2 как координатную плоскость $x_3 = 0$ трехмерной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Построим векторы $x-z$, $y-z$ и составим их векторное произведение $[x-z, y-z]$ — вектор, направленный вдоль оси x_3, причем

$$S = \frac{1}{2}|[x-z, y-z]|.$$

Вектор $[x-z, y-z]$ параллелен оси x_3 поэтому только 3-я его координата отлична от нуля:

$$[x-z, y-z] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ x_1 - z_1 & x_2 - z_2 & x_3 - z_3 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 & y_3 - z_3 \end{vmatrix} = i^3 \begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что с точностью до знака площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Часто используют более симметричную форму записи:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - z_1 & x_2 - z_2 \\ y_1 - z_1 & y_2 - z_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Покажите, что эти определители совпадают. Для этого можно преобразовать определитель третьего порядка и разложить его по третьему столбцу.

Упражнение 2. Доказать, что определитель матрицы Грама второго порядка равен квадрату площади параллелограмма, построенного на векторах этой матрицы.

Решение. Для любых векторов x, y положим

$$G(x,y) = \begin{vmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{vmatrix}.$$

Это определитель матрицы Грама второго порядка. Докажем, что он равен S^2, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах x, y:

$$G(x,y) = |x|^2|y|^2 - (x,y)^2 = |x|^2|y|^2 - \cos^2(x,y)|x|^2|y|^2 =$$

$$= |x|^2|y|^2(1 - \cos^2(x,y)) = |x|^2|y|^2 \sin^2(x,y) = S^2.$$

9. Лекция (геометрия — 1)

§ 4.6. Различные формы уравнения прямой на плоскости

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/SzJ7IBczURV0hg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/jmK3_g91pt1NRg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §6

Упражнение 1. Дайте определение прямой, проходящей через заданную точку параллельно фиксированному вектору на плоскости. Сделайте рисунок.

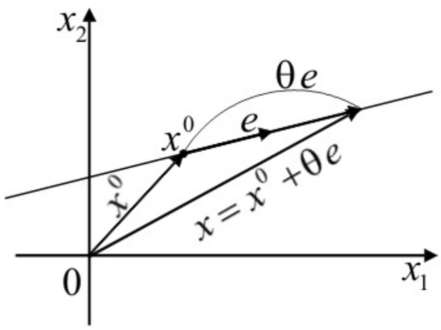

Рисунок 9.1 — Прямая, проходящая через точку x^0 параллельно вектору e.

Ответ. Отнесем плоскость к декартовой системе координат x_1, x_2. Как и ранее, точки $x = (x_1,x_2)$ будут отождествляться с векторами. *Прямую, проходящую через точку* $x^0 = (x_1^0,x_2^0)$ *параллельно вектору* $e = (e_1,e_2)$, зададим уравнением (см. рис. 9.1)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{9.1}$$

Упражнение 2. Получите нормальное уравнение прямой из уравнения в общей форме, и наоборот. Сделайте рисунки.

Решение. Прямая — это также множество всех векторов, ортогональных данному вектору p, сдвинутое параллельно p на расстояние d от начала координат (см. рис. 9.2). Тогда для точек прямой выполнено уравнение

$$(x,p) - d = 0, \tag{9.2}$$

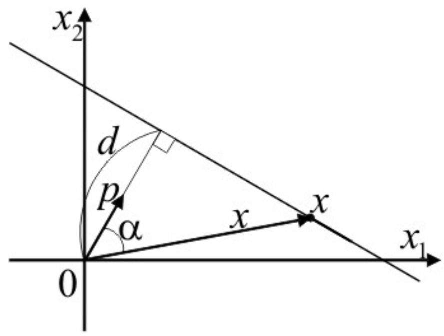

Рисунок 9.2 — К нормальному уравнению прямой на плоскости, $d > 0$, $\alpha < \pi/2$.

где $p = (p_1,p_2)$ — заданный вектор единичной длины, d — проекция вектора x на направление p, одна и та же для всех точек прямой. Это уравнение называют *нормальной формой* уравнения прямой.

Знак d показывает, в какую сторону (по отношению к p) выполняется сдвиг. Обозначим α угол между векторами p и x. Тогда

$$(x,p) - d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = (x,p) = |x| \cos \alpha.$$

На рисунке 9.2 коэффициент $d > 0$, угол $\alpha < \pi/2$. На рисунке 9.3 показана ситуация, когда

$$d = (x,p) = |x| \cos \alpha < 0, \quad \alpha > \pi/2.$$

Если $d = 0$, прямая проходит через начало координат.

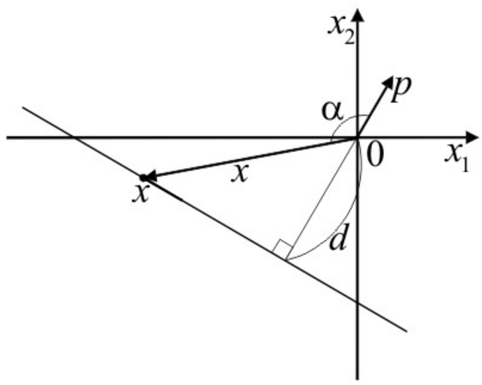

Рисунок 9.3 — К нормальному уравнению прямой на плоскости, $d < 0$, $\alpha > \pi/2$.

Запишем нормальное уравнение прямой в координатах:

$$p_1x_1 + p_2x_2 - d = 0.$$

Получаем уравнение прямой в так называемой *общей форме*:

$$ax_1 + bx_2 + c = 0. \tag{9.3}$$

Поделим обе части уравнения в общей форме на

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

В этом уравнении положим

$$p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad p_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad d = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда

$$p_1x_1 + p_2x_2 - d = 0.$$

Поскольку

$$p_1^2 + p_2^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

полученная форма записи уравнения прямой будет нормальной.

§ 4.7. Задачи о взаимном расположении прямых и точек на плоскости

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/gBqcLfZOYfULew

Презентация https://disk.yandex.ru/i/XwsAfljA2QEkNg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §7

Упражнение 1. Исследуйте взаимное расположение двух прямых на плоскости, заданных уравнениями в общей форме. Сделайте рисунки.

Решение. Даны две прямые l_1 и l_2, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Требуется исследовать взаимное расположение этих прямых, т. е. выяснить, пересекаются ли они, и указать точку их пересечения.

Эта задача была нами полностью решена. Действительно, фактически, поставленная задача эквивалентна исследованию условий разрешимости системы линейных уравнений (9.4). Здесь надо различать три случая.

1) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система уравнений (9.4) имеет единственное решение x_1, x_2 при любой правой части b_1, b_2. Точка

$$x = (x_1,x_2)$$

есть точка пересечения прямых. Нарисуйте две пересекающиеся прямые на плоскости и укажите их точку пересечения.

2) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система (9.4) = не имеет решений, т. е. прямые l_1, l_2 параллельны. Нарисуйте две параллельные прямые на плоскости.

3) Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие эквивалентно существованию числа $\alpha \neq 0$ такого, что

$$a_{21} = \alpha a_{11}, \quad a_{22} = \alpha a_{12}, \quad b_2 = \alpha b_1.$$

Система (9.4) имеет бесконечное множество решений (фактически, уравнения системы совпадают). Прямые l_1, l_2 совпадают. Нарисуйте две совпадающие прямые на плоскости.

Упражнение 2. Найдите косинус угла между двумя прямыми, проходящими через заданные точки параллельно фиксированным векторам на плоскости. Сделайте рисунок.

Указание. Пусть даны две прямые l_1 и l_2 на плоскости

$$x = x^1 + \theta e^1, \quad x = x^2 + \theta e^2, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Нарисуйте их. Угол между ними равен углу между их направляющими векторами e^1 и e^2. Вычислите скалярное произведение этих векторов. Преобразуйте полученную формулу следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{(e^1,e^2)}{|e^1||e^2|}.$$

Упражнение 3. Найдите косинус угла между двумя прямыми, заданными уравнениями в нормальной форме. Сделайте рисунок.

Указание. Пусть даны две прямые l_1 и l_2 на плоскости

$$(x,p^1) - d_1 = 0, \quad (x,p^2) - d_2 = 0.$$

Нарисуйте их. Покажите, что угол между ними равен углу между p^1 и p^2. Вычислите скалярное произведение этих векторов, и получите равенство

$$\cos\varphi = (p^1,p^2).$$

Учтите, что длины векторов p^1 и p^2 в уравнении прямой в нормальной форме равны единице.

Упражнение 4. Используя выражение для тангенса угла между двумя прямыми, проверить условия на угловые коэффициенты k_1 и k_2, обеспечивающие параллельность и ортогональность прямых. Сделать рисунок.

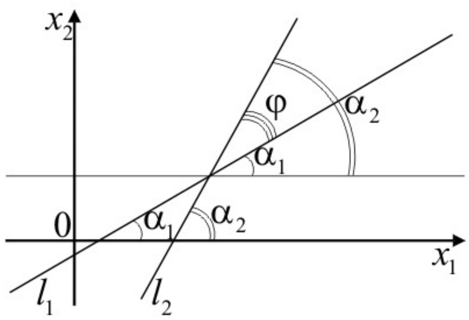

Рисунок 9.4 — Угол между двумя прямыми на плоскости.

Указание. Запишем уравнение прямой

$$x_2 = kx_1 + b. \tag{9.5}$$

Здесь k — тангенс угла наклона прямой к оси x_1, b — отрезок отсекаемый прямой на оси x_2. Найдем тангенс угла между прямыми l_1 и l_2 (см. рис. 9.4)

$$x_2 = k_1x_1 + b_1, \quad x_2 = k_2x_1 + b_2.$$

Так как

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \mathrm{tg}\alpha_1 = k_1, \quad \mathrm{tg}\alpha_2 = k_2,$$

то

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\alpha_2\,\mathrm{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Используя это выражение для тангенса угла между прямыми покажем, что при

$$k_1 = k_2$$

прямые параллельны, при

$$k_1 k_2 = -1$$

прямы ортогональны. Для этого воспользуемся определением тангенса и рассмотрим случаи, когда $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 0$.

10. Лекция (геометрия — 2)

§ 4.8. Различные формы уравнения плоскости

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/-NCn5ei75H_yTA
Презентация https://disk.yandex.ru/i/FN2T5qfhy0UP_w
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §8

Упражнение 1. Преобразовать уравнение плоскости в общей форме к нормальному виду, сделать рисунок.

Решение. Уравнение плоскости, ортогональной вектору p единичной длины и отстоящей от начала координат на расстояние q, имеет вид

$$(x,p) - q = 0. \tag{10.1}$$

Знак q определяет направление сдвига плоскости по отношению к направлению вектора p. Уравнение (10.1) называют *нормальным уравнением плоскости.* Смотрите рисунок 10.2.

Общее уравнение плоскости имеет вид

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0. \tag{10.2}$$

Для того, чтобы привести общее уравнение плоскости к уравнению в нормальной форме, нужно поделить обе части общего уравнения на $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Тогда p и q запишутся в виде

$$p = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c), \quad q = -\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

В этом случае длина вектора p будет равна единице.

Упражнение 2. Показать, анализируя общее уравнение плоскости, как она располагается, если его коэффициенты равны нулю, сделать рисунки.

Указание. Покажите, анализируя уравнение (10.2), что:
если $a = 0$, $b = 0$, то плоскость параллельна координатной плоскости x_1x_2;
если $a = 0$, то плоскость параллельна оси x_1;
если $d = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

Сначала рассмотрите случай $a = 0$, $b = 0$. Общее уравнение плоскости принимает вид $cx_3 + d = 0$. Этому уравнению удовлетворяют точки $x = (x_1,x_2,x_3)$ с координатой $x_3 = -d/c$ и любыми x_1, x_2. Иными словами, ему удовлетворяют точки плоскости, проходящей параллельно координатной плоскости x_1x_2. Координата точки пересечения этой плоскости с осью x_3 есть $x_3 = -d/c$. Сделайте рисунок этой плоскости. Остальные два случая рассмотрите аналогично.

Упражнение 3. Найти координаты точек пересечения плоскости с осями координат, проанализировать случаи, когда в общем уравнении плоскости $a = 0$, $b = 0$ или $c = 0$, сделать рисунок.

Указание. Покажите, что $\alpha = -d/a$, $\beta = -d/b$, $\gamma = -d/c$ — координаты точек пересечения плоскости с осями x_1, x_2, x_3 (см. рис. 10.1).

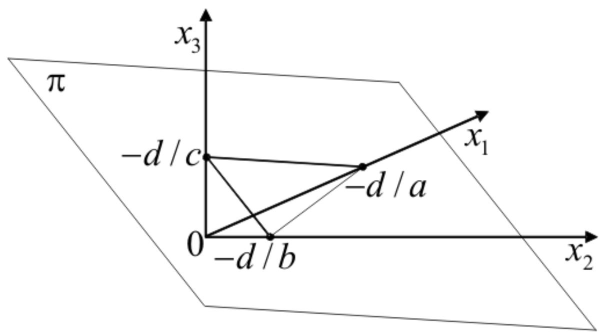

Рисунок 10.1 — Точки пересечения плоскости с осями координат.

Для того, чтобы найти точку пересечения плоскости с осью x_1, в общем уравнении плоскости (10.2) надо положить x_2, $x_3 = 0$. Аналогичным образом находятся две остальные точки. Случаи, когда $a = 0$, $b = 0$ или $c = 0$, рассматриваются аналогично предыдущей задаче.

Упражнение 4. Показать, по какой формуле вычисляется косинус угла между плоскостями, задаваемыми общими уравнениями, сделать рисунок.

Указание. Покажите, что косинус угла φ между плоскостями, задаваемыми уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0, \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0,$$

можно вычислить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Сделайте рисунок. Используйте геометрический смысл векторов

$$n^1 = (a_1, b_1, c_1), \quad n^2 = (a_2, b_2, c_2).$$

Косинус угла между векторами можно найти по формуле

$$\cos(x,y) = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}. \tag{10.3}$$

Упражнение 5. Получить уравнение плоскости, проходящей через три точки, сделать рисунок. Проанализировать случай, когда точки лежат на одной прямой.

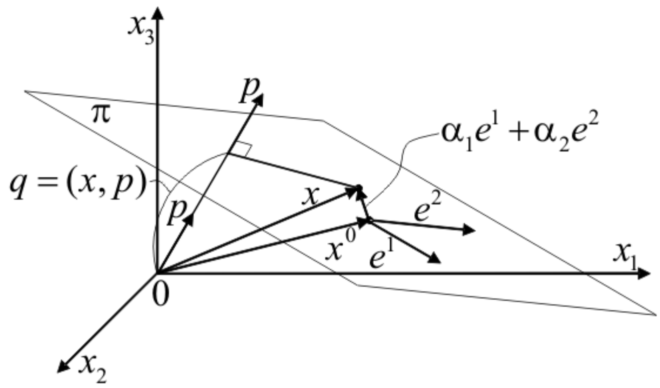

Рисунок 10.2 — К уравнению плоскости, проходящей через точку x^0, натянутой на векторы e^1 и e^2; а также к нормальному уравнению плоскости $(x,p) - q = 0$.

Решение. Плоскость π, которая проходит через точку x^0 и натянута на два неколлинеарных вектора e^1 и e^2, задается уравнением (см. рис. 10.2)

$$x = x^0 + \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2, \quad -\infty < \alpha_1, \alpha_2 < \infty. \tag{10.4}$$

Учитывая, что векторы $x - x^0$, e^1 и e^2 являются компланарными, уравнение плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & e_1^1 & e_1^2 \\ x_2 - x_2^0 & e_2^1 & e_2^2 \\ x_3 - x_3^0 & e_3^1 & e_3^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{10.5}$$

Пусть даны три точки x^0, x^1, x^2, не лежащие на одной прямой. Обозначим произвольную точку плоскости через x. Построим векторы $x - x^0$, $e^1 = x^1 - x^0$ и $e^2 = x^2 - x^0$ (сделайте рисунок!). Уравнение плоскости, проходящей через точки x^0, x^1 и x^2, можно записать теперь, используя компланарность векторов $x - x^0$, e^1 и e^2:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & x_1^1 - x_1^0 & x_1^2 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 \\ x_3 - x_3^0 & x_3^1 - x_3^0 & x_3^2 - x_3^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если точки x^0, x^1, x^2 лежат на одной прямой, то векторы $x^1 - x^0$ и $x^2 - x^0$ коллинеарны. Следовательно, второй и третий столбцы этого определителя пропорциональны, и при любом x он равен нулю. Это означает, что любая точка пространства удовлетворяет полученному уравнению.

Упражнение 6. Показать, чему равно отклонение точки от плоскости, сделать рисунок.

Решение. Используя нормальное уравнение плоскости (10.1), можно определить по какую сторону от нее находится точка x^0 и найти отклонение точки от плоскости. Поскольку $|p| = 1$, то (x^0,p) — величина проекции вектора x^0 на прямую, параллельную p, следовательно, величина $\delta = (x^0,p) - d$ есть отклонение точки x^0 от плоскости (сделайте рисунок!). Причем знак δ показывает, по какую сторону от плоскости расположена точка x^0. Говорят, что точка x^0 находится в *положительном полупространстве* относительно плоскости, если $\delta > 0$. Для точек, расположенных по другую сторону от плоскости (в *отрицательном полупространстве*), справедливо неравенство $\delta < 0$. Расстояние от точки до плоскости, заданной нормальным уравнением, вычисляется по формуле

$$|\delta| = |(x^0,p) - d|.$$

§ 4.9. Уравнения прямой в пространстве

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Yn03AJCHt4UTrw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/1-Eao_cKB5HwUA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §9

Упражнение 1. Интерпретируйте случай, когда какой-либо знаменатель в канонических уравнениях прямой в пространстве обращается в ноль, сделайте рисунок.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку x^0 параллельно вектору e, имеет вид (см. рис. 10.3)

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty. \tag{10.6}$$

Запишем это уравнение в координатной форме и исключим параметр θ, получим *канонические уравнения прямой*:

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2} = \frac{x_3 - x_3^0}{e_3}. \tag{10.7}$$

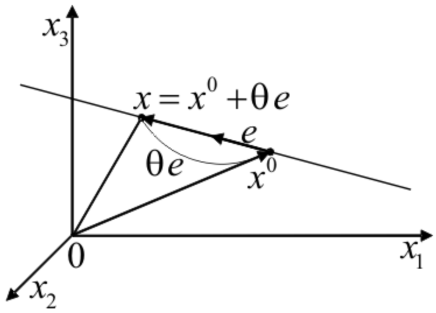

Рисунок 10.3 — Прямая в пространстве.

Если какая-то из координат вектора e равна 0, например $e_3 = 0$, то канонические уравнения принимают вид

$$\frac{x_1 - x_1^0}{e_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{e_2}, \quad x_3 - x_3^0 = 0.$$

В этом случае направляющий вектор прямой $e = (e_1,e_2,0)$, а сама прямая лежит в плоскости, перпендикулярной оси x_3 и пересекающей ее в точке с координатой $x_3 = x_3^0$.

§ 4.10. Задачи о взаимном расположении точек, прямых, плоскостей в пространстве

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/DJ2gtpFZhQRwkA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/poNPsB8lverTuA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 4, §10

Упражнение 1. Получить уравнение прямой, являющихся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей, задаваемыми уравнениями в общей форме, сделать рисунок.

Решение. Напишем уравнение прямой l, являющейся пересечением двух различных и не параллельных плоскостей π_1, π_2, задаваемых уравнениями

$$a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1 = 0,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2 = 0.$$

Найдем сначала какую-либо точку, принадлежащую обеим плоскостям. Иными словами, надо найти какое-то решение x_1, x_2, x_3 этой системы уравнений.

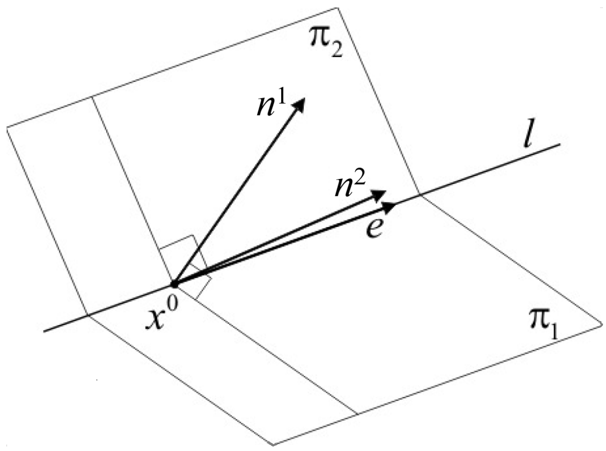

Рисунок 10.4 — Прямая в пространстве.

Плоскости π_1 и π_2 не параллельны, т. е. нормальные к ним векторы

$$n^1 = (a_1,b_1,c_1) \quad \text{и} \quad n^2 = (a_2,b_2,c_2),$$

не коллинеарны. Значит не выполняется хотя бы одно из равенств

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Примем для определенности, что

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{т. е.} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Положим $x_3 = 0$, тогда из исходной системы уравнений получаем

$$a_1x_1 + b_1x_2 = -d_1,$$

$$a_2x_1 + b_2x_2 = -d_2.$$

Решая при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ эту систему приходим к выводу, что точка

$$x^0 = \left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, 0\right)$$

принадлежит прямой l, по которой пересекаются плоскости π_1, π_2. Направляющий вектор e прямой l ортогонален векторам n^1 и n^2, значит, можно взять его равным их векторному произведению

$$e = [n^1, n^2] = \begin{vmatrix} i^1 & i^2 & i^3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, найдены точка x^0, принадлежащая прямой l и вектор e, параллельный этой прямой, следовательно уравнение прямой l можно записать в виде

$$x = x^0 + \theta e, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

11. Лекция (определители — 3)

Глава 5. Системы линейных уравнений, матрицы, определители

§ 5.1. Перестановки

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/kcGpQtstXzNhyQ

Презентация https://disk.yandex.ru/i/c-ORHqpnzolEzQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §1

Упражнение 1. Доказать теорему.

Теорема. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда выполняется транспозиция соседних элементов перестановки

$$n_i,\, n_{i+1}.$$

Инверсия для пар элементов, не содержащих ни n_i ни n_{i+1}, измениться не сможет. Пары, содержащие один из элементов

$$n_i \quad \text{или} \quad n_{i+1},$$

в совокупности не приобретут и не потеряют инверсии при такой транспозиции (она сможет лишь перейти от одной пары такого сорта к другой).

Пара

$$n_i,\, n_{i+1}$$

обязательно либо приобретет, либо потеряет инверсию. Это означает что сигнатура перестановки при транспозиции соседних элементов изменится ровно на единицу.

Пусть теперь выполняется транспозиция двух произвольных элементов. Для простоты записей можно считать, что меняются местами элементы

$$n_1 \quad \text{и} \quad n_k, \quad k > 2.$$

Эту транспозицию можно реализовать путем последовательных транспозиций соседних элементов.

Сначала переместим первый элемент на $k+1$ место, меняя его местами последовательно со вторым, с третьим и т. д. элементами. Это можно сделать за $k-1$ шагов.

Затем переместим k-й элемент на первое место, переставляя его последовательно с $k-1$, $k-2$ и т. д., со вторым элементом. Это потребует $k-2$ шагов.

Итак, выполнив

$$k-2+k-1=2k-3=2(k-1)-1$$

(нечетное количество) транспозиций соседних элементов мы поменяем местами элементы n_1 и n_k.

Таким образом, сигнатура перестановки при любой транспозиции (i,k) меняется на нечетное число и потому четность перестановки меняется.

§ 5.2. Определители произвольного порядка

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/gq6WzXm70_ykyg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/sul2FjY6eNZeQQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §2

Упражнение 1. Дать определение определителя произвольного порядка.

Определителем матрицы A назовем величину

$$|A|=\sum_{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n}(-1)^{\sigma(n_1,n_2,n_3,\ldots,n_n)}a_{1n_1}a_{2n_2}\cdots a_{nn_n}. \qquad (11.1)$$

Будем использовать также следующие обозначения:

$$\Delta=\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Поясним, что определителем матрицы порядка n, является сумма <u>$n!$ слагаемых</u>, составленная следующим образом: слагаемыми служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца, слагаемое берется со <u>знаком плюс</u>, если перестановка $n_1n_2n_3\ldots n_n$ <u>четная</u>, и со знаком минус — в противоположном случае.

Упражнение 2. Опираясь только на определение (11.1) (формулой разложения определителя по строке пользоваться нельзя), докажите справедливость следующего равенства:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11.2}$$

Поясним, что слева — определитель порядка n, а справа — порядка $n-1$.

Указание. Сначала проверьте, что определитель в левой части равенства (11.2) вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n_1,n_2,n_3,\dots,n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,n_3,\dots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} = \tag{11.3}$$

$$= \sum_{n_2,n_3,\dots,n_n} (-1)^{\sigma(1,n_2,n_3,\dots,n_n)}\, 1 \cdot a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Затем убедитесь в справедливости следующего равенства для определителя в правой части формулы (11.2):

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{n_2,n_3,\dots,n_n} (-1)^{\sigma(n_2,n_3,\dots,n_n)} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}. \tag{11.4}$$

Наконец, докажите, что

$$\sigma(1,n_2,n_3,\dots,n_n) = \sigma(n_2,n_3,\dots,n_n)$$

и объедините вместе равенства (11.3) и (11.4).

12. Лекция (определители — 4)

§ 5.3. Основные свойства определителей

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/LNTh7_yilIisng

Презентация https://disk.yandex.ru/i/LKOHGMGPJL08Gw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §3

Упражнение 1. Докажите, что если одна из строк (или один из столбцов) определителя состоит только из нулей, то этот определитель равен нулю.

Решение. Доказательство сразу же следует из того, что каждое слагаемое в сумме (11.1) в этом случае содержит нулевой элемент.

Упражнение 2. Докажите, что определитель линеен по каждой строке (по каждому столбцу).

Решение. Докажем, например, что определитель произвольного порядка линеен по первой строке, т.е.

$$\sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)}(\alpha a_{1n_1} + \beta b_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \alpha \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} +$$

$$+\beta \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)} b_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Для этого заметим, во первых, что если элементы первой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель представляется в виде суммы определителей:

$$\sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)}(a_{1n_1} + b_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} +$$

$$+ \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1,n_2,\dots,n_n)} b_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Во вторых, общий множителей элементов первой строки можно вынести за знак определителя:

$$\sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} (\alpha a_{1n_1}) a_{2n_2} \cdots a_{nn_n} =$$

$$= \alpha \sum_{n_1 n_2 \dots n_n} (-1)^{\sigma(n_1, n_2, \dots, n_n)} a_{1n_1} a_{2n_2} \cdots a_{nn_n}.$$

Упражнение 3. Докажите, что при перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак, используя предыдущее свойство, а также то, что если в определителе две строки (или два столбца) совпадают, то он равен нулю.

Решение. Докажем, например, что если в определителе произвольного порядка поменять местами две первые строки, то знак его изменится на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Действительно, заметим во-первых, что

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

так как у этого определителя две первые строки совпадают. Последовательно используя свойство линейности определителя для первой и для второй строки, левую часть этого равенства можно записать в виде суммы четырех слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & \dots & a_{1n}+a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

Первое и последнее слагаемые этой суммы равны нулю (эти определители имеют равные строки), поэтому

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{31} & a_{32} & \dots & a_{33} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} = 0.
$$

т. е. доказываемое свойство справедливо.

Упражнение 4. Докажите, что определитель не изменится, если к некоторой его строке добавить другую, умноженную на произвольное число. То же самое справедливо и для столбцов определителя.

Решение. Докажем, например, что определитель произвольного порядка не изменится, если к первой его строке добавить вторую, умноженную на произвольное число. Действительно, используя свойство линейности определителя по первой строке, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} & \dots & a_{1n}+\alpha a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю, так как его первая и вторая строки равны друг другу.

§ 5.4. Примеры вычисления определителей

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/bvUq2cp2q_EUQw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/hXA3xVqKZb_MdA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §4

Упражнение 1. Получить формулу для вычисления определителя треугольной матрицы.

Решение. Матрицу A называют *верхней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Матрицу A называют *нижней треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

Если матрица A треугольная, то

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Докажем это утверждение применительно к верхней треугольной матрице. Для нижней треугольной матрицы рассуждения полностью аналогичны.

Для матриц второго порядка утверждение справедливо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Для доказательства формулы при произвольном n используем метод математической индукции, т. е. предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка она уже доказана, и рассмотрим определитель порядка n,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель $|A|$ по первому столбцу, получим:

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

К минору, стоящему в правой части, применимо предположение индукции, т. е. он равен произведению $\underline{\underline{a_{22}a_{33}\dots a_{nn}}}$, поэтому

$$|A| = a_{11}\underline{\underline{a_{22}a_{33}\dots a_{nn}}}.$$

Упражнение 2. Вычислить определитель Вандермонда.

Решение. Так называют определитель порядка n вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что при любом $n \geqslant 2$ определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей

$$a_i - a_j, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j < i \leqslant n,$$

а именно,

$$d = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j).$$

Доказываемая формула очевидно справедлива при $n = 2$:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что для определителей $(n-1)$-го порядка формула уже доказана, т. е.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{2\leqslant j<i\leqslant n} (a_i - a_j). \tag{12.1}$$

Рассмотрим определитель Вандермонда порядка n. Выполним для него следующие операции:

— умножим $n-1$-ю строку на a_1 и вычтем из последней (n-й),

— умножим $n-2$-ю строку на a_1 и вычтем из $(n-1)$-й,

...

— умножим 1-ю строку на a_1 и вычтем из 2-й.

В результате такой последовательности преобразований получим

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая теперь определитель d по первому столбцу, получим определитель $(n-1)$-го порядка:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем всех элементов первого столбца является разность $a_2 - a_1$, общим множителем всех элементов второго столбца является разность $a_3 - a_1$ и т. д.:

$$d = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) & \ldots & a_n(a_n - a_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) & \ldots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Вынесем общие множители столбцов. Получим

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

где последний множитель — определитель Вандермонда $(n-1)$-го порядка. Теперь применим формулу (12.1), получим выражение для определителя Вандермонда порядка n:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j).$$

13. Лекция (Крамеровские системы)

§ 5.5. Крамеровские системы линейных уравнений

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/9UEf3NvvPOTk1w

Презентация https://disk.yandex.ru/i/LHgdop1nvCdD_g

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §5

Упражнение 1. Доказать теорему.

Теорема. Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторого набора чисел x_1, x_2, ..., x_n, среди которых по крайней мере одно не равно нулю, справедливы равенства

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{gathered}$$

т. е. столбцы матрицы A линейно зависимы, но по условию теоремы

$$|A| \neq 0.$$

Значит предположение о наличии нетривиального решения у однородной крамеровской системы неверно.

Упражнение 2. Доказать теорему.

Теорема. При любой правой части крамеровская система не может иметь двух различных решений.

Доказательство. Предположим противное и пусть

$$x_1^1,\ x_2^1,\ \ldots,\ x_n^1;$$

и

$$x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots,\ x_n^2$$

представляют собой два различных решения системы, т. е.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n. \end{cases}$$

Положим

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

и вычтем почленно одноименные уравнения систем

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^1 + a_{12}x_2^1 + \ldots + a_{1n}x_n^1 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^1 + a_{n2}x_2^1 + \ldots + a_{nn}x_n^1 = b_n}} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \underline{a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \ldots + a_{1n}x_n^2 = b_1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{\underline{a_{n1}x_1^2 + a_{n2}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = b_n.}} \end{cases}$$

В результате получим, что числа

$$x_1 = x_1^1 - x_1^2, \quad x_2 = x_2^1 - x_2^2, \ \ldots, \quad x_n = x_n^1 - x_n^2$$

дают решение однородной системы

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

Однородная крамеровская система уравнений может иметь только тривиальное решение. Поэтому

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

т. е. предположение о наличии двух различных решений неверно.

Упражнение 3. Доказать теорему.

Теорема. Крамеровская система уравнений при любой правой части имеет решение.

Доказательство. Построим решение системы

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{gathered} \tag{13.1}$$

опираясь на формулу разложения определителя по строке:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Будем разыскивать решение системы (13.1) в виде

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \cdots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{13.2}$$

где коэффициенты c_{ij}, i, $j = 1$, 2, $\ldots$, n, подлежат определению. Запишем эти выражения подробнее,

$$\begin{gathered} x_1 = \underline{c_{11}}b_1 + \underline{c_{12}}b_2 + \cdots + \underline{c_{1n}}b_n, \\ x_2 = \underline{\underline{c_{21}}}b_1 + \underline{\underline{c_{22}}}b_2 + \cdots + \underline{\underline{c_{2n}}}b_n, \\ \ldots \\ x_n = \underline{\underline{\underline{c_{n1}}}}b_1 + \underline{\underline{\underline{c_{n2}}}}b_2 + \cdots + \underline{\underline{\underline{c_{nn}}}}b_n, \end{gathered}$$

и подставим их в первое уравнение системы:

$$\underline{a_{11}}x_1 + \underline{\underline{a_{12}}}x_2 + \ldots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}}}}x_n = b_1.$$

Соберем слева коэффициенты при b_1, b_2, $\ldots$, b_n. Получим

$$\begin{multline} b_1(\underline{a_{11}c_{11}} + \underline{\underline{a_{12}c_{21}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n1}}}})+ \\ + b_2(\underline{a_{11}c_{12}} + \underline{\underline{a_{12}c_{22}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{n2}}}}) + \cdots \\ \cdots + b_n(\underline{a_{11}c_{1n}} + \underline{\underline{a_{12}c_{2n}}} + \cdots + \underline{\underline{\underline{a_{1n}c_{nn}}}}) = b_1. \end{multline}$$

Продолжим этот процесс и подставим выражения (13.2) во все уравнения системы (13.1). Соберем слева коэффициенты при одинаковых b_i. Получим

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) + \dots$$
$$\dots + b_i(a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}) + \dots$$
$$\dots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. Если выбрать c_{ik} так, чтобы выполнялись условия

$$\underline{\underline{a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \dots + a_{in}c_{nk}}} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2,\ \dots, n,$$

то равенства

$$b_1(a_{i1}c_{11} + a_{i2}c_{21} + \dots + a_{in}c_{n1}) +$$
$$\dots + b_i(\underline{\underline{a_{i1}c_{1i} + a_{i2}c_{2i} + \dots + a_{in}c_{ni}}}) + \dots$$
$$\dots + b_n(a_{i1}c_{1n} + a_{i2}c_{2n} + \dots + a_{in}c_{nn}) = b_i,$$

где $i = 1, 2,\ \dots, n$, будут выполнены. Сравнивая соотношения

$$\underline{a_{i1}}c_{1k} + \underline{\underline{a_{i2}}}c_{2k} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}c_{nk} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2,\ \dots, n,$$

с формулой

$$\underline{a_{i1}}A_{k1} + \underline{\underline{a_{i2}}}A_{k2} + \dots + \underline{\underline{\underline{a_{in}}}}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2,\ \dots, n,$$

нетрудно заметить, что если положить

$$c_{ik} = \frac{A_{ki}}{|A|}, \quad i, k = 1, 2,\ \dots, n,$$

то требуемые условия будут выполнены. Подставим эти выражения в

$$x_i = c_{i1}b_1 + c_{i2}b_2 + \dots + c_{in}b_n, \quad i = 1, 2,\ \dots, n.$$

Получим следующие формулы для решения системы:

$$x_i = \frac{(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n)}{|A|}, \quad i = 1, 2,\ \dots, n.$$

Используя разложение определителя по столбцу, полученные соотношения можно переписать в более компактном виде:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2,\ \dots, n. \tag{13.3}$$

Здесь $\Delta = |A|$, Δ_i — определитель, который получается, если заменить i-тый столбец определителя $|A|$ правой частью системы (13.1). Формулы (13.3) называют *формулами Крамера*.

14. Лекция (матрицы — 1)

§ 5.6. Матрицы. Операции над матрицами

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Mya_kZI5AdCrzg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/KWGWJjbNqqQCBw

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §6

Упражнение 1. Убедиться, что операция сложения матриц обладает следующими свойствами:
1) $A + 0 = A$,
2) $A + B = B + A$,
3) $(A + B) + C = A + (B + C)$.
Здесь A, B, C — произвольные матрицы одинакового размера.

Указание. Используйте свойства операции сложения комплексных чисел.

Упражнение 2. Убедиться, что операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:
1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
Здесь α, β — любые комплексные числа; A, B — произвольные матрицы одинакового размера.

Указание. Используйте свойства операций умножения и сложения комплексных чисел.

Упражнение 3. Проверить, что единичная матрица перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка: $AI = IA = A$.

Указание. Используйте определение произведения матриц.

Упражнение 4. Верны ли равенства:

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$? 2) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$?
3) $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$? 4) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?
5) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$? 6) $(A^T)^T = A$?

Ответ. Да, 2) да, 3) да, 4) нет, 5) нет, 6) да.

Упражнение 5. Пусть P_{ik} — *матрица перестановки*, т. е. получена из единичной матрицы перестановкой строк с номерами i, k. Показать, что вектор $P_{ik}x$ получается из вектора x перестановкой элементов с номерами i, k.

Указание. Записать матрицу P_{ik} произвольного порядка и умножить ее на столбец x.

Упражнение 6. Как следствие, показать, что матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k.

Указание. Пусть $P_{ik}A = B$. Используя предыдущее упражнение, заметить, как получается каждый столбец матрицы B из соответствующего столбца матрицы A.

Упражнение 7. Показать, что для любой квадратной матрицы A

$$\det(P_{ik}A) = \det P_{ik} \det A = -\det A.$$

Указание. Использовать то, что если в определителе поменять местами две строки, то знак его изменится на противоположный.

Упражнение 8. Показать, что если L, M — нижние треугольные матрицы, то матрица LM — нижняя треугольная. Показать, что аналогичное верно и для верхних треугольных матриц.

Решение. Выполним упражнение для нижних треугольных матриц. Пусть $a_{ik} = 0$, если $k > i$; $b_{kj} = 0$, если $j > k$. Запишем формулу для вычисления элементов произведения матриц:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $j > i$, то $c_{ij} = 0$, т. к. в последнем равенстве в каждом слагаемом либо $a_{ik} = 0$, либо $b_{kj} = 0$, либо оба сомножителя равны нулю.

Упражнение 9. Показать, что нижняя треугольная матрица L равна произведению *элементарных нижних треугольных матриц*

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n$.

Решение. Проведем вычисления в соответствии со следующей расстановкой скобок: $L = L_1(L_2 \cdots (L_{n-2}(L_{n-1}L_n)\dots)$, т. е. сначала перемножим $L_{n-1}L_n$, результат умножим слева на L_{n-2} и т. д. Имеем

$$L_{n-1}L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$L_{n-2}L_{n-1}L_n =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{n-1n-2} & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn-2} & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем

$$L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_{n-11} & l_{n-12} & \dots & l_{n-1n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} = L.$$

Упражнение 10. Известно, что для любой квадратной матрицы A и элементарной нижней треугольной матрицы L_k справедливо равенство

$$\det(L_k A) = l_{kk} \det A.$$

Опираясь на него, предыдущие упражнения и правило вычисления определителя треугольной матрицы, показать, что для любой квадратной матрицы A и любой нижней треугольной матрицы L

$$\det(LA) = \det L \, \det A.$$

Указание. Докажите, что $\det(LA) = l_{11} l_{22} \cdots l_{nn} \det A$.

15. Лекция (матрицы — 2)

§ 5.7. Обратная матрица

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/UchgMzl7UeTy2A

Презентация https://disk.yandex.ru/i/pTUh2GmCBE7NWg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §7

Упражнение 1. Дайте определение левой и правой обратной матрицы, докажите что они совпадают. Как вычислить обратную матрицу?

Решение. Матрица X называется *правой обратной* к квадратной матрице A, если

$$AX = I. \tag{15.1}$$

Матрица Y называется *левой обратной* к квадратной матрице A, если

$$YA = I.$$

Если $\det(A) \neq 0$, то правая обратная матрица существует и определяется единственным образом. Действительно, обозначим через x^k столбцы матрицы X, а через i^k столбцы матрицы I. Уравнение (15.1) распадается на совокупность систем уравнений

$$Ax^k = i^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15.2}$$

Поскольку матрица A невырождена, каждая из этих систем имеет единственное решение. Точно так же доказывается существование и единственность левой обратной матрицы.

На самом деле, правая и левая обратная матрица совпадают. Действительно, если

$$YA = I,$$

то

$$YAX = X,$$

но

$$AX = I,$$

значит

$$Y = X.$$

Обратную матрицу к матрице A обозначают через A^{-1}. Так как

$$A^{-1} = X = Y,$$

для нее справедливы равенства

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Один из способов вычислить обратную матрицу — n раз решить систему линейных алгебраических уравнений (15.2) с одной и той же матрицей A, но разными правыми частями i^k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Упражнение 2. Укажите явный вид обратной матрицы, используя присоединенную матрицу.

Решение. Введем в рассмотрение, так называемую, *присоединенную* к матрице A *матрицу*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Обратите внимание на номера элементов!

Формулы разложения определителя по строке,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = |A|\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

используя присоединенную матрицу, запишем в матричном виде:

$$A\widetilde{A} = |A|I.$$

Отсюда вытекает, что если

$$|A| \neq 0,$$

то

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|}$$

есть матрица, обратная матрице A.

Упражнение 3. Пусть матрицы A_1, A_2,…, A_p невырождены. Показать, что тогда справедливо равенство

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Указание. Использовать формулу для вычисления обратной матрицы от произведения двух матриц:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Упражнение 4. Пусть P_{ik} — матрица перестановки. Показать, что

$$P_{ik}^{-1} = P_{ik}.$$

Решение. Матрица $P_{ik}A$ получается из матрицы A перестановкой строк с номерами i, k. Следовательно,

$$P_{ik} P_{ik} = I.$$

А это и означает, что $P_{ik}^{-1} = P_{ik}$.

Упражнение 5. Пусть

$$L_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} & & \\ 0 & \cdots & l_{k,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & l_{k+1,k} & 1 & \cdots & 0 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} & & \\ 0 & \cdots & l_{n,k} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

есть элементарная нижняя треугольная матрица и $l_{k,k} \neq 0$. Показать, что

$$L_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ 0 & \dots & 1/l_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k}/l_{k,k} & 1 & \dots & 0 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ 0 & \dots & -l_{n,k}/l_{k,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Проверить, что $L_k L_k^{-1} = L_k^{-1} L_k = I$.

Упражнение 6. Пусть L — нижняя треугольная матрица, у которой все элементы главной диагонали отличны от нуля. Показать, что матрица L^{-1} существует и является нижней треугольной матрицей. Показать, что аналогичное верно и для верхней треугольной матрицы.

Решение. Представим матрицу L в виде произведения элементарных нижних треугольных матриц:

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n.$$

Вычислим обратную:

$$L^{-1} = (L_1 L_2 \cdots L_{n-1} L_n)^{-1} = L_n^{-1} L_{n-1}^{-1} \cdots L_2^{-1} L_1^{-1}.$$

Каждый из сомножителей справа от знака равенства есть нижняя треугольная матрица. Их произведение тоже является нижней треугольной матрицей.

16. Лекция (метод Гаусса)

§ 5.8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/SmuoG9vsU8R92A
Презентация https://disk.yandex.ru/i/emIS99iDZW5NCg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §8

Упражнение 1. Как изменится квадратная матрица, если ее умножить слева на элементарную нижнюю треугольную матрицу?

Решение. Пусть, например, матрица A_1 умножается слева на элементарную нижнюю треугольную матрицу L_1, и в результате получается матрица A_2:

$$L_1 A_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} = A_2.$$

Это умножение равносильно следующему преобразованию матрицы A_1:
— все элементы первой строки матрицы A_1 делятся на $a_{11}^{(1)}$,
— затем для всех $i = 2, \dots, n$, первая строка матрицы A_1 умножается на $a_{i1}^{(1)}$ и вычитается из i-й строки матрицы A_1.
В результате этого умножения, все элементы первого столбца матрицы A_2, кроме первого, оказываются равными нулю, а он становится равным единице.

Упражнение 2. Как изменится столбец, если его умножить слева на элементарную нижнюю треугольную матрицу?

Решение. Умножим столбец b^1 слева на элементарную нижнюю треугольную матрицу L_1. В результате получим столбец b^2:

$$L_1 b^1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ \\ b_n^1 \end{pmatrix} = b^2.$$

Элементы столбца b^2 вычисляются по формулам

$$b_1^2 = b_1^1/a_{11}^{(1)},$$

$$b_i^2 = b_i^1 - b_1^2 a_{i1}^{(1)}, \quad \text{где} \quad i = 2, \ \dots, n.$$

Упражнение 3. Опишите прямой ход метод Гаусса решения крамеровских систем линейных уравнений, используя матрицы перестановки и элементарные нижние треугольные матрицы.

Решение. Выберем среди элементов первого столбца матрицы A максимальный по модулю. Пусть это элемент a_{i1}. Умножим обе части уравнения

$$Ax = b$$

на матрицу перестановки P_{i1}. В дальнейшем будем обозначать эту матрицу через P_1 (заметим, что она равна единичной, если максимальный по модулю элемент первого столбца матрицы A есть a_{11}). Получим

$$A_1 x = b^1, \tag{16.1}$$

Поясним, что матрица

$$A_1 = P_1 A$$

получается из матрицы A перестановкой первой и i-й строк, столбец

$$b^1 = P_1 b$$

получается из столбца b перестановкой первого и i-го элементов. Элементы матрицы A_1 обозначим через $a_{kl}^{(1)}$, элементы столбца b^1 через b_k^1. Умножим обе части уравнения (16.1) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots} \\ -a_{n1}^{(1)}/a_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$A_2 x = b^2, \tag{16.2}$$

где

$$A_2 = L_1 A_1, \quad b^2 = L_1 b^1.$$

Вычисляя произведение $L_1 A_1$, найдем, что

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

Выберем среди элементов

$$a_{22}^{(2)}, \quad a_{32}^{(2)}, \; \dots, \; a_{n2}^{(2)}$$

матрицы (16.3) максимальный по модулю. Пусть этот элемент есть $a_{i2}^{(2)}$. Умножим обе части уравнения (16.2) на матрицу $P_2 = P_{2i}$, т. е. поменяем местами вторую и i-ю строку матрицы A_2. Получим

$$\widetilde{A}_2 x = P_2 L_1 P_1 b, \tag{16.4}$$

где

$$\widetilde{A}_2 = P_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & \widetilde{a}_{22}^{(2)} & \widetilde{a}_{23}^{(2)} & \dots & \widetilde{a}_{2n}^{(2)} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \widetilde{a}_{n2}^{(2)} & \widetilde{a}_{n3}^{(2)} & \dots & \widetilde{a}_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь обе части уравнения (16.4) на элементарную нижнюю треугольную матрицу

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\widetilde{a}_{32}^{(2)}/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & -\widetilde{a}_{n2}^{(2)}/\widetilde{a}_{22}^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим
$$A_3x = L_2P_2L_1P_1b,$$
где
$$A_3 = L_2\widetilde{A}_2 = L_2P_2L_1P_1A.$$
Нетрудно убедиться, что
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ & & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}.$$
Важно подчеркнуть, что все элементы второго столбца матрицы A_3, кроме первых двух, — нули.

Продолжая этот процесс, в конце концов исходную систему
$$Ax = b$$
сведем к эквивалентной ей системе
$$Ux = f,$$
где
$$U = L_nP_nL_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1A, \tag{16.5}$$
$$f = L_nP_nL_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1b.$$
Причем
$$U = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{3n-1}^{(4)} & a_{3n}^{(4)} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
есть верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

Упражнение 4. Опишите обратный ход метод Гаусса.

Решение. В результате прямого хода метода Гаусса мы получили систему

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n-1}^{(2)} & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Решим ее. Из последнего уравнения системы находим

$$x_n = f_n,$$

из предпоследнего $$x_{n-1} = f_{n-1} - a_{n-1,n}^{(n)} x_n$$

и так далее, наконец, из первого уравнения находим

$$x_1 = f_1 - a_{1,2}^{(2)} x_2 - a_{1,3}^{(2)} x_3 - \dots - a_{1,n}^{(2)} x_n.$$

Упражнение 5. Почему ведущие элементы метода Гаусса решения крамеровских систем не равны нулю?

Решение. Ведущие элементы метода Гаусса это те максимальные по модулю элементы столбцов, расположенные на главной диагонали и ниже нее, на которые мы осуществляли деление в ходе вычислений.

Максимальный по модулю элемент первого столбца $a_{i1} = a_{11}^{(1)}$ матрицы A не может оказаться равным нулю, так как тогда все элементы первого столбца матрицы A — нули и, значит, $|A| = 0$, но система по предположению крамеровская, т. е. определитель матрицы A не нуль.

Максимальный по модулю элемент второго столбца матрицы $A_2 = L_1 A_1$, расположенный ниже главной диагонали или на ней, мы обозначили $a_{i2}^{(2)}$. Он тоже не может равняться нулю. Действительно, если

$$a_{i2}^{(2)} = 0,$$

то

$$a_{22}^{(2)} = \dots = a_{n2}^{(2)} = 0.$$

Тогда, вычисляя определитель

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \dots\dots\dots\dots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}$$

разложением по первому столбцу, получим, что

$$\det(A_2) = 0.$$

С другой стороны, используя то, что L_1 — элементарная нижняя треугольная матрица, а P_1 — либо единичная матрица, либо матрица перестановки, можем написать, что

$$\det(A_2) = l_{11} \det(P_1 A) = \det(P_1 A)/a_{11}^{(1)} = \pm \det(A)/a_{11}^{(1)} \neq 0.$$

Аналогично доказывается, что все остальные ведущие элементы тоже не могут быть равны нулю.

17. Лекция (матрицы — 3)

§ 5.9. Определитель произведения матриц

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/ql-WF0q65fZGGw
Презентация https://disk.yandex.ru/i/C-BOcA_BcU6ozw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §9

Упражнение 1. Доказать теорему.

Теорема. Если A, B — произвольные квадратные матрицы, то

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Доказательство. Если матрица A вырождена, то матрица AB также вырождена, и в этом случае равенство

$$\det(AB) = \det A \det B$$

тривиально выполняется.

Пусть матрица A невырождена, применим разложение (16.5), получим

$$A = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U,$$

тогда

$$AB = P_1 L_1^{-1} P_2 L_1^{-1} \cdots P_n L_n^{-1} U B.$$

Следовательно,

$$\det(AB) = \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det(U) \det B =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} \det B,$$

но

$$\prod_{i=1}^{n} \det P_i \prod_{i=1}^{n} \det L_i^{-1} = \det A,$$

т. е. равенство $\det(AB) = \det A \det B$ доказано.

§ 5.10. Некоторые классы матриц

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/WerCtripSPcWBg

Презентация https://disk.yandex.ru/i/YVETOYDM-07VtA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §10

Упражнение 1. Показать, что

$$a)\ (A^*)^* = A, \quad b)\ (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \quad c)\ (A+B)^* = A^* + B^*.$$

Указание. Использовать определение сопряженной матрицы и свойства операции транспонирования матриц.

Упражнение 2. Доказать, что произведение унитарных матриц является унитарной матрицей.

Указание. Воспользоваться определением унитарной матрицы и равенством $(AB)^* = B^*A^*$.

Упражнение 3. Проверить, что диагональная матрица, диагональ которой состоит из комплексных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, по модулю равных единице (здесь n — порядок матрицы), является унитарной.

Указание. Вычислить сопряженную матрицу и воспользоваться определением унитарной матрицы.

Упражнение 4. Проверить, что матрица перестановки P_{ik} является ортогональной.

Указание. Проверить, что $P_{ik}^T = P_{ik}$, и воспользоваться определением ортогональной матрицы.

Упражнение 5. Проверить, что матрица второго порядка

$$Q_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — любое вещественное число, является ортогональной.

Указание. Вычислить $Q_2^T(\varphi)$ и воспользоваться определением ортогональной матрицы

Упражнение 6. Убедиться, что эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные матрицы — нормальные матрицы.

Указание. Использовать соответствующие определения.

Упражнение 7. Показать, что матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где α, β — произвольные вещественные числа, является нормальной. При каких условиях на α и β она является симметричной, кососимметричной, ортогональной?

Указание. Вычислить A^T, AA^T и A^TA. Используя соответствующие определения, проверить, что матрица A является нормальной при любых вещественных α и β, симметричной — при $\beta = 0$, кососимметричной — при $\alpha = 0$, ортогональной — при $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

§ 5.11. Блочные матрицы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/Sfpx-WV5lORk4Q

Презентация https://disk.yandex.ru/i/3-x1UO-CowUU_A

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 5, §11

Упражнение 1. Доказать, что определитель блочно-треугольной матрицы размера $n \times n$ равен произведению определителей диагональных блоков.

Указание. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

есть блочно–треугольная матрица, A_{ii}, $i = 1, \dots, n$, — произвольные квадратные матрицы. Надо доказать, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22}| \cdots |A_{nn}|.$$

Воспользуйтесь методом математической индукции. В качестве основания индукции используйте следующую теорему. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы. Тогда

$$|A| = |A_{11}||A_{22}|.$$

Упражнение 1. Получить обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка в случае блочных матриц размера 2×2.

Решение. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

есть блочная матрица, A_{11}, A_{22} — квадратные матрицы, причем

$$|A_{11}| \neq 0.$$

Покажем, что

$$|A| = |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \tag{17.1}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители обеих частей этого равенства, получим (17.1). Формулу (17.1) можно рассматривать как обобщение формулы для вычисления определителя второго порядка.

18. Лекция (линейные пространства — 1)

Глава 6. Линейные пространства

§ 6.1. Пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/jiqtW0FCZyPjUg
Презентация https://disk.yandex.ru/i/MHue-3Iyy1CJqA
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §1

Упражнение 1. Проверить справедливость восьми аксиом для вещественного линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Решение. *Линейное пространство* $\mathbb{R}^n$ — это множество всех упорядоченных наборов

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

вещественных чисел x_k, $k = 1, 2, \dots, n$ где $n \geqslant 1$ — фиксированное целое число. Два вектора $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем считать *равными* тогда и только тогда, когда

$$x_k = y_k \quad \text{для всех} \quad k = 1, \ \dots, n.$$

Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом 0:

$$0 = (0, 0, \dots, 0).$$

На пространстве $\mathbb{R}^n$ вводятся линейные операции: *умножение векторов на вещественные числа* и *сложение векторов*. Именно, по определению для любого вещественного числа α и любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ по определению

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Проверим справедливость свойств этих операций, которые называются *аксиомами линейного пространства.*

Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и для любых вещественных чисел α, β:

1) $x + y = y + x$ — *коммутативность* операции сложения.

В силу коммутативности сложения чисел имеем

$$(x + y)_k = x_k + y_k = y_k + x_k = (y + x)_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ — *ассоциативность* операции сложения.

В силу ассоциативности сложения чисел имеем

$$((x + y) + z)_k = (x + y)_k + z_k = (x_k + y_k) + z_k =$$

$$= x_k + (y_k + z_k) = x_k + (y + z)_k = (x + (y + z))_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

3) $x + 0 = x$ — *нейтральность* нулевого вектора.

В силу нейтральности числа нуль имеем

$$(x + 0)_k = x_k + 0_k = x_k + 0 = x_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

4) $x + (-x) = 0$, где по определению $-x = (-1)x$, — существование для каждого вектора *противоположного*. Действительно,

$$(x + (-x))_k = x_k + ((-1)x)_k = x_k - x_k = 0, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ — *дистрибутивность* по сложению векторов.

Используем дистрибутивность сложения чисел:

$$(\alpha(x + y))_k = \alpha(x + y)_k = \alpha(x_k + y_k) =$$

$$= \alpha x_k + \alpha y_k = (\alpha x)_k + (\alpha y)_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ — *дистрибутивность* по сложению скаляров.

Опять используем дистрибутивность сложения чисел:

$$((\alpha + \beta)x)_k = (\alpha + \beta)x_k =$$

$$= \alpha x_k + \beta x_k = (\alpha x)_k + (\beta x)_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ — *ассоциативность* по умножению скаляров.

В силу ассоциативности умножения чисел имеем

$$((\alpha\beta)x)_k = (\alpha\beta)x_k = \alpha(\beta x_k) = \alpha(\beta x)_k, \quad k = 1{,}2, \ldots, n.$$

8) $1x = x$ — *нейтральность* единичного скаляра. Действительно,

$$(1x)_k = 1x_k = x_k, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Нетрудно заметить, что аксиомы 1)–8) в точности соответствуют свойствам линейных операций над векторами трехмерного евклидова пространства.

§ 6.2. Общие линейные и пространства

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/01G50bp1cpA3Ww

Презентация https://disk.yandex.ru/i/-PEDxVsSaj9czQ

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §2

Упражнение 1. Проверьте, что множество всех векторов (направленных отрезков) трехмерного евклидова пространства с введенными обычным образом операциями умножения вектора на число и сложения векторов — вещественное линейное пространство. Будем обозначать это пространство через $\mathbb{V}_3$.

Указание. Проверить, что алгебраические операции над направленными отрезками (см. с. 31) не выводят за пределы пространства $\mathbb{V}_3$. Убедиться в том, что для этих операций аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства выполнены. Какой элемент пространства $\mathbb{V}_3$ является нулевым, какой — противоположным элементу x?

Упражнение 2. Проверьте, что множество всех вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a,b) вещественной оси, является вещественным линейным пространством, если определить обычным образом понятие суммы двух функций и умножение функции на вещественное число.

Указание. Проверить, что сумма двух вещественных функций вещественного переменного, определенных на интервале (a,b) вещественной оси, является такой же функцией. Проверить, что это же справедливо и для умножения функции на вещественное число. Убедиться в том, что для этих операций аксиомы 1)–8) вещественного линейного пространства выполнены.

Упражнение 3. Проверьте, что множество всех вещественных функций, определенных и непрерывных на замкнутом отрезке $[a,b]$ вещественной оси, является вещественным линейным пространством. Это пространство обозначают через $\mathbb{C}[a,b]$.

Указание. Множество $\mathbb{C}[a,b]$ является подмножеством линейного пространства, определенного в предыдущем упражнении. Поэтому справедливость аксиом вещественного линейного пространства проверять уже нет необходимости. Достаточно убедиться лишь в том, что линейные операции не выводят за пределы $\mathbb{C}[a,b]$. При проверке этого факта надо иметь в виду, что сумма двух непрерывных функций есть непрерывная функция, при умножении функции на любое число непрерывность функции также сохраняется.

Упражнение 4. Проверьте, что множество всех функций из линейного пространства $\mathbb{C}[a,b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке c из отрезка $[a,b]$, — вещественное линейное пространство.

Указание. Определенное в этом упражнении множество функций является подмножеством $\mathbb{C}[a,b]$, поэтому достаточно проверить, что линейные операции не выводят за его пределы.

Упражнение 5. Проверьте, что множество всех полиномов с комплексными коэффициентами, на котором обычным образом определены операции сложения двух полиномов и умножения полинома на число, является комплексным линейным пространством.

Указание. Ясно, что сумма двух полиномов — полином, это же справедливо и для операции умножения полинома на комплексное число. Проверьте, что выполняются все аксиомы комплексного линейного пространства.

Упражнение 6. Проверьте, что множество $\mathbb{Q}_n$, состоящее из всех полиномов степени не выше n, где $n \geqslant 0$ есть фиксированное целое число, и нулевого многочлена, является комплексным линейным пространством.

Указание. Множество $\mathbb{Q}_n$ является подмножеством комплексного линейного пространства, определенного в предыдущем упражнении. Надо иметь в виду, что сумма полиномов есть полином, степень которого не превосходит максимальной степени слагаемых, при умножении полинома из $\mathbb{Q}_n$ на произвольное комплексное число снова получаем полином из $\mathbb{Q}_n$.

Упражнение 7. Рассмотрим множество $\mathbb{X}$ всех положительных функций, определенных на вещественной оси. Определим на этом множестве операцию сложения функций f и g как их произведение, а операцию умножения функции f на число α как возведение ее в степень α. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

Указание. Является вещественным линейным пространством. При проверке аксиомы 4) заметить, что функция $1/f(t)$ существует для любой положительной $f(t)$.

Упражнение 8. Рассмотрим множество всех четных функций, определенных на отрезке $[-1,1]$. Определим на этом множестве операцию сложения двух функций как их произведение, а операцию умножения функции на число будем понимать обычным образом. Будет ли описанное нами множество линейным пространством?

Указание. Не является линейным пространством. Достаточно заметить, например, что функция $f(t) = 0$, $t \in [-1,1]$, является четной, но для нее не существует функции $1/f(t)$. Следовательно аксиома 4) не выполняется.

19. Лекция (линейные пространства — 2)

§ 6.3. Линейная зависимость векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/-UaDl-bzeSY_dQ
Презентация https://disk.yandex.ru/i/j163lPlRxWX3Wg
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §3

Упражнение 1. Доказать, что система из одного вектора линейного пространства $\mathbb{X}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Решение. Доказываемое утверждение непосредственно следует из того, что для любого ненулевого числа $x \in \mathbb{C}$ равенства

$$ax = 0 \in \mathbb{X}$$

и

$$a = 0 \in \mathbb{X}$$

эквивалентны.

Упражнение 2. Доказать, что система из двух векторов, различающихся скалярным множителем, линейно зависима.

Решение. Пусть $a^1 = \alpha a^2$. Тогда $1 \cdot a^1 - \alpha \cdot a^2 = 0$, т. е. система векторов $\{a^1,a^2\}$ линейно зависима.

Упражнение 3. Доказать, что если три вектора a^1, a^2 и a^3 линейно зависимы, и вектор a^3 не выражается линейно через векторы a^1 и a^2, то векторы a^1 и a^2 коллинеарны.

Решение. Пусть система векторов $\{a^1,a^2,a^3\}$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^3$, что

$$x_1a^1 + x_2a^2 + x_3a^3 = 0.$$

В этом равенстве $x_3 = 0$, т. к. по условию задачи вектор a^3 не выражается линейно через векторы $\{a^1,a^2\}$, т. е. не существует такого вектора $y \in \mathbb{C}^2$, что

$$a^3 = y_1a^1 + y_2a^2.$$

Действительно, если предположить, что $x_3 \neq 0$, то в выражении вектора a^3 можно выбрать $y_1 = x_1/x_3$ и $y_2 = x_2/x_3$. Итак, имеем

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 = 0,$$

где, по крайней мере, один из числовых коэффициентов x_1, x_2 не равен нулю, т. е. векторы a^1 и a^2 коллинеарны.

Упражнение 4. Доказать, что система векторов линейно зависима, если она содержит линейно зависимую подсистему, в частности, если она содержит нулевой вектор.

Решение. Пусть система векторов содержит нулевой вектор. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что нулевой элемент стоит на первом месте в системе векторов $\mathcal{A}_m = \{0,a^2,\dots,a^m\}$. Ясно, что

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot a^2 + \dots + 0 \cdot a^n = 0,$$

т. е. система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Предположим теперь, что $\mathcal{A}_m$ содержит линейно зависимую подсистему. Для определенности будем считать, что эта подсистема состоит из первых p векторов системы $\mathcal{A}_m = \{a^1,\dots,a^p,a^{p+1},\dots,a^m\}$. Обозначим линейно зависимую подсистему $\mathcal{A}_p = \{a^1,\dots,a^p\}$, а оставшиеся векторы $\mathcal{A}_{m-p} = \{a^{p+1},\dots,a^m\}$. По определению линейно зависимой системы существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^p$ такой, что

$$\mathcal{A}_p x = 0.$$

Тогда

$$\mathcal{A}_p x + \mathcal{A}_{m-p} 0 = 0,$$

где символом ноль в левой части равенства обозначен нулевой элемент пространства $\mathbb{C}^{m-p}$. Это равенство означает, что система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима.

Упражнение 5. Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы она содержала вектор a^k, который линейно выражается через остальные.

Решение. Пусть вектор a^k линейно выражается через все остальные векторы системы $\mathcal{A}_m$:

$$a^k = \mathcal{A}_{k-1} y + \mathcal{A}_{m-k} z,$$

где $\mathcal{A}_{k-1} = \{a^i\}_{i=1}^{k-1}$, $\mathcal{A}_{m-k} = \{a^i\}_{i=k+1}^{m}$, $y \in \mathbb{C}^{k-1}$, $z \in \mathbb{C}^{m-k}$. Тогда

$$\mathcal{A}_{k-1}y - 1 \cdot a^k + \mathcal{A}_{m-k}z = 0,$$

но вектор $x = (y, -1, z) \in \mathbb{C}^m$ не равен нулю, и, значит, система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Предположим, что система $\mathcal{A}_m$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$, что $\mathcal{A}_m x = 0$. Пусть для определенности $x_k \neq 0$. Запишем равенство $\mathcal{A}_m x = 0$ в виде

$$\mathcal{A}_{k-1}y + a^k x_k + \mathcal{A}_{m-k}z = 0,$$

следовательно,

$$a^k = \mathcal{A}_{k-1}\left(-\frac{y}{x_k}\right) + \mathcal{A}_{m-k}\left(-\frac{z}{x_k}\right),$$

т. е. вектор a^k линейно выражается через все остальные векторы системы $\mathcal{A}_m$.

Упражнение 6. Доказать, что для любых трех векторов a, b, c и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ линейно зависимы.

Указание. Составить линейные комбинации этих векторов с коэффициентами γ, β и α.

Упражнение 7. Доказать, что матрицы A_1, A_2, ..., A_k одной и той же размерности линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы матрицы $(A_1)^T$, $(A_2)^T$, ..., $(A_k)^T$.

Указание. Воспользоваться определением линейной зависимости и транспонировать левую и правую части полученного равенства.

Упражнение 8. Доказать, что если вектор $x \in \mathbb{X}$ линейно выражается через систему векторов $\{a^i\}_{i=1}^m$, то он линейно выражается и через эквивалентную систему векторов $\{b^i\}_{i=1}^p$.

Решение. Имеем $x = \mathcal{A}_m c$, $\mathcal{A}_m = \mathcal{B}_p Y$. Подставляя второе из этих равенств в выражение для x, получим $x = \mathcal{B}_p d$, где $d = Yc$.

Упражнение 9. Докажите следующее утверждение. Пусть система векторов $\mathcal{A}_m$ линейно зависима. Пусть система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно выражается через систему $\mathcal{A}_m$,

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X,$$

где матрица X невырождена. Тогда система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно зависима.

Решение. По условию задачи существует такая невырожденная матрица X, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Отсюда для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ имеем $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y$. Пусть система векторов $\mathcal{A}_m$ линейно зависима, т. е. существует такой ненулевой вектор $d \in \mathbb{C}^m$, что $\mathcal{A}_m d = 0$. Пусть $Xy = d$. Тогда в силу невырожденности матрицы X существует (единственный) вектор $y = X^{-1}d \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{B}_m y = 0$, т. е. система векторов $\mathcal{B}_m$ линейно зависима.

Замечание. В следующих трех упражнениях определяются *элементарные преобразования* системы векторов и доказывается, что линейная зависимость системы векторов не нарушается при элементарных преобразованиях этой системы.

Упражнение 10. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при перестановке двух векторов a^i и a^k системы $\mathcal{A}_m$.

Указание. Выполнить упражнение можно непосредственно с помощью определения линейной зависимости, а можно, используя матрицу перестановки P_{ik}. Она получается из единичной матрицы перестановкой i-той и k-той строк. Ее определитель равен -1, следовательно, она не вырождена. Покажите что система векторов

$$\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m P_{ik}$$

отличается от $\mathcal{A}_m$ только тем, что в исходной системе переставлены местами векторы a^i и a^k. Для завершения доказательства используйте упражнение 9.

Упражнение 11. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при умножении одного вектора a^i этой системы на ненулевое число α.

Указание. Выполнить упражнение двумя способами: 1) с помощью определения линейной зависимости; 2) используя упражнение 9, для чего надо построить матрицу описанного в задаче элементарного преобразования и доказать ее невырожденность.

Упражнение 12. Доказать, что линейная зависимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при прибавлении к одному вектору a^i системы другого вектора a^k, умноженного на произвольное число α.

Указание. Пусть $i < k$. Постройте матрицу L_i, описанного в задаче элементарного преобразования системы. Это элементарная нижняя треугольная матрица. На главной диагонали стоят единицы. В i-том столбце ниже главной диагонали стоят нули везде, кроме элемента k-той строки, равного α. Аналогично рассмотрите случай $i > k$. Докажите, что в обоих случаях матрица L_i невырождена. Для завершения доказательства используйте упражнение 9.

20. Лекция (линейные пространства — 3)

§ 6.4. Линейно независимые системы векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.
Видео https://disk.yandex.ru/i/SDKua1iwrGHh0A
Презентация https://disk.yandex.ru/i/BnXc7lAMcfbNqw
Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §4

Упражнение 1. Докажите, что любой вектор $a \neq 0$ образует линейно независимую систему в пространстве $\mathbb{X}$, состоящую из одного вектора.

Решение. Действительно, для любого ненулевого вектора a из равенства

$$xa = 0, \quad x \in C,$$

следует, что $x = 0$.

Упражнение 2. Докажите, что единичные векторы i^1, i^2, ..., $i^m \in \mathbb{C}^n$, где $m \leqslant n$, линейно независимы.

Решение. Это утверждение сразу же вытекает из того, что для любого вектора $x \in \mathbb{C}^m$ вектор $x_1 i^1 + x_2 i^2 + \cdots + x_m i^m \in \mathbb{C}^n$ имеет вид

$$(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$$

и, следовательно, равен нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Упражнение 3. Докажите, что система векторов

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z, \ \ldots, \ \varphi_k(z) = z^k,$$

где z — комплексная переменная, $k \geqslant 0$ — целое число, линейно независима в пространстве полиномов.

Решение. Действительно, левая часть равенства

$$x_0 + x_1 z + \cdots + x_k z^k = 0$$

есть полином степени k, а, если полином равен нулю, то все его коэффициенты — нули.

Упражнение 4. Пусть $\{a^k\}_{k=1}^m$ — линейно независимые векторы. Пусть система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ линейно выражается через систему векторов $\{a^k\}_{k=1}^m$, т. е. существует квадратная матрица X порядка m такая, что $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$. Доказать, что для того, чтобы система векторов $\{b^k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица X была невырожденной.

Решение. Заметим, прежде всего, что, если $\mathcal{B}_m = \mathcal{A}_m X$, то для любого вектора $y \in \mathbb{C}^m$ справедливо равенство $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y$.

По условию задачи система $\mathcal{A}_m$ линейно независима. Пусть матрица X невырождена. Докажем, что тогда система $\mathcal{B}_m$ также линейно независима. Действительно, из равенства $\mathcal{B}_m y = 0$ следует, что $\mathcal{A}_m X y = 0$. В силу линейной независимости системы $\mathcal{A}_m$ имеем $Xy = 0$, а так как матрица X невырождена, то эта система линейных уравнений крамеровская и имеет единственное решение $y = 0$. Это и означает, что система $\mathcal{B}_m$ линейно независима.

Предположим теперь, что система $\mathcal{B}_m$ линейно независима, и докажем, что матрица X невырожденная. Итак, $\mathcal{B}_m y = \mathcal{A}_m X y = 0$ только при $y = 0$. В силу линейной независимости системы $\mathcal{A}_m$ заключаем, что $Xy = 0$ только при $y = 0$, значит, матрица X невырожденная.

Замечание. В следующих трех упражнениях рассматриваются элементарные преобразования системы векторов и доказывается, что линейная независимость системы не нарушается при ее элементарных преобразованиях.

Упражнение 5. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается ни при какой перестановке двух векторов a^i и a^k системы $\mathcal{A}_m$.

Указание. Использовать невырожденность матрицы перестановки P_{ik} и упражнение 4.

Упражнение 6. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при умножении одного вектора a^i системы на ненулевое число α.

Указание. Использовать упражнение 4, для чего построить матрицу описанного в задаче преобразования и доказать ее невырожденность.

Упражнение 7. Доказать, что линейная независимость системы векторов $\mathcal{A}_m$ не нарушается при прибавлении к одному вектору a^i системы другого вектора a^k, умноженного на произвольное число α.

Указание. Построить элементарную нижнюю треугольную матрицу L_i описанного в задаче преобразования системы, рассмотрев два случая: $i < k$ и $i > k$. Доказать, что в обоих случаях матрица L_i невырожденная. Воспользоваться упражнением 4.

Упражнение 8. Доказать, что в пространстве вещественных функций одной переменной функции $f^1(t)$, $f^2(t)$, …, $f^m(t)$ линейно независимы, если существуют такие числа a_1, a_2, …, $a_m \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} f^1(a_1) & f^2(a_1) & \dots & f^m(a_1) \\ f^1(a_2) & f^2(a_2) & \dots & f^m(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1(a_m) & f^2(a_m) & \dots & f^m(a_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение. Предположим, что система функций $\mathcal{F}_m = \{f^1(t)\}_{i=1}^m$, линейно зависима, т. е. существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что $\mathcal{F}_m x = 0$. Запишем это равенство в точках a_1, …, a_m, о которых говорится в условии задачи. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x = (x_1, x_2, \dots x_m)$:

$$\left\{ \begin{array}{lclclcll} f^1(a_1)x_1 & + & f^2(a_1)x_2 & + & \dots & + & f^m(a_1)x_m & = 0, \\ f^1(a_2)x_1 & + & f^2(a_2)x_2 & + & \dots & + & f^m(a_2)x_m & = 0, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ f^1(a_m)x_1 & + & f^2(a_m)x_2 & + & \dots & + & f^m(a_m)x_m & = 0. \end{array} \right.$$

По условию задачи определитель этой системы не равен нулю, система уравнений крамеровская и имеет единственное нулевое решение. Следовательно, предположение о том, что система функций $\mathcal{F}_m$ линейно зависима, не верно.

Упражнение 9. Доказать, что в пространстве $m-1$ раз дифференцируемых функций одной переменной векторы $f^1(t)$, $f^2(t)$, …, $f^m(t)$ линейно независимы, если существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} f^1(a) & f^2(a) & \dots & f^m(a) \\ (f^1(a))' & (f^2(a))' & \dots & (f^m(a))' \\ (f^1(a))'' & (f^2(a))'' & \dots & (f^m(a))'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f^1(a))^{(m-1)} & (f^2(a))^{(m-1)} & \dots & (f^m(a))^{(m-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение. Предположим, что система функций $\mathcal{F}_m = \{f^i(t)\}_{i=1}^m$, линейно зависима, т. е. существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^m$ такой, что $\mathcal{F}_m x = 0$, причем эта линейная комбинация равна нулю для всех t из области определения функций системы $\mathcal{F}_m$. Продифференцируем левую и правую части этого равенства $m-1$ раз, и запишем получившиеся равенства в точке a, о которой говорится в условии задачи. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора $x = (x_1,x_2,\dots x_m)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} f^1(a)x_1 & + & f^2(a)x_2 & + & \dots & + & f^m(a)x_m & = 0, \\ (f^1(a))'x_1 & + & (f^2(a))'x_2 & + & \dots & + & (f^m(a))'x_m & = 0, \\ (f^1(a))''x_1 & + & (f^2(a))''x_2 & + & \dots & + & (f^m(a))''x_m & = 0, \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \\ (f^1(a))^{(m-1)}x_1 & + & (f^2(a))^{(m-1)}x_2 & + & \dots & + & (f^m(a))^{(m-1)}x_m & = 0. \end{array}\right.$$

По условию задачи определитель этой системы не равен нулю, система уравнений крамеровская и имеет единственное нулевое решение. Следовательно, предположение о том, что система функций $\mathcal{F}_m$ линейно зависима, не верно.

Упражнение 10. Доказать, что $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = t$, $f^3(t) = \sin t$ являются линейно независимыми функциями.

Решение получим двумя способами, используя упражнения 8 и 9. Подберем три таких числа a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \sin a_1 \\ 1 & a_2 & \sin a_2 \\ 1 & a_3 & \sin a_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Можно, например, выбрать $a_1 = 0$, $a_2 = \pi$, $a_3 = \dfrac{\pi}{2}$, действительно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & 0 \\ 1 & \pi/2 & 1 \end{vmatrix} = \pi.$$

Следовательно (см. упражнение 8), данная система линейно независима.

Используем теперь упражнение 9. Найдем такое вещественное число a, что вронскиан функций $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = t$ и $f^3(t) = \sin t$ в этой точке отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \sin a \\ 0 & 1 & \cos a \\ 0 & 0 & -\sin a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ясно, что можно выбрать такое значение a такое, что $\sin a \neq 0$. Следовательно, данная система функций линейно независима.

Упражнение 11. Доказать, что функции линейно независимы:

$a)$ $f^1(t) = e^t$, $f^2(t) = e^{2t}$, $f^3(t) = e^{3t}$;

$b)$ $f^1(t) = e^t$, $f^2(t) = e^{-t}$, $f^3(t) = e^{2t}$;

$c)$ $f^1(t) = 1$, $f^2(t) = \sin t$, $f^3(t) = \cos t$.

Указание. Использовать упражнение 8, или упражнение 9.

21. Лекция (линейные пространства — 4)

§ 6.5. Ранг системы векторов

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/0Ir7GbRNvPg-ag

Презентация https://disk.yandex.ru/i/0Xfg-p9toONJNA

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §5

Упражнение 1. Доказать теорему.

Теорема. Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$ содержат одно и то же количество векторов.

Доказательство. Заметим, во-первых, что из определения максимальной линейно независимой подсистемы непосредственно вытекает, что любой вектор из $\{a^i\}_{i=1}^m$ линейно выражается через векторы подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$.

Вследствие очевидного равенства

$$a^{i_k} = a^{i_k} + \sum_{i=1, i\neq i_k}^{m} 0a^i$$

справедливо и обратное, т. е. любой вектор из подсистемы $\{a^{i_k}\}_{k=1}^r$ линейно выражается через векторы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$.

Итак, система $\{a^i\}_{i=1}^m$ и любая ее максимальная линейно независимой подсистема эквивалентны. Но тогда, по свойству транзитивности, эквивалентны и любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы $\{a^i\}_{i=1}^m$. Следовательно, они имеют равные количества векторов.

§ 6.6. Конечномерные линейные пространства, базисы

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/3wekGQ_62NO1gA

Презентация https://disk.yandex.ru/i/ZfwU-eO-Am584g

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §6

Упражнение 1. Доказать теорему.

Теорема. В n-мерном линейном пространстве $\mathbb{X}_n$ любая система

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\widetilde{e}^k\}_{k=1}^n,$$

состоящая из n линейно независимых векторов является базисом.

Доказательство. Достаточно убедиться, что любой вектор

$$x \in \mathbb{X}_n$$

представим в виде линейной комбинации

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}.$$

По определению n-мерного пространства в нем существует базис $\mathcal{E}_n$. Следовательно, любой вектор из $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ представим в виде линейной комбинации векторов базиса $\mathcal{E}_n$. Иными словами, существует квадратная невырожденная матрица T порядка n такая, что

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Поскольку $\mathcal{E}_n$ — базис, существует вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Поскольку матрица T невырождена, можно найти вектор $\widetilde{\xi} \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\xi = T\widetilde{\xi}.$$

В результате, получим требуемое соотношение:

$$x = \mathcal{E}_n T \widetilde{\xi} = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}.$$

§ 6.7. Замена базиса

Перед выполнением упражнений надо ознакомиться с теорией.

Видео https://disk.yandex.ru/i/fb9mrhj7WytcXw

Презентация https://disk.yandex.ru/i/RF2mnBrUwstkBg

Учебник https://disk.yandex.ru/i/Aix_aQtnGQFuPg Глава 6, §7

Упражнение 1. Получите формулу изменения координат вектора при переходе к новому базису.

Решение. Пусть

$$\mathcal{E}_n = \{e^k\}_{k=1}^n, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \{\tilde{e}^k\}_{k=1}^n$$

есть базисы пространства $\mathbb{X}_n$. Как уже говорилось, $\mathcal{E}_n$, $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ — эквивалентные системы векторов, существуют квадратные матрицы T, $\widetilde{T}$ порядка n такие, что

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T}, \quad \widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Матрицу T называют *матрицей перехода* от базиса $\mathcal{E}_n$ к базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Матрицы T и $\widetilde{T}$ взаимно обратны. Действительно, подставляя выражение для $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ из предыдущего равенства в

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{T},$$

получим

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n T \widetilde{T},$$

и вследствие линейной независимости векторов базиса $\mathcal{E}_n$ имеем

$$T\widetilde{T} = I.$$

Пусть известны коэффициенты ξ разложения некоторого вектора $x \in \mathbb{C}^n$ по базису $\mathcal{E}_n$:

$$x = \mathcal{E}_n \xi.$$

Пусть задана матрица перехода T к базису базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$:

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n = \mathcal{E}_n T.$$

Получим формулу для вычисления коэффициентов $\widetilde{\xi}$ разложения того же вектора x по базису $\widetilde{\mathcal{E}}_n$.

С одной стороны, имеем

$$x = \mathcal{E}_n \xi,$$

но

$$\mathcal{E}_n = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1},$$

следовательно,

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n T^{-1} \xi,$$

а это означает, что

$$x = \widetilde{\mathcal{E}}_n \widetilde{\xi}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\xi} = T^{-1} \xi.$$