КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.В. Рунг, К.Н. Стехина

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлению
прикладная информатика

Казань
2018

УДК 512.6+514.12(076.1)
С23

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

методической комиссии ИВМиИТ
Протокол № 7 от 8 февраля 2018 г.

заседания кафедры прикладной математики
Протокол № 5 от 17 января 2018 г.

Авторы-составители:
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Рунг
канд. физ.-мат. наук, доц. К.Н. Стехина

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. Н.Б. Плещинский

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук, доцент Д.Н. Тумаков,
кандидат физ.-мат. наук. В.В. Иванов

С23 Сборник задач по алгебре и геометрии: учебное пособие / Е.В. Рунг, К.Н. Стехина. — Казань, 2018. — 208 с.

Предназначено для студентов института вычислительной математики и информационных технологий, обучающихся по направлению ”Прикладная информатика”. По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и приводятся задачи для самостоятельного решения.

Оглавление

Введение

Настоящее пособие представляет собой сборник задач по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии. Назначение данного пособия состоит в том, чтобы активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса, помочь активному и неформальному усвоению этого предмета.

Весь материал пособия разбит на восемь частей. Части разбиты на разделы. Каждый раздел – это отдельная тема и его материал может использоваться при проведении практических занятий. Каждый раздел также содержит два пункта: ”Основные понятия и теоремы”, "Задачи для самостоятельного решения".

Заметим, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем должна осуществляться студентами по одному из учебников (например, [1]) или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понять смысл теоремы, формулы или определения. С этой целью в разделе ”Основные понятия и теоремы” приводятся без доказательства основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. Эти сведения иногда сопровождаются поясняющими примерами или замечаниями, направленными на то, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий.

Назначение пункта ”Задачи для самостоятельного решения” отражено в его названии. В этом разделе приведен определенный минимум упражнений, достаточный для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме. Из данного пункта преподаватель может черпать упражнения и задачи для проведения практических занятий.

Теоретической поддержкой данного учебно-методического пособия является учебник А.Г. Куроша [1], в котором заложены методические основы курса алгебры. При подборе задач и упражнений использовались различные источники, в том числе известные задачники по алгебре И.В. Проскурякова [2] и Д.К. Фадеева, И.С. Соминского [3].

Объединенный курс "Алгебра и геометрия" на вечернем отделении Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета читается в течение двух семестров. При этом предполагается, что первые три части изучаются в первом, а остальные — во втором семестре.

Пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей, ведущих занятия по курсу "Алгебра и геометрия".

Комплексные числа

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Рассмотрим множество, элементами которого являются все упорядоченные пары действительных чисел. Элемент рассматриваемого множества будем обозначать так: (a, b). Элементы (a, b) и (b, a) считаются различными, если $a \neq b$. Элементы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2$. Введем теперь в множестве всех упорядоченных пар действительных чисел алгебраические операции: сложение двух пар и умножение двух пар. Сделаем это следующим образом

Суммой элементов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) назовем элемент

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \tag{1}$$

Произведением пар (a_1, b_1) и (a_2, b_2) назовем пару

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{2}$$

Определение 1. *Комплексными числами* называются упорядоченные пары действительных чисел (a, b), для которых формулами (1) и (2) определены операции сложения и умножения.

Комплексные числа будем обозначать одной буквой, причем обычно будем использовать для этого буквы z или w, иногда с индексами z_1, z_2, w_1, w_2.

Комплексные числа вида $(a, 0)$ отождествим с действительным числом a и поэтому положим $(a, 0) = a$. Таким образом, комплексные числа будем рассматривать как обобщение понятия действительного числа, а на действительные числа смотреть как на частный случай комплексных. Комплексные числа вида $(0, b)$ называются *мнимыми.*

Определение 2. Число $(0, 1)$ называют *мнимой единицей* и для его обозначения используют букву i, т.е. $(0, 1) = i$.

Легко можно показать, что любое мнимое число имеет вид:

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi. \tag{3}$$

Из формул (1)–(3) имеем

$$ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{4}$$

Таким образом, получили важное соотношение

$$i^2 = -1 \quad \text{или} \quad i = \sqrt{-1}. \tag{5}$$

Каждое комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде

$$z = (a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Определение 3. Запись комплексного числа $z = (a, b)$ в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексных чисел. Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$ и обозначается $a = \text{Re } z$, действительное число b называют *мнимой частью* комплексного числа $a + bi$ (обозначается $b = \text{Im } z$).

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме выполняются следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, то есть когда равны соответственно действительные и мнимые части комплексных чисел.

Замечание 1. Операции сравнения для комплексных чисел не определены. Поэтому понятий "больше "меньше" для комплексных чисел не существует. Записи $i < 1$, $2 + i > 0$ лишены всякого смысла.

2) Операции сложения и вычитания выполняются по формулам:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i, \tag{6}$$

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i. \tag{7}$$

3) Умножение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, производится следующим образом:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i. \tag{8}$$

4) Комплексные числа $a+bi$ и $a-bi$, то есть числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными*. Число, сопряженное к z обозначается $\bar{z}$. Сумма $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$ — всегда действительное число, а произведение $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ — неотрицательное число.

5) Деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме выполняется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \tag{9}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $z_1 - z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\bar{z}_1 \cdot z_2$, если

a) $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = 5 - 2i,$

b) $z_1 = 2 + 5i,\ z_2 = 1 - 7i,$

c) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i, \quad z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i.$

2. Вычислить i^n, где n – натуральное число.

3. Представить z в алгебраической форме:

a) $z = \dfrac{41i^{18} + 63i^{37}}{50i^{16}} - \dfrac{6i + i^{20}}{i^8 - 7i}$, *b*) $z = \dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$,

c) $z = \left(\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2i}\right)^3$, *d*) $z = \dfrac{13i^{16} + 12i}{6i + 8i^{10}} + \dfrac{(2i + 1)^2}{i + 2}$,

e) $z = \dfrac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$, *f*) $z = \dfrac{5 + 12i}{8 - 6i} + \dfrac{(1 + 2i)^2}{2 + i}$.

4. Выяснить при каких условиях произведение двух комплексных чисел чисто мнимо.

5. Найти числа, сопряженные:

a) своему квадрату,

b) своему кубу.

6. Найти действительные x и y из уравнений:

a) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$,

b) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$,

c) $x+y-ixy=i$.

7. Решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} (3-i)x & + & (4+2i)y & = & 2+6i, \\ (4+2i)x & - & (2+3i)y & = & 5+4i. \end{cases}$

b) $\begin{cases} (2+i)x & + & (2-i)y & = & 6, \\ (3+2i)x & + & (3-2i)y & = & 8. \end{cases}$

8. Вычислить:

a) $i\cdot i^2\cdot i^3\ldots i^{100}$,

b) $i^4+i^{14}+i^{24}+i^{34}+i^{44}+i^{54}+i^{64}+i^{74}+i^{84}$.

9. Методом математической индукции доказать, что:

1) $\overline{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3+\ldots+\bar{z}_n$,

2) $\overline{z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\ldots\cdot z_n}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\bar{z}_3\cdot\ldots\cdot\bar{z}_n$.

10. Доказать, что:

1) комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z}=z$;

2) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\bar{z}=-z$;

11. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi^5$ и $z_2=8y^2+20i^{11}$ являются сопряженными?

12. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=x^2-7x+9yi$ и $z_2=y^2i+20i-12$ равны?

13. Пусть $z=x+iy\neq 0$. Найти $\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{\bar{z}^2}$.

2. Аргумент и модуль комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

Основные понятия, формулы и теоремы

Комплексные числа в §– 1 определены как упорядоченные пары действительных чисел, для которых заданы операции сложения и умножения. Следовательно, каждому комплексному числу $(a, b) = a + bi$ может быть поставлена в соответствие точка $M(a, b)$ плоскости и, наоборот, каждой точке $M(a, b)$ — комплексное число $(a, b) = a+bi$ (см. рис.1). Установленное таким образом соответствие является взаимно-однозначным.

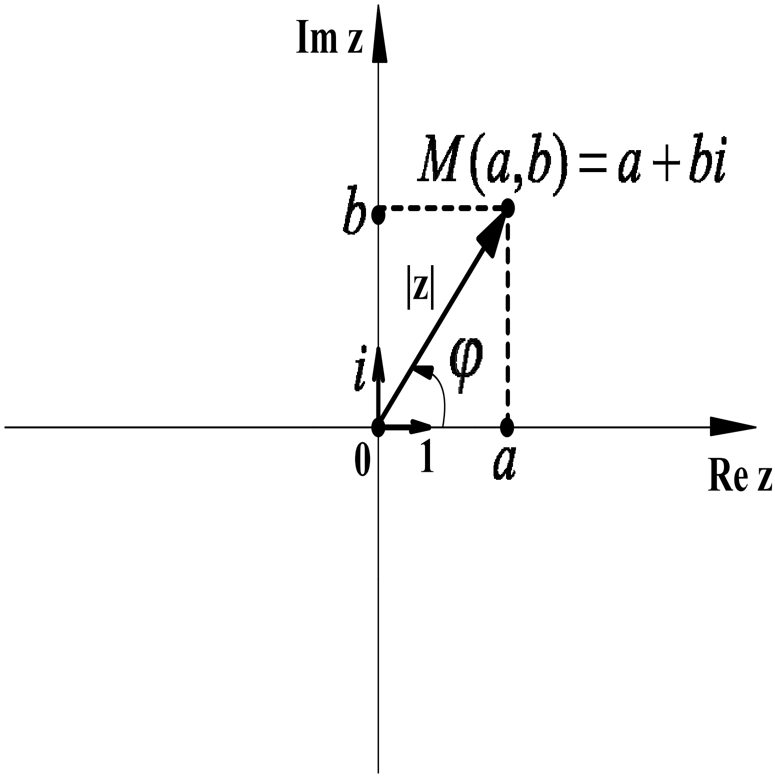

Рис. 1

Это соответствие дает возможность рассматривать комплексные числа как точки координатной плоскости. Эта плоскость называется *комплексной плоскостью.* Ось абцисс – *действительной осью* (на ней расположены точки, соответствующие точкам $(a, 0) = a$), а ось ординат — *мнимой осью* (на ней лежат точки, соответствующие мнимым числам $(0, b) = bi$).

Комплексному числу $(a, b) = a + bi$ соответствует вектор $\overline{OM}$.

Определение 4. *Модулем* комплексного числа $(a, b) = a + bi$ называется длина вектора, соответствующего этому числу.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Легко можно доказать, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{10}$$

Определение 5. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем величина угла считается положительной, если отчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отчет производится по часовой стрелке.

Аргумент комплексного угла определяется неоднозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга на число, кратное 2π. Для обозначения всех аргументов комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение $\arg z$. Через φ обычно обозначают *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$, то есть $\varphi \in (-\pi, \pi]$ [1]. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + 0i$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z = a+bi$ можно найти по формулам:

$$\begin{cases} \cos\varphi & = & \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi & = & \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \tag{11}$$

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно так же найти из следующего уравнения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \tag{12}$$

Уравнение (12) не равносильно системе (11), оно имеет больше решений,

[1] В качестве значения аргумента можно брать величину, принадлежащую промежутку $[0, 2\pi)$.

поэтому если учесть, что $-\pi < \varphi \le \pi$, то из формулы (12) находим

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}(b/a) & \text{при } a \ge 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) + \pi & \text{при } a < 0,\ b \ge 0; \\ \operatorname{arctg}(b/a) - \pi & \text{при } a < 0,\ b < 0; \end{cases} \tag{13}$$

Определение 6. Каждое комплексное число $z = a + bi$, отличное от нуля, может быть записано в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{14}$$

где r – модуль числа, а φ – один (любой) из его аргументов. Форма записи комплексного числа в виде (14) называется *тригонометрической формой записи комплексных чисел.*

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + ib$ к тригонометрической необходимо:

1. Найти модуль $r = |z|$ комплексного числа, используя формулу (10).

2. Найти один из аргументов φ комплексного числа z, воспользовавшись формулой (13). Значения $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ основных табличных углов приведены на рисунке 13.

3. Записать число z в тригонометрической форме, используя равенство (14).

$\dfrac{b}{a}$	0	$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	$a=0,\ b>0$	$a=0,\ b<0$
$\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$	0	$\pm\dfrac{\pi}{6}$	$\pm\dfrac{\pi}{4}$	$\pm\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$

Рис. 2

Тригонометрическая форма записи комплексного числа оказывается очень удобной при умножении, делении, возведении в степень и извлечении корня.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, можно выполнять следующие операции:

1) Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ равны тогда и только тогда, когда

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

то есть когда модули чисел равны, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где k — некоторое целое число.

2) Умножение двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big), \tag{15}$$

3) Деление двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ выполняется по следующей формуле:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big), \tag{16}$$

4) Возведение комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень n следует из формулы:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \tag{17}$$

5) Число w называется *корнем степени* n из $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (обозначается $\sqrt[n]{z}$), если $w^n = z$.

Если $z \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа z. Все они получаются из формулы [2]

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{18}$$

[2] Формулы (17), (18) возведения в степень и извлечения корня часто называют формулами Муавра, так как именно в работах английского математика Абрахама де Муавра (1667–1754) была впервые решена задача о выражении корней степени n из данного числа.

Задачи для самостоятельного решения

14. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

$a)\, z=-1+i,$ $b)\, z=\sqrt{3}-i,$ $c)\, z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i,$ $d)\, z=1+\sqrt{3}\cdot i,$

$e)\, z=16,$ $f)\, z=-1,$ $g)\, z=4i,$ $h)\, z=-\sqrt{5}\cdot i,$

$i)\, z=\sqrt{3}+i,$ $j)\, z=-1-i,$ $k)\, z=\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot i,$ $l)\, z=8,$

$m)\, z=-16i,$ $n)\, z=-\sqrt{48}+4i,$ $o)\, z=-32,$ $p)\, z=i.$

15. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

$a)$ $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1,$

$b)$ $|z-1|\geq|z-i|,$

$c)$ $\begin{cases} 1 \leq z\cdot\bar{z} \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$

$d)$ $|z|<2,\ \operatorname{Re} z\geq 1,\ 0\leq\arg z<\dfrac{\pi}{4},$

$e)$ $\sin|z|>0,$

$f)$ $(1-i)\bar{z}=(1+i)z,$

$g)$ $|z+1+2i|\leq 0,$

$h)$ $\dfrac{\pi}{4}(8n+1)<\arg(z+i)<\dfrac{\pi}{2}(4n+1),\ n\in\mathbb{Z},$

$i)$ $\arg z=(2n+1)\pi,\quad n\in\mathbb{Z},$

$j)$ $\lg|z+i|<1,$

$k)$ $|z-2|^2+|z+2|^2=25,$

$l)$ $|z+i|<1,\ |z+1|\geq 1,$

$m)$ $|z-2-i|\geq 1,\ 1\leq\operatorname{Re} z<3,\ 0<\operatorname{Im} z\leq 3,$

$n)$ $|z+1|=|z-i|,$

$o)$ $|z|^2+3z+3\bar{z}=0,$

$p)$ $|z|=\operatorname{Re} z+1.$

16. Найти все значения корней из комплексного числа:

$a)\ \sqrt[3]{-4+i\sqrt{48}},\quad b)\ \sqrt[4]{-64},\quad c)\ \sqrt[3]{1},\quad d)\ \sqrt[8]{1+i}.$

17. Упростить число z и, если возможно, записать число z в алгебраической форме:

a) $z = \dfrac{(i-\sqrt{3})\Big(\cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}\Big)}{1-i}$,

b) $z = (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

c) $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$,

d) $z = \Big(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\Big)^{13}$,

e) $z = (1+i)^{20}$,

f) $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$,

g) $z = \dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$,

h) $z = \dfrac{\Big(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\Big)(1+\sqrt{3}i)^7}{i^5}$.

18. Доказать, что

a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4} + i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$,

b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} - i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right)$,

где n – целое число.

19. Упростить $\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^n$.

20. Полагая $\omega_1 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\omega_2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, определить $\omega_1^n + \omega_2^n$, где n – целое число.

21. Возвести в степень $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

22. Доказать, что

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

3. Простейшие алгебраические уравнения с комплексными коэффициентами

Определение 7. *Многочленом степени n с комплексными коэффициентами* называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \tag{19}$$

где a_i – комплексные числа. Числа a_i называются *коэффициентами многочлена*, а a_0 называется *старшим коэффициентом моногочлена.*

Определение 8. Пусть задан многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Комплексное число α называется *корнем многочлена*, если

$$f(\alpha) = 0.$$

Теорема 1 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз какова его кратность. Таким образом, любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами представим в виде*

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \tag{20}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ – корни многочлена $f(x)$ с учетом их кратности, a_0 – старший коэффициент многочлена.

Квадратные уравнения

Во множестве комплексных чисел квадратное уравнение

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0, \qquad (a,\ b,\ c \text{ – комплексные числа, } a \neq 0) \tag{21}$$

всегда разрешимо.

Для корней квадратного уравнения (21) справедлива формула
$$z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}. \tag{22}$$
Здесь под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня.

При нахождении квадратного корня из дискриминанта $\sqrt{D}$, удобно пользоваться следующим способом.

Частный случай извлечения квадратного корня из комплексного числа $z = a + bi$.

Пусть $\sqrt{a + bi} = x + iy$, где x, y — действительные числа. Возведем обе части данного равенства в квадрат и получим
$$a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi. \tag{23}$$
Поскольку два комплексных числа равны, когда равны соответственно их действительные и мнимые части, то получим следующую систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b. \end{cases} \tag{24}$$
Возведем каждое уравнение системы (24) в квадрат и почленно сложим, получим
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2. \tag{25}$$
Учитывая, что $x^2 + y^2 \geq 0$, то из (25) имеем
$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{26}$$
Таким образом, система (24) равносильна следующей системе
$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}{2}, \\ y^2 &= \dfrac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{2}, \\ 2xy &= b. \end{cases} \tag{27}$$

Для того, чтобы найти значения x и y из системы (27), необходимо знать знак числа b. Например, если $b > 0$, то знаки чисел x и y одинаковые, так как $2xy = b > 0$, поэтому из (27) имеем значения двух корней

$w_1 = x_1 + y_1 i$ и $w_2 = x_2 + y_2 i$ из комплексного числа $a + bi$:

$$\begin{cases} x_1 &= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{2}}, \\ y_1 &= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 &= -\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{2}}, \\ y_2 &= -\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2}}. \end{cases} \qquad (28)$$

Если $b < 0$, то знаки x и y должны быть разными, так как $2xy = b < 0$, поэтому имеем следующие значения корней $w_1 = x_1 + y_1 i$ и $w_2 = x_2 + y_2 i$:

$$\begin{cases} x_1 &= -\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{2}}, \\ y_1 &= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 &= \sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{2}}, \\ y_2 &= -\sqrt{\dfrac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2}}. \end{cases} \qquad (29)$$

Формулами (28) и (29) следует пользоваться при решении квадратных и биквадратных уравнений, когда значения $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ нельзя найти, используя таблицу основных тригонометрических углов, приведенную на рисунке 13.

Задачи для самостоятельного решения

23. Решить уравнения:

$a)$ $z^2 = \bar{z}^3$, $\quad b)$ $|z| - iz = 1 - 2i$,

$c)$ $z^2 + |z| = 0$, $\quad d)$ $z^2 + |z|^2 = 0$.

24. Решить квадратные уравнения:

$a)$ $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$, $\quad b)$ $z^2 - 4z + 8 = 0$,

$c)$ $z^2 = -i$, $\quad d)$ $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$,

$e)$ $(2+i)z^2 - (5-i)z + (2-2i) = 0$, $\quad f)$ $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$.

25. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ с вещественными коэффициентами, удобную для случая, когда дискриминант уравнения меньше нуля.

26. Решить биквадратные уравнения:

$a)$ $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$, $\quad b)$ $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

27. Решить уравнения:

$a)$ $z^3 - 1 = i$, $\quad b)$ $z^4 - i = 1$,

$c)$ $z^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$, $\quad d)$ $z^6 + 64 = 0$.

Вычисление определителей порядка n

4. Перестановки и подстановки

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть дано некоторое конечное множество Ω, состоящее из n натуральных чисел, то есть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Эти числа можно упорядочить различными способами. Так, числа $1, 2, 3, 4$ можно расположить также следующими способами: $3, 1, 2, 4$ или $2, 4, 1, 3$ и т.д.

Определение 9. Любое расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ в некотором определенном порядке называется *перестановкой* из n чисел.

Определение 10. *Транспозицией* называется такое преобразование перестановки, при котором меняются местами какие-либо два символа (не обязательно стоящие рядом), а все остальные символы остаются на своих местах.

Определение 11. Если в перестановке символ с высшим номером стоит раньше символа с низшим номером, то такое явление называется *инверсией.* Перестановка называется *четной*, если ее символы составляют четное число инверсий, и *нечетной* — в противоположном случае.

Число всех различных перестановок из n символов равно $n!$ При $n \geq 2$ число четных перестановок из n символов равно числу нечетных перестановок, то есть равно $\dfrac{n!}{2}$.

Определение 12. Любое взаимно однозначное отображение этого множества на себя называется *подстановкой из n символов* (или подстановкой n-й степени). Подстановки обычно обозначаются строчными буквами греческого алфавита, например: α, β, γ, π, τ, σ.

В развернутой и наглядной форме подстаноку $\pi : i \mapsto \pi(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, изображают двухрядным символом

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

полностью указывая все образы:

$$\pi : \begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{matrix},$$

где $i_k = \pi(k),\ k = 1, 2, \ldots, n$ — перестановка символов $1, 2, \ldots, n$.

Одно из расположений символов (верхнее или нижнее) выбирается произвольно, таким образом, следующую подстановку можно представить в следующих формах:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число подстановок n-й степени равно числу перестановок из n символов, то есть равно $n!$

Определение 13. Подстановка σ будет *четной*, если общее число инверсий в двух строках ее записи четно, и *нечетной* — в противоположном случае.

Число четных подстановок n-й степени равно числу нечетных перестановок n-й степени, то есть равно $\dfrac{n!}{2}$.

Подстановки σ, τ перемножаются в соответствии с общим правилом композиции отображений: $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$. Например, для подстановок

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В то же время

$$\tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

так что $\sigma \cdot \tau \neq \tau \cdot \sigma$.

Умножение подстановок подчиняется следующим правилам:

1) Умножение ассоциативно, т.е $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, для всех подстановок $\alpha, \beta, \gamma \in S_n$.

2) Подстановка

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

является единичным элементом в множестве S_n, то есть $\pi \cdot \varepsilon = \pi = \varepsilon \cdot \pi$.

3) Для каждой подстановки $\pi \in S_n$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

существует обратная π^{-1}: $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = e$, которая задается следующим образом:

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Удобным способом записи подстановок является разложение в циклы. Любая подстановка n-й степени может некоторые из символов оставлять на месте, другие же действительно перемещать.

Определение 14. *Циклом* называется такая подстановка, что при повторении ее достаточное число раз любой из перемещаемых ею символов может быть переведен в любой другой из этих символов.

Практическое разложение осуществляется следующим образом: начинаем с любой из действительно перемещаемых символов и выписываем за ним те символы, в которые он переходит при повторении подстановки, пока не вернемся к исходному символу. После этого "закрытия"цикла начинаем с одного из оставшихся действительно перемещаемых символов, получаем второй цикл и т.д.

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1,3)(2,5,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,5,6)(2)(3,8)(4,7).$$

Пусть дана подстановка n-й степени и пусть s есть число циклов.

Определение 15. Разность $n - s$ называется *декрементом* этой подстановки. Четность подстановки совпадает с четностью декремента этой подстановки.

Задачи для самостоятельного решения

28. Определить число инверсий в перестановках:

$a)$ $1, 9, 6, 3,\ 2, 5, 4, 7, 8,$

$b)$ $2, 3, 5, 4, 1,$

$c)$ $6, 3, 1, 2, 5, 4,$

$d)$ $7, 5, 6, 4, 1, 3, 2,$

$e)$ $1, 3, 4, 7, 8, 2, 6, 9, 5,$

$f)$ $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4.$

29. Считая, что $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ — исходное расположение, подобрать i и k так, чтобы

$a)$ перестановка $1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9$ была четной,

$b)$ перестановка $1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7$ была нечетной.

30. Определить число инверсий в перестановке и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка является четной, и тех, для которых она нечетна:

$a)$ $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1,\ 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n,$

$b)$ $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1,$

$c)$ $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n,$

$d)$ $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n,$

$e)$ $1, 5, \ldots, 4n-3, 3, 7, \ldots, 4n-1, 2, 6, \ldots, 4n-2, 4, 8, \ldots, 4n,$

$f)$ $4n, 4n-4, \ldots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \ldots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \ldots, 6, 2,$ $4n-3, 4n-7, \ldots, 5, 1.$

31. В какой перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?

32. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-ом месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

33. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-ом месте в перестановке чисел $1, 2, 3, \ldots, n$?

34. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и определить четность подстановок:

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$.

35. В следующих перестановках перейти от записи в циклах к записи двумя строками:

$a)$ (1,5)(2,3,4),

$b)$ (1,3)(2,5)(4),

$c)$ (7,5,3,1)(2,4,6)(8)(9),

$d)$ (1,2)(3,4),…,(2n-1,2n),

$f)$ (1,2,3,4,…,2n-1,2n).

36. Перемножить подстановки:

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$c)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^2$,

$e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$.

37. Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

38. Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Определители второго и третьего порядков

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 16. Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется *определителем матрицы второго порядка (или определителем второго порядка)* и обозначается: $|A|$, $\det A$, ΔA, Δ.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{30}$$

Определение 17. *Определителем третьего порядка* называется выражение вида:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \end{matrix} \tag{31}$$

Отметим несколько правил для построения выражения (31).

1. *Правило треугольников.* Выделим в этом определителе *главную диагональ*, образованную числами a_{11}, a_{22}, a_{33} и диагональ, образованную числами a_{31}, a_{22}, a_{13}, которую будем называть *побочной.* Вычисляем произведение элементов, стоящих на главной диагонали и два произведения чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Складываем эти три прозведения. Из полученной суммы вычитаем сумму произведений элементов, стоящих на побочной диагонали и двух произведений чисел, расположенных в вершинах двух равносторонних треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. На рисунке 1 это правило изображено схематически.

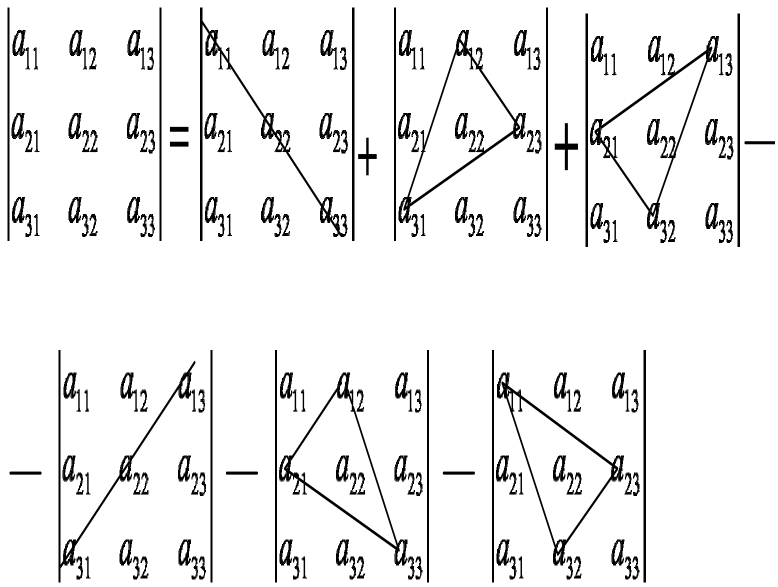

Рис. 3

2. *Правило Саррюса.* Припишем к матрице справа первый и второй столбцы и вычислим произведения элементов, стоящих на каждой из указанных шести прямых (смотри рисунок 2). Затем найдем сумму этих произведений, при этом произведения элементов на прямых, параллельных главной диагонали, возьмем со знаком плюс, а произведения элементов на прямых, параллельных побочной диагонали, – со знаком минус (согласно обозначениям на рисунке 2).

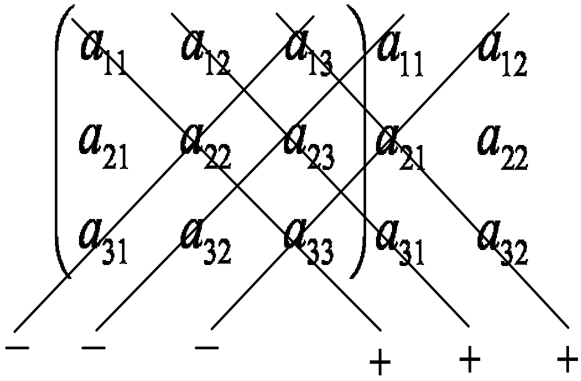

Рис. 4

Рассмотрим свойства определителей.

Свойство 1. При перемене местами двух соседних строк (или столбцов) определителя его знак меняется на противоположный, а абсолютная величина не изменяется.

Свойство 2. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Свойство 3. Умножение всех элементов некоторой строки (или столбца) определителя на число λ, равносильно умножению определителя на это число, то есть постоянный множитель можно выносить за знак определителя из любой строки или из любого столбца.

Свойство 4. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

Свойство 5. Если элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Если к элементам некоторой строки (или столбца) определителя прибавить соответственно элементы другой строки (или столбца), умноженные на действительное число λ, то величина определителя не изменится.

Свойство 7. Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот.

Свойство 8. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых, например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i}+b_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i}+b_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni}+b_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & b_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

39. Вычислить определители второго порядка:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$, *b*) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, *c*) $\begin{vmatrix} z & -y^2 \\ 1 & \bar{z} \end{vmatrix}$, где $z = x + iy$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$, *e*) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$, *f*) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix}$, *g*) $\begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ \sin x & \sin 2x \end{vmatrix}$.

40. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 5 \end{vmatrix} = 0$, *b*) $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ -y-3 & x-2 \end{vmatrix} = 25$,

c) $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$, *d*) $\begin{vmatrix} \sin 5x & \sin x \\ \cos x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$,

e) $\begin{vmatrix} z & |z| \\ -1 & z \end{vmatrix} = 0$, где $z = x + iy$.

41. Вычислить определители третьего порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, *b*) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, *c*) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, *d*) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$,

$$e)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}, \quad f)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad g)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}, \quad h)\ \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}.$$

42. Решить уравнения и неравенства:

$$a)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad b)\ \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \qquad d)\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 5.$$

43. Не вычисляя определителей проверить, что они делятся на $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}, \quad c)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad d)\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$$

44. Вычислить, используя свойства определителей:

$$a)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad d)\ \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}, \quad e)\ \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix}.$$

45. Не развертывая определителей, доказать следующие тождества:

$$a)\ \begin{vmatrix} a_1-xb_1 & a_1+xb_1 & c_1 \\ a_2-xb_2 & a_2+xb_2 & c_2 \\ a_3-xb_3 & a_3+xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$b)\ \begin{vmatrix} a_1+xb_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+xb_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+xb_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$c)\quad \begin{vmatrix} a_1+b_1i & a_1i+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2i & a_2i+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3i & a_3i+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$d)\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Определение определителя n-го порядка и его свойства. Теорема Лапласа

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Рассмотрим всевозможные произведения n элементов матрицы A, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, то есть произведения вида

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

где индексы $j_1, j_2, \dots, j_n$ составляют некоторую подстановку из чисел $1, 2, \dots, n$. Число таких произведений равно числу различных перестановок из n символов, то есть равно $n!$ Будем считать все эти произведения членами будущего определителя n-го порядка, соответствующего матрице (32).

Определение 18. *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице (32), называется следующая сумма

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}, \qquad (33)$$

распространенная на всевозможные различные перестановки $j = (j_1, \ldots, j_n)$. Число $t(j)$ равно числу инверсий в перестановке $j = (j_1, \ldots, j_n)$. Произведение $(-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ называется *членом определителя.*

Определение 19. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Определение 20. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Определители n-го порядка удовлетворяют свойствам 1)–8), перечисленным в предыдущем параграфе. Кроме того, определители n–го порядка удовлетворяют следующим свойствам:

Теорема 2 (О разложении по строке или столбцу). *Сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:*

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}. \tag{34}$$

Равенства (34) можно принять за правила вычисления определителей. Первое из них называется разложением Δ_n по элементам i-ой строки, а второе — разложением Δ_n по элементам j-го столбца.

Теорема 3 (Лапласа). *Пусть в определителе d порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leq k \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.*

Теорема Лапласа поволяет сводить вычисления определителя n-го порядка к вычислению нескольких определителей порядков k и $n-k$. Этих новых определителей может оказаться весьма много, и поэтому применять теорему Лапласа целесообразно лишь в том случае, если в определителе можно так выбрать k строк (или k столбцов), что многие из миноров k-го порядка, расположенных в этих строках, будут равны нулю.

Задачи для самостоятельного решения

46. Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

$a)$ $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$, $b)$ $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$,

$c)$ $a_{43}a_{21}a_{35}a_{12}a_{54}$, $d)$ $a_{61}a_{23}a_{45}a_{36}a_{12}a_{54}$,

$e)$ $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$, $f)$ $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$,

$g)$ $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$, $h)$ $a_{12}a_{23}a_{34}\ldots a_{n-1,n}a_{kk}$, $1 \le k \le n$.

47. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

$$a) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

48. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$$

входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.

49. Выбрать i и k так, чтобы произведение

$$a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$$

входило в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

50. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

51. Найти члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \quad \text{содержащие } x^4 \text{ и } x^3.$$

52. Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

53. Разлагая по 2-му столбцу, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

54. Вычислить определители четвертого порядка, пользуясь теоремой о разложении:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \; b) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \; c) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

55. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad f)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}, \qquad g)\ \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$h)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \ i)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \ j)\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Методы вычисления определителей n-го порядка

Основные понятия, формулы и теоремы

Рассмотрим основные методы вычисления определителей:

1) Метод эффективного понижения порядка.

В соответствии со свойством 9, вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю.

2) Метод приведения определителя к треугольному виду.

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно.

Задачи для самостоятельного решения

56. Вычислить определители 4-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$a)$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$, $c)$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,

$d)$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, $e)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, $f)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$,

$g)$ $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$, $h)$ $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$,

$$i)\ \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}, \qquad j)\ \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}.$$

57. Вычислить определители 5-го порядка методом эффективного понижения порядка:

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \qquad d)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix},$$

$$e)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

58. Вычислить определители n-го порядка методом приведения их к треугольному виду:

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix},$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{d)}\ \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}, \quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix},$$

$$\text{g)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \end{vmatrix}, \quad \text{h)}\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix},$$

$$\text{i)}\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{j)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix},$$

$$\text{k)}\ \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix}, \quad \text{l)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

m) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$, n) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$, o) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

8. Действия с матрицами

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 21. Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей размера* $m \times n$.

Матрицу A размера $m \times n$, на пересечении i-ой строки и j-го столбца которой находится число a_{ij}, обозначают так

$$A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m = n$ (число строк и число столбцов матрицы совпадают), то такая матрица называется *квадратной матрицей порядка* n.

Определение 22. *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера элементы которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$.

Для любых матриц A, B, C одинакового размера выполняются равенства:

1) $A + B = B + C$ (коммутативность);

2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность).

Определение 23. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ того же размера, что и матрица A с элементами $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i, j$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$ (ассоциативность);

2) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

Определение 24. *Линейной комбинацией матриц A и B* одинакового размера называется выражение виды $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$, где α, β — произвольные числа.

Определение 25. *Произведением $A \cdot B$ матриц A и B* (размеров $m \times n$ и $n \times p$ соответственно) называется матрица C размера $m \times p$, что

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Таким образом, каждый элемент c_{ij}, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Произведение существует, только если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства операции умножения матриц:

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);

2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);

4) $A \cdot B \neq B \cdot A$ — отсутствует коммутативность.

Определение 26. Матрицы A и B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$ называются *перестановочными матрицами.*

Определение 27. *Единичной матрицей* размера $n \times n$ называется матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица в произведении с квадратной матрицей такой же размерности ее не изменяет, то есть для любой матрицы D размерности $n \times n$ справедливо равенство $D \cdot E = E \cdot D = D$.

Задачи для самостоятельного решения

59. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ (если они существуют):

$a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$,

$b)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$c)$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$,

$d)$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

60. Найти линейные комбинации матриц:

$a)\quad 4A-5B-\lambda E,\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & -2\\ -3 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix},$

$b)\quad A-\lambda E,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3\\ 4 & 0 & 5\\ 6 & -7 & -8\end{pmatrix},$

$c)\quad 4A-7B,\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3\\ 2 & 0 & -3 & 1\\ 5 & -1 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5\\ -8 & 1 & 3 & 0\\ 4 & 2 & -2 & 5\end{pmatrix}.$

61. Найти матрицу A^n:

$a)\quad A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad b)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$

62. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A:

$a)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad$ b) $\quad A=\begin{pmatrix} 7 & -3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$

63. Вычислить $\begin{pmatrix} 17 & -6\\ 35 & 12\end{pmatrix}^5$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 17 & -6\\ 35 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -7 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

64. Вычислить $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 4 & -3\end{pmatrix}^6$, используя равенство

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & -5 & 4\end{pmatrix}.$$

9. Обратная матрица. Матричные уравнения

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 28. *Обратной матрицей* к квадратной матрице A называется такая матрица (обозначается A^{-1}), что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Если обратная матрица существует, то она единственная.

Определение 29. *Присоединенной матрицей* к квадратной матрице $A = (a_{ij})$ называется матрица $\widetilde{A} = (A_{ij})^T$, полученная транспонированием из матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij}.

Теорема 4. *Если квадратная матрица A — невырожденная (т.е. $|A| \neq 0$), то*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}. \tag{35}$$

Определение 30. *Элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие операции:

1) перемена местами двух строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной матрице A* (обозначается $B \sim A$).

Обратную матрицу можно искать двумя способами.

1. *Метод присоединенной матрицы* вычисления обратной матрицы состоит в применении формулы (35).

2. *Метод элементарных преобразований* вычисления обратной матрицы состоит в следующем. Приписывая справа к матрице A размера $n \times n$ единичную матрицу такого же размера, получим прямоугольную матрицу $B = (A|E)$ размера $n \times 2n$. С помощью элементарных преобразований над строками матрицы B приводим ее к виду $B_1 = (E|A^{-1})$.

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом

$$A \cdot X = B \tag{36}$$

$$X \cdot A = B \tag{37}$$

$$A \cdot X \cdot C = B \tag{38}$$

В этих уравнениях A, B, C, X – матрицы таких размеров, что все используемые операции умножения корректны (с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размеров).

Если в уравнениях (36), (37) матрица невырожденная, то их решения записываются следующим образом:

$$X = A^{-1} \cdot B, \tag{39}$$

$$X = B \cdot A^{-1}. \tag{40}$$

Если в уравнении (38) матрицы A и C невырождены, то его решение записывается так:

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

65. Найти обратную матрицу методом присоединенной матрицы:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix},$$

$$d) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad f) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

66. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

$$a)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\2&2&4\end{pmatrix},\quad b)\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix},\quad c)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix},\quad e)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\3&10&8\end{pmatrix},\quad f)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&6&4\\-4&-14&-6\end{pmatrix},$$

$$g)\begin{pmatrix}1&2&-3&4\\5&6&7&-2\\-1&0&1&2\\3&4&5&6\end{pmatrix},\quad h)\begin{pmatrix}1&2&3&-2&4\\2&6&2&1&0\\3&0&-1&1&2\\-1&4&0&5&-4\\5&-4&-1&-1&8\end{pmatrix}.$$

67. Решить матричные уравнения:

$$a)\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix},$$

$$b)\begin{pmatrix}-1&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1&0.5\\0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix},$$

$$c)\,X\cdot\begin{pmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&2&-1\\-1&-2&4\end{pmatrix},$$

$$d)\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1\\2\\10\end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&3&-1\\0&-2&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&0\end{pmatrix}.$$

10. Ранг матрицы

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 31. *Рангом матрицы* A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю. Ранг матрицы обозначается $rang(A)$ или через $r(A)$.

Определение 32. *Базисным минором* называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Определение 33. Элементы строки матрицы назовем *крайним*, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется *ступенчатой*, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

В матрицах A и B отмечены крайние элементы каждой строки:

$$\underset{\text{не ступенчатая}}{A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{-1} & -1 & 3 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{ступенчатая}}{B = \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \underline{-1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Теорема 5. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.*

Теорема 6. *Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.*

Методы нахождения ранга матрицы:

1. *Метод окаймляющих миноров* нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1) Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (т.е. элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A) = 0$.

2) Вычислить миноры второго порядка, содержащие M_1 (окаймляющие M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A) = 1$, если есть, то $r(A) \geq 2$. И т.д.

. . . .

k) Вычислять (если они существуют) миноры k-го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1} \neq 0$. Если таких миноров нет, или они все равны нулю, то $r(A) = k - 1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор k-го порядка, причем искать его нужно только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1} \neq 0$.

2. *Метод элементарных преобразований* нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу A приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками. Количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы A.

Задачи для самостоятельного решения

68. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор:

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix},$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad f)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$g)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad h)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

69. Найти ранг методом элементарных преобразований:

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \qquad d)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f)\ \begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}.$$

70. Найти ранг матрицы при различных значениях параметра λ:

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & \lambda \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть задана система из n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{41}$$

где числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называется *коэффициэнтами системы*, числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – *свободными членами.*

Определение 34. *Решением системы* (41) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Систему (41) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \tag{42}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица системы, вектор-столбец неизвестных, столбец свободных членов соответственно. Будем обозначать $\Delta = |A|$ – определитель матрицы системы.

Определение 35. Матрица $\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы.*

Теорема 7 (Крамера). *Система линейных уравнений (41), определитель которой отличен от нуля ($\Delta \neq 0$), обладает решением и притом только одним.*

Методы решения систем линейных уравнений с определителем, отличным от нуля.

1. Правило Крамера.

Если $\Delta \neq 0$, то система (41) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Пусть дана система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей

$$A \cdot X = B, \tag{43}$$

где $|A| \neq 0$. Система (43) имеет единственное решение, которое можно найти по формуле:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

3. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса). Рассмотрим метод решения систем линейных уравнений с произвольной матрицей, который называется *методом последовательного исключения неизвестных.*

Определение 36. Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называется *равносильными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 8. *При элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы, система переходит в равносильную систему.*

Пусть дана система (41). На основании этой теоремы запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$. Элементарными преобразованиями над строками матрицы, приведем ее к ступенчатому виду (все элементы ниже главной диагонали равны нулю). Эти действия называются *прямым ходом метода Гаусса.* После чего из системы, составленной на основе полученной матрицы, находим переменные с помощью последовательных подстановок (*обратный ход метода Гаусса*).

Задачи для самостоятельного решения

71. Найти значения параметров a, b при которых системы линейных уравнений нельзя решить по правилу Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 2ax - 3by = 0, \\ 3ax - 6by = ab. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} ax - by = f_1, \\ bx + ay = f_2. \end{cases}$$

72. Решить систему линейных уравнений с помощью правила Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18, \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -16, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5, \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

73. Решить систему уравнений матричным методом:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = 7, \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2, \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

74. Решить систему методом Гаусса:

$$a)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7, \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 13x_5 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 + 21x_5 = 17, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 57, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 10x_5 = 7. \end{cases}$$

12. Системы линейных уравнений общего вида

Основные понятия, формулы и теоремы

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \tag{44}$$

Определение 37. Если система (44) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Если система имеет более одного решения, то любое решение этой системы называется *частным решением*.

Пусть A – матрица системы. Тогда расширенная матрица системы имеет вид $\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\dotfill} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Теорема 9 (Кронекера-Капелли). *Система линейных уравнений (44) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы $\overline{A}$:*

$$r(A) = r(\overline{A}).$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы – выяснить, определена она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $r(A) < r(\overline{A})$ (то есть ранг матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы системы), то система несовместна.
2) Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместна и имеет единственное решение, то есть определена.
3) Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система совместна и имеет более одного решения, то есть неопределена.

Алгоритм метода исследования совместности систем линейных уравнений.

1) Привести к ступенчатому виду расширенную матрицу системы $\overline{A}$ с помощью метода элементарных преобразований. Если в процессе решения получаются нулевые строки, то вычеркнуть их. Найти $r(A)$ и $r(\overline{A})$.

2) Исследовать систему на совместность, используя теорему Кронекера-Капелли. Если $r(A) \neq r(\overline{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна. Если $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система совместна и имеет единственное решение, которое можно найти, применяя обратный ход метода Гаусса. Если $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система имеет более одного решения.

3) Если система имеет более одного решения, то определить базисный минор. Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора называются *главными неизвестными*, а остальные неизвестные – *свободными*. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать равносильную систему уравнений, перенося свободные неизвестные в правую часть системы.

5) Решить полученную равносильную систему относительно базисных неизвестных, применяя обратный ход метода Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать совместность методом Гаусса и найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

75. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$$

80. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$

81. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

82. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

83. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

84. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

85. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

86. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

87. $\begin{cases} 2x_1 + \lambda x_2 = 6, \\ \lambda x_1 + 8x_2 = 12, \end{cases}$

88. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ \lambda x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

89. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9. \end{cases}$

90. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

13. Однородные системы линейных уравнений. Связь между решениями однородной и неоднородной систем

Основные понятия, формулы и теоремы

Однородной системой линейных уравнений называют систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{45}$$

у которой все свободные члены уравнений равны нулю. Такая система в матричной форме имеет вид:

$$A \cdot X = 0.$$

Пусть $r = r(A)$ – ранг матрицы системы A.

Однородная система всегда совместна, так как существует *тривиальное* решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема 10. *Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела единственное решение (это будет нулевое решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы r совпадал с количеством неизвестных системы n, т.е. $r = n$. Если ранг матрицы системы $r < n$, то система имеет множество решений. Множество решений однородной системы с n неизвестными является подпространством в n-мерном векторном пространстве.*

Определение 38. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* (краткое обозначение: ФСР). Число векторов в ФСР равно $n - r$.

Теорема 11. *Общее решение однородной системы уравнений (45) описывается формулой*

$$X_{одн} = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n-r}X_{n-r} = \sum_{k=1}^{n-r} c_kX_k, \tag{46}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ *– произвольные числа, а* $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ *– ФСР системы (45).*

Иными словами: при любых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ формула (46) дает решение системы уравнений (45), и обратно, для любого решения X однородной системы уравнений (45) существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ такие, что решение X представимо в виде (46).

Алгоритм построения фундаментальной системы решения:

1) Привести матрицу системы A с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду. Найти ранг матрицы системы $r = r(A)$.

2) Исследовать систему уравнений на количество решений, используя теорему 10. Если $r = n$, то по теореме 10 система будет иметь только единственное решение. Если $r < n$, то система имеет множество решений и поэтому существует ФСР. Число векторов в ФСР равно $n - r$.

3) Разделить неизвестные на базисные и свободные. Число свободных неизвестных равно $n - r$.

4) Записать определитель единичной матрицы порядка, равного количеству $n - r$ свободных неизвестных.

5) По каждой строке определителя найти соответствующие решения системы. Для этого в качестве значений свободных неизвестных взять элементы строки и, решая эквивалентную подсистему, найти значения главных неизвестных.

6) Из полученных $n - r$ решений системы, составить фундаментальную систему решений.

Связь между решениями однородной и неоднородной систем

Пусть дана неоднородная система $AX = b$.

Определение 39. Однородную систему линейных уравнений $AX = 0$, получающуюся из неоднородной системы заменой в ней свободных членов нулями, называют *приведенной однородной системой* для системы $AX = b$.

Между решениями неоднородной и приведенной однородной систем существует тесная связь, которая описывается следующей теоремой:

Теорема 12. *Общее решение неоднородной системы $AX = b$ можно представить формулой*

$$X = X_{одн} + X_{част}, \tag{47}$$

где $X_{одн}$ – общее решение приведенной однородной системы $AX = 0$, а $X_{част}$ – какое-либо частное решение неоднородной системы $AX = b$.

Формула (47) позволяет находить общее решение неоднородной системы при известном ее частном решении, решая приведенную однородную систему.

Задачи для самостоятельного решения

Найти какую-нибудь фундаментальную систему решений и найти общее решение системы уравнений:

91. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 13x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 16x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

92. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

93. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

94. $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

95. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

96. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

Зная частное решение системы $X_{\text{част}}$, найти общее решение неоднородной системы уравнений:

98. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

99. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

100. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \end{cases} \quad X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$

101. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5, \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3, \end{cases}$ $X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы уравнений в зависимости от параметра λ

102. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

103. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 2\lambda x_3 = 0. \end{cases}$

104. $\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda^2 x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - \lambda x_3 = 0. \end{cases}$

106. Образуют ли строки каждой из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

14. Линейная зависимость векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 40. Упорядоченная система n чисел $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется *n-мерным вектором.*

Определение 41. *Суммой векторов* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ называется вектор

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

компоненты которого есть сумма соответствующих компонент слагаемых векторов.

Определение 42. *Произведением вектора* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *на число* k называется вектор

$$k \cdot \alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \ldots, k\alpha_n),$$

компоненты которого равны произведению на k соответственных компонент вектора α.

Определение 43. Вектор β называется *пропорциональным* вектору α, если $\beta = k\alpha$ для некоторого числа k. В аналитической геометрии такие векторы называют коллинеарными.

Определение 44. Вектор b называют *линейной комбинацией (конечной) системы векторов* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, если существуют такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_s$, что

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_s\alpha_s. \tag{48}$$

При этом говорят также, что *вектор β линейно выражается через векторы* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$.

Определение 45. Совокупность всех n-мерных векторов с действительными компонентами, рассматриваемая с определенными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется *n-мерным векторным пространством* $\mathbb{R}_n$.

Определение 46. Конечная система векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $c_1, c_2, \ldots, c_s$, не все равные нулю, что

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_s\alpha_s = 0. \tag{49}$$

В противном случае система векторов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ называется *линейно независимой.*

Определение 47. Конечная подсистема системы векторов S называется *максимальной линейно независимой подсистемой*, если эта подсистема векторов линейно независима, а добавление к ней хотя бы одного вектора из S делает подсистему линейно зависимой.

Определение 48. *Базисом (конечной) системы векторов* называют любую ее максимальную линейно независимую подсистему. Через такую подсистему линейно выражается любой вектор системы. В данной системе векторов все базисы имеют одно и тоже число векторов. Число векторов в базисе данной системы векторов называют *рангом системы векторов.*

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы A будем рассматривать как векторы n-мерного векторного простанства $\mathbb{R}_n$, а саму матрицу A – как конечную систему векторов.

2-ое определение ранга матрицы. Ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых столбцов (или строк) матрицы A.

Для определения линейного выражения вектора через заданную систему систему векторов, а также для проверки линейной зависимости векторов можно руководствоваться следующими правилами.

Правило 1. *Для того чтобы в n-мерном векторном простанстве $\mathbb{R}_n$ вычислить ранг системы векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, из этих векторов, как из строк, следует записать матрицу и вычислить ее ранг r. Если $r = s$, то система векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ является линейно независимой, иначе если $r < s$, то система векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ является линейно зависимой. Записав систему векторов в матрицу, по базисным минорам легко выделить все максимальные линейно независимые подсистемы данной системы.*

Правило 2. *Чтобы найти линейное выражение вектора β в n-мерном векторном простанстве $\mathbb{R}_n$ через систему векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, следует записать соотношение (48) и перейти к покомпонентным равенствам. В результате получается система линейных уравнений относительно $c_1, c_2, \dots, c_s$, решая которую можно найти коэффициенты линейного выражения вектора β через систему векторов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.*

Задачи для самостоятельного решения

107. Найти линейную комбинацию $3a_1 + 5a_2 - a_3$ векторов

$$a_1 = (4, 1, 3, -2),\ a_2 = (1, 2, -3, 2),\ a_3 = (16, 9, 1, -3).$$

108. Найти вектор x из уравнения

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0,$$

где

$$a_1 = (5, -8, -1, 2),\ a_2 = (2, -1, 4, -3),\ a_3 = (-3, 2, -5, 4).$$

109. Найти вектор x из уравнения

$$3(a_1 - x) + 2(a_2 + x) = 5(a_3 + x),$$

где

$$a_1 = (2, 5, 1, 3),\ a_2 = (10, 1, 5, 10),\ a_3 = (4, 1, -1, 1).$$

110. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов:

$a)\, a_1 = (1, -1, 2, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, 2),\ a_3 = (1, -1, 4, -1),$

$b)\ a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, 0, 1, 0), a_3 = (1, -3, 1, -3),$

$c)\ a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (2, 3, 1, 4), a_4 = (2, 1, 1, 3),$

$d)\ a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (2, 5, 7), a_3 = (3, 7, 10),$

$e)\ a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 1, -1), a_3 = (1, -1, 1, -1),$

$a_4 = (1, 1, -1, -1),$

$f)\ a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (4, 1, 2, 3), a_3 = (3, 4, 1, 2),$

$a_4 = (-1, -1, -1, -1).$

111. Вычислить ранги систем векторов:

$a)\, a_1 = (1, 3, 1, -3), a_2 = (2, 1, 1, 1), a_3 = (3, -11, -1, 19),$

$a_4 = (1, 12, 2, -16),$

$b)\, a_1 = (1, -2, 3, -1, -1), a_2 = (2, -1, 1, 0, -2), a_3 = (1, -1, -1, -1, 1),$

$a_4 = (1, 3, -10, 1, 3),$

$c)\ a_1 = (3, 2, -1, 2, 0, 1), a_2 = (4, 1, 0, -3, 0, 2), a_3 = (2, -1, -2, 1, 1, -3),$

$a_4 = (3, 1, 3, -9, -1, 6), a_5 = (3, -1, -5, 7, 2, -7),$

$d)\ a_1 = (2, 1, 1, 1), a_2 = (1, 3, 1, 1), a_3 = (1, 1, 5, 1),$

$a_4 = (1, -4, 4, 0), a_5 = (0, 1, -13, -1), a_6 = (2, 3, -3, 1).$

112. Вычислить ранги и указать всевозможные базы систем векторов

$a)\ a_1 = (1, -1, 2, 1), a_2 = (1, -1, 1, 2), a_3 = (1, -1, 4, -1),$

$b)\ a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, -2, 0, -3), a_3 = (1, 1, -2, 3),$

$a_4 = (2, 2, -4, 6),$

$c)\ a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 1, 1), a_3 = (1, 1, 3, 1), a_4 = (1, 2, -1, 1),$

$d)\ a_1 = (1, -3, 5, 6), a_2 = (1, -3, 1, 1), a_3 = (-1, -3, 13, 16),$

$a_4 = (1, -3, 9, 11).$

113. Найти какую-либо базу системы векторов и через нее выразить остальные векторы системы:

$a)\ a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (1, 0, 1), a_4 = (1, 3, 3), a_5 = (1, -1, 1)$

$b)\ a_1 = (3, 1, -2, 4), a_2 = (1, 3, 1, 2), a_3 = (1, 5, 0, 1), a_4 = (3, -5, 1, 7).$

Аналитическая геометрия в пространстве

15. Векторы. Скалярное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Основные операции над векторами

Определение 49. Величины, которые полностью определяются заданием своих числовых значений, называются *скалярными величинами* (например, масса, длина, площадь, объем). Величины, для задания которых необходимо знать еще и направление, называются *векторными величинами* (например, сила, скорость, ускорение). *Вектором* $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок: A – начальная точка, B – конечная точка (смотри рисунок 5).

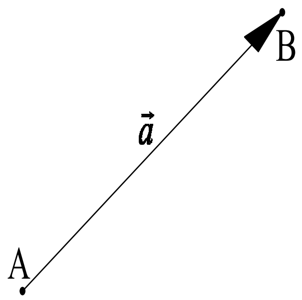

Рис. 5

Также будем обозначать векторы маленькими латинскими буквами со стрелкой: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Определение 50. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ называются *противоположными*.

Определение 51. Если начальная и конечная точки вектора совпадают, то такой вектор называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$.

Определение 52. Два вектора называются *равными*, если они имеют общее направление и одинаковые длины.

Существует два правила геометрического сложения векторов.

1. При нахождении суммы векторов $\vec{a} + \vec{b}$ по *правилу треугольника* от конечной точки вектора $\vec{a}$ откладывают вектор $\vec{b}$. Тогда вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен от начальной точки вектора $\vec{a}$ к конечной точке вектора $\vec{b}$ (смотри рисунок 6).

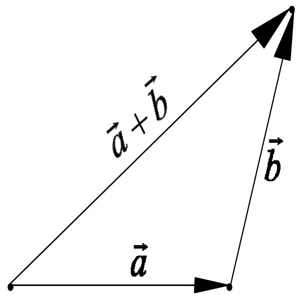

Рис. 6. Сложение векторов по правилу треугольников

2. При нахождении суммы векторов $\vec{a}+\vec{b}$ по *правилу параллелограмма* нужно отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки и построить на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм. Тогда вектор-диагональ параллелограмма, выходящий из общей начальной точки векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор суммы $\vec{a} + \vec{b}$ (смотри рисунок 7).

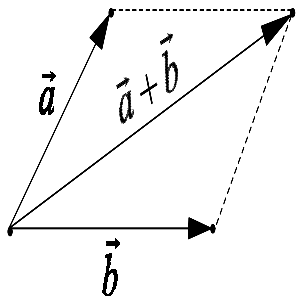

Рис. 7. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Определение 53. *Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется новый вектор $\lambda\vec{a}$*, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно ему при $\lambda < 0$. На рисунке 8 изображены векторы $\vec{a}$, $-2 \cdot \vec{a}$, $3 \cdot \vec{a}$, $\dfrac{1}{2} \cdot \vec{a}$.

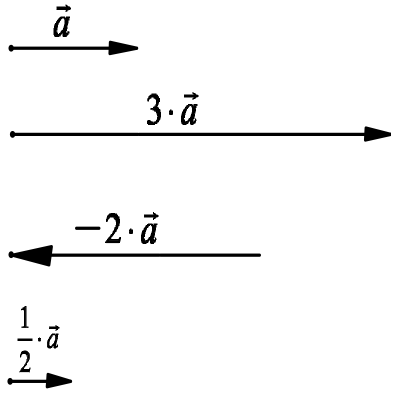

Рис. 8

Проекция точки и вектора на ось

Определение 54. *Осью* называется прямая, на которой выделено одно из ее направлений (на рисунке 9 оно обозначается стрелкой). Каждую ось можно задать *направляющим вектором*, то есть любым вектором, лежащим на ней и имеющим то же направление.

Определение 55. Пусть задана ось l и некоторая точка M (рисунок 9). Плоскость, проходящая через точку M перепендикулярно оси l, пересечет ее в некоторой точке M_1, которая называется *проекцией точки M на ось l*. Если $M \in l$, то $M_1 = M$. Если $M \notin l$, то M_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l.

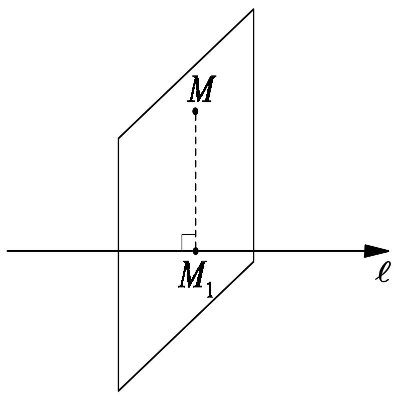

Рис. 9. Проекция точки на ось

Определение 56. *Проекцией $pr_{\overrightarrow{l}}\,\overrightarrow{AB}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось вектора* $\overrightarrow{l}$ называется длина отрезка A_1B_1, взятая со знаком плюс, если векторы

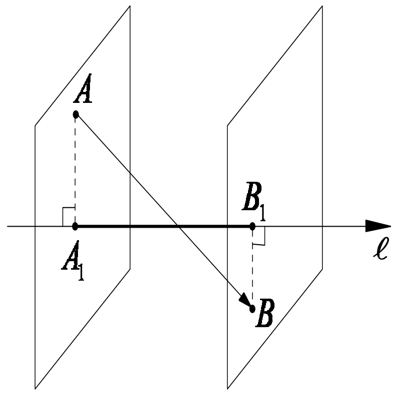

Рис. 10. Проекция вектора на ось другого вектора

$\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{l}$ одинаково направлены, и со знаком минус, если направления векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{l}$ противоположны. Здесь A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось вектора $\overrightarrow{l}$ (смотри рисунок 10).

Свойства проекций

1) Если два вектора равны, то равны и их проекции (см. рис. 11):

$$\vec{a} = \vec{b} \;\Rightarrow\; pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} = pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{b}. \tag{50}$$

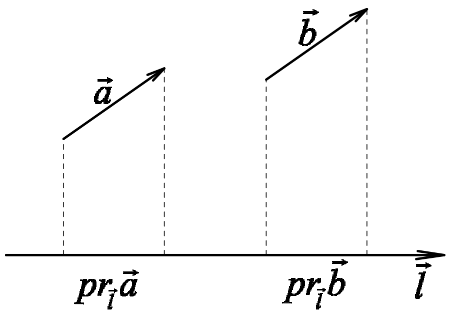

Рис. 11. Проекции двух равных векторов

2) Пусть φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью $\overrightarrow{l}$ (см. рис. 12). Тогда

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi. \tag{51}$$

3) Пусть α – произвольное действительное число. Тогда

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,(\alpha\vec{a}) = \alpha pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a}. \tag{52}$$

4) Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов, то есть

$$pr_{\overrightarrow{l}}\,(\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{a} + pr_{\overrightarrow{l}}\,\vec{b}. \tag{53}$$

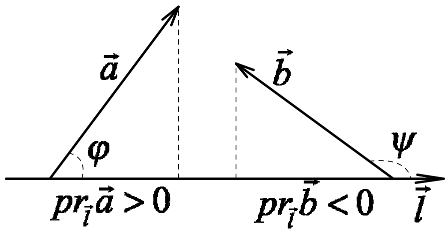

Рис. 12. Угол между вектором и осью

Прямоугольная система координат

Определение 57. Три взаимно перпендикулярные прямые Ox, Oy, Oz образуют *прямоугольную систему координат в пространстве* (смотри рисунок 13). Точка O называется *началом координат.* Первая прямая Ox называется *осью абцисс*, вторая прямая Oy – *осью ординат*, третья прямая Oz – *осью апликат.* Плоскости XOY, YOZ, ZOY называются *координатными плоскостями.*

Определение 58. Отложим на осях Ox, Oy, Oz в положительном направлении векторы единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. Эти векторы называются *основными векторами или ортами системы координат.*

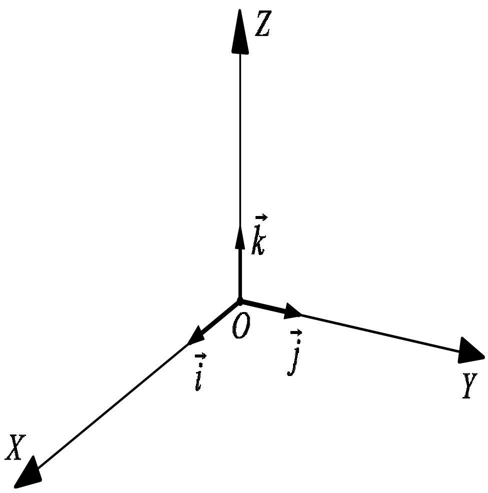

Рис. 13. Прямоугольная система координат

Прямоугольные координаты точки

Определение 59. Опустим перепендикуляр из точки M на координатную плоскость XOY, получим точку M_{xy}. Затем из точки M_{xy} проведем прямые, параллельные осям, получим точки M_x и M_y. Точка M_z – это точка пересечения прямой Oz и плоскости, проходящей через точку M параллельно координатной плоскости XOY (смотри рисунок 14). Упорядоченная тройка чисел (x, y, z) задает *прямоугольные координаты точки* M. Координата x называется *абциссой точки* M, y – *ординатой*, z – *апликатой.*

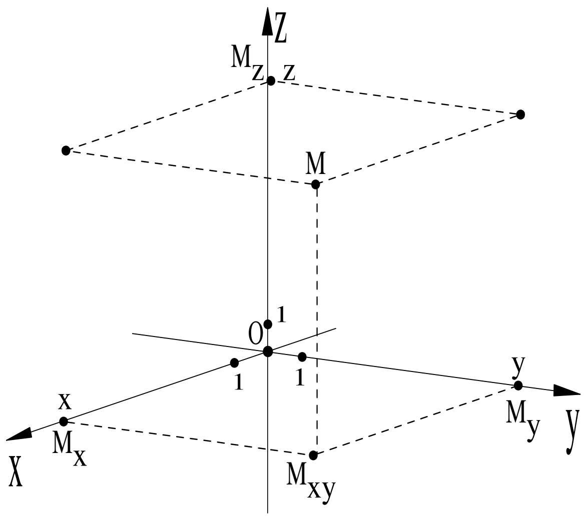

Рис. 14. Координаты точки

Прямоугольные координаты вектора

Определение 60. Прямоугольными координатами вектора $\vec{m}$ называются проекции вектора $\vec{m}$ на оси координат.

Например, найдем координаты вектора $\vec{m}$, изображенного на рисунке 15. Для этого через точку O' проводим оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно равнонаправленные с осями координат OX, OY, OZ. Через точку M проводим плоскости MP, MQ, MR, параллельные координатным плоскостям. Плоскости MP, MQ, MR пересекут оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ соответственно в точках P, Q, R. Первая координата вектора $\vec{m}$ есть длина отрезка $O'P$, взятая со знаком минус; вторая координата вектора $\vec{m}$ есть длина вектора $O'Q$, взятая со знаком минус; третья координата вектора $\vec{m}$ есть длина вектора $O'R$, взятая со знаком плюс. При масштабе рисунка 15, получаем $\vec{m} = (x; y; z) = (-4; -3; 2)$.

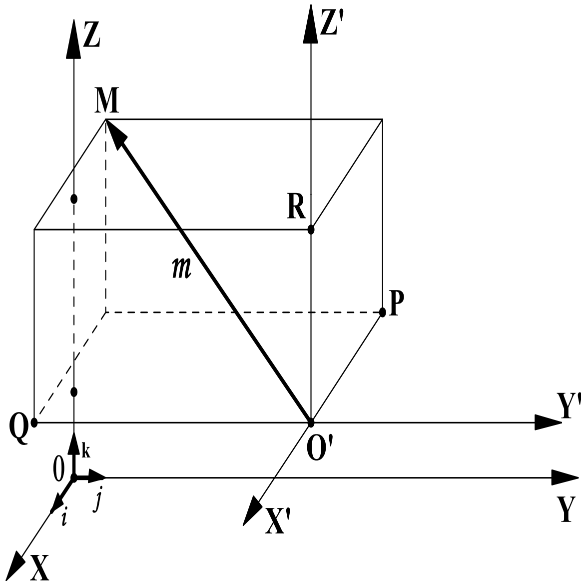

Рис. 15. Проекции вектора на оси координат

Отметим, что основные векторы имеют следующие координаты: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Выражения вектора через координаты

Каждый вектор $\vec{m}$ равен сумме произведений трех основных векторов на соответствующие координаты вектора $\vec{m}$:

$$\vec{m} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (54)$$

Например, при обозначениях рисунка 15 имеем $\vec{m} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Выражения вектора через координаты его начала и конца

Определение 61. Пусть даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда *координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ вычисляются по следующей формуле

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \qquad (55)$$

Модуль вектора и расстояние между двумя точками

Определение 62. *Модулем или длиной вектора* $|\vec{a}|$ называется длина отрезка, изображающего вектор. Если вектор $\vec{a}$ задан прямоугольными координатами $\vec{a} = (x, y, z)$, тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{56}$$

Расстояние ρ между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$\rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{57}$$

Направляющие косинусы вектора

Определение 63. Направление вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ определяется углами α, β, γ, образованными вектором $\vec{a}$ с положительными направлениями осей Ox, Oy и Oz соответственно (смотри рисунок 16). Косинусы этих углов называются *направляющими косинусами вектора* $\vec{a}$ и определяются по следующим формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \tag{58}$$

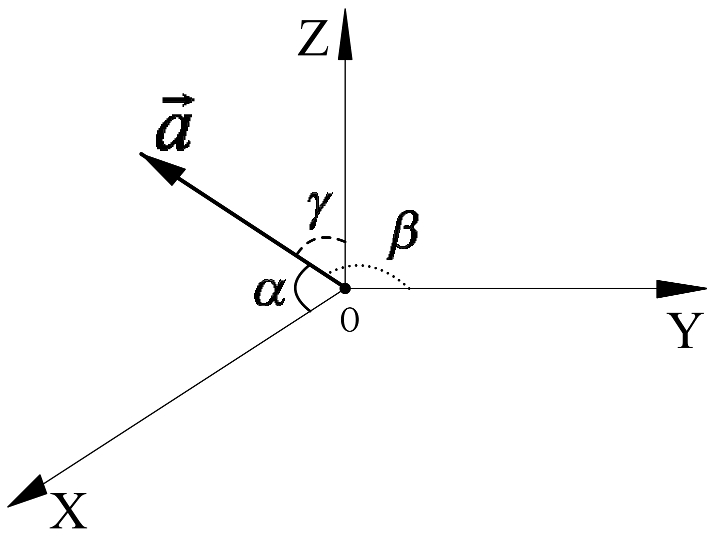

Рис. 16. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$

Направляющие косинусы удовлетворяют следующему соотношению:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{59}$$

Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ можно задать следующим образом

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot (\cos\alpha\,,\ \cos\beta\,,\ \cos\gamma). \tag{60}$$

Признак коллинеарности векторов

Определение 64. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *коллинеарны* тогда и только тогда, когда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{61}$$

Таким образом, если вектор $\vec{a}$ – не нулевой, то любой вектор $\vec{b}$, *коллинеарный* с ним, можно представить в виде

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}. \tag{62}$$

где число $\lambda = \pm\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, причем λ положительно, если вектор $\vec{b}$ одинаково направлен с вектором $\vec{a}$ и отрицательно – в противоположном случае.

Координаты середины отрезка

Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — середина отрезка M_1M_2, тогда координаты точки M_0 можно вычислить по формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{63}$$

Определение и свойства скалярного произведения

Определение 65. *Скалярным произведением вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними. Скалярное произведение обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$. Согласно определению

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{a,\ b}). \tag{64}$$

Основные свойства скалярного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}); \tag{65}$$

$$(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}); \tag{66}$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}); \tag{67}$$

Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей

Зная координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольной системе координат, для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно воспользоваться следующей формулой:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{68}$$

Равенство (68) называется *формулой, выражающей скалярное произведение через координаты сомножителей.*

Признак перпендикулярности векторов

Определение 66. Два ненулевых вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *перпендикулярны*, тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{69}$$

Геометрические свойства скалярного произведения

1. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{70}$$

2. При вычислении проекции вектора $\vec{m}$ на ось, задаваемую вектором $\vec{n}$ можно воспользоваться формулой:

$$pr_{\vec{n}}\, \vec{m} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{|\vec{n}|} = \frac{(\vec{m}, \vec{n})}{\sqrt{(\vec{n}, \vec{n})}}. \tag{71}$$

3. Длину вектора $\vec{a}$ можно вычислить также по следующей формуле

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \quad \text{или} \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}. \tag{72}$$

Задачи для самостоятельного решения

114. *a*) Единичный вектор $\vec{a}$ образует равные тупые углы с основными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найти координаты вектора $\vec{a}$.

b) Единичный вектор $\vec{a}$ образует с вектором $\vec{i}$ угол 30^0, а с ортами $\vec{j}$ и $\vec{k}$ – равные острые углы. Вычислить сумму координат вектора $\vec{a}$.

115. Составить таблицу скалярного умножения орт системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

116. *a*) Найти координаты вектора $\vec{x}$, параллельного вектору $(6; -8; -7,5)$, если известно, что $|\vec{x}| = 50$ и вектор $\vec{x}$ образует с осью Oz острый угол.

b) Даны два вектора $\vec{a} = (1, -2, 4)$ и $\vec{b} = (3, 1, -5)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен оси Oy и удовлетворяет условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = -3$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 8$.

c) Даны три вектора $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (4, 3, -5)$, $\vec{c} = (7, -2, -6)$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям: $(\vec{x}, \vec{a}) = 8$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 0$, $(\vec{x}, \vec{c}) = 10$.

d) Найти координаты вектора $\vec{x}$, параллельного вектору $\vec{a} = (1, 2, -3)$, если известно, что $(\vec{x}, \vec{a}) = 28$.

117. *a*) Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a} - 2\vec{b}$ на ось вектора $\vec{c}$.

b) Даны векторы $\vec{a} = -4\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{b} + \vec{c}$ на ось вектора $\vec{a} - \vec{c}$.

118. *a*) Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные векторы и $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Найти скалярное произведение векторов $(3\vec{a} - 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$.

b) Пусть $|\vec{a}| = 2$, $\vec{b} = \sqrt{3}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. Найти скалярное произведение векторов $(\vec{a} + 2\vec{b}, \vec{a} - \vec{b})$.

119. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами, и углы между ними:
a) $\vec{a} = (3, -4, 0)$, $\vec{b} = (5, 12, 0)$, b) $\vec{a} = (2, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, -1)$.

120. Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

121. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{(p, q)} = \dfrac{\pi}{4}$.

122. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{a} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

123. В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Вычислить угол между ними.

124. Зная векторы, образующие треугольник: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

125. Зная разложение вектора $\overrightarrow{Q} = 6\vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\overrightarrow{Q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

126. Обозначив через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ стороны ромба, выходящие из общей вершины, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

127. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\widehat{(a\,,\,b)} = \dfrac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента α векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

128. Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны.

129. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$,

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -7\vec{a} + 2\vec{b}$. Вычислить длину медианы $\overrightarrow{AM}$ и высоты $\overrightarrow{AD}$ треугольника ABC.

16. Векторное и смешанное произведение векторов

Основные понятия, формулы и теоремы

Правые и левые системы векторов

Определение 67. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой системой*, если наблюдателю, находящемуся в конечной точке вектора $\vec{c}$, поворот вектора $\vec{a}$, совмещающий его с вектором $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки (рисунок 17). Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке, то система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *левой тройкой* (рисунок 18).

Например, основные векторы прямоугольной системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образую правую тройку. Система же $\vec{j}$, $\vec{i}$, $\vec{k}$ (векторы те же, но порядок их другой) – левая.

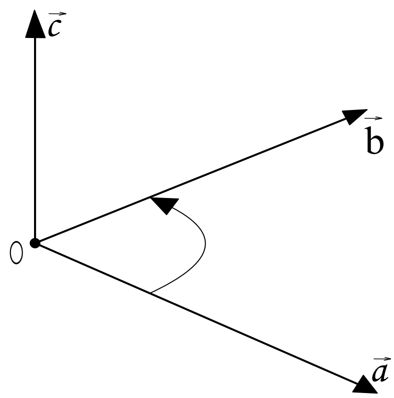

Рис. 17. Правая система векторов

Определение 68. Если имеем две системы трех векторов и каждая из них правая или левая, то говорят, что эти системы имеют *одинаковую ориентацию*. Если же одна система правая, а другая левая, то говорят, что системы имеют *противоположную ориентацию*.

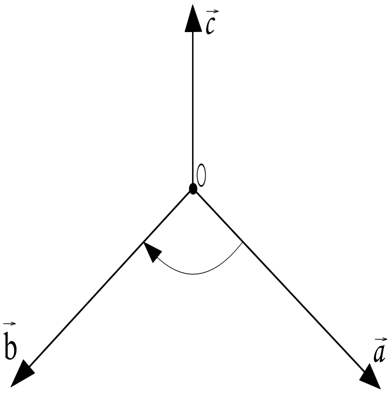

Рис. 18. Левая система векторов

При однократной перестановке двух векторов система меняет ориентацию. Система сохраняет ориентацию при круговой перестановке векторов, показанной на рисунке 19 для правой системы векторов и на рисунке 20 для левой.

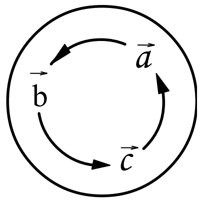

Рис. 19. Круговая ориентация правой системы векторов

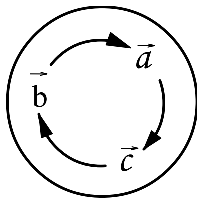

Рис. 20. Круговая ориентация левой системы векторов

Например, из правой системы векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ круговой перестановкой получаем правую систему $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{i}$, а из последней – правую систему $\vec{k}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$. Правую систему векторов нельзя совместить ни с какой левой.

Определение и основные свойства векторного произведения векторов

Определение 69. *Векторным произведением* $[\vec{a}, \vec{b}]$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который строится следующим образом:

1) модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма (ри-

сунок 21), построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{a, b}). \tag{73}$$

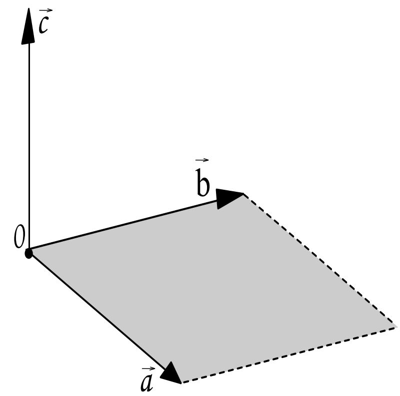

Рис. 21. Параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

2) направление вектора $\vec{c}$ перпендикулярно к плоскости упомянутого параллелограмма.

3) направление вектора $\vec{c}$ выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ составляли правую систему.

Основные свойства векторного произведения векторов:

$$[\vec{a}, \vec{a}] = 0; \tag{74}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]; \tag{75}$$

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}], \quad \text{где } \lambda - \text{это число;} \tag{76}$$

$$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]; \tag{77}$$

Выражение векторного произведения через координаты сомножителей

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{78}$$

Нужно разложить этот определитель по первой строке. Тогда коэффициенты при $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ равны соответственно первой, второй и третьей координатам вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометрические свойства векторного произведения

1. Для вычисления *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (смотри рисунок 21) применяется формула

$$S_{\square} = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|. \tag{79}$$

2. Для вычисления *площади треугольника*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (смотри рисунок 22) применяется формула

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|. \tag{80}$$

3. *Высота $H_{\square}$ параллелограмма и высота $H_{\triangle}$ треугольника, проведенная к вектору $\vec{a}$*, определяются по формуле

$$H_{\square} = H_{\triangle} = \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{\sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}}. \tag{81}$$

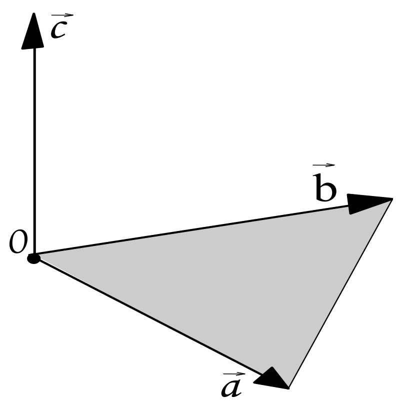

Рис. 22. Треугольник, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Определение и основные свойства смешанного произведения

Определение 70. *Смешанным произведением векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$

на вектор $\vec{c}$, то есть

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}). \tag{82}$$

Основные свойства смешанного произведения векторов:

1. Имеют место равенства:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]). \tag{83}$$

2. При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется, при перестановке двух сомножителей – меняет знак на обратный:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}). \tag{84}$$

3. Свойство распределительности:

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{d}). \tag{85}$$

4. Свойство сочетательности:

$$(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}) = \lambda(\vec{a},\vec{b},\vec{c}). \tag{86}$$

5. Смешанное произведение, имеющее хотя бы два равных сомножителя, равно нулю, например

$$(\vec{a},\vec{a},\vec{c}) = 0. \tag{87}$$

Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Если заданы координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в прямоугольной системе координат, то смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$(\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{88}$$

Определение и условие компланарности векторов

Векторы $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ лежат в одной плоскости, то есть *компланарны*, тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю, то есть

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (89)$$

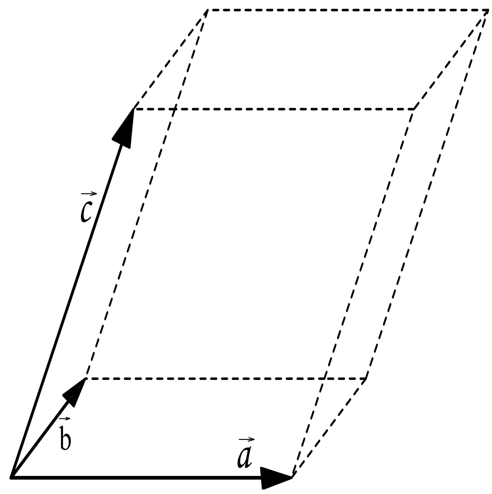

Рис. 23. Параллелепипед, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Геометрические свойства смешанного произведения

1. *Объем параллелепипеда*, построенного на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23), определяется по формуле:

$$V_{\text{парал}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad (90)$$

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

2. *Объем пирамиды*, построенной на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$,

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24), определяется по формуле:

$$V_{\text{пирам}} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{91}$$

где знак плюс выбирается, если определитель третьего порядка равен положительному значению, и знак минус – в противоположном случае.

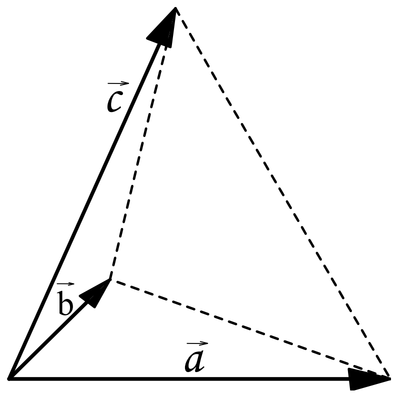

Рис. 24. Пирамида, построенная на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

3. Пусть дан параллеллипипед, построенный на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 23). Высоту параллелипипеда, которая проведена к нижнему основанию, образованному векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле:

$$H_{\text{парал}} = \frac{V_{\text{парал}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \tag{92}$$

4. Пусть дана пирамида, построенная на векторах $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ (рисунок 24). Высоту пирамиды, которая проведена к основанию, образованному векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле:

$$H_{\text{пирам}} = \frac{3 \cdot V_{\text{пирам}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}. \tag{93}$$

Задачи для самостоятельного решения

130. Составить таблицу векторного умножения орт системы координат $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

131. Найти векторное произведение векторов $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$:
a) $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\quad b$) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$.

132. Упростить выражение:
a) $\left[3\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} + 5\vec{b}\right]$, $\quad b$) $\left[2\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{a} + 4\vec{b}\right]$, $\quad c$) $\left[4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}, \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}\right]$.

133. a) Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$. Найти площадь треугольника и длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

b) Даны векторы $\vec{a} = (-4, -8, 8)$, $\vec{b} = (4, 3, 2)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними, площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

134. a) Пусть $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{a\,,\,b}) = 60^0$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.

b) Пусть $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{a\,,\,b}) = 150^0$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$.

135. a) Найти объем тетраэдра с вершинами $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-4, -3, 7)$.

b) Вычислить объем параллелепипеда с вершинами $A(4, 3, 0)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(3, 4, 1)$, $D(5, 6, 2)$ и длину высоты, опущенной из вершины D.

136. Проверить, компланарны ли следующие вектора:
a) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\quad \vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\quad \vec{r} = 7\vec{a} + 14\vec{b} - 13\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные орты.
b) $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\quad \vec{b} = (1, -1, 3)$, $\quad \vec{c} = (1, 9, -11)$,
c) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$, $\quad \vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$, $\quad \vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные орты.
d) $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\quad \vec{b} = (2, 1, 2)$, $\quad \vec{c} = (3, -1, -2)$.

137. Проверить, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости:

$a)$ $A(5,-1,-1)$, $B(4,2,2)$, $C(5,3,1)$, $D(8,0,-5)$,

$b)$ $A(3,-4,1)$, $B(2,-3,7)$, $C(1,-4,3)$, $D(4,-3,5)$.

138. $a)$ Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

$b)$ Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=5$, $|\vec{n}|=3$ и $\widehat{m\,,\,n}=\dfrac{\pi}{6}$

$c)$ Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$, вычислить длину его высоты $\overrightarrow{CD}$ при условии, что $\vec{p}$, $\vec{q}$ – перпендикулярные друг другу орты.

139. Дан вектор $\overrightarrow{Q} = [3\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p}, \vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p}]$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.

140. Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ и $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}+\vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты.

141. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

142. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах:

$a)$ $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$ и $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$, где $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты,

$b)$ $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$ и $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$, где $|\vec{m}|=\dfrac{1}{2}$, $|\vec{n}|=3$, $\widehat{m\,,\,n}=135$.

143. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трех векторах $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}-5\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}+4\vec{r}$ и $\vec{c}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Кроме того, известно, что $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

17. Плоскость

Основные понятия, формулы и теоремы

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Определение 71. Пусть $\vec{n}$ – некоторый ненулевой вектор, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка. *Плоскостью* P называется множество точек M таких, что векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны:

$$P = \{M \mid \overrightarrow{M_0M} \text{ перпендикулярен } \vec{n}\}. \tag{94}$$

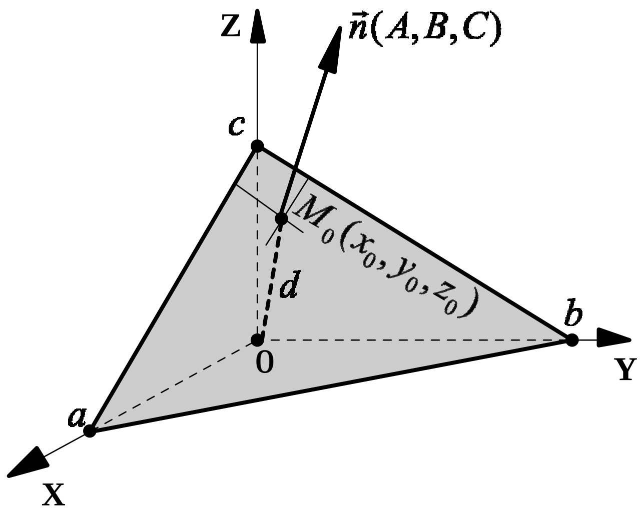

Рис. 25

Определение 72. Плоскость (рисунок 25), проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярная к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, задается следующим уравнением:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \tag{95}$$

Равенство (95) называется *уравнением плоскости, проходящим через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$.*

Общее уравнение плоскости

Определение 73. Плоскость в декартовой системе координат $OXYZ$ может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{96}$$

которое называется *общим уравнением плоскости.*

Коэффициенты (A, B, C) задают *нормальный вектор плоскости* $\vec{n}$, то есть вектор, перпендикулярный этой плоскости (смотри рисунок 25). Коэффициент D связан с расстоянием d от плоскости до начала координат формулой

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{97}$$

При любом $\lambda \neq 0$ уравнение

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + \lambda D = 0 \tag{98}$$

определяет ту же плоскость, то есть общее уравнение плоскости не единственно.

Частные случаи расположения плоскостей относительно прямоугольной системы координат

1. Уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{99}$$

в котором свободный член $D = 0$ задает плоскость, проходящую через начало координат (рисунок 26).

2. Рассмотрим случай, в котором один из коэффициентов при текущих координатах A, B или C равен нулю, но $D \neq 0$. Возможны три варианта:

2.1. Уравнение

$$Ax + By + D = 0, \tag{100}$$

в котором $C = 0$, задает плоскость, параллельную оси OZ (рисунок 27).

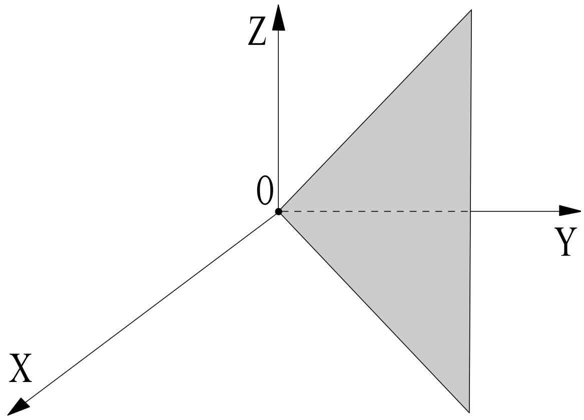

Рис. 26. Плоскость проходит через начало координат

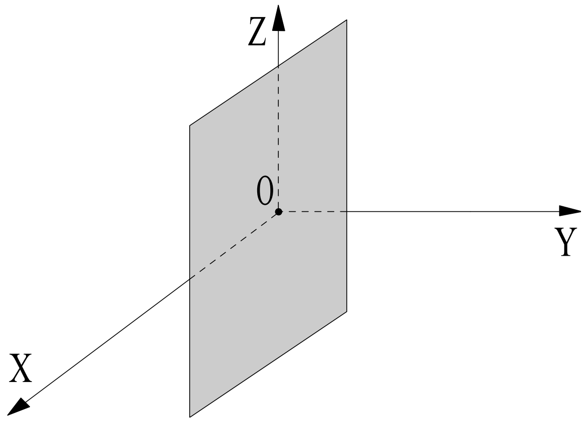

Рис. 27. Плоскость проходит параллельно оси OZ

2.2. Уравнение

$$Ax + Cz + D = 0, \tag{101}$$

в котором $B = 0$, задает плоскость, параллельную оси OY.

2.3. Уравнение

$$By + Cz + D = 0, \tag{102}$$

в котором $A = 0$, задает плоскость, параллельную оси OX.

Замечание 2. Из уравнений (100)–(102) можно сделать вывод, что если в общем уравнении плоскости нет буквы z и $D \neq 0$, то плоскость параллельна оси OZ и т.п.

3. Один из коэффициентов при текущих координатах A, B или C равен нулю и $D = 0$. В этом случае имеем:

3.1. Если $C = D = 0$, то уравнение

$$Ax + By = 0 \tag{103}$$

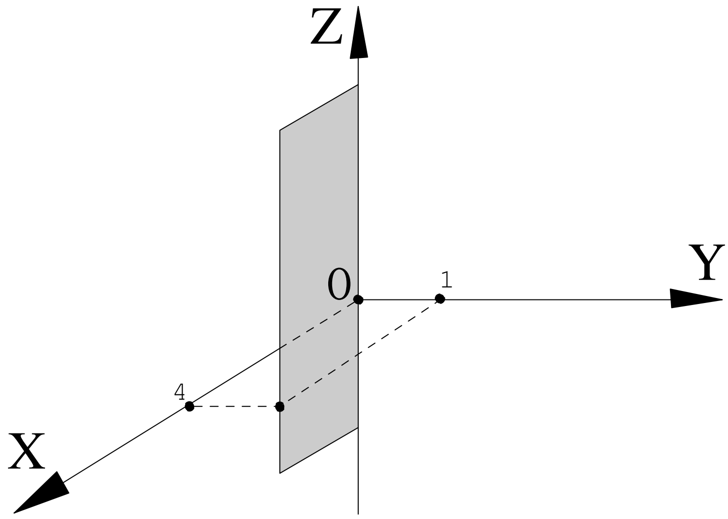

Рис. 28. Плоскость проходит через ось OZ

задает плоскость, которая проходит (содержит) ось OZ (рисунок 28).

3.2. В случае, когда $B = D = 0$ уравнение

$$Ax + Cz = 0 \tag{104}$$

определяет плоскость, содержащую ось OY.

3.3. Пусть $A = D = 0$, тогда

$$By + Cz = 0 \tag{105}$$

представляет плоскость, проходящую через ось OX.

Замечание 3. Из уравнений (103)–(105) следует, что если коэффициент A, B или C при какой-нибудь переменной равен нулю и $D = 0$, то плоскость проходит через соответствующую координатную ось.

4. Два коэффициента при текущих координатах A, B или C равны нулю, при этом $D \neq 0$. Возможны три случая:

4.1. Если $A = B = 0$, то уравнение

$$Cz + D = 0 \tag{106}$$

задает плоскость, параллельную координатной плоскости XOY (рисунок 29).

4.2. Аналогично, если $A = C = 0$, то уравнение

$$By + D = 0 \tag{107}$$

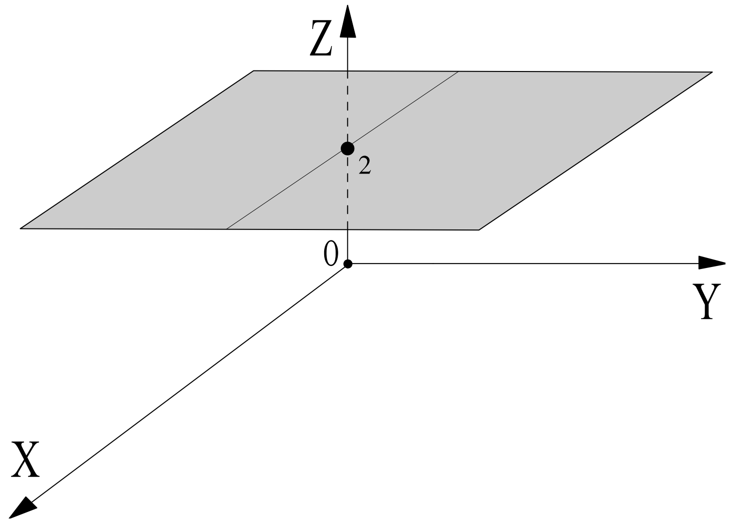

Рис. 29. Плоскость проходит параллельно координатной плоскости XOY

определяет плоскость, параллельную координатной плоскости XOZ.

4.3. И, наконец, если $B = C = 0$, то уравнение

$$Ax + D = 0 \tag{108}$$

представляет плоскость, параллельную координатной плоскости ZOY.

Замечание 4. Из уравнений (106)–(108) заключаем, что если коэффициенты A, B или C при двух переменных равны нулю и $D \neq 0$, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости.

5. Два коэффициента при текущих координатах A, B или C равны нулю и $D = 0$, тогда имеем:

5.1. Если $B = C = D = 0$, то уравнение (96) принимает вид $x = 0$ и определяет координатную плоскость ZOY (рисунок 30).

Рис. 30. Координатная плоскость ZOY

5.2. В случае $A = C = D = 0$, то из (96) получаем уравнение $y = 0$, которое определяет координатную плоскость XOZ (рисунок 31).

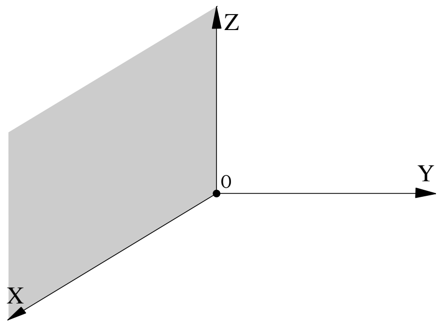

Рис. 31. Координатная плоскость XOZ

5.3. Аналогично, если $A = B = D = 0$, то получаем уравнение $z = 0$, представляющее координатную плоскость XOY (рисунок 32).

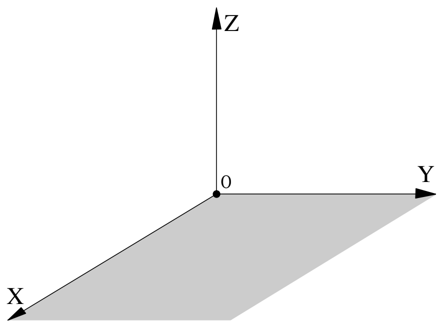

Рис. 32. Координатная плоскость XOY

Уравнение плоскости в отрезках

Определение 74. Если известны абцисса a, ордината b и апликата c точек пересечения плоскости с координатными осями OX, OY и OZ соответственно (рисунок 33), то можно составить *уравнение плоскости в отрезках*:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{109}$$

Например, на рисунке 33 представлена плоскость, которая отсекает на осях координат отрезки $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

Из общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно получить уравнение плоскости в отрезках. Для этого надо перенести коэффициент D в правую часть и разделить обе части полученного уравнения на $-D$.

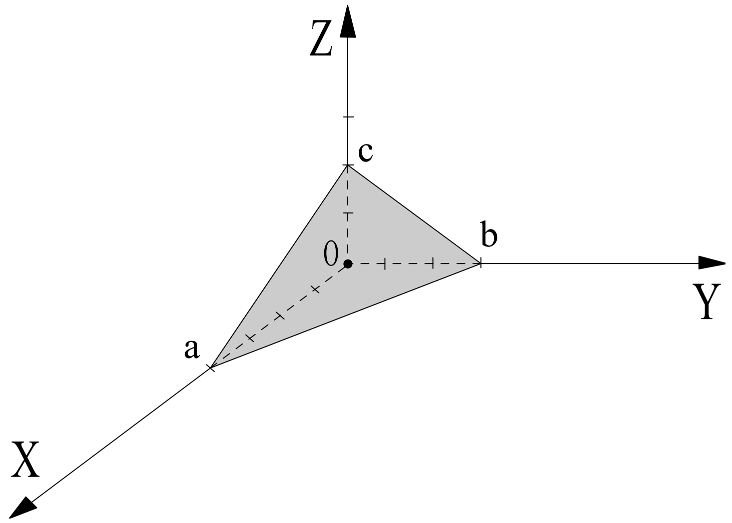

Рис. 33. Уравнение плоскости в отрезках

Нормальное уравнение плоскости

Определение 75. Уравнение плоскости

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0, \tag{110}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали плоскости, p – расстояние от начала координат до плоскости (то есть длина отрезка $|OM|$ на рисунке 34), называется *нормальным уравнением плоскости.*

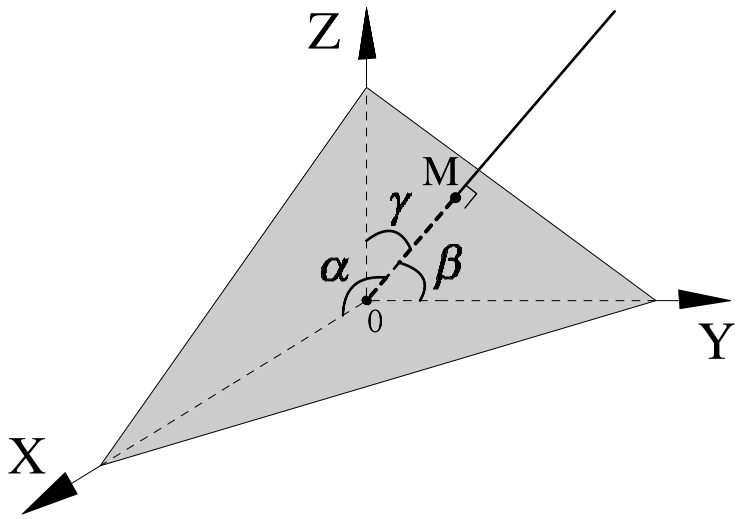

Рис. 34. Нормальное уравнение плоскости

Из общего уравнения плоскости (96) можно получить нормальное уравнение плоскости, умножив обе части уравнения плоскости

$Ax+By+Cz+D=0$ на *нормирующей множитель* $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак которого противоположен знаку D.

Расстояние от точки до плоскости

Расстояние ρ от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ (смотри рисунок 35) равно

$$\rho=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (111)$$

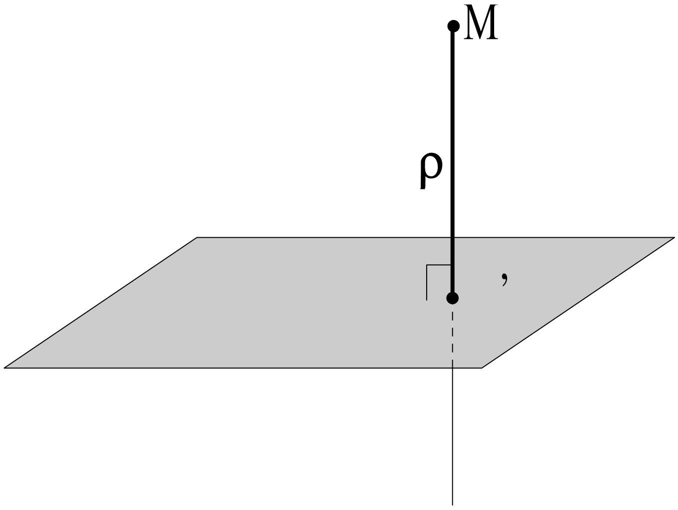

Рис. 35. Расстояние от точки M до плоскости

Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть уравнение $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ задает плоскость π_1, а уравнение $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяет плоскость π_2. Рассмотрим следующие случаи расположение двух плоскостей в пространстве:

1. Две плоскости π_1 и π_2 *параллельны*, если их нормали $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ параллельны (рисунок 36), то есть выполняется равенство:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}. \qquad (112)$$

2. Две плоскости π_1 и π_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормали $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

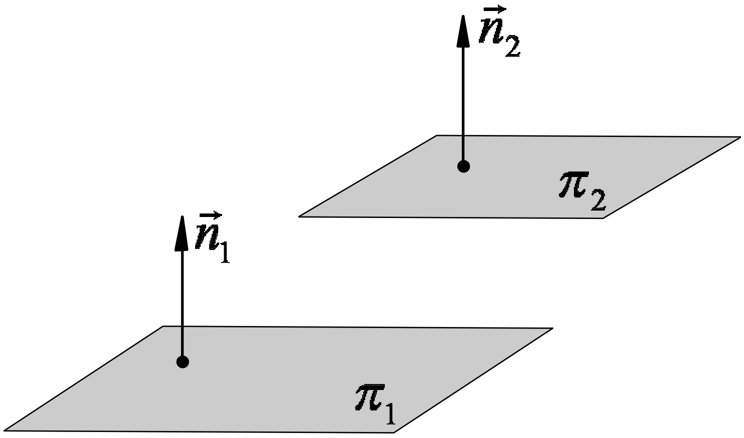

Рис. 36. Параллельные плоскости

(рисунок 37), то есть

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (113)$$

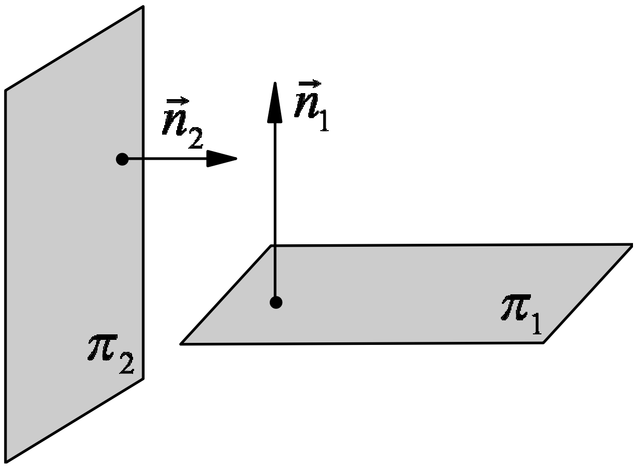

Рис. 37. Перпендикулярные плоскости

3. Две плоскости π_1 и π_2 *совпадают*, если выполняется равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \qquad (114)$$

Угол между двумя плоскостями

Угол φ между плоскостями π_1 и π_2 равен углу между их нормалями $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рисунок 38), поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (115)$$

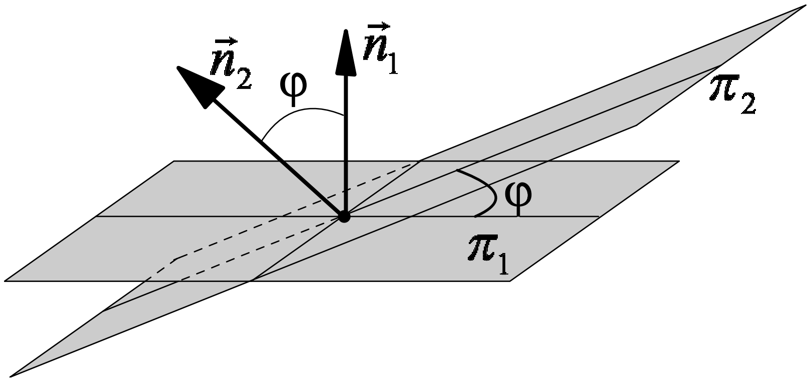

Рис. 38. Угол между плоскостями

Взаимное расположение трех плоскостей в пространстве

Взаимное расположение трех плоскостей определяется свойствами системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3. \end{cases} \tag{116}$$

Возможны следующие варианты:

1) Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$, то плоскости имеют единственную общую точку (смотри, например, рисунок 39). Ее можно найти, решив систему методом Крамера или методом Гаусса.

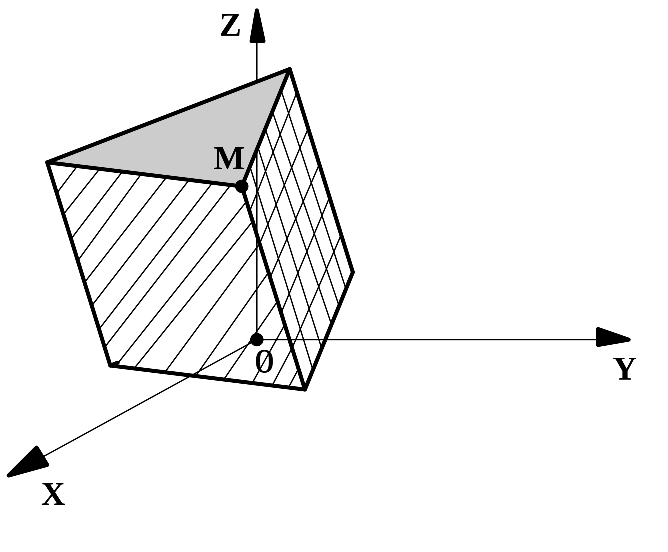

Рис. 39. Три плоскости имеют одну общую точку M

2) Если $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \neq rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$, то общих точек у трех плоскостей нет. На рисунке 40 показаны три плоскости, которые не имеют общих точек.

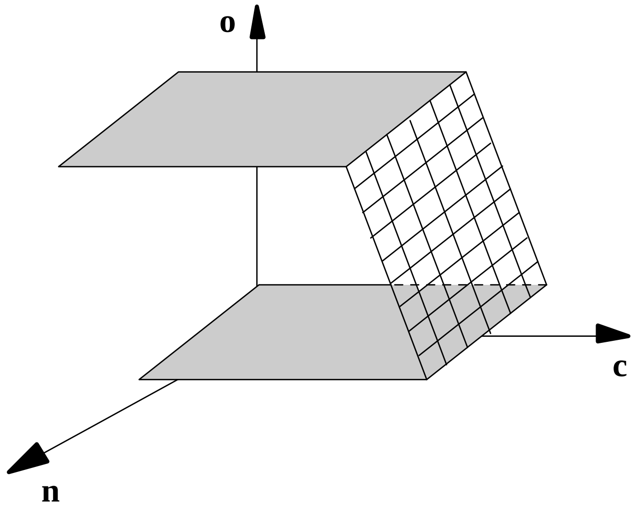

Рис. 40. У трех плоскостей нет общих точек

3) Если $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix} = 2$, то плоскости пересекаются по общей прямой. Если среди таких плоскостей нет совпадающих, их расположение иллюстрирует рисунок 41.

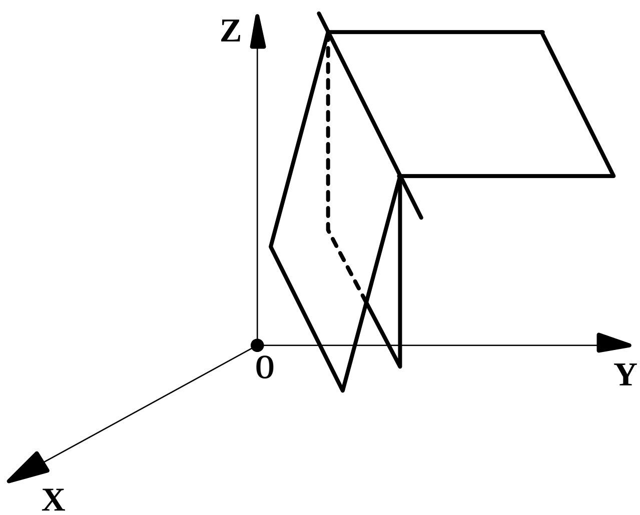

Рис. 41. Три плоскости пересекаются по прямой

4) Если $rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix} = 1$, то все три плоскости совпадают.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, лежащие в одной плоскости π (рисунок 42). Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости π.

Из условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$, получаем уравнение плоскости π. Таким образом, уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (117)$$

задает *плоскость, проходящую через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

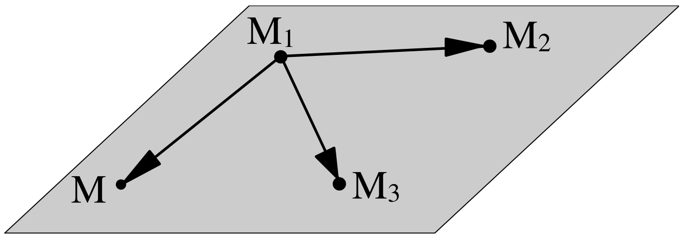

Рис. 42. Плоскость, проходящая через три точки

Пучок и связка плоскостей

Определение 76. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0, \qquad (118)$$

где λ – переменный параметр, представляет *пучок плоскостей* (смотри, например, пучок из трех плоскостей на рисунке 41), проходящих через линию пересечения двух основных плоскостей:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0.$$

Определение 77. Уравнение

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +$$
$$+\mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (119)$$

представляет, при переменных параметрах λ и μ, *связку плоскостей* (смотри, например, связку из трех плоскостей на рисунке 39), то есть совокупность всех плоскостей, проходящих через точку пересечения трех основных плоскостей:

$$Ax+By+Cz+D = 0,\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0.$$

Связка плоскостей, проходящих через точку $(x_1; y_1; z_1)$ может быть также представлена уравнением:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \qquad (120)$$

где A, B, C могут принимать любые значения.

Задачи для самостоятельного решения

144. Проходит ли плоскость $4x - y + 3z + 1 = 0$ через одну из следующих точек:
$A(-1; 6; 3)$, $B(2; 0; 5)$, $C(3; -2; -5)$, $D(0; 4; 1)$, $E(2; 7; 0)$, $F(0; 1; 0)$?

145. Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

a) $3x - 5z + 1 = 0$; *d*) $2x + 3y - 7z = 0$;

b) $9y - 2 = 0$; *e*) $8y - 3z = 0$.

c) $x + y - 5 = 0$;

146. Написать уравнение плоскости:

a) параллельной плоскости (xz) и проходящей через точку $(2; -5; 3)$;

b) проходящей через ось z и через точку $(-3; 1; 2)$;

c) параллельной оси x и проходящей через две точки $(4; 0; -2)$ и $(5; 1; 7)$.

147. Вычислить отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, следующими плоскостями:

$a)$ $2x-3y-z+12=0$; $d)$ $x-4z+6=0$;

$b)$ $5x+y-3z-15=0$; $e)$ $5x-2y+z=0$;

$c)$ $x-y+z-1=0$; $f)$ $x-7=0$.

148. Через точку $P(7;-5;1)$ провести плоскость, которая отсекала бы на осях координат положительные и равные между собою отрезки.

149. Привести к нормальному виду уравнения следующих плоскостей:

a) $2x-9y+6z-22=0$; b) $10x+2y-11z+60=0$; c) $6x-6y-7z+33=0$.

150. Вычислить расстояние плоскости $15x-10y+6z-190=0$ от начала координат.

151. Найти угол между плоскостью $x-y+\sqrt{2}z-5=0$ и плоскостью Oyz.

152. Найти расстояние

$a)$ точки $(3;1;-1)$ от плоскости $22x+4y-20z-45=0$,

$b)$ точки $(4;3;-2)$ от плоскости $3x-y+5z+1=0$,

$c)$ точки $(2;0;-\frac{1}{2})$ от плоскости $4x-4y+2z+17=0$.

153. Даны две точки $A(1;3;-2)$ и $B(7;-4;4)$. Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB.

154. Вычислить углы между плоскостями:

$a)$ $4x-5y+3z-1=0$ и $x-4y-z+9=0$;

$b)$ $3x-y+2z+15=0$ и $5x+9y-3z-1=0$;

$c)$ $6x+2y-4z+17=0$ и $9x+3y-6z-4=0$.

155. Составить уравнение плоскости:

$a)$ проходящей через точку $(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x-4y+5z-1=0$;

$b)$ проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:

$$2x-y+5z+3=0 \text{ и } x+3y-z-7=0;$$

$c)$ проходящей через точки $L(0;0;1)$ и $N(3;0;0)$ и образующей угол в 60^0 с плоскостью Oxy.

156. Проверить, можно ли провести плоскость через следующие четыре точки:

$a)$ $A(3;1;0)$, $B(0;7;2)$, $C(-1;0;-5)$, $D(4;1;5)$;

$b)$ $A(1;-1;1)$, $B(0;2;4)$, $C(1;3;3)$, $D(4;0;-3)$.

157. Найти точку пересечения следующих трех плоскостей:

$a)$ $5x+8y-z-7=0$, $x+2y+3z-1=0$, $2x-3y+2z-9=0$;

$b)$ $x-4y-2z+3=0$, $3x+y+z-5=0$, $-3x+12y+6z-7=0$.

158. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$ и $x+5y-z+2=0$ провести плоскость:

$a)$ проходящую через начало координат;

$b)$ проходящую через точку $(1;1;1)$;

$c)$ параллельную оси Oy;

$d)$ перпендикулярную к плоскости $2x-y+5z-3=0$.

159. В пучке, определяемом плоскостями $3x+y-2z-6=0$ и $x-2y+5z-1=0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим основным плоскостям.

160. В пучке, определяемом плоскостями $2x+y-3z+2=0$ и $5x+5y-4z+3=0$, найти две перпендикулярные друг другу плоскости, из которых одна проходит через точку $L(4;-3;1)$.

161. В связке, определяемой плоскостями $x+y-z+2=0$, $4x-3y+z-1=0$ и $2x+y-5=0$, найти плоскость:

$a)$ проходящую через ось абцисс;

$b)$ параллельную плоскости Oxz;

$c)$ проходящую через начало координат и через данную точку $P(1;3;2)$.

18. Прямая в пространстве

Основные понятия, формулы и теоремы

Каноническое уравнение прямой

Определение 78. Любой вектор $\vec{s}$, коллинеарный прямой L, называется *направляющим вектором прямой* L.

Например, на рисунке 43 векторы $\vec{s}$, $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ являются направляющими векторами прямой l.

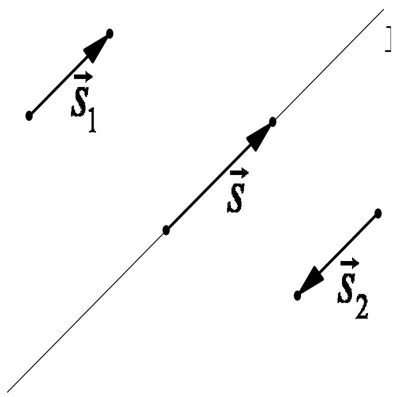

Рис. 43. Направляющий вектор прямой

Определение 79. *Каноническим уравнением прямой* называется запись уравнения прямой в следующем виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{121}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой, $\vec{s}=(m,n,p)$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Определение 80. *Уравнение прямой, проходящей через две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (смотри рисунок 44) имеет следующий вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{122}$$

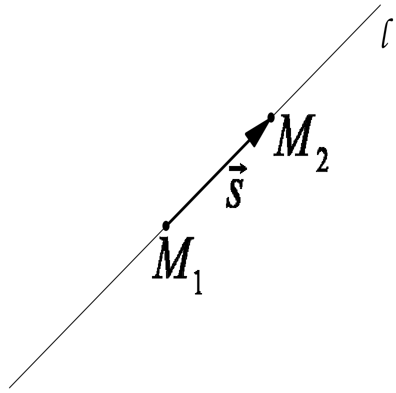

Рис. 44. Уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно данной плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет вид (смотри рис. 45)

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \tag{123}$$

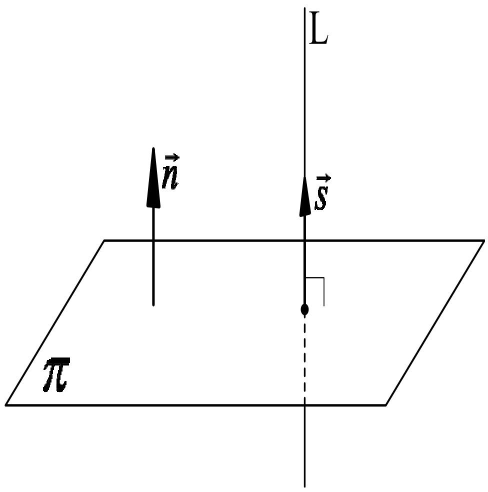

Рис. 45. Перпендикулярность прямой и плоскости

Параметрическое уравнение прямой

Определение 81. *Параметрическим уравнением прямой* называется запись уравнения прямой в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t, \end{cases} \quad t \text{ – произвольное действительное число.} \tag{124}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой, $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой. Придавая параметру t различные значения, получим координаты точек прямой.

Из параметрического уравнения прямой (124) можно получить каноническое уравнение прямой (121). Для этого надо выразить в каждом уравнении параметр t и приравнять полученные выражения.

Из канонического уравнения прямой (121) можно получить параметрическое уравнение прямой (124). Для этого надо приравнять каноническое уравнения прямой параметру t

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \tag{125}$$

и выразить из равенств $\dfrac{x - x_0}{m} = t$, $\dfrac{y - y_0}{n} = t$, $\dfrac{z - z_0}{p} = t$ переменные x, y, z соответственно.

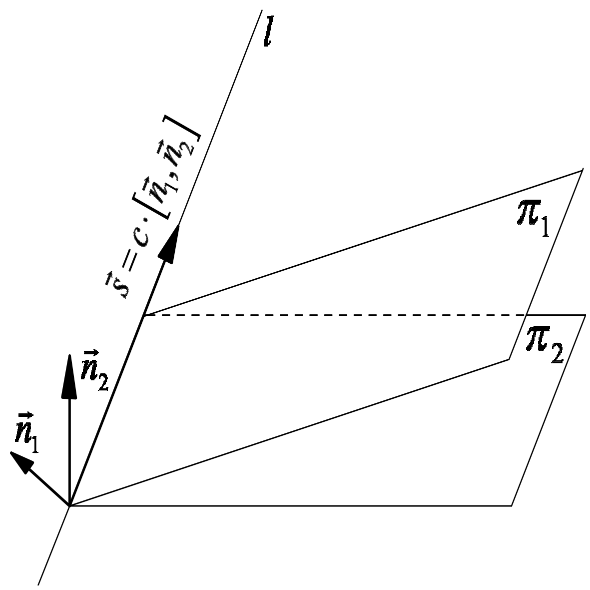

Рис. 46. Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямая как линия пересечения двух плоскостей

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (π_1) и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (π_2)

(смотри рисунок 46):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{cases} \tag{126}$$

Равенства (126) называются *общими уравнениями прямой.*

Для перехода от общих уравнений прямой к каноническим или параметрическим уравнениям необходимо:

1. Найти координаты какой-нибудь точки на прямой. Для этого нужно положить в (126) одну из переменных равной нулю (например, $z = 0$) и найти из системы значения двух других переменных.

2. Направляющий вектор прямой $\vec{s}$ найти из равенства

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{127}$$

где $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – нормальные векторы плоскостей π_1 и π_2 соответственно.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть даны плоскость $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая L

$$\begin{cases} x &= x_0 + m \cdot t, \\ y &= y_0 + n \cdot t, \\ z &= z_0 + p \cdot t. \end{cases} \tag{128}$$

Подставив в уравнение плоскости π вместо переменных x, y, z их значения из параметрического уравнения прямой L (128), получим уравнение относительно параметра t. Возможны следующие ситуации:

1. Если уравнение относительно t не имеет решений, то прямая параллельна плоскости. В этом случае имеем

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \\ Am + Bn + Cp + D = 0. \end{cases} \tag{129}$$

Таким образом, (129) – *условие параллельности прямой и плоскости.*

2. Если уравнение относительно t примет вид верного равенства, например, $0 = 0$, то прямая лежит в плоскости. В этом случае выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \\ Am + Bn + Cp + D = 0. \end{cases} \tag{130}$$

Система равенств (130) задает *условие, при котором прямая лежит в плоскости.*

3. Если уравнение относительно t имеет единственное решение t_0, то подставим это значение параметра в уравнения прямой и найдем точку пересечения прямой и плоскости. При этом плоскость π и прямая L *перпендикулярны*, если нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s} = (m, n, p)$ коллинеарны (рисунок 45), то есть выполняется условие:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{131}$$

Таким образом, условие (131) определяет *условие перпендикулярности прямой и плоскости.*

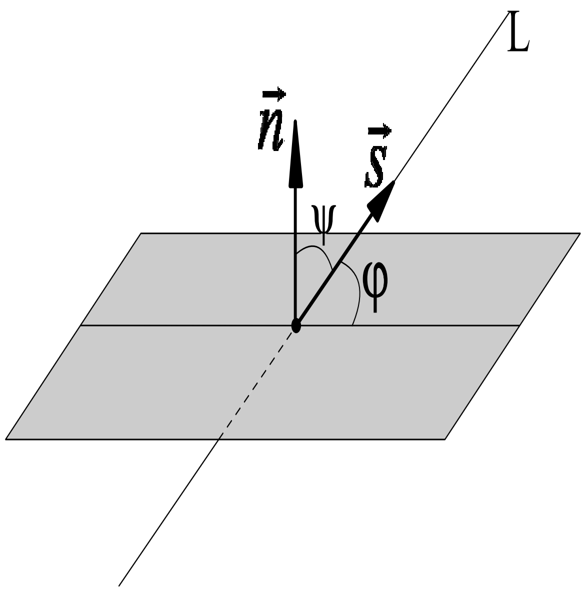

Рис. 47. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью

Угол φ между прямой L, заданной каноническим уравнением
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$$
и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ (рисунок 47) находится по формуле
$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{132}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть даны две прямые $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ (L_1) и $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$ (L_2).

Возможны следующие случаи расположения двух прямых L_1 и L_2 в пространстве:

1. Прямые L_1 и L_2 *параллельны* тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ коллинеарны, то есть выполняется условие
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{133}$$

2. Прямые L_1 и L_2 *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$ перпендикулярны, то есть выполняется условие
$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2)=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{134}$$

3. Прямые L_1 и L_2 *лежат в одной плоскости* тогда и только тогда, когда
$$(\overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{s}_1,\ \vec{s}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ m_1 & n_1 & p_1\\ m_2 & n_2 & p_2\end{vmatrix}=0, \tag{135}$$
где $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ – произвольные точки на прямых L_1 и L_2 соответственно.

Прямые пересекаются, если выполняется равенство (135), но при этом условие параллельности прямых (133) не выполняется.

Определение 82. Будем говорить , что прямые L_1 и L_2 *скрещиваются*, если они не имеют общих точек и не являются параллельными.

4. Прямые L_1 и L_2 *скрещиваются* тогда и только тогда, когда

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\, \vec{s}_1,\, \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (136)$$

Угол между двумя прямыми

Угол φ между прямыми $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ (L_1) и $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ (L_2) равен углу между направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ этих прямых. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (137)$$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой l, заданной каноническим уравнением $\dfrac{x - x_2}{m} = \dfrac{y - y_2}{n} = \dfrac{z - z_2}{p}$ (рисунок 48) вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{S_{M_1M_2AB}}{|\vec{s}|} = \frac{|[\overrightarrow{M_2M_1},\, \vec{s}]|}{|\vec{s}|} \qquad (138)$$

или в координатной форме

$$\rho = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & z_1 - z_2 \\ m & p \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \qquad (139)$$

здесь $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой l, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – произвольная точка прямой l, $S_{M_1M_2AB}$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_2M_1}$ и $\vec{s}$.

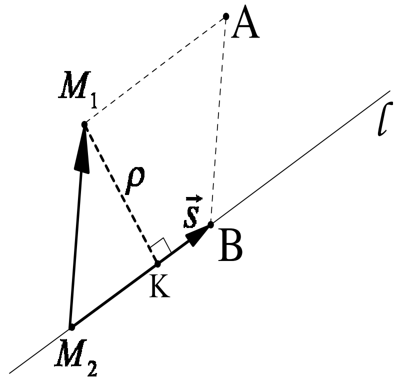

Рис. 48. Расстояние от точки до прямой

Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Определение 83. *Кратчайшим расстоянием между прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.

Например, на рисунке 49 кратчайшим расстоянием между прямыми является длина отрезка M_1H.

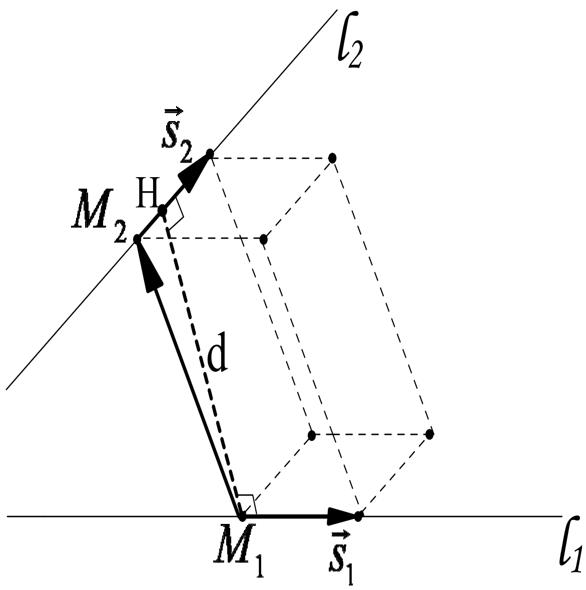

Рис. 49. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Кратчайшее расстояние d между прямыми L_1 и L_2, которые не пересекаются и заданы соответственно каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

определяется формулой

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\, \vec{s_1},\, \vec{s_2})|}{|[\vec{s_1},\, \vec{s_2}]|}, \tag{140}$$

где $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно, V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$, а S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$.

Используя формулы для вычисления смешанного и векторного произведения, равенство (140) можно записать в координатной форме в следующем виде

$$d = \pm\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}}, \tag{141}$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положителен и знак минус – в противном случае.

Задачи для самостоятельного решения

162. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$$

для того, чтобы прямая

$a)$ была параллельна оси Ox;

$b)$ пересекла ось Oy;

$c)$ совпала с осью Oz;

$d)$ была параллельна плоскости OYZ;

$e)$ лежала в плоскости OXZ;

$f)$ проходила через начало координат?

163. Написать уравнения ребер тетраэдра, вершины которого даны своими координатами: $A(0;0;2)$, $B(4;0;5)$, $C(5;3;0)$, $D(-1;4;-2)$.

164. Привести к каноническому виду уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

165. Через точку $(2;-5;3)$ провести прямую

a) паралельную оси Oz;

b) параллельную прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z+3}{9}$;

c) параллельную прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

166. Проверить пересекаются ли следующие прямые:

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$;

b) $\begin{cases} 4x + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x + y - z + 4 = 0, \\ y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

167. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(2;3;1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

168. Определить угол между двумя прямыми:

$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

169. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

a) прямой $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$;

b) прямой $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ и плоскости $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

c) прямой $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и плоскости $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

d) прямой $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

170. При каком значении коэффициента A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ будет параллельна прямой

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}?$$

171. При каких значениях коэффициентов A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z+1}{3}$?

172. Найти проекцию точки $A(4;-3;1)$ на плоскость, заданную уравнением $x+2y-z-3=0$.

173. Проверить, лежит ли прямая в плоскости:
$a)$ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+2}{5}$ на плоскости $4x+3y-z+2=0$;
$b)$ $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{7}=\dfrac{z-2}{3}$ на плоскости $5x-8y-2z-1=0$;
$c)$ $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z}{1}$ и плоскости $3x-2y-z+15=0$.

19. Различные задачи на прямую и плоскость

Задачи для самостоятельного решения

174. Написать уравнение плоскости, которая проходит через точку $(3;1;-2)$ и через прямую

$$\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}.$$

175. Через прямую $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x+4y-3z+7=0$.

176. Проверить, что прямые

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-8}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$$

пересекаются, и написать уравнение плоскости, через них проходящей.

177. Составить уравнение плоскости, проходящей через через точку $P(4;-3;1)$ и параллельной прямым:

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}.$$

178. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-2}{-3}$ и параллельной прямой

$$\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}.$$

179. Найти расстояние точки $P(7;9;7)$ от прямой

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}.$$

180. Найти точку, симметричную с точкой $P(4;3;10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$.

181. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}.$$

182. Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми:

$$\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{-2}=\frac{y+7}{9}=\frac{z-2}{2}.$$

183. Вычислить расстояние между прямыми:

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z-3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-4}{8}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+7}{3}.$$

184. Даны вершины треугольника $A(4;1;-2)$, $B(2;0;0)$, $C(-2;3;-5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

185. Заданы вершины $A(1,2,3)$, $B(3,0,2)$, $C(7,4,6)$ треугольника $\triangle\, ABC$. Требуется:

$a)$ составить уравнение прямой BC;

$b)$ найти высоту h треугольника, опущенную на сторону BC;

$c)$ вычислить расстояние d между прямой BC и осью абцисс;

$d)$ найти величину угла φ между прямой BC и осью абцисс;

$e)$ найти величину угла ψ между осью абцисс и плоскостью треугольника $\triangle\, ABC$.

186. Заданы вершины треугольной пирамиды $A(1,3,-1)$, $B(2,1,-2)$, $C(3,-2,4)$ треугольной пирамиды $OABC$. Требуется:

$a)$ найти угол φ между ребром OA и плоскостью грани ABC;

$b)$ составить каноническое уравнение прямой OM, где M – точка пересечения медиан треугольника ABC;

$c)$ найти проекцию H точки O на плоскость грани ABC;

$d)$ составить каноническое уравнение прямой $O'M$, симметричной прямой OM относительно плоскости грани ABC;

$e)$ найти угол ψ между прямыми OM и AB;

$f)$ найти расстояние d между прямыми OM и AB;

$g)$ найти проекцию C' точки C на прямую OA;

$h)$ составить уравнение прямой, содержащей ортогональную проекцию высоты ON грани OBC на плоскость грани ABC.

Многочлены и их корни

20. Схема Горнера. Алгоритм Евклида

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение многочлена n-ой степени и его корней

Определение 84. *Многочленом степени n с комплексными коэффициентами* называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \tag{142}$$

где a_i – комплексные числа. Числа a_i называются *коэффициентами многочлена.*

Определение 85. Пусть задан многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Комплексное число α называется *корнем многочлена*, если

$$f(\alpha) = 0.$$

Определение 86. Пусть задан многочлен n-ой степени с комплексными коэффициентами a_i:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n.$$

Корень $x = \alpha$ многочлена $f(x)$ называется *корнем многочлена $f(x)$ кратности k*, если $(x-\alpha)^k$ – делитель $f(x)$, а $(x-\alpha)^{k+1}$ не является делителем $f(x)$. Таким образом, если $x = \alpha$ – корень многочлена $f(x)$ кратности k, то

$$f(x) = (x-\alpha)^k \cdot g(x),$$

где $g(x)$ – многочлен степени m, $(m \leq n-k)$.

Определение 87. Многочлен $d(x) \neq 0$ называется *делителем многочлена* $f(x)$, если при делении $f(x)$ на $d(x)$ остаток от деления равен нулю.

Схема Горнера и ее применение

1. *Схема Горнера* используется при делении многочлена $f(x)$ на линейную функцию $x - x_0$.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = (x-x_0)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}) + r,$$

тогда коэфициенты b_0, b_1, b_2, …, b_{n-1} и остаток от деления r можно найти из следующей таблицы:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = x_0b_0 + a_1$	...	$b_{n-1} = x_0b_{n-2} + a_{n-1}$	$r = x_0b_{n-1} + a_n = f(x_0)$

2. При делениии многочлена на линейную функцию остаток от деления r равен $f(x_0)$, поэтому *схема Горнера позволяет найти значение многочлена $f(x)$ в точке x_0.*

3. Способ Горнера позволяет найти коэффициенты в разложении ряда Тейлора.

Определение 88. Пусть задан многочлен степени n $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$. *Ряд Тейлора* в точке x_0 для многочлена $f(x)$ имеет следующий вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (143)$$

Способ Горнера разложения многочлена $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ состоит в следующем: делим $f(x)$ на $(x-x_0)$; частное снова делим на $(x-x_0)$; частное опять делим на $(x-x_0)$ и т.д., пока не получим в частном одно число. Остатки от этих делений и последнее частное являются коэффициентами в (143), то есть

$$f(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{f''(x_0)}{2!},\ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!},\dots,\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
x_0	$b_0=a_0$	$b_1=x_0b_0+a_1$	...	$b_{n-1}=x_0b_{n-2}+a_{n-1}$	$r_0=f(x_0)$
x_0	$c_0=b_0$	$c_1=x_0c_0+b_1$	...	$r_1=f^{(1)}(x_0)$	
x_0	$d_0=c_0$	$d_1=x_0d_0+c_1$	...		
...	...	...	...		
x_0	a_0	$r_{n-1}=\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$			
x_0	$r_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$				

4. Способ Горнера позволяет определить *показатель кратности корня.* Пусть заданы многочлен $f(x)$ n-ой степени и его корень $x=\alpha$, тогда для того, чтобы определить показатель k кратности корня $x=\alpha$ необходимо: разделить $f(x)$ на $(x-\alpha)$, если остаток от деления r равен 0, то частное опять разделить на $(x-\alpha)$ и т.д., деление продолжать до тех пор, пока остаток от деления r равен 0. Таким образом, алгоритм заканчивается только тогда, когда $r\neq 0$. Показатель k кратности корня $x=\alpha$ равен числу полученных нулевых остатков.

Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида

Определение 89. *Наибольшим общим делителем* многочленов $f(x)$ и $g(x)$(кратко будем писать НОД(f,g)) называется такой многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Пусть даны два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, причем степень многочлена $f(x)$ больше степени многочлена $g(x)$. Для того, чтобы найти наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ нужно воспользоваться *алгоритмом Евклида*, который заключается в следующем:

1. Выполнить деление многочлена $f(x)$ на $g(x)$, то есть найти многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие что

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

где $q(x)$ – частное от деления, а $r(x)$ – остаток от деления. Если $r(x) = 0$, то наибольший общий делитель НОД(f, g)= g.

2. Если $r(x) \neq 0$, то $f(x)$ положить равным $g(x)$, а $g(x)$ положить равным $r(x)$ и перейти к пункту 1. На рисунке 50 показана схема алгоритма Евклида.

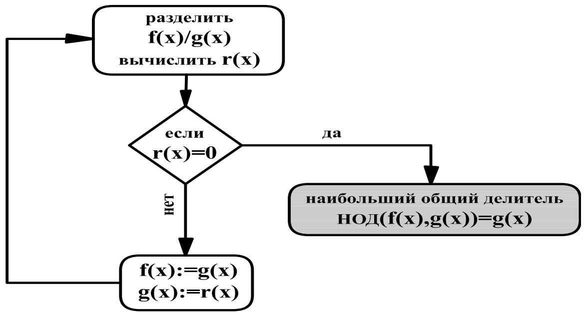

Рис. 50. Алгоритм Евклида.

Задачи для самостоятельного решения

187. Умножить многочлены:

$a)$ $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$,

$b)$ $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^3 - 2x - 1)$.

188. Выполнить деление с остатком:

$a)$ $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$,

$b)$ $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

189. При каком условии многочлен x^3+px+q делится на многочлен вида $x^2 + mx - 1$.

190. При каком условии многочлен $x^4 + px^2 + q$ делится на многочлен вида $x^2 + mx + 1$.

191. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$ и выполнить деление с остатком на $(x - x_0)$:

$a)$ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16, \quad x_0 = 4;$

$b)$ $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8, \quad x_0 = 1;$

$c)$ $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x, \quad x_0 = -3.$

192. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$:

$a)$ $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad x_0 = -1;$

$b)$ $f(x) = x^5, \quad x_0 = 1;$

$c)$ $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90, \quad x_0 = 2.$

193. Пользуясь схемой Горнера, разложить на простейшие дроби:

$a)$ $\dfrac{x^3 - x + 1}{(x-2)^5}$; $\qquad b)$ $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x+1)^5}$.

194. Найти значения многочлена $f(x)$ и его производных при $x = x_0$:

$a)$ $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10, \quad x_0 = 2;$

$b)$ $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x - 1, \quad x_0 = 1.$

195. Чему равен показатель кратности корня:

$a)$ 2 для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

$b)$ -2 для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

196. Найти наибольший общий делитель многочленов:

$a)$ $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;

$b)$ $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ и $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

$c)$ $(x^3-1)(x^2-2x+1)$ и $(x^2-1)^3$.

197. Используя алгоритм Евклида, определить наибольший общий делитель многочленов:

$a)$ $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ и $x^3 + x^2 - x - 1$;

$b)$ $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ и $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$;

$c)$ $x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7$ и $3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$;

$d)$ $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ и $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$;

$e)$ $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$.

198. Найти наибольший общий делитель многочлена и его производной:

$a)$ $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2(x-3)$;
$b)$ $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$.

21. Корни многочленов с целыми коэффициентами

Основные понятия, формулы и теоремы

Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители

Теорема 1 (Основная теорема алгебры). *Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, если каждый корень считать столько раз какова его кратность. Таким образом, любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами представим в виде*

$$f(x) = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n), \qquad (144)$$

где α_1, α_2, $\dots$, α_n – корни многочлена $f(x)$ с учетом их кратности, a_0 – старший коэффициент многочлена.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

Теорема 2. *Если комплексное число w является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то сопряженное число $\bar{w}$ также является корнем этого многочлена.*

Следствие 1. *Если комплексное число $w = a+bi$ $(b \neq 0)$ является корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то этот многочлен делится нацело на квадратный трехчлен*

$$x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0,$$

также имеющий действительные коэффициенты.

Теорема 3. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами. Это разложение может быть выбрано так, чтобы каждый множитель второй степени не имел действительных корней.*

Теорема Виета

Теорема 4 (Виета). *Пусть* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$. *Пусть также* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *– корни многочлена* $f(x)$. *Тогда коэффициенты* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *многочлена* $f(x)$ *и его корни* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *связаны следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \ldots x_n), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(x_1x_2\ldots x_{n-1} + \ldots + x_2x_3\ldots x_n), \\ a_n &= (-1)^n x_1x_2x_3\ldots x_n. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 2$.

Пусть $f(x) = x^2 + a_1x + a_2$, x_1, x_2 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2), \\ a_2 &= x_1x_2. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 3$.

Пусть $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \\ a_3 &= -x_1x_2x_3. \end{cases}$$

Частный случай теоремы Виета при $n = 4$.

Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $f(x)$. Тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} a_1 &= -(x_1+x_2+x_3+x_4), \\ a_2 &= x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4, \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4), \\ a_4 &= x_1x_2x_3x_4. \end{cases}$$

Корни многочленов с целыми коэффициентами

Теорема 5. *Если целое число* α *является корнем многочлена* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ *с целыми коэффициентами* a_i*, то* α *является делителем младшего коэффициента* a_n*.*

Следствие 2. *Пусть дан многочлен* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ *с целыми коэффициентами* a_i *и пусть* α *– целое число и корень многочлена* $f(x)$*, тогда выражения* $\dfrac{f(1)}{1-\alpha}$ *и* $\dfrac{f(-1)}{1+\alpha}$ *являются целыми числами.*

Теорема 6. *Если рациональное число* $\dfrac{P}{Q}$ *является корнем многочлена* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ *с целыми коэффициентами* a_i*, то* P *– делитель младшего коэффициента* a_n*, а* Q *– делитель старшего коэффициента* a_0*.*

Задачи для самостоятельного решения

199. Построить многочлены наименьшей степени с комплексными коэфициентами по данным корням:

$a)$ двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;

$b)$ тройной корень -1, простые 3 и 4;

200. Построить многочлены наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

$a)$ двойной корень 1, простые 2, 3 и $1+i$;

$b)$ тройной корень $2-3i$.

201. Разложить многочлен $f(x) = x^4 + 13x^2 + 36$ на множители

$a)$ с вещественными коэффициентами;

$b)$ с комплексными коэффициентами.

202. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с комплексными коэффициентами:

$a)$ $f(x) = x^3 + 8$; $b)$ $f(x) = x^2 + 4$;

$c)$ $f(x) = x^2 - 6x + 10$; $d)$ $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

203. Разложить многочлен $f(x)$ на множители с вещественными коэффициентами:

$a)$ $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2$;

$b)$ $f(x) = x^4 + 8x^2 + 12$;

$c)$ $f(x) = x^6 + 27$;

$d)$ $f(x) = x^5 - x^4 + 4x - 4$.

204. Найти соотношение между коэффициентами кубического уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, при котором один корень равен сумме двух других.

205. Проверить, что один из корней уравнения

$$36x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$$

равен сумме двух других, и решить уравнение.

206. Определить λ так, чтобы один из корней уравнения

$$x^3 - 7x + \lambda = 0$$

равнялся удвоенному другому.

207. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

208. Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ.

209. Найти рациональные корни многочленов:

$a)$ $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$;

$b)$ $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$;

$c)$ $x^5 - 7x^3 - 12x^2 + 6x + 36$;

$d)$ $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

$e)$ $24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6;$

$f)$ $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24;$

$g)$ $2x^3 + 3x^2 + 6x - 4;$

$h)$ $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$

Линейный оператор в линейном пространстве

22. Преобразование базиса и координат. Определение линейного подпространства

Основные понятия, формулы и теоремы

Преобразование базиса и координат

Пусть V – n-мерное линейное пространство.

Разложить вектор x по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ это значит найти числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что выполняется следующее равенство

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n, \tag{145}$$

причем числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ для каждого вектора x определяются единственным образом.

Определение 90. *Матрицей перехода* от старого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к новому базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ называется квадратная матрица $T = (t_{ij})$ размера $n \times n$, по столбцам которой стоят координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Таким образом, старый и новый базисы связаны матричным равенством

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) \cdot T. \tag{146}$$

При таких обозначениях координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора x в старом базисе связаны с координатами $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ того же вектора в новом базисе равенствами $x_i = \sum_{j-1}^{n} t_{ij}x'_j$, или в матричной записи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad (147)$$

или

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (148)$$

Линейное подпростарнство

Определение 91. *Линейным подпространством* линейного пространства V называется непустое множество L векторов из V, обладающее следующими свойствами:

1) сумма $x + y$ двух любых векторов из L снова принадлежит L;

2) произведение $\alpha \cdot x$ любого вектора x из L на любое число α снова принадлежит L.

Определение 92. *Базисом* линейного подпространства L называется любая максимальная линейно-независимая система векторов из L.

Определение 93. *Размерностью* линейного подпространства L называется число векторов в базисе. Размерность линейного подпространства L обозначается через $\dim L$.

Определение 94. Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, $\dots$, a_k из векторного пространства V. Множество всевозможных линейных комбинаций векторов a_1, a_2, $\dots$, a_k называется *линейным подпространством, натянутым на систему векторов* a_1, a_2, $\dots$, a_k. Таким образом

$$L = \sum(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{x \in V \mid x = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ka_k\}$$

Определение 95. *Суммой* двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V называется совокупность $S = L_1 + L_2$ всех векторов из V, каждый из которых представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$.

Определение 96. *Пересечением* двух линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства V называется совокупность $D = L_1 \cap L_2$ всех векторов из V, каждый из которых принадлежит как L_1, так и L_2.

Теорема 1 (Грассмана). *Пусть L_1 и L_2 – линейные подпространства пространства V, тогда*

$$\dim(L_1 \cap L_2) = -\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1) + \dim(L_2), \qquad (149)$$

здесь $\dim(L_1)$, $\dim(L_2)$ – размерности линейных подпространств L_1 и L_2, а $\dim(L_1 + L_2)$, $\dim(L_1 \cap L_2)$ – размерности суммы и пересечения этих линейных подпространств соответственно.

Задачи для самостоятельного решения

210. Проверить, является ли система векторов e_1, e_2, e_3 базисом в линейном пространстве, и найти координаты вектора x в этом базисе. По известному координатному вектору y_e найти вектор y:

$a)$ $e_1 = (-2, 3, 0),\ e_2 = (2, -3, 4),\ e_3 = (-2, 0, -3)$,
$x = (0, -1, 1),\ y_e = (-6, 0, 7)$;

$b)$ $e_1 = (0, 1, 1),\ e_2 = (-1, 0, 3),\ e_3 = (0, 1, 2)$,
$x = (-1, -5, -3),\ y_e = (4, -3, -2)$;

$c)$ $e_1 = (3, -1, 3),\ e_2 = (2, -3, 4),\ e_3 = (-2, 0, -3)$,
$x = (0, -1, 1),\ y_e = (-6, 0, 7)$;

$d)$ $e_1 = (-2, 3, 0),\ e_2 = (2, -3, 4),\ e_3 = (-2, 0, -3)$,
$x = (0, -1, 1),\ y_e = (-6, 0, 7)$.

211. Проверить, являются ли системы векторов e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 базисами в линейном пространстве. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. По известным координатам векторов x, y в одном базисе найти их координаты в другом базисе:

$a)\quad e_1=(2,-1,-1),\ e_2=(3,1,1),\ e_3=(-2,-1,-2),$

$e'_1=(-3,1,2),\ e'_2=(1,1,3),\ e'_3=(-2,-2,-1);$

$x_e=(-2,2,-2),\ y_{e'}=(2,-1,1).$

$b)\quad e_1=(3,-1,-2),\ e_2=(-2,-1,0),\ e_3=(1,3,3),$

$e'_1=(-3,1,3),\ e'_2=(-2,-1,1),\ e'_3=(-2,-1,-1);$

$x_{e'}=(1,-2,3),\ y_e=(-2,-2,0).$

$c)\quad e_1=(1,-1,1),\ e_2=(-1,-1,1),\ e_3=(-1,0,2),$

$e'_1=(-2,-1,-1),\ e'_2=(1,0,2),\ e'_3=(1,-3,3);$

$x_{e'}=(-1,2,-2),\ y_e=(-3,-4,1).$

212. Найти координаты вектора x в базисе (e'_1,e'_2,e'_3), если он задан в базисе (e_1,e_2,e_3):

$$a)\ \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3,\\ e'_2 = 2e_1 - e_2,\\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3,\\ x = (6,\ -1,\ 3). \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3,\\ e'_2 = (3/2)e_1 - e_2,\\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3,\\ x = (1,\ 2,\ 4). \end{cases}$$

213. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

$a)$ поменять местами два элемента первого базиса;

$b)$ поменять местами два элемента второго базиса;

$c)$ записать элементы обоих базисов в обратном порядке?

214. Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

$a)$ Все векторы n-мерного векторного пространства, координаты которых целые числа?

$b)$ Все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy?

$c)$ Все векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой (начало любого вектора, если не оговорено противное, предполагается совпадающим с началом координат)?

$d)$ Все векторы из R_n координаты которых удовлетворяют уравнению

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$?

$e)$ Все векторы из R_n координаты которых удовлетворяют уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?

215. Найти размерность и базис линейных подпространств, натянутых на следующие системы векторов:

$a)$ $a_1 = (1, 0, 0, -1),\ a_2 = (2, 1, 1, 0),\ a_3 = (1, 1, 1, 1),$
$a_4 = (1, 2, 3, 4),\ a_5 = (0, 1, 2, 3);$

$b)$ $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, -1, -1, -1),\ a_3 = (2, 2, 0, 0, -1),$
$a_4 = (1, 1, 5, 5, 2),\ a_5 = (1, -1, -1, 0, 0).$

216. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств, натянутых на системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_l$:

$a)$ $a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 3);\ b_1 = (2, 3, -1),$
$b_2 = (1, 2, 2),\ b_3 = (1, 1, -3);$

$b)$ $a_1 = (1, 2, 1, -2),\ a_2 = (2, 3, 1, 0),\ a_3 = (1, 2, 2, -3);\ b_1 = (1, 1, 1, 1),$
$b_2 = (1, 0, 1, -1),\ b_3 = (1, 3, 0, -4);$

23. Линейный оператор в линейном пространстве. Действия над линейными операторами.

Основные понятия, формулы и теоремы

Линейный оператор в линейном пространстве

Определение 97. *Оператором*, действующим в линейном пространстве V называется правило φ, по которому каждому элементу x из V ставится в соответствие некоторый элемент y из V. Элемент y называется *образом* элемента x, а элемент x – *прообразом* элемента y. Тот факт, что элемент y соответствует элементу x при действии оператора φ, записывается так:

$$y = \varphi x \qquad \text{или} \qquad y = \varphi(x). \tag{150}$$

Определение 98. Оператор φ, действующий в линейном пространстве V, называется *линейным*, если для любых двух элементов x_1 и x_2 из V и любого числа α выполняются равенства:

$$1)\ \varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2); \qquad 2)\ \varphi(\alpha x_1)=\alpha\varphi(x_1). \tag{151}$$

Пусть в базисе e_1, e_2, ..., e_n заданы элемент x и его образ $y=\varphi(x)$ линейного оператора φ, тогда

$$\varphi(x)=y=A\cdot x, \tag{152}$$

где A – квадратная матрица размера $n\times n$, которая называется *матрицей линейного оператора* φ. Формула (152) позволяет определить координаты образа $y=\varphi(x)$ через координаты прообраза x в данном базисе, если известна матрица A оператора φ в этом базисе.

Матрица A оператора φ в базисе e_1, e_2, ..., e_n и матрица A' того же оператора в базисе e_1', e_2', ..., e_n' связаны соотношением

$$A'=T^{-1}AT, \tag{153}$$

где T – матрица перехода от базиса e_1, e_2, ..., e_n к базису e_1', e_2', ..., e_n': $e'=e\cdot T$.

Определение 99. *Тождественным или единичным оператором* I называется оператор, который каждому элементу $x\in V$ сопоставляет этот же элемент: $I(x)=x$.

Действия над линейными операторами

Определение 100. *Суммой* $\varphi+\psi$ *линейных операторов* φ *и* ψ, действующих в линейном пространстве V, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x\in V$ задается равенством $\phi(x)=\varphi(x)+\psi(x)$. Сумма двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица суммы линейных операторов (в любом базисе) равна сумме матриц этих операторов.

Определение 101. *Произведением* $\alpha\varphi$ *линейного оператора* φ, действующего в линейном пространстве V, на число α называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in V$ задается равенством $\phi(x) = \alpha(\varphi(x))$. Произведение линейного оператора φ на число α является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора на число α.

Определение 102. *Произведением* $\varphi \cdot \psi$ *линейных операторов* φ *и* ψ, действующих в линейном пространстве V, называется оператор ϕ, действие которого на любой элемент $x \in V$ задается равенством $\phi(x) = \varphi(\psi(x))$. Произведение двух линейных операторов является линейным оператором, а матрица произведения линейных операторов (в любом базисе) равна произведению матриц этих операторов.

Определение 103. Линейный оператор φ^{-1} называется *обратным* к линейному оператору φ, если выполняются равенства $\varphi \cdot \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \cdot \varphi = I$, где I – тождественный оператор. Если A – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то матрица обратного оператора φ^{-1} в том же базисе равна A^{-1}, то есть является обратной по отношению к матрице A.

Задачи для самостоятельного решения

217. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Выяснить, какие из следующих операторов являются линейными, и в случае линейности найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты вектора x:

$$a)\ \begin{cases} \varphi_1(x) &= (6x_1 - 5x_2 - 4x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3), \\ \varphi_2(x) &= (6 - 5x_2 - 4x_3, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2), \\ \varphi_3(x) &= (x_3^4, 3x_1 - 2x_2 - x_3, x_2 + 2x_3); \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} \varphi_1(x) &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2), \\ \varphi_2(x) &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 0, x_2^4 + 2x_3), \\ \varphi_3(x) &= (5x_1 - 4x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2, x_2 + 2x_3); \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \varphi_1(x) &= (4x_1-3x_2-2x_3, x_1, x_1+2x_2^4+3x_3),\\ \varphi_2(x) &= (4x_1-3x_2-2x_3, x_1, x_1+2x_2+3x_3),\\ \varphi_3(x) &= (4x_1-3x_2-2x_3, x_1, x_1+2x_2+3).\end{cases}$$

218. Доказать, что существует единственный линейный оператор, переводящий векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в b_1, b_2, b_3, и найти матрицу этого линейного оператора:

$$a)\ \begin{array}{lll} a_1 = (2,3,5), & b_1 = (1,1,1), \\ a_2 = (0,1,2), & b_2 = (1,1,-1), \\ a_3 = (1,0,0), & b_3 = (2,1,2).\end{array} \qquad b)\ \begin{array}{lll} a_1 = (2,0,3), & b_1 = (1,2,-1), \\ a_2 = (4,1,5), & b_2 = (4,5,-2), \\ a_3 = (3,1,2), & b_3 = (1,-1,1).\end{array}$$

219. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе e_1', e_2', e_3', e_4':

$$a)\ \begin{cases} e_1' &= e_1,\\ e_2' &= e_3,\\ e_3' &= e_2,\\ e_4' &= e_4;\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} e_1' &= e_1,\\ e_2' &= e_1+e_2,\\ e_3' &= e_1+e_2+e_3,\\ e_4' &= e_1+e_2+e_3+e_4.\end{cases}$$

220. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5\\ 20 & -15 & 8\\ 8 & -7 & 6\end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрица этого линейного оператора в базисе f_1, f_2, f_3 имеет диагональный вид:

$$\begin{cases} f_1 &= 2e_1+3e_2+e_3,\\ f_2 &= 3e_1+4e_2+e_3,\\ f_3 &= e_1+2e_2+2e_3.\end{cases}$$

221. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе e'_1, e'_2, e'_3:

$$\begin{cases} e'_1 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ e'_2 &= -e_1 + e_2 - 2e_3, \\ e'_3 &= -e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$$

222. Пусть преобразование φ базисе $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (2,3)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Преобразование ψ в базисе $b_1 = (3,1)$, $b_2 = (4,2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi + \psi$ в базисе b_1, b_2.

223. Пусть преобразование φ базисе $a_1 = (-3,7)$, $a_2 = (1,-2)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Преобразование ψ в базисе $b_1 = (6,-7)$, $b_2 = (-5,6)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования $\varphi \cdot \psi$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

224. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\psi(x) = (x_2, 2x_3, x_1)$. Найти:

$a)$ $(3\psi + 2\varphi^2)x$; $b)$ $(\varphi^2 - \psi)x$; $c)$ $\psi(2\varphi - \psi)x$; $d)$ $\psi^3 x$

225. Пусть φ и ψ – линейные операторы, действующие в линейном пространстве V_2. В базисе e_1, e_2 оператор φ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. В базисе f_1, f_2 оператор ψ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, причем $f = eC$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу:

$a)$ оператора $\varphi^2 + 6\varphi + 9I$ в базисе e_1, e_2 (I – тождественный оператор);

$b)$ оператора $\psi^2 + 4\psi + 4I$ в базисе f_1, f_2;

$c)$ оператора $\varphi^2 - \psi^2$ в базисе $e_1,\ e_2$;

$d)$ оператора $\varphi \cdot \psi^{-1}$ в базисе $f_1,\ f_2$.

226. Докажите, что оператор дифференцирования $\hat{D}$, действующий в пространстве P_n многочленов степени не выше n $(n \geq 1)$, является линейным оператором. Найдите матрицу линейного оператора в базисе:

$a)$ $1,\ x,\ \ldots,\ x^n$;

$b)$ $1,\ \dfrac{x}{1!},\ \ldots,\ \dfrac{x^n}{n!}$;

$c)$ $1,\ 1+x,\ \ldots,\ 1+x+x^2+\ldots+x^n$; $\quad d)$ $1,\ x-1,\ x^2-x,\ \ldots,\ x^n-x^{n-1}$.

24. Ядро, область значений, собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть линейный оператор φ действует в n-мерном линейном пространстве V_n.

Определение 104. Множество образов всех векторов из V_n при действии оператора φ называется *областью значений оператора* φ.

Определение 105. Множество $Ker\,\varphi$ всех векторов векторного пространства V_n, которые переводятся линейным оператором φ в нулевой вектор называется *ядром оператора*, то есть

$$Ker\,\varphi = \Big\{ x \in V_n \;\Big|\; \varphi(x) = 0 \Big\}. \tag{154}$$

Определение 106. Ненулевой элемент x из V_n называется *собственным вектором* линейного оператора φ, если существует число λ такое, что $\varphi(x) = \lambda x$. Число λ при этом называется *собственным значением* оператора φ. Говорят также, что собственный вектор x отвечает (или соответствует) собственному значению λ.

Алгоритм отыскания собственных векторов и собственных значений линейного оператора φ.

Пусть A – матрица линейного оператора φ, E – единичная матрица. Тогда для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, нужно выполнить следующие действия:

1. Найти собственные значения оператора, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{155}$$

Обозначим их λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_k, $k \leq n$.

2. Для каждого собственного значения λ_p найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = \Theta. \tag{156}$$

Правило для решения характеристических уравнений в одном частном случае.

Пусть дана матрица A размера 3×3, то есть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этом случае характеристическое уравнение (155) имеет вид

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0, \tag{157}$$

где I_1, I_2, I_3 – вещественные числа, которые называются *инвариантами* и вычисляются по следующим формулам:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$
$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Линейный оператор φ, действующий в n-мерном линейном пространстве V_n, тогда и только тогда задается в базе e_1, e_2,*

$\ldots$, e_n *диагональной матрицей, если все векторы этой базы являются собственными векторами линейного оператора* φ.

На основании теоремы 1 можно составить *алгоритм приведения матрицы к диагональному виду.* Для того, чтобы привести данную квадратную матрицу A размерности n к диагональному виду необходимо:

1. Найти λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n собственные числа матрицы A.

2. Для каждого собственного значения λ_i найти соответствующий ему собственный вектор. Если в результате вычисления мы получим систему из n линейно независимых собственных векторов U_1, U_2, $\ldots$, U_n, то матрицу A можно привести к следующему диагональному виду:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{158}$$

3. Записать собственные векторы как столбцы новой матрицы T. Полученная матрица T является базисом, в котором матрица A имеет диагональный вид (158).

Задачи для самостоятельного решения

227. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора, действующего в векторном пространстве V_3:

$a)$ проектирования на ось Ox;

$b)$ проектирования на плоскость $z = 0$;

$c)$ проектирования на плоскость $y = 0$;

$d)$ проектирования на ось Oy.

228. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

229. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе следующими матрицами:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, $f)$ $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

230. Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$a)$ $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b)$ $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $c)$ $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$d)$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $e)$ $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Евклидово пространство. Квадратичные формы

25. Евклидово пространство

Основные понятия, формулы и теоремы

Пусть E_n – n-мерное линейное пространство.

Определение 107. *Скалярным произведением* элементов x и y из E_n называется правило, ставящее в соответствие вещественное число (будем обозначать это число (x, y)), причем указанное правило удовлетворяет для любых x, y, z из E_n и любого вещественного числа α следующим требованиям (они называются *аксиомами скалярного произведения*).

1^0. $(x, y) = (y, x)$ (перестановочность или коммутативность сомножителей).

2^0. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (распределительное свойство).

3^0. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

4^0. $(x, x) > 0,$ если $x \neq 0$ и $(x, x) = 0,$ если $x = \Theta$.

Определение 108. Вещественное линейное пространство E_n называется *евклидовым пространством*, если в нем введено скалярное произведение векторов.

Определение 109. *Нормой* элемента $x \in E_n$ (обозначение $\|x\|$) называется вещественное число, определяемое по формуле

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{159}$$

Определение 110. Вектор x называется *нормированным*, если его норма $\|x\| = 1$.

Определение 111. Углом между ненулевыми векторами $x, y \in E_n$ называется число φ, удовлетворяющее условиям

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi. \tag{160}$$

Определение 112. Элементы x и y из E_n называются *ортогональными* (обозначение: $x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$x \perp y, \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) = 0. \tag{161}$$

Определение 113. Базис e_1, e_2, $\ldots$, $e_n \in E_n$ называется *ортогональным*, если элементы базиса попарно ортогональны, то есть

$$(e_i, e_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{162}$$

Определение 114. Ортогональный базис e_1, e_2, $\ldots$, $e_n \in E_n$ называется *ортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{163}$$

Пусть координаты элементов x, y из евклидова пространства E_n заданы в ортонормированном базисе, тогда скалярное произведение и норму можно вычислить по формулам

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{164}$$

Процедура ортогонализации Грамма-Шмидта

Ортонормированный базис в евклидовом пространстве E_n можно построить на основе произвольного базиса с помощью процедуры ортогонализации. Опишем эту процедуру.

Пусть даны k линейно независимых элементов x_1, x_2, $\ldots$, x_k евклидова пространства E_n. Построим попарно ортогональные элементы e_1, e_2, $\ldots$, e_k, представляющие собой линейные комбинации элементов x_1, x_2, $\ldots$, x_k следующим образом.

Положим

$$e_1 = x_1, \quad e_2 = x_2 - a_{12} e_1, \qquad \text{где } a_{12} = \frac{(x_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \tag{165}$$

Такой выбор коэффициента a_{12} обеспечивает ортогональность e_1 и e_2: $(e_1, e_2) = 0$. Далее, положим

$$e_3 = x_3 - a_{13}e_1 - a_{23}e_2 = x_3 - \sum_{i=1}^{2} a_{i3}e_i, \tag{166}$$

где $a_{13} = \dfrac{(x_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $a_{23} = \dfrac{(x_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$. Такой выбор коэффициентов a_{13} и a_{23} обеспечивает ортогональность e_3 к элементам e_1 и e_2. И так далее.

На m-м шаге $m \le k$ полагаем

$$e_m = x_m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{im}e_i, \qquad \text{где } \ a_{im} = \frac{(x_m, e_i)}{(e_i, e_i)}. \tag{167}$$

Такой выбор коэффициентов a_{im} обеспечивает ортогональность e_m к элементам e_1, e_2, …, e_{m-1}. В результате k шагов описанная процедура дает ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k.

Нормирование системы векторов

Чтобы сделать ортогональную систему векторов e_1, e_2, …, e_k ортонормированной, нужно каждый элемент e_i умножить на число $\dfrac{1}{\|e_i\|}$. Полученные в результате элементы $g_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$, …, $g_k = \dfrac{e_k}{\|e_k\|}$ образуют ортонормированную систему векторов.

Ортогональное дополнение

Определение 115. *Вектор x ортогонален подпространству L* (обозначение $x \perp L$), если вектор x ортогонален любому вектору y подпространства L, то есть $(x, y) = 0$, $\forall y \in L$.

Определение 116. *Ортогональным дополнением $L^\perp$* линейного подпространства L называется множество всех векторов из евклидова пространства E_n, ортогональных к L, то есть

$$L^\perp = \{x \in E_n \mid x \perp L\}. \tag{168}$$

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая

Определение 117. Вектор y подпространства L называется *ортогональной проекцией вектора x на подпространство L*, если вектор $x-y$ ортогонален подпространству L. В этом случае используется обозначение $y = pr_L x$. Вектор $z = x - pr_L x$ называется *ортогональной составляющей вектора x относительно подпространства L*.

Из определения 117, следует справедливость равенства

$$x = y + z, \tag{169}$$

где y – ортогональная проекция вектора x на подпространство L, а z – ортогональная составляющая вектора x относительно подпространства L.

Метод нахождения ортогональной проекции y и ортогональной составляющей z

1. Построить базис подпространства L: $f = \{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_k\}$.

2. Вычислить скалярные произведения векторов базиса f:

$$\begin{array}{ccccc}
(f_1, f_1), & (f_1, f_2), & (f_1, f_3), & \ldots, & (f_1, f_k), \\
(f_2, f_1), & (f_2, f_2), & (f_2, f_3), & \ldots, & (f_2, f_k), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(f_k, f_1), & (f_k, f_2), & (f_k, f_3), & \ldots, & (f_k, f_k), \\
(x, f_1), & (x, f_2), & (x, f_3), & \ldots, & (x, f_k).
\end{array} \tag{170}$$

3. Вычислить неизвестные $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$, решая систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}
c_1(f_1, f_1) + c_2(f_1, f_2) + c_3(f_1, f_3) + \ldots + c_k(f_1, f_k) = (x, f_1), \\
c_1(f_2, f_1) + c_2(f_2, f_2) + c_3(f_2, f_3) + \ldots + c_k(f_2, f_k) = (x, f_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_1(f_k, f_1) + c_2(f_k, f_2) + c_3(f_k, f_3) + \ldots + c_k(f_k, f_k) = (x, f_k).
\end{array}\right. \tag{171}$$

4. Построить ортогональную проекцию вектора x на подпространство L, применяя формулу

$$y = pr_L x = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \ldots + c_k f_k. \tag{172}$$

5. Построить ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства L, применяя формулу $z = x - y$.

Задачи для самостоятельного решения

231. Найти нормы векторов a, b и угол между ними в евклидовом пространстве E_4:

$a)$ $a = (3, -2, 3, -1),\ b = (-2, 4, -2, 0);$

$b)$ $a = (-1, 3, 0, -2),\ b = (2, -1, -1, 1);$

$c)$ $a = (-2, -2, 2, 0),\ b = (1, -1, -3, -1);$

$d)$ $a = (-1, 1, 2, -1),\ b = (-2, -3, -1, -3).$

232. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

$a)\ \begin{cases} a_1 = (1, -2, 2, -3), \\ a_2 = (2, -3, 2, 4); \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a_1 = (1, 1, 1, -2), \\ a_2 = (1, 2, 3, 3). \end{cases}$

233. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

$a)\ \begin{cases} a_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ a_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right); \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{cases}$

234. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов:

$a)\ \begin{cases} a_1 = (1,\ 2,\ 2,\ -1), \\ a_2 = (1,\ 1,\ -5,\ 3), \\ a_3 = (3,\ 2,\ 8,\ -7); \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} a_1 = (1,\ 1,\ -1,\ -2), \\ a_2 = (5,\ 8,\ -2,\ -3), \\ a_3 = (3,\ 9,\ 3,\ 8); \end{cases}$

235. Найти базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$ подпространства L, натянутого на векторы:

$a)$ $a_1 = (1, 0, 2, 1),\ a_2 = (2, 1, 2, 3),\ a_3 = (0, 1, -2, 1);$

$b)$ $a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, 2, 2, -1),\ a_3 = (1, 0, 0, 3)$;

$c)$ $a_1 = (2, 1, 1, -1),\ a_2 = (1, 1, 3, 0),\ a_3 = (1, 2, 8, 1)$;

236. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство L:

$a)$ $x = (4, -1, -3, 4)$. L натянуто на векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$;

$b)$ $x = (5, 2, -2, 2)$. L натянуто на векторы $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

26. Квадратичные формы. Метод Лагранжа

Основные понятия, формулы и теоремы

Определение 118. *Квадратичной формой* называется функция числовых переменных x_1, x_2, ..., x_n следующего вида:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{173}$$

где a_{ij} – вещественные числа (*коэффициенты квадратичной формы*), удовлетворяющие условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{174}$$

Матрица $A = (a_{ij})$ с размером $n \times n$ называется *матрицей квадратичной формы*. Из равенства (174) следует, что матрица квадратичной формы A является симметрической.

Квадратичную форму (173) можно записать в матричном виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

где X – столбец переменных x_1, x_2, ..., x_n, X^T – строка, полученная транспонированием столбца X, A – матрица квадратичная формы.

Теорема 1. *Любую квадратичную форму*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

невырожденным линейным преобразованием $X = Q \cdot Y$ можно привести к виду

$$\widetilde{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i \big(y_i\big)^2. \tag{175}$$

Определение 119. Выражение (175) называется *каноническим видом квадратичной формы*, а числа c_i $(i = 1, \ldots, n)$ – ее *каноническими коэффициентами*. Матрица квадратичной формы $\widetilde{f}$, имеющей канонический вид, является диагональной матрицей с элементами c_i на главной диагонали. Если в квадратичной форме (175) все канонические коэффициенты $c_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то ее также называют *нормальным видом квадратичной формы*.

Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа):

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы. Для того чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду необходимо выполнить следующие действия:

1. Если существует ненулевой элемент $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$ и на главной диагонали матрицы $a_{ii} \neq 0$, то необходимо выпонить преобразование
$X = Q_1 Y$, где

$$\begin{cases} y_1 & = & x_1 \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\ y_{i-1} & = & x_{i-1} \\ y_i & = & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \\ y_{i+1} & = & x_{i+1} \\ \multicolumn{3}{l}{\dotfill} \\ y_n & = & x_n \end{cases} \tag{176}$$

2. Если все элементы на главной диагонали равны нулю, то найти любой ненулевой элемент матрицы $a_{ij} \neq 0$ и выполнить преобразование

$X = Q_2 Z$, где

$$\begin{cases} x_i &= z_i - z_j \\ x_j &= z_i + z_j \\ x_k &= z_k, \ k \neq i, j. \end{cases} \qquad (177)$$

Выполнение преобразований (176) и (177) приведет квадратичную форму (173) к каноническому виду (175).

Задачи для самостоятельного решения

237. Найти канонический вид и матрицу линейного преобразования, которое приведет квадратичную форму к этому виду:

a) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

c) $x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

d) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

e) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

f) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

g) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

h) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

27. Приведение квадратичной формы к главным осям. Критерий Сильвестра

Основные понятия, формулы и теоремы

Приведение квадратичной формы к главным осям

Определение 120. Квадратная матрица Q называется *ортогональной*, если выполняется равенство

$$Q^{-1} = Q^T.$$

Определение 121. Линейное преобразование переменных $X = QY$, называется *ортогональным*, если его матрица Q ортогональная.

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы* f

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{178}$$

существует ортогональное преобразование $X = QY$*, приводящее ее к каноническому виду:*

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2. \tag{179}$$

При этом λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ *– собственные значения матрицы квадратичной формы* A*, а столбцы матрицы* Q *– ортонормированная система собственных векторов матрицы* A *(норма каждого из них равна 1).*

Пусть дана квадратичная форма (178) с матрицей $A = (a_{ij})$. Тогда *алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям* состоит в следующем:

1. Найти собственные значения матрицы A, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Обозначим их λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n.

2. Для каждого собственного значения λ_p, $1 \leq p \leq n$ найти все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$(A - \lambda_p E)X = \Theta.$$

Найденные решения будут собственными векторами, соответствующие собственному значению λ_p.

3. Используя процеду ортогонализации (см. §- 1), ортогонализировать и нормировать систему из собственных векторов матрицы A (если это необходимо).

4. Составить ортогональную матрицу Q, столбцами которой являются ортонормированные векторы матрицы A.

5. Записать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

6. Записать ортогональное преобразование переменных $X = QY$, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Критерий Сильвестра

Определение 122. Квадратичная форма f называется *положительно определенной,* если ее нормальный вид следующий

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Определение 123. Определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix},\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются *главными минорами* матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$.

Теорема 2. *(критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны, то есть*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

238. Найти канонический вид, к которому приводятся следующие квадратичные формы посредством ортогонального преобразования, не находя самого этого преобразования:

$a)$ $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$

$b)$ $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$c)$ $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$

239. Найти ортогональное преобразование, приводящее следующие формы к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид:

$a)$ $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$

$b)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$c)$ $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;

$d)$ $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

$e)$ $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$f)$ $8x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$.

240. Найти все значения параметра λ, при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

$a)$ $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

$b)$ $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

$c)$ $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$d)$ $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$;

$e)$ $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

Кривые второго порядка

28. Кривые второго порядка

1. Окружность

Определение 124. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности. Расстояние от точек окружности до ее центра называется *радиусом* окружности.

Каноническое (простейшее) уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{180}$$

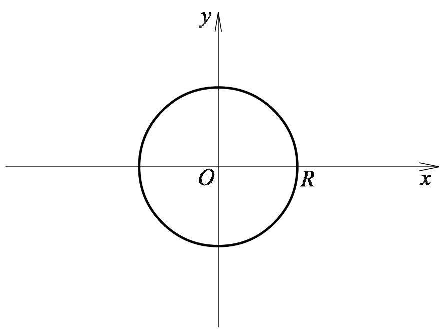

Рис. 51. Окружность с центром в начале координат и радиусом R

Окружность радиусом R с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{181}$$

2. Эллипс

Определение 125. *Эллипс* – это геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек

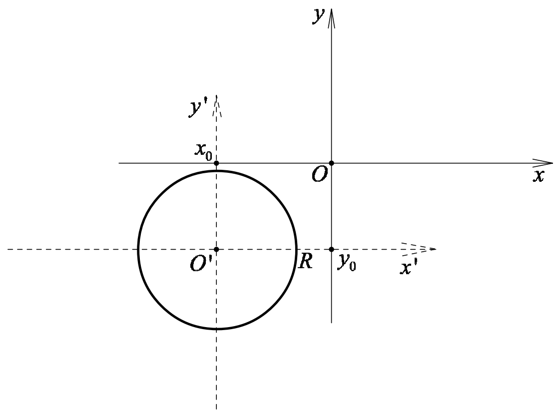

Рис. 52. Окружность с центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и радиусом R

F_1 и F_2 (*фокусов*) есть постоянная величина $2a$, превышающая расстояние между фокусами $2c$:

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a > 2c. \tag{182}$$

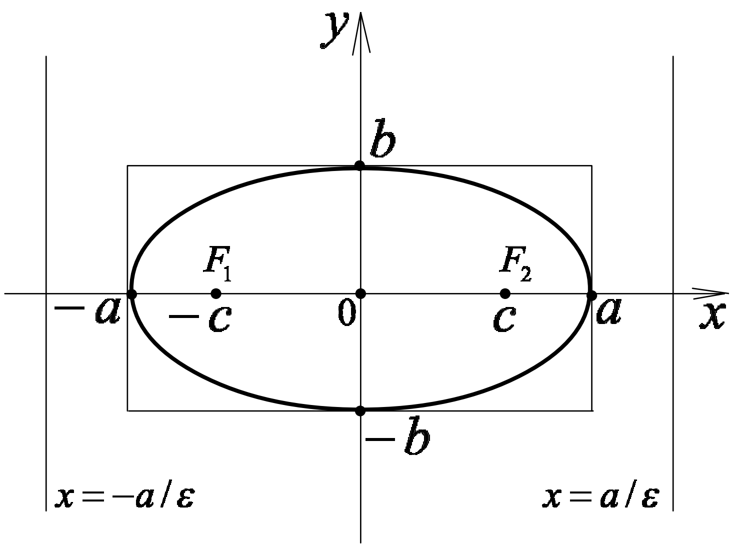

Рис. 53. Эллипс с центром в начале координат

Выберем систему координат Oxy так, чтобы координаты фокусов были $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть $b^2 = a^2 - c^2$. Тогда *каноническое (простейшее) уравнение эллипса* будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{183}$$

Начало координат совпадает с *центром эллипса.* Точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ называются *вершинами эллипса.* Числа a и b являются соответственно *большой и малой полуосями эллипса.* Тогда $2a$ и $2b$ – это соответственно *большая и малая оси* эллипса.

Определение 126. Величина $\varepsilon = c/a$, называемая *эксцентриситетом*, характеризует меру сжатия эллипса. Так как $a > c$, то для эллипса $0 < \varepsilon < 1$. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность.

Определение 127. Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ называются *директрисами* эллипса.

Определение 128. Расстояния точки $M(x, y)$ эллипса до фокусов называются *фокальными расстояниями* и определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x; \qquad r_1 = a - \varepsilon x. \tag{184}$$

Замечание 5. Уранение вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{185}$$

определяет эллипс (см. рис. 54), который параллельно смещен относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса находится в точке $O'(x_0, y_0)$, при этом старые координаты (x, y) и новые (x', y') связаны следующим равенством

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \tag{186}$$

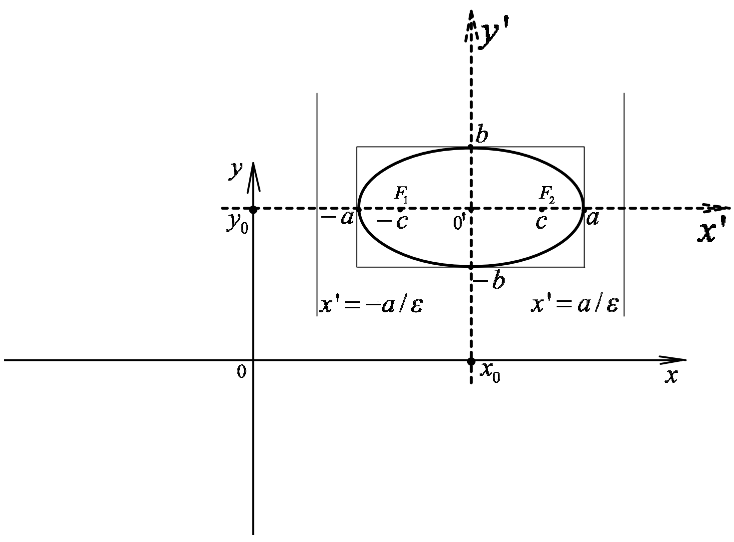

Рис. 54. Эллипс с центром в точке $O'(x_0, y_0)$

3. Гипербола

Определение 129. *Гипербола* – это геометрическое место точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (*фокусов*) есть постоянная величина $2a$, меньшая расстояния между фокусами $2c$:

$$\big| |MF_1| - |MF_2| \big| = 2a < 2c. \tag{187}$$

Выберем систему координат Oxy так, чтобы координаты фокусов были $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Пусть $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда *каноническое (простейшее) уравнение гиперболы* будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{188}$$

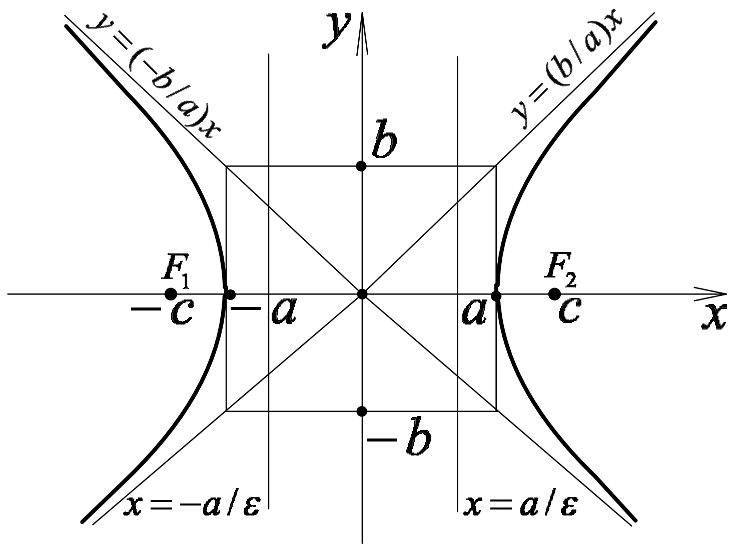

Рис. 55. Гипербола

Начало координат совпадает с *центром* гиперболы. Точки $(\pm a, 0)$ – это *вершинами* гиперболы. Числа a и b являются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы. Тогда $2a$ и $2b$ – это соответственно *действительная и мнимая оси* гиперболы.

Определение 130. Величина $\varepsilon = c/a$, называемая *эксцентриситетом*, характеризует меру сжатия эллипса. Так как $a < c$, то для гиперболы $\varepsilon > 1$.

Прямые $x = \pm a/\varepsilon$ – это *директрисы* гиперболы.

Определение 131. Прямая называется *асимптотой* гиперболы, если расстояние от точки $M(x, y)$ гиперболы до этой прямой стремится к нулю при $x \to -\infty$ или $x \to \infty$. У гиперболы две аимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Расстояния точки $M(x, y)$ гиперболы до ее фокусов определяются формулами:

$$r_1 = |\varepsilon x + a|; \qquad r_2 = |\varepsilon x - a|. \tag{189}$$

Определение 132. Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{190}$$

называется *сопряженной* с гиперболой (см. рис. 56).

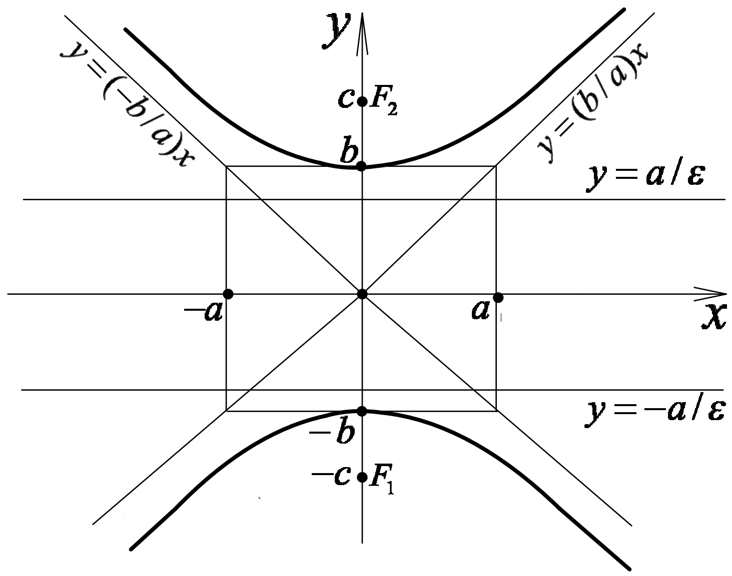

Рис. 56. Сопряженная гипербола

Замечание 6. Уранение вида

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{191}$$

определяет гиперболу, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy.

4. Парабола

Определение 133. *Парабола* – это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки плоскости (*фокуса*) и фиксированной прямой плоскости (*директрисы*).

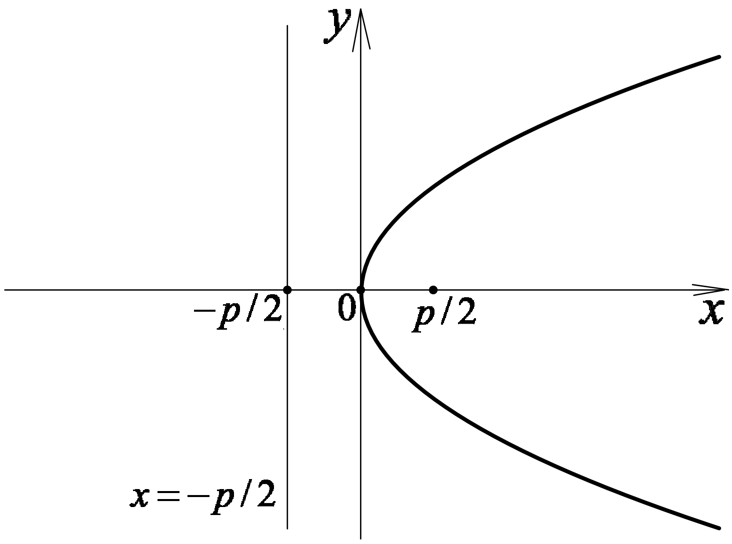

Рис. 57. Парабола

Начало координат – это *вершина* параболы. Ось Ox является *осью* параболы. Пусть $F(p/2, 0)$ – фокус, а $x = -p/2$ – уравнение директрисы. Тогда каноническое уравнение параболы в такой системе координат имеет вид

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \tag{192}$$

Число p называется *параметром* параболы.

Определение 134. *Фокальный радиус* точки $M(x, y)$ параболы выражается формулой

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{193}$$

Каноническими уравнениями параболы называют еще три вида уравнений параболы. Сопроводим их соответствующими рисунками.

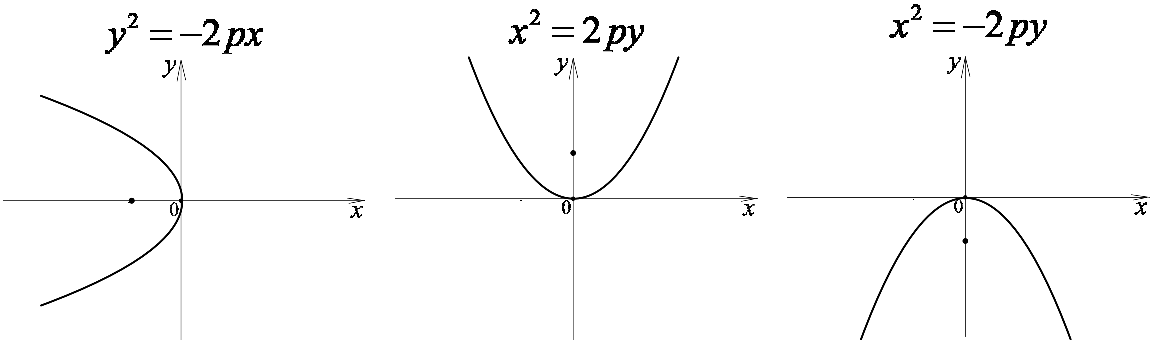

Рис. 58. Дополнительные канонические уравнения параболы

Замечание 7. Уравнение вида

$$(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0). \tag{194}$$

определяет параболу, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy таким образом, что вершина параболы находится в точке $O'(x_0, y_0)$

Задачи для самостоятельного решения

241. Дано уравнение кривой второго порядка. Найти длины полуосей, координаты фокусов, эксцентристет, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы). Построить данную кривую.

$a)$ $x^2 + 4y^2 = 16;$ $c)$ $4x^2 + 25y^2 = 100$

$b)$ $4x^2 - y^2 = 16$ $d)$ $4x^2 - 9y^2 = 36$

242. Написать уравнение гиперболы, имеющей эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{3}{2}$, если известно, что ее фокусы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{15} + \dfrac{y^2}{6} = 1$.

243. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $x + y = 4$, вырезанной параболой $y^2 = 2x$.

244. Написать каноническое уравнение эллипса, у которого эксцентриситет равен 0.8, а большая полуось больше малой полуоси на две единицы.

245. Найти каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{40}, 2)$ и имеющей асимптоты $y = \pm\dfrac{1}{3}x$.

246. В эллипс $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ вписан прямоугольник, две противоположные стороны которого проходят через фокусы. Вычислить площадь этого прямоугольника.

247. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(5, 0)$ и $B(1, 4)$, если центр ее лежит на прямой $x + y = 3$.

248. Составить каноническое уравнение эллипса, сумма полуосей которого равна 8, а расстояние между фокусами равно 8.

249. Найти точки пересечения параболы $y^2 = x$ с окружностью, которая проходит через начало координат, имеет центр на оси Ox и радиус равный 5.

250. Составить каноническое уравнение эллипса, правая вершина которого совпадает с правым фокусом гиперболы $8x^2 - y^2 = 8$. Эллипс проходит через точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с гиперболой $8x^2 - y^2 = 8$.

251. Эллипс проходит через точку пересечения прямой $3x + 2y - 7 = 0$ с параболой $y^2 = 4x$ (взять точку с меньшей абсциссой). Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение этого эллипса, если его эксцентриситет равен 0.6.

252. Эксцентриситет гиперболы в 2 раза больше углового коэффициента ее асимптоты. Гипербола проходит через точку $M(3, -1)$, и ее действительная ось лежит на оси Ox, а центр – в начале координат. Найти точки пересечения этой гиперболы с окружностью $x^2 + y^2 = 10$.

253. Найти параметр p параболы $y^2 = 2px$, если известно, что эта парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ с окружностью $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

254. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения кривых, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$a)$ $9x^2 + 16y^2 + 36x - 64y - 44 = 0;$

$b)$ $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0;$

$c)$ $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0;$

$d)$ $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0;$

$e)$ $-9x^2 + 16y^2 + 54x + 32y - 209 = 0;$

$f)$ $y^2 + 2x - 2y - 7 = 0;$

$g)$ $x^2 - 4x + 4y = 0;$

$h)$ $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y - 164 = 0;$

$i)$ $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0.$

255. Даны точка $A(1; 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение кривой, каждая точка $M(x; y)$ которой удовлетворяет заданным условиям.

$a)$ в два раза ближе к точке A, чем к данной прямой;

$b)$ в два раза дальше от точки A, чем от данной прямой;

$c)$ равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

29. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Определение 135. Уравнение

$$F(x, y) = f(x, y) + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (195)$$

в котором

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \qquad (196)$$

квадратичная форма, а коэффициенты a_{ij} $(i, j = \overline{1, 3})$ вещественные числа, называется *общим уравнением второго порядка.*

Определение 136. Если на плоскости задана декартова прямоугольная система координат Oxy, то геометрическое место точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (195), будем называть *кривой второго порядка*, задаваемой общим уравнением второго порядка (195).

Нашей задачей будет определить все возможные типы (геометрические формы) кривых второго порядка, то есть классифицировать эти кривые. Поставленную задачу будем решать, преобразуя уравнение (195) к некоторому специальному (каноническому) виду, по которому будет нетрудно определить геометрическую форму кривой. Будем использовать два типа преобразований координат $(x, y) \to (x_1, y_1)$.

1. Ортогональные преобразования

$$\begin{cases} x = q_{11}x_1 + q_{12}y_1, \\ y = q_{21}x_1 + q_{22}y_1, \end{cases} \tag{197}$$

в краткой форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

где Q – ортогональная матрица, (x_1, y_1) – новые координаты точки, имеющей старые координаты (x, y). Известно, что существует два типа ортогональных преобразований (см. [1]):

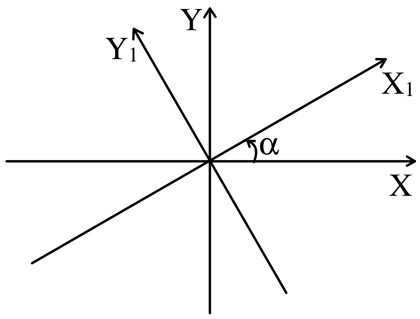

Рис. 59

а) преобразование поворота осей (см. рис. 59). В этом случае матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \det Q = 1;$$

б) преобразование поворота с последующим изменением направления одной из координатных осей (на рис. 60) изменено направление оси y_1). В этом случае матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \det Q = -1.$$

2. Параллельный перенос осей в новое начало координат $O_1(a, b)$ (a, b – координаты точки O_1 в старой системе координат Oxy). Это преобразование координат задается соотношениями

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b. \end{cases} \tag{198}$$

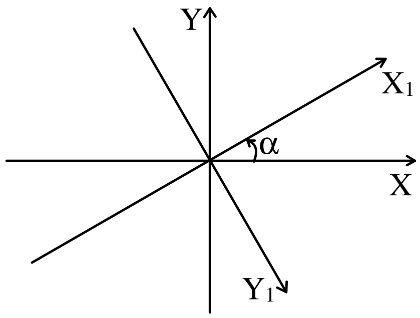

Рис. 60

Отметим, что если коэффициенты $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, то есть матрица A квадратичной формы f – нулевая, то уравнение (195) превращается в общее уравнение прямой на плоскости Oxy. Этот случай исключим из дальнейшего рассмотрения, то есть будем полагать $A \neq 0$.

Алгоритм приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

1. Для квадратичной формы $f(x, y)$, определенной равенством (195), выписать матрицу A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

2. Найти корни λ_1, λ_2, решая характеристическое уравнение

$$|A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

3. Для каждого характеристического числа λ_1, λ_2 найти собственные векторы U_1, U_2.

4. Если необходимо, ортогонализировать и нормировать систему собственных векторов. Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{pmatrix}$ – ортонормированная система собственных векторов.

5. Составить матрицу $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму $f(x, y)$ к каноническому виду.

6. В уравнении (195) от старых переменных (x, y) перейти к новым переменным (x_1, y_1), используя равенства (197). В новых декартовых

прямоугольных координатах x_1, y_1 уравнение (195) примет вид

$$F = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + \gamma, \tag{199}$$

где $\alpha = a_{13}q_{11} + a_{23}q_{21}$, $\beta = a_{13}q_{12} + a_{23}q_{22}$, $\gamma = a_{33}$.

Таким образом, с помощью ортогонального преобразования (197) мы "уничтожили" смешанное произведение координат в форме f.

Далее, выделив полные квадраты по обеим переменным (или по одной переменной, если одно из значений λ_i равно нулю), с помощью параллельного переноса осей координат системы Ox_1y_1 переходим к системе Ox_2y_2, в которой уравнение кривой имеет канонический вид.

Общее уравнение второго порядка (195) может быть либо уравнением эллипса (вещественного или мнимого), гиперболы или параболы, либо уравнением пары прямых, пересекающихся или параллельных (в частности, "слипшихся" или мнимых), либо кривая, описываемая уравнением (195), вырождается в точку. Для удобства читателя в таблице 1 приводятся названия и канонические уравнения в координатной системе Oxy всех кривых второго порядка.

№	**Название**	**Каноническое урав-е**
1.	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2.	Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
3.	Пара мнимых пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
4.	Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
5.	Пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
6.	Парабола	$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$
7.	Пара параллельных прямых	$y^2 - b^2 = 0$
8.	Пара мнимых параллельных прямых	$y^2 + b^2 = 0$
9.	Пара совпадающих прямых	$y^2 = 0$

Таблица 1. Канонические уравнения кривых второго порядка

Задачи для самостоятельного решения

256. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота осей координат системы Oxy и последующего параллельного переноса. Найти угол поворота и координаты нового начала координат:

$a)$ $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0;$

$b)$ $5x^2 - 2xy + 5y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{5}{4} = 0;$

$c)$ $4x^2 - 4xy + y^2 - 2\sqrt{5}x + 3\sqrt{5}y + \frac{129}{20} = 0;$

$d)$ $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 6\sqrt{13}x + 4\sqrt{13}y + 13 = 0;$

$e)$ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8\sqrt{2}x + 16\sqrt{2}y + 44 = 0;$

$f)$ $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0;$

$g)$ $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0;$

$h)$ $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 216 = 0;$

$i)$ $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0;$

$j)$ $8x^2 + 6xy + 6x + 3x + 1 = 0;$

$k)$ $x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 2 = 0.$

Ответы

1. **a)** $3+i$; $-4+19i$; $-7+5i$; $-\frac{16}{29}+\frac{11}{29}i$; $-16-11i$, **b)** $3-2i$; $37-9i$; $1+12i$; $-\frac{33}{50}+\frac{19}{50}i$; $-33-19i$, **c)** $2\sqrt{2}$; 5; $-2\sqrt{3}i$; $-\frac{1}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{5}i$; $-1+2\sqrt{6}i$.

2. *Решение.* Имеем $i^1=i$, $\quad i^2=-1$, $\quad i^3=i^2\cdot i=-i$, $\quad i^4=i^3\cdot i=-i^2=1$. Очевидно, что все возможные значения i^n были вычислены и дальше они будут циклично повторяться. Поэтому i^n следует вычислять по формуле:

$$i^n=\begin{cases} 1, & \text{если } n = 4k, \\ -i, & \text{если } n = 4k-1, \\ -1, & \text{если } n = 4k-2, \\ i, & \text{если } n = 4k-3, \end{cases} \tag{200}$$

где k – произвольное натуральное число.

3. **a)** i, **b)** $\frac{44-5i}{318}$, **c)** i, **d)** $-\frac{18}{25}+\frac{23}{50}i$, **e)** 2, **f)** $-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}i$.

4. *Решение.* Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, $z_1\neq 0$, $z_2\neq 0$. Вычислим произведение этих чисел, получим:

$$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+(x_2y_1+x_1y_2)i. \tag{201}$$

Комплексное число (201) является мнимым, если его действительная часть равна нулю, то есть если

$$x_1x_2-y_1y_2=0$$

или

$$\frac{x_2}{y_1}=\frac{y_2}{x_1}.$$

Пусть теперь $\dfrac{x_2}{y_1}=\dfrac{y_2}{x_1}=\lambda$, где λ – вещественное число. Тогда

$$\begin{cases} x_2 = \lambda y_1, \\ y_2 = \lambda x_1. \end{cases}$$

Поэтому $z_2 = \lambda(y_1 + ix_1)$. Таким образом, произведение двух комплексных чисел является мнимым, если сомножители имеют вид: $x_1 + iy_1$ и $\lambda(y_1 + ix_1)$, где λ – произвольное вещественное число.

5. a) *Решение.* Пусть $z = a + bi$, тогда $\bar{z} = a - bi$. По условию задачи должно быть выполнено следующее равенство: $\bar{z} = z^2$ или

$$a - bi = (a + bi)^2. \tag{202}$$

Упростим правую часть уравнения (202), получим

$$a - bi = a^2 - b^2 + 2abi. \tag{203}$$

Из (203) и равенства двух комплексных чисел, следует система уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= a, \\ b(2a+1) &= 0. \end{cases} \tag{204}$$

Система (204) равносильна совокупности двух систем:

1) $\begin{cases} b &= 0; \\ a^2 - a &= 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0; \\ a(a-1) &= 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b &= 0; \\ a &= 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} b &= 0; \\ a &= 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} a &= -1/2; \\ b^2 &= 3/4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= -1/2; \\ b &= \sqrt{3}/2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a &= -1/2; \\ b &= -\sqrt{3}/2. \end{cases}$

Таким образом, комплексные числа $0;\ 1;\ -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$ сопряжены своим квадратам. **b)** $0;\ 1;\ i;\ -1;\ -i$.

6. a) $x = -\frac{4}{11}$, $y = \frac{5}{11}$, **b)** $x = 1$, $y = 2$, **c)** $x = 1$, $y = -1$ или $x = -1$, $y = 1$.

7. a) $x = i + 1$, $y = i$, **b)** $x = 2 + i$, $y = 2 - i$.

8. a) -1, **b)** 1.

11. $x = -2$, $y = -2$ или $x = -2$, $y = 2$.

12. $(3; 4)$, $(3; 5)$, $(4; 4)$, $(4; 5)$.

13. $\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

14. a) $\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$, **b)** $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$, **c)** $2(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$, **d)** $2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$, **e)** $16(\cos(0) + i\sin(0)$, **f)** $\cos(\pi) + i\sin(\pi)$, **g)** $4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}))$, **h)** $\sqrt{5}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$,

i) $2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$, **j)** $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}))$, **k)** $2\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3}))$, **l)** $8(\cos(0)+i\sin(0)$, **m)** $16(\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2}))$, **n)** $8(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6}))$, **o)** $32(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$, **p)** $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})$.

15. a) полуплоскость, лежащая ниже прямой $x + y = 1$ (см. рисунок 2), **b)** полуплоскость, лежащая выше прямой $y = x$ (см. рисунок 3), **c)** множество показано на рисунке 4, **d)** множество показано на рисунке 5, **e)** данное неравенство равносильно неравентсвам $2\pi k < |z| < \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Искомое множество представляет собой бесконечную систему концентрированных колец с центром в точке $z = 0$. Сама точка $z = 0$ не принадлежит этому множеству (см. рисунок 6), **f)** прямая, которая задается уравнением $y = -x$, **g)** точка $z = -1 - 2i$, **h)** угол (без границы) с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z = 1$ и $z = 0$, **i)** действительная отрицательная полуось $y = 0$, $x < 0$, **j)** круг радиуса $R = 10$ с центром в точке $z = -i$ без границы и без центра, **k)** окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $z = 0$, **l)** множество показано на рисунке 7, **m)** множество показано на рисунке 8, **n)** прямая, которая задается уравнением $y = -x$, **o)** уравнение окружности с центром в точке $(-3; 0)$, радиус которой равен $R = 3$, **p)** парабола, симметричная относительно оси OX, с вершиной в точке $-\frac{1}{2}$, которая задается уравнением $y^2 = 2x + 1$ (см. рисунок 1).

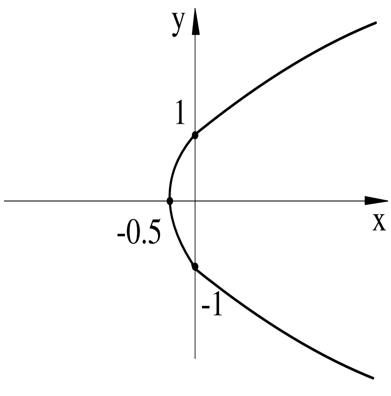

Рисунок 1.

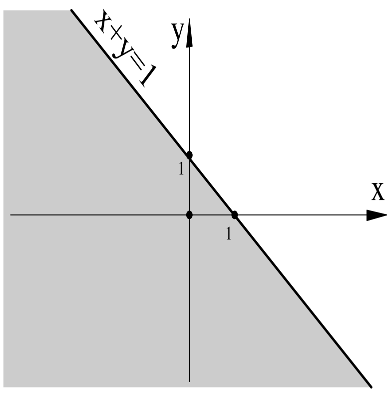

Рисунок 2.

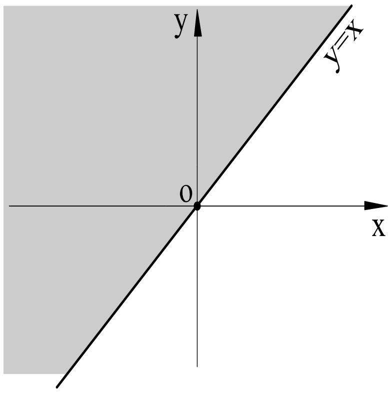

Рисунок 3.

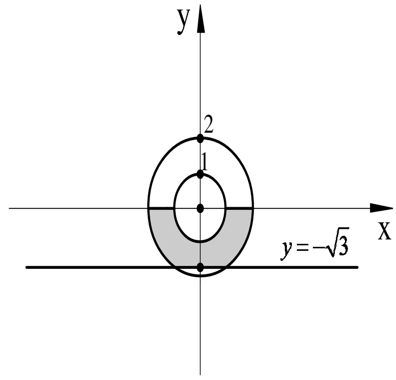

Рисунок 4.

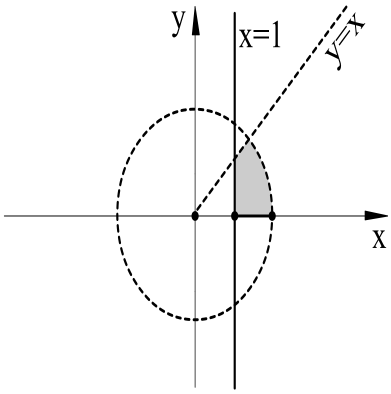

Рисунок 5.

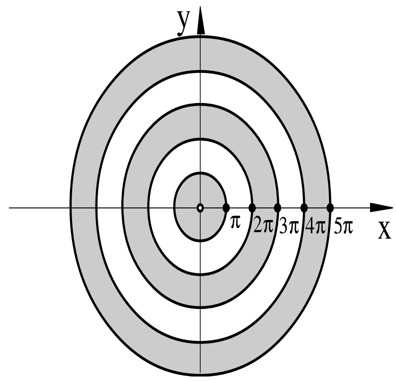

Рисунок 6.

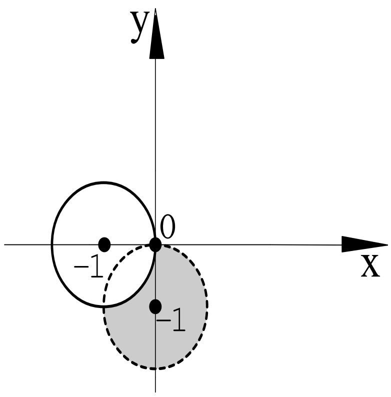

Рисунок 7.

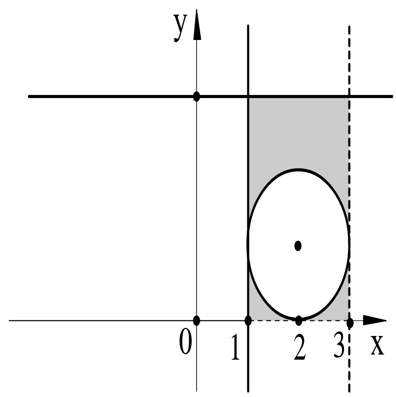

Рисунок 8.

16. **a)** $2(\cos(\frac{2\pi}{9}) + i\sin(\frac{2\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{8\pi}{9}) + i\sin(\frac{8\pi}{9}))$; $2(\cos(\frac{14\pi}{9}) + i\sin(\frac{14\pi}{9}))$, **b)** $\pm 2 \pm 2i$, **c)** 1; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, **d)** $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{\pi}{32}) + i\sin(\frac{\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{9\pi}{32})+i\sin(\frac{9\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{17\pi}{32})+i\sin(\frac{17\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(25\frac{\pi}{32})+i\sin(\frac{25\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{33\pi}{32})+i\sin(\frac{33\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{41\pi}{32})+i\sin(\frac{41\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{49\pi}{32})+i\sin(\frac{49\pi}{32}))$; $\sqrt[16]{2}(\cos(\frac{57\pi}{32}) + i\sin(\frac{57\pi}{32}))$.

17. **a)** *Решение.* Представим комплексные числа $z_1 = i - \sqrt{3}$, $z_2 = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $z_3 = 1 - i$ в тригонометрической форме, получим:

$z_1 = 2\Big(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\Big),$
$z_2 = \cos\Big(-\dfrac{\pi}{12}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{12}\Big),$
$z_3 = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big).$

Используем равенства (15)–(16) и имеем

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \sqrt{2}\bigg(\cos\Big(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\Big)\bigg) = \sqrt{2}\Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big).$$

Итак, число z в алгебраической форме имеет вид: $z = -\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{2}(\cos(\varphi + \frac{7\pi}{12}) + i\sin(\varphi + \frac{7\pi}{12}))$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(2\varphi - \frac{\pi}{12}) + i\sin(2\varphi - \frac{\pi}{12}))$, **d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, **e)** -2^{10}, **f)** $2^9(1 - i\sqrt{3})$, **g)** -64, **h)** $-128i$.

19. $\cos\dfrac{n\pi}{3} + i\sin\dfrac{n\pi}{3}$.

20. $2\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

21. $2^n\cos^n\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2} + i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$.

23. **a)** 0, $\cos(\frac{2\pi k}{5}) + i\sin(\frac{2\pi k}{5})$, **b)** $2 - \frac{3}{2}i$, **c)** 0, $\pm i$, **d)** bi, $b \in \mathbb{R}$,

24. **a)** $2 + i$, $1 - 3i$, **b)** $2 \pm 2i$, **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, **d)** $1 - 2i$, $3i$, **e)** $1 - i$; $\frac{4-2i}{5}$, **f)** $5 - 2i$, $2i$.

25. $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{q}}{2} - \dfrac{p}{4}} \pm i\sqrt{\dfrac{\sqrt{q}}{2} + \dfrac{p}{4}}$.

26. **a)** $\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{i}{2}$, **b)** $\pm 4 \pm i$.

27.

a) $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$; $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})\right)$;
b) $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{16}) + i\sin(\frac{\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{9\pi}{16}) + i\sin(\frac{9\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{17\pi}{16}) + i\sin(\frac{17\pi}{16})\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos(\frac{25\pi}{16}) + i\sin(\frac{25\pi}{16})\right)$;
c) $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{15}) + i\sin(\frac{\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{15}) + i\sin(\frac{7\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{13\pi}{15}) + i\sin(\frac{13\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{19\pi}{15}) + i\sin(\frac{19\pi}{15})\right)$; $\sqrt[5]{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$;
d) $\sqrt{3} + i$; $2i$; $-\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} - i$; $-2i$; $\sqrt{3} - i$.

28. **a)** *Решение.* Для того, чтобы определить общее число инверсий, сосчитаем количество инверсий, которое образует каждый символ перестановки:

символ 2 образует 0 инверсий;

символ 3 стоит раньше символа 2 и, следовательно, образует 1 инверсию;

символ 4 образует 0 инверсий;

символ 5 стоит раньше символа 4 и образует 1 инверсию;

символ 6 — 4 инверсии (так как стоит раньше символов 3,2,5,4);

символ 7 имеет 0 инверсий;

символ 8 образует 0 инверсий;

символ 9 имеет 7 инверсий, так как стоит раньше символов 6,3,2,5,4,7,8.

По результатам вычислений составляем следующую таблицу:

Символ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Общее кол-во инверсий
Кол-во инверсий	0	0	1	0	1	4	0	0	7	13

Итак, исходная перестановка имеет 13 инверсий. **b)** 5, **c)** 8, **d)** 18, **e)** 10, **f)** 18.

29. **a)** $i = 8$, $k = 3$, **b)** $i = 3$, $k = 6$.

30. **a)** *Решение.* Чтобы определить общее количество инверсий, составим таблицу

Символ	1	3	5	7	...	2n-3	2n-1
Кол-во инверсий	0	1	2	3	...	n-2	n-1

Таким образом, исходная перестановка имеет $I = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий. **b)** $\frac{n(n+1)}{2}$, **c)** $\frac{3n(n-1)}{2}$, **d)** $3n(n-1)$, **e)** $n(3n-2)$, **f)** $n(5n+1)$.

31. В перестановке n, $n-1$, $n-2$, $\ldots$, 3, 2, 1. Число инверсий в ней $\frac{n(n-1)}{2}$.

32. $k - 1$.

33. $n - k$.

34. **a)** $(1,8,2)(3)(4,6,7)(5)$ перестановка четная, **b)** $(1,5)(2,8,6,4)(3,9,7)$ перестановка четная, **c)** $(1,4)(2,5)(3,6)$ перестановка нечетная, **d)** $(1,2)(3,4),\ldots,(2n-1,2n)$. Декремент равен n. Четность подстановки совпадает с четностью n.

35. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$,
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$,
e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 1 \end{pmatrix}$.

36. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,
d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

37. *Решение.* Умножим равенство $AXB = C$ слева на A^{-1} и справа на B^{-1}, получим $A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$. Учитывая, что $A^{-1}A = BB^{-1} = e$, имеем $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Находим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}CB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

39. **a)** -8, **b)** 1, **c)** $x^2 + 2y^2$, **d)** 2, **e)** 0, **f)** $1/\cos^2\varphi$, **g)** $\sin x$

40. **a)** 10/7, **b)** окружность с центром в точке (-2;3) и радиусом $R = 5$, **c)** $x_1 = 1$; $x_2 = 5$, **d)** $x_1 = \pi k/4$, $k \in Z$; $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$,
e) $z_1 = 0$; $z_2 = \pm i$.

41. **a)** 0, **b)** 6, **c)** -210, **d)** $abc + abx + acx + bcx$, **e)** -12, **f)** 40, **g)** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, **h)** $abc - ax^2 - bx^2 - cx^2 + 2x^3$.

42. **a)** $x = 5$, **b)** $x \in [-41/21; +\infty)$, **c)** $x_1 = -3$, $x_2 = -2,5$, **d)** $x \in [-\infty; -7]$.

44. **a)** 0, **b)** 0, **c)** 0, **d)** 0, **e)** 0.

46. **a)** *Решение.* Из вторых индексов данного произведения составляем перестановку $\sigma = \{3, 2, 1, 6, 5, 4\}$. Перестановка σ является четной, так как имеет 6 инверсий. Из формулы (33) следует что, произведение $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$ входит в определитель шестого порядка со знаком плюс. **b)** *Решение.* Множество, составленное из вторых индексов исходного произведения $\{7, 1, 4, 6, 4, 2, 3\}$, не является перестановкой из семи символов, поэтому произведение $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$ не является членом определителя. **c)** входит со знаком минус, **d)** входит со знаком плюс, **e)** не является членом определителя, **f)** входит со знаком $(-1)^{n-1}$, **g)** входит со знаком $(-1)^n$, **h)** не является членом определителя.

47. **a)** *Решение.* В первой строке данного определителя лишь один элемент ненулевой — это элемент a_{11}, следуя определению определителя из второй строки мы можем выбрать только элемент a_{22}, из третьей строки — a_{33} и так далее. Таким образом, определитель равен произведению

$$\Delta = (-1)^{t(j)} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \tag{205}$$

Перестановка $\{1, 2, \dots, n\}$ является четной, поэтому окончательно получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \tag{206}$$

b) *Решение.* Рассуждаем так же, как и в предыдущем примере. Из первой строки мы берем элемент a_{1n}, так как все остальные равны нулю, из второй строки Δ мы можем взять только элемент $a_{2,n-1}$, из третьей строки —

элемент $a_{3,n-2}$ и так далее. Таким образом,

$$\Delta = (-1)^{t(j)} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n1}.$$

Сосчитаем число инверсий $t(j)$ в перестановке $n, n-1, n-2, \dots, 1$. Символ n имеет $n-1$ инверсию, символ $n-1$ имеет $n-2$ инверсии и так далее, и, наконец, символ 2 имеет 1 инверсию. Итак,

$$t(j) = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следуя определению определителя, получим

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2n} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \dots a_{n1} \qquad (207)$$

48. $i = 5$, $k = 1$.

49. $i = 6$, $k = 2$.

50. $a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

51. $10x^4 - 5x^3$.

52. $8a + 15b + 12c - 19d$.

53. $2a - 8b + c + 5d$.

54. **a)** -42, **b)** -15, **c)** 119.

55. **a)** *Решение.* Выберем первые две строки определителя Δ_4 и, используя теорему Лапласа, разложим определитель на сумму произведений определителей второго порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

b) 10, **c)** 100, **d)** 60, **e)** 10, **f)** -4, **g)** -2, **h)** 90, **i)** 8, **j)** 4.

56. **a)** -3, **b)** 48, **c)** 20, **d)** 16, **e)** 54, **f)** 160, **g)** 18, **h)** 18, **i)** 4, **j)** 17.

57. **a)** -24, **b)** -60, **c)** 192, **d)** 220, **e)** -98, **f)** -34.

58. **a)** *Решение.* Для того, чтобы привести Δ_n к треугольному виду, достаточно ко всем строкам определителя прибавить первую строку. В результате получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

b) *Решение.* Выполним следующие операции: из n-го столбца вычтем $(n-1)$-ый, из $(n-1)$-го столбца вычтем $(n-2)$-ой и так далее. В итоге получим:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n.$$

c) *Решение.* Можно заметить, что сумма всех элементов любой строки (или столбца) данного определителя одинакова и равна $2n+1$. Поэтому, если прибавить к первой строке все остальные строки определителя, то можно вынести общий множитель за скобку. Следовательно

$$\Delta_n = (2n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку, умноженную на 2, из всех остальных строк определителя и получим определитель треугольного вида

$$\Delta_n = (2n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (2n+1).$$

d) $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\dots(x_n - a_{n-1,n})$, **e)** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot b_1 b_2 \dots b_n$,
f) $x_1 x_2 \dots x_n \cdot \left(\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n}\right)$, **g)** $(n-1)!$, **h)** $b_1 b_2 \dots b_n$,
i) $(-1)^{\frac{n^2-n+2}{2}} \cdot 2 \cdot (n-2)!$, **j)** $(-1)^{n-1} \cdot n!$, **k)** 0,
l) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (n+1)^{n-1}$, **m)** $(-1)^{n-1} \cdot (n-1)$, **n)** $(2n-1) \cdot (n-1)^{n-1}$,
o) $(-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$.

59. a) *Решение.*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 6 + 3\cdot 7 & 1\cdot 4 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2(-2) + 3\cdot 8 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 6 + 7(-1) & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1(-1) & 1\cdot 5 + 0(-2) + 8(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение $B \cdot A$ не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3 \neq 2)$. **b)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, произведения $B \cdot A$ не существует, **c)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 2 & -2 \\ -9 & -15 & 3 \\ 17 & 23 & -5 \end{pmatrix}$,

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -9 & 14 \\ 5 & -22 & -11 \\ -18 & 19 & -32 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -18 & -2 & 16 \\ -13 & -13 & -5 \\ -18 & -9 & -21 \end{pmatrix}$.

60. **a)** *Решение.*

$$4A-5B-\lambda E=4\begin{pmatrix}2&-1&0\\3&4&-2\\-3&1&5\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}3&1&2\\-2&1&3\\0&2&-4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7-\lambda&-9&-10\\22&11-\lambda&-23\\-12&-6&40-\lambda\end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-3\\4&-\lambda&5\\6&-7&-8-\lambda\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}4&-22&-29&47\\64&-7&-33&4\\-8&-18&14&-19\end{pmatrix}$.

61. **a)** *Решение.* Пусть $n=2$, тогда

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha&2\cos\alpha\cdot\sin\alpha\\-2\cos^2\alpha\sin\alpha&\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha&\sin 2\alpha\\-\sin 2\alpha&\cos 2\alpha\end{pmatrix}$$

При $n=3$ имеем

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha&\sin 2\alpha\\-\sin 2\alpha&\cos 2\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha&\cos 2\alpha\sin\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha\\-\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha&\cos 2\alpha\sin\alpha+\cos 2\alpha\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos 3\alpha&\sin 3\alpha\\-\sin 3\alpha&\cos 3\alpha\end{pmatrix}.$$

С помощью метода математической индукции докажем, что

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos n\alpha&\sin n\alpha\\-\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}.$$

По предположению индукции

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \cos(n-1)\alpha & \sin(n-1)\alpha \\ -\sin(n-1)\alpha & \cos(n-1)\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. **b)** $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

62. a) *Решение.* Пусть $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ — матрица, перестановочная с матрицей A, т.е. выполнено равенство

$$AB = BA. \tag{208}$$

Имеем

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}, \tag{209}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & 2x_1 + 4x_2 \\ x_3 + 3x_4 & 2x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}. \tag{210}$$

Равенство (208) с учетом (209), (210) перепишем в виде

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \tag{211}$$

Пусть $x_3 = 3a$, $x_4 = b$, тогда $x_1 = b - 3a$, $x_2 = 2a$ и в результате получим

$$B = \begin{pmatrix} b - 3a & 2a \\ 3a & b \end{pmatrix},$$

где a, b — произвольные числа. **b)** $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-5b}{3} & a+3b \end{pmatrix}$, где a, b – произвольные действительные числа.

63. $\begin{pmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{pmatrix}$.

64. $\begin{pmatrix} 190 & 189 & -189 \\ 126 & 127 & -126 \\ 252 & 252 & -251 \end{pmatrix}$.

65. a) *Решение.* 1) Найдем $|A|$ – определитель матрицы A:

$$|A| = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 8 \cdot 6 \cdot 1 =$$

$$= 84 + 96 - 105 - 48 = 27.$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{12} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\frac{1}{41} \begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix}$,

c) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$, **d)** $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, **e)** обратной матрицы не существует, **f)** $\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$.

66. **a)** *Решение.* Запишем матрицу $(A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных пребразований над строками приведем ее к виду $(E|A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{III} : (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \mathrm{I} - \mathrm{II} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} \mathrm{I} - 3\mathrm{III} \\ \mathrm{II} + 2\mathrm{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, **c)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **d)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 14 & -10 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, **f)** обратной матрицы не существует,

g) $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, **h)** $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

67. **a)** $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $X = A^{-1}BC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

c) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -17 & 13 & -10 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}$, **d)** решений нет,

e) $X = A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

68. **a)** *Решение.* Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geq 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит $r(A) \geq 2$. Вычислим миноры третьего порядка, окаймляющие минор M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. 1 и 2 столбцы пропорциональны;}$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. к. пропорциональны 2 и 3 столбцы.}$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) = 2$. Любой ненулевой минор второго порядка матрицы A является базисным. Например, базисным минором является минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

b) 3, **c)** 2, **d)** 3, **e)** 2, **f)** 2, **g)** 3, **h)** 2.

69. **a)** *Решенеие.* С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \; \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \; \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \; \begin{matrix} \mathrm{II} - 2\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{matrix} \; \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \text{ III} - 2 \cdot \text{II} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица содержит две ненулевых строки, поэтому ее ранг равен двум. Следовательно, $r(A) = 2$. **b)** 3, **c)** 3, **d)** 2, **e)** 4, **f)** 2.

70. a) $r = 3$ при $\lambda = \frac{2}{3}$, $r = 4$ при $\lambda \neq \frac{2}{3}$, **b)** $r = 2$ при $\lambda = 3$, $r = 3$ при $\lambda \neq 3$, **c)** $r = 3$ при $\lambda = 3$, $r = 4$ при $\lambda \neq 3$, **d)** $r = 2$ при $\lambda = 0$, $r = 3$ при $\lambda \neq 0$.

71. a) $x = -b$, $y = -\frac{2}{3}a$, если $ab \neq 0$; нет решений, если $ab = 0$, **b)** $x = \frac{f_1 d - f_2 b}{ad - bc}$, $y = \frac{af_1 - cf_2}{ad - bc}$, если $ad - bc \neq 0$; нет решений, если $ad - bc = 0$.

72. a) *Решение.* Вычислим определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 30 + 1 = -29$$

следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью правила Крамера. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 30 + 0 - 0 + 16 - 75 = -29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -32 + 0 + 0 - 0 - 60 + 5 = -87,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 25 - 0 - 10 - 160 = -145.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+3=5, \\ 1+3\cdot 5=16, \\ 5\cdot 3-5=10. \end{cases}$$

Итак, $x=1$, $y=3$, $z=5$. **b)** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-3$, **c)** $x_1=0$; $x_2=-4$; $x_3=-6$, **d)** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=-3$, **e)** $x_1=1$; $x_2=1$; $x_3=-1$, $x_4=-1$, **f)** $x_1=-2$; $x_2=0$; $x_3=1$, $x_4=-1$.

73. **a)** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$, **b)** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=2$, **c)** $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$, **d)** $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

74. **a)** *Решение.* Выполним прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-2\mathrm{II} \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & -5 & 9 \end{array}\right)-\mathrm{II}+\mathrm{III}\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{III}+2\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+7\mathrm{II} \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & -18 & 54 & -47 \end{array}\right)\mathrm{IV}-2\mathrm{III}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right).$$

Прямой ход метода Гаусса завершен. Выполним обратный ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -9 & 18 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{III}-\mathrm{IV} \\ 18\mathrm{II}-7\mathrm{IV} \\ 9\mathrm{I}+\mathrm{IV} \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 27 & 0 & 2 \\ 0 & 18 & -36 & 0 & -95 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{II}-4\mathrm{III} \\ \mathrm{I}+3\mathrm{II} \end{array}\sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 18 & 0 & 0 & -37 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right) \mathrm{I}-\mathrm{II} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & -7 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса завершен. В результате получаем систему

$$\begin{cases} 9x_1 &= 6, \\ 18x_2 &= -43, \\ -9x_3 &= -13, \\ 18x_4 &= -7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 &= \dfrac{2}{3}, \\ x_2 &= -\dfrac{43}{18}, \\ x_3 &= \dfrac{13}{9}, \\ x_4 &= -\dfrac{7}{18}. \end{cases}$$

Итак, $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = -\dfrac{43}{18}$, $x_3 = \dfrac{13}{9}$, $x_4 = -\dfrac{7}{18}$. **b)** $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$, $x_4 = 2$, **c)** $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$, $x_4 = 1$, **d)** $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$, $x_4 = 3$, **e)** $x_1 = 3$; $x_2 = -5$; $x_3 = 4$, $x_4 = -2$, $x_5 = 1$.

75. *Решение.* 1) Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -9 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \end{array}\right) \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя матрица соответствует системе, эквивалентной исходной и содержит две ненулевые строки, поэтому $r(A) = r(\bar{A}) = 2$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 4$, то система совместна и имеет более одного решения.

3) Выберем базисный минор в первом и третьем столбце, имеющий вид

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

При таком выборе базисного минора главными неизвестными являются x_1 и x_3 (так как базисный минор состоит из первого и третьего столбца матрицы). Тогда остальные неизвестные, то есть x_2 и x_4 будут свободными.

4) Основываясь на ступенчатой матрице, запишем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 - x_2 + x_4, \\ - x_3 = 1 - 4x_4. \end{cases}$$

5) Решим полученную систему относительно главных неизвестных x_1 и x_3. В результате найдем

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 5x_4, \\ x_3 = -1 + 4x_4. \end{cases}$$

Итак, запишем общее решение системы в виде вектора-столбца

$$X_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} -x_2 + 5x_4 \\ x_2 \\ -1 + 4x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_2 и x_4 принимают любые произвольные значения. Для того, чтобы найти частное решение системы, положим, например, $x_2 = 1$ и $x_4 = 1$, тогда частное решение $X_{\text{частн}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

76. *Решение.* 1) Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A}$ и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & -1 \end{array}\right)\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & 17 & -8 & -14 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 23 & -11 & -19 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Итак, имеем $r(A) = 2$ и $r(\bar{A}) = 3$.

2) Исследуем систему на совместность. Поскольку $r(A) \neq r(\bar{A})$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна, то есть данная система не имеет решений.

77. система совместна, общее решение $x_1 = (c_1 - 9c_2 - 2)/11$, $x_2 = (-5c_1 + c_2 + 10)/11$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

78. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 6 - 15c_1 + 10c_2$, $x_4 = -7 + 18c_1 - 12c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

79. система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

80. система совместна, общее решение $x_1 = (-6 + 8c)/7$, $x_2 = (1 - 13c)/7$, $x_3 = (15 - 6c)/7$, $x_4 = c$, частное решение $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1$.

81. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1 + 2c_1 - c_2$ частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$.

82. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = 1 + c_1 - c_2$, $x_3 = 1$, $x_4 = c_2$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$.

83. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 22c_1 - 33c_2 - 11$, $x_4 = -16c_1 + 24c_2 + 8$, частное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

84. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 1 - 3c_1 - 4c_2$, $x_4 = 1$, частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

85. система несовместна.

86. система совместна, общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = 13$, $x_4 = 19 - 3c_1 - 2c_2$, $x_5 = -34$, частное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 13$, $x_4 = 0$, $x_5 = -34$.

87. при $\lambda = -4$ система несовместна; при $\lambda = 4$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 - 2c$, $x_2 = c$; при $\lambda \neq -4$ и $\lambda \neq 4$ система имеет единственное решение $x_1 = \frac{12}{\lambda+4}$, $x_1 = \frac{6}{\lambda+4}$.

88. при $\lambda = 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 5 + c_1 - 2c_2$, $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2$; при $\lambda \neq 2$ система совместна, общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 2c - 5$, $x_3 = c$.

89. при $\lambda \neq 8$ система совместна и имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$; при $\lambda = 8$ система совместна, общее решение $x_1 = 3 + 2c$, $x_2 = -1 - c$, $x_3 = c$.

90. при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ система совместна $x_1 = (-5c_1 - 13c_2 - 3)/2$, $x_1 = (-7c_1 - 19c_2 - 7)/2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

91. *Решение.* 1) Запишем матрицу системы A и с помощью элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -13 & -4 \\ 2 & 5 & -16 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 5 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \end{pmatrix} \mathrm{II} : 9 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Здесь базисный минор расположен в первых двух столбцах, главные неизвестные x_1, x_2, свободные неизвестные x_3, x_4. Систему, эквивалентную исходной, можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = - x_3 - x_4, \\ x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

2) В качестве ненулевого определителя второго порядка проще всего взять единичный определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Выбор первой строки определителя означает, что свободные неизвестные принимают значения $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. В этом случае $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Для второй строки определителя $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

4) Итак, имеем два решения, которые образуют фундаментальную систему решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5) Общее решение системы однородных уравнений будет иметь вид:

$$X_{\text{общ}} = c_1X_1 + c_2X_2 = \begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 \\ 2c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

92. общее решение $x_1 = 8c_1 - 7c_2$, $x_2 = -6c_1 + 5c_2$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

93. общее решение $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2$, $x_4 = \frac{7}{2}c_1 - 7c_2$.

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	-5/2	7/2
0	1	5	-7

94. система имеет только нулевое решение. Фундаментальная система решений не существует.

95. общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{c_1 - 2c_2}{3}$, $x_4 = 0$, $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1/3	1	0	0
0	-2/3	0	0	1

96. общее решение $x_1 = -3c_1 - 5c_2$, $x_2 = 2c_1 + 3c_2$, $x_4 = 0$, $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	2	1	0	0
-5	3	0	0	1

97. общее решение $x_1 = c_1 - c_2$, $x_2 = c_1 - c_3$, $x_3 = c_1$, $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$. Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	1	1	0	0
-1	0	0	0	1	0
0	-1	0	0	0	1

98. *Решение.* Поскольку известно частное решение системы, можно ограничиться определением общего решения приведенной однородной системы. Решим эту систему и получим общее решение в виде

$$X_{\text{одн}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 \\ -c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Теперь, используя формулу (47), можем записать общее решение неоднородной системы

$$X = X_{\text{одн}} + X_{\text{част}} = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 + 2 \\ -c_1 \\ -1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

102. при $\lambda = -1$ общее решение $x_1 = -5c$, $x_2 = c$, $x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(-5; 1; 3)$; при $\lambda \neq -1$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

103. при $\lambda = 6$ общее решение $x_1 = 7c$, $x_2 = 2c$, $x_3 = 3c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(7; 2; 3)$; при $\lambda \neq 6$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

104. при $\lambda = 2$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(1; 0; -2)$; при $\lambda = -4$ общее решение $x_1 = 5c$, $x_2 = -24c$, $x_3 = -4c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5; -24; -4)$; при $\lambda \neq -4$, $\lambda \neq 2$ общее решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, фундаментальной системы решений нет.

105. при $\lambda = 3$ общее решение $x_1 = 2c_1 + 5c_2$, $x_2 = 3c_1 - 3c_2$, $x_3 = 7c_1$, $x_4 = 7c_2$, фундаментальная система решений состоит из двух векторов: $(2; 3; 7; 0)$, $(5; -3; 0; 7)$; при $\lambda \neq 3$ общее решение $x_1 = 5c$, $x_2 = -3c$, $x_3 = 0$, $x_4 = 7c$, фундаментальная система решений состоит из одного вектора: $(5; -3; 0; 7)$.

106. Строки матрицы A не образуют, строки матрицы B образуют.

107. $(1, 4, -7, 7)$.

108. $x = (0, 1, 2, -2)$.

109. $x = (1, 2, 3, 4)$.

110. **а)** *Решение.* Составим векторное равенство $c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3 = 0$ и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ -c_1 - c_2 - c_3 = 0, \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0, \\ c_1 + 2c_2 - c_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем решение $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$. Поэтому система векторов a_1, a_2, a_3 линейно зависима, причем $3a_1 - 2a_2 - a_3 = 0$. **b)** линейно зависимая система, **c)** линейно независимая система, **d)** линейно зависимая система, **e)** линейно зависимая система, **f)** линейно независимая система.

111. **a)** $r = 3$, **b)** $r = 3$, **c)** $r = 3$, **d)** $r = 3$.

112. **a)** *Решение.* Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы A методом элементарных преобразований. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы равен двум. Следовательно, ранг системы векторов a_1, a_2, a_3 также равен двум. При этом каждая пара этих векторов составляет максимальную линейно независимую подсистему, так как каждой паре векторов соответствует базисный минор. Например, парам векторов a_1 и a_2, a_2 и a_3, a_1 и a_3 можно поставить в соответствие базисные миноры

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

b) $r = 3$, базы системы: a_1, a_2, a_3; a_1, a_2, a_4, **c)** $r = 3$, любая тройка векторов является базой, **d)** $r = 3$, базы системы: a_1, a_2, a_3; a_1, a_3, a_4.

113. **a)** *Решение.* Составим матрицу

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

непосредственной проверкой убедимся в том, что в матрице A отличен от нуля минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поэтому ранг матрицы A равен трем, и векторы a_1, a_2, a_3 составляют один из базисов данной системы. Чтобы через эту подсистему линейно выразить вектор a_4, составим векторное равенство

$$a_4 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3$$

и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда придем к системе

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 3, \\ c_1 + 3c_2 + c_3 = 3, \end{cases}$$

из которой найдем $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = -1$. Поэтому $a_4 = a_1 + a_2 - a_3$. Точно так же найдем линейное выражение $a_5 = -a_1 + 2a_3$. **b)** $r = 3$, если база a_1, a_2, a_3, то $a_4 = a_1 + 3a_2 - 3a_3$.

114. **a)** $\bar{a} = (-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$. *Указание:* так как направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ равны, то мы можем найти эти направляющие косинусы из формулы (59). С учетом, что $|\bar{a}| = 1$, воспользовавшись формулой (60), получим ответ. **b)** $(\sqrt{3} + \sqrt{2})/2$.

115.

$(*,*)$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

.

116. **a)** $\bar{x} = (-24; 32; 30)$. *Указание:* так как $\bar{x}$ параллелен вектору $(6; -8; -7,5)$, то координаты векторов пропорциональны, то есть $\bar{x} = \lambda \cdot (6; -8; -7,5)$, где λ – произвольное ненулевое вещественное число. Поскольку вектор $\bar{x}$ образует с осью OZ острый угол, то $\lambda < 0$. Вычислив длину вектора $\bar{x}$, найдем λ, а затем и координаты вектора $\bar{x}$.

b) $\bar{x} = (1; 0; -1)$. *Указание:* так как $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ перпендикулярен оси OY, то $x_2 = 0$. Из условий $(\vec{x}, \vec{a}) = -3$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 8$, найти остальные координаты вектора.

c) $\bar{x} = (2, -1, 1)$. *Указание:* пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Воспользоваться формулой (69) и найти координаты вектора, решив систему линейных уравнений с тремя неизвестными, например, методом Гаусса.

d) $\bar{x} = (2, 4, -6)$. *Указание:* аналогично примеру 3a).

117. **a)** -2. *Указание:* воспользоваться формулой (71) при условии $\bar{n} = \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - 2\bar{b}$. **b)** $\frac{14}{11}$.

118. **a)** -0,5. *Указание:* воспользоваться соотношением $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = (\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}) = 3$, откуда найти $(\bar{a}, \bar{b}) = -\frac{1}{2}$. Затем упростить искомое скалярное произведение $(3\bar{a} - 4\bar{b}, \bar{a} + \bar{b})$ и получить ответ. **b)** 11.

119. **a)** $(\bar{a}, \bar{b}) = -33$, $\cos(\widehat{a, b}) = -\frac{33}{65}$; **b)** $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, $\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\pi}{2}$.

120. 5. *Указание:* воспользоваться формулой (72) и вычислить $|\bar{a}| = \sqrt{(3\bar{m} - 4\bar{n}, 3\bar{m} - 4\bar{n})}$, с учетом, что $|\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$ и векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$ перпендикулярны, следовательно, $(\bar{m}, \bar{n}) = 0$.

121. 15; $\sqrt{593}$. *Указание:* выразить диагонали параллелограмма через его стороны. Например, имеем одна из диагоналей параллелограмма равна $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, а вторая $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Для нахождения длин диагоналей воспользоваться формулой (72): $|\bar{d}_1| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})}$, $|\bar{d}_2| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b}, \bar{a} - \bar{b})}$.

122. $\frac{\pi}{3}$. *Указание:* воспользоваться формулами (70), с учетом, что $|\bar{p}| = |\bar{q}| = 1$ и векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ перпендикулярны, следовательно, $(\bar{p}, \bar{q}) = 0$.

123. $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. *Указание:* пусть $\bar{C}A = \bar{a}$, $\bar{C}B = \bar{b}$ – катеты треугольника ABC. Выразить медианы треугольника через его катеты. Например, одна из медиан равна $\bar{m}_1 = \frac{1}{2}\bar{a} - \bar{b}$, а вторая $\bar{m}_2 = \bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$. Вычислить скалярное произведение $(\bar{m}_1, \bar{m}_2)$ и длины медиан, учитывая, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ (так как треугольник равнобедренный) и $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ (т.к. $\triangle ABC$ – прямоугольный). Затем найти $\cos\varphi$, используя формулу (70).

124. $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\angle C = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* воспользоваться формулой (70).

125. $\cos(\widehat{Q,m}) = \frac{6}{7}$, $\cos(\widehat{Q,n}) = -\frac{2}{7}$, $\cos(\widehat{Q,p}) = \frac{3}{7}$. *Указание:* воспользоваться формулой (70).

126. *Указание:* выразить диагонали ромба через стороны (см. указание к примеру 8) и затем вычислить скалярное произведение диагоналей. Оно должно получиться равны нулю.

127. $\alpha = 40$. *Указание:* вычислить произведение векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$ и воспользоваться признаком перпендикулярности векторов: $(\bar{p},\bar{q}) = 0$.

128. $(\widehat{s,t}) = \frac{\pi}{3}$. *Указание:* так как векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ перпендикулярны, то $(\bar{p},\bar{q}) = 0$, откуда найти $(\bar{s},\bar{t})$. Затем воспользоваться формулой (70), учитывая, что векторы $\bar{s}$ и $\bar{t}$ единичные, поэтому $|\bar{s}| = |\bar{t}| = 1$.

129. $\overrightarrow{AM} = 6$, $\overrightarrow{AD} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$. *Указание:* выразить медиану и высоту через стороны треугольника. Например, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \lambda\cdot\overrightarrow{CB}$, где вещественное число λ найти из условия перпендикулярности векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$. Затем найти длины векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AD}$, воспользовавшись формулой (72).

130. $[\bar{i},\bar{i}] = 0$; $[\bar{i},\bar{j}] = \bar{k}$; $[\bar{i},\bar{k}] = -\bar{j}$; $[\bar{j},\bar{i}] = -\bar{k}$; $[\bar{j},\bar{j}] = 0$; $[\bar{j},\bar{k}] = \bar{i}$; $[\bar{k},\bar{i}] = \bar{j}$; $[\bar{k},\bar{j}] = -\bar{i}$; $[\bar{k},\bar{k}] = 0$.

131. **a)** $8\bar{i} + 32\bar{j} + 16\bar{k}$; **b)** $2\bar{i} + 16\bar{j} + 23\bar{k}$.

132. **a)** $19[\bar{a},\bar{b}]$; **b)** $11[\bar{a},\bar{b}]$; **c)** $13[\bar{a},\bar{b}] - 10[\bar{a},\bar{c}] - 4[\bar{b},\bar{c}]$.

133. **a)** $S = 30$, $H = 10$. *Указание:* вычислить координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, затем вычислить их векторное произведение, воспользовавшись формулой (78) и наконец вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ по формуле (80). Затем вычислить высоту $H_\triangle$ по формуле (81).

b) $[\bar{a},\bar{b}] = -40\bar{i} + 40\bar{j} + 20\bar{k},\ S = 60,\ \sin(\widehat{a,b}) = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

134. **a)** 4,5; **b)** 1,5.

135. **a)** 44. *Указание:* найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, затем вычислить смешанное произведение этих векторов, используя формулу (88). Применяя формулу (91) вычислить объем тетраэдра. **b)** 2.

136. **a)** Векторы компланарны. *Указание:* воспользоваться условием компланарности векторов (89). **b)** Векторы компланарны. **c)** Векторы некомпланарны. **d)** Векторы некомпланарны.

137. **a)** Точки лежат в одной плоскости. *Указание:* вычислить координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, а затем вычислить их смешанное произведение. Если смешанное произведение равно нулю, то точки лежат в одной плоскости. **b)** Точки лежат в одной плоскости.

138. **a)** 11. *Указание:* используя свойства векторного произведение вычислить векторное произведение векторов $[\bar{p}, \bar{q}]$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вычислить длину векторного произведения $|[\bar{p}, \bar{q}]|$, воспользовавшись, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – орты, то есть $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $\widehat{\bar{a}, \bar{b}} = \frac{\pi}{2}$; **b)** 37,5; **c)** 3,8.

139. 21. *Указание:* воспользоваться формулой $|\bar{Q}| = \sqrt{(\bar{Q}, \bar{Q})}$.

140. $\frac{\sqrt{248}}{\sqrt{273}}$. *Указание:* Выразить диагонали через векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, например, $\bar{d}_1 = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d}_2 = \bar{a} - \bar{b}$. Затем найти векторное произведение диагоналей и найти модуль векторного произведение. Из формулы (73) найти синус угла между диагоналями.

141. $4\,\bar{c}\bar{b}\bar{a}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение веторов. Из формулы (90) найти объем параллелепипеда.

142. **a)** 25; **b)** 0. *Указание:* ответ очевиден, так как из разложения векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ видно, что они компланарны.

143. $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$. *Указание:* вычислить смешанное произведение векторов и вычислить модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Воспользоваться формулой $h = \frac{V}{S}$, где $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$ – площадь основания параллелепипеда, $V = \pm(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – объем параллелепипеда.

144. Плоскость проходит через точки A, C, D, F. *Указание:* подставить координаты точки в данное уравнение плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$. Если получим верное равенство, то плоскость проходит через данную точку, иначе точка не принадлежит плоскости.

145. **a)** Плоскость параллельна оси Oy; **b)** Плоскость параллельна плоскости OXZ; **c)** Плоскость параллельна оси Oz; **d)** Плоскость проходит через начало координат; **e)** Плоскость проходит через ось Ox.

146. **a)** $y + 5 = 0$; **b)** $x + 3y = 0$; **c)** $9y - z - 2 = 0$.

147. **a)** $a = -6$, $b = 4$, $c = 12$. *Указание:* свободный член уравнения плоскости перенести в правую часть и разделить уравнение на (-12). Привести уравнение к виду (109); **b)** $a = 3$, $b = 15$, $c = -5$; **c)** $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$; **d)** $a = -6$, $b = \infty$, $c = 3/2$ (плоскость параллельна оси Oy); **e)** $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ (плоскость проходит через начало координат); **f)** $a = 7$, $b = \infty$, $c = \infty$ (плоскость параллельна плоскости Oyz).

148. $x+y+z-3 = 0$. *Указание:* воспользоваться уравнением (109) при условии $a = b = c > 0$.

149. **a)** $(2/11)x-(9/11)y+(6/11)z-2 = 0$; **b)** $(-2/3)x-(2/15)y+(11/15)z - 4 = 0$; **c)** $(-6/11)x + (6/11)y + (7/11)z - 3 = 0$.

150. $p = 10$. *Указание:* привести уравнение плоскости к нормальному виду. Свободный коэффициент в этом уравнении p есть расстояние плоскости от начала координат.

151. $\alpha = \frac{\pi}{3}$. *Указание:* искомый угол равен углу между перпендикуляром к данной плоскости и осью Ox, то есть углу между векторами $\bar{n} = (1; -1; \sqrt{2})$ и $\bar{i} = (1; 0; 0)$.

152. **a)** $d = \frac{3}{2}$; **b)** $d = 0$, точка лежит на плоскости. **c)** $d = 4$.

153. $6x - 7y + 6z - 94 = 0$. *Указание:* применить формулу (91).

154. **a)** $\varphi = \arccos(0,7)$; **b)** плоскости перпендикулярны друг другу;
c) плоскости параллельны между собой.

155. **a)** $x - 4y + 5z + 15 = 0$. *Указание:* пусть уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. Так как данная плоскость параллельна плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$, то необходимо выбрать нормальный вектор плоскости равным $A = 1$, $B = -4$, $C = 5$. Для того чтобы найти последний коэффициент, поставим координаты точки в уравнение плоскости. **b)** $2x - y - z = 0$. *Указание:* пусть уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$ и пусть $\bar{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости. Так как плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$. Пусть $\bar{n}_1 = (2; -1; 5)$, $n_2 = (1; 3; -1)$ – нормальные векторы данных плоскостей. Так искомая плоскость перпендикулярна двум плоскостям, то ее нормальный вектор $\bar{n}$ необходимо выбрать в виде: $\bar{n} = [\bar{n}_1\,,\,\bar{n}_2]$. **c)** $x \pm \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$. *Указание:* пусть $Ax + By + Cz - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости, тогда $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Так как плоскость проходит через точки $L(0; 0; 1)$ и $N(3; 0; 0)$, то имеем систему уравнений $\begin{cases} C & - & p & = & 0, \\ 3A & - & p & = & 0. \end{cases}$ Так как плоскость образует с плоскостью Oxy угол в $\frac{\pi}{3}$, то $C = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Таким образом, $A = \frac{1}{6}$, $C = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$. И, наконец, находим $B^2 = 1 - C^2 - A^2$.

156. a) Нельзя. *Указание:* через четыре точки можно провести плоскость, если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны, поэтому нужно воспользоваться условием компланарности веторов (89). **b)** Можно.

157. a) $(3; -1; 0)$. *Указание:* необходимо решить систему линейных уравнений, например, методом Гаусса.

b) точки пересечения всех трех плоскостей нет, так как первая и третья плоскость параллельны.

158. a) $9x + 3y + 5z = 0$. *Указание:* пучок плоскостей (118) в нашем случае имеет вид $4x - y + 3z - 1 + \lambda(x + 5y - z + 2) = 0$. Если раскрыть все скобки, то свободный коэффициент $D = 2\lambda - 1$. Так как плоскость должна проходить через начало координат, то свободный коэффициент $D = 0$. Откуда можно определить коэффициент $\lambda = \frac{1}{2}$. Подставив $\lambda = \frac{1}{2}$ в пучок плоскостей, получим ответ. **b)** $23x - 32y + 26z - 17 = 0$; **c)** $21x + 14z - 3 = 0$; **d)** $7x + 14y + 5$.

159. $41x - 19y + 52z - 68 = 0$ и $33x + 4y - 5z - 63 = 0$. *Указание:* составить пучок плоскостей и вычислить коэффициент λ из условия перпендикулярности нормального вектора пучка нормальным векторам данных плоскостей.

160. $3x+4y-z+1=0$ и $x-2y-5z+3=0$. *Указание:* пучок плоскостей (118) в нашем случае имеет вид $3x+4y-z+1+\lambda(x-2y-5z+3)=0$. Подставим координаты точки L в пучок плоскостей, найдем значение λ. Подставим найденное значение в пучок плоскостей, найдем уравнение первой плоскости. Пусть $\bar{n}_1$ – нормальный вектор найденной плоскости, а $\bar{n}_2=(3+\lambda;4-2\lambda;-1-5\lambda)$ – нормальный вектор второй плоскости. Так как искомые плоскости перпендикулярны, то $(\bar{n}_1,\bar{n}_2)=0$. Из этого условия можно найти значение λ и затем уравнение второй плоскости.

161. **a)** $2y-z=0$. *Указание:* связка плоскостей (119) в нашем случае имеет вид $x+y-z+2+\lambda(4x-3y+z-1)+\mu(2x+y-5)=0$. Таким образом, $A=1+4\lambda+2\mu$, $B=1-3\lambda+\mu$, $C=-1+\lambda$, $D=2-\lambda-5\mu$. Так как по условию задачи плоскость должна проходить через ось Ox, то $A=0$ и $D=0$, итак, имеем систему: $\begin{cases} 1+4\lambda+2\mu=0; \\ 2-\lambda-5\mu=0. \end{cases}$ Решив систему найдем значения коэффициентов λ и μ. Подставив найденные значения в связку плоскостей, получим ответ.

162. **a)** $A=0$ и $A_1=0$, т.е. обе плоскости параллельны оси Ox; **b)** $\frac{B}{B_1}=\frac{D}{D_1}$, т.е. обе плоскости пересекают ось Oy в одной и той же точке $x=0$, $y=-\frac{D}{B}=-\frac{D_1}{B_1}$, $z=0$; **c)** $C=D=0$ и $C_1=D_1=0$, т.е. обе плоскости проходят через ось Oz; **d)** $\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$. Если прямая паралельна плоскости Oyz, то в пучке проходящих через нее плоскостей $Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$ должна существовать плоскость, параллельная плоскости Oyz, т.е. $B+\lambda B_1=0$ и $C+\lambda C_1=0$ при одном и том же значении λ; **e)** $\frac{A}{A_1}=\frac{C}{C_1}=\frac{D}{D_1}$. *Указание:* Плоскость Oxz имеет уравнение $y=0$. Поэтому $Ax+By+Cz+D+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0$ содержит плоскость Oxz при условиях $A+\lambda A_1=0$, $C+\lambda C_1=0$ и $D+\lambda D_1=0$; **f)** $D=D_1=0$, т.е. обе плоскости проходят через начало координат.

163. $\frac{x}{4}=\frac{z-2}{3}$, $y=0$; $x-4=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{-5}$; $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-2}$; $-x=\frac{y}{4}=\frac{z-2}{-4}$; $\frac{x-4}{-5}=\frac{y}{4}=\frac{z-5}{-7}$; $\frac{x-5}{-6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-2}$. *Указание:* воспользоваться формулой (122).

164. $\frac{x}{9}=\frac{y}{5}=\frac{z+3}{1}$. *Указание:* необходимо воспользоваться методом перехода от общего уравнения прямой к каноническому уравнению прямой.

165. a) $\begin{cases} x-2=0; \\ y+5=0. \end{cases}$ *Указание:* направляющий вектор оси Oz равен $\bar{k}=(0;0;1)$. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором $\bar{k}$, используя формулу (121). **b)** $\frac{x-2}{4}=\frac{y+5}{-6}=\frac{z-3}{9}$. *Указание:* направляющий вектор параллельной прямой равен $\bar{s}=(4;-6;9)$. Записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку с направляющим вектором $\bar{s}$, используя формулу (121). **c)** $\frac{x-2}{-11}=\frac{y+5}{17}=\frac{z-3}{13}$. *Указание:* в задаче дано общее уравнение параллельной прямой. Используя формулу (127), вычислить направляющий вектор исходной прямой и затем воспользоваться формулой (121).

166. **a)** и **b)** пересекаются. *Указание:* воспользоваться условием пересечения прямых (135).

167. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$. *Указание:* так как искомая прямая проходит через точку $A(2;3;1)$, то ее уравнения имеют вид: $\frac{x-2}{m}=\frac{y-3}{n}=\frac{z-1}{p}$. Неизвестные коэффициенты m, n, p определяем из условия перпендикулярности к данной прямой $2m-n+3p=0$ и условия пересечения с данной прямой: $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0$ или $8m-11n-9p=0$.

168. $\cos\varphi=\frac{98}{195}$. *Указание:* определить направляющие векторы данных прямых, воспользовавшись формулой (127). Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому воспользоваться формулой (137).

169. **a)** (0;0;-2). *Указание:* обозначим три равных соотношения через t, т.е. $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}=t$. Тогда $x=4t+12$,

$3t+12$, $z = t+1$. Вставляя эти значения координат в уравнение плоскости, найдем значение $t = -3$. Окончательно, получим $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. **b)** прямая параллельна плоскости; **c)** точка пересечения неопределена, так как прямая лежит в плоскости; **d)** (2;3;1).

170. $A=-1$. *Указание:* воспользоваться условием (129).

171. $A=4$, $B=-8$. *Указание:* воспользоваться условием (131).

172. $(5;-1;0)$. *Указание:* из точки A строим прямую перпендикулярно данной плоскости. Из равенства (123) имеем: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Затем ищем точку пересечения этой прямой с плоскостью. Найденная таким образом точка и есть искомая проекция.

173. **a)** лежит. *Указание:* воспользоваться условием (130). **b)** не лежит; **c)** не лежит.

174. $8x-9y-22z-59=0$. *Указание:* пусть дана прямая L и произвольная точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая прямой L (см. рис. 61). Пусть $\bar{s}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой L и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка прямой L. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\bar{s}$ должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямую L имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

175. $11x-17y-19z+10=0$. *Указание:* пусть дана прямая L и плоскость π (см. рис. 62). Пусть $\bar{s}=(m;n;p)$ – направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой L. Пусть также $\bar{n}=(A;B;C)$ – нормальный вектор плоскости π. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\bar{n}$, $\bar{s}$ должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через

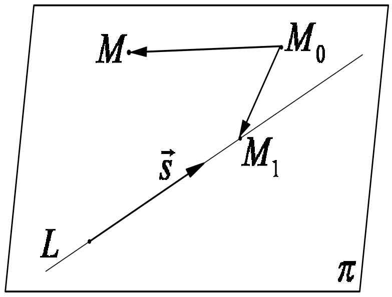

Рис. 61. Плоскость, проходящая через точку и прямую

прямую L перпендикулярно к плоскости π имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

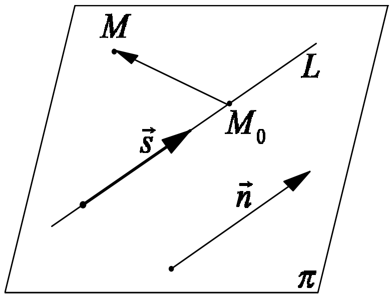

Рис. 62. Плоскость, проходящая через прямую перпендикулярно другой плоскости

176. $8x - 22y + z - 48 = 0$. *Указание:* пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 63). Пусть $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка пересечения прямых L_1 и L_2. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые L_1 и L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

177. $16x - 27y + 14z - 159 = 0$. *Указание:* пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 64). Пусть $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2, а $P(x_0, y_0, z_0)$ – данная точка. Тогда век-

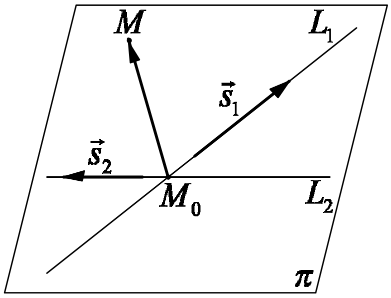

Рис. 63. Плоскость, проходящая через две пересекающие прямые

торы $\overrightarrow{PM}$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через точку $P(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум прямым L_1 и L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

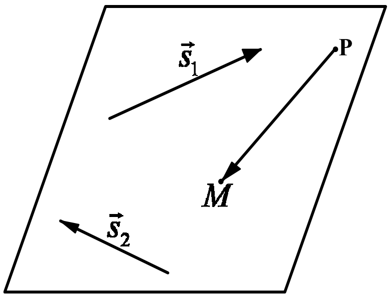

Рис. 64. Плоскость, проходящая через точку параллельно двум прямым

178. $23x - 16y + 10z - 153 = 0$. *Указание:* пусть даны две прямые L_1 и L_2 (см. рис. 65). Пусть L_1 – прямая, лежащая в плоскости. Пусть также $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка прямой L_1. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ должны лежать в одной плоскости. Воспользовавшись условием компланарности векторов, получим, что уравнение плоскости, проходящей через прямую L_1 и параллельной прямой L_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

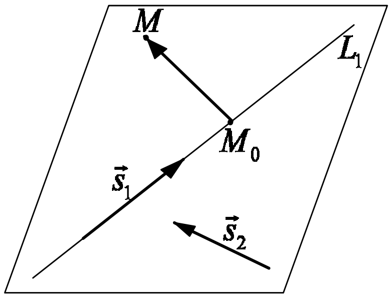

Рис. 65. Плоскость, проходящая через прямую параллельно другой прямой

179. $d = \sqrt{22}$. *Указание:* воспользоваться формулами (138) или (139).

180. $(2; 9; 6)$. *Указание:* проводим через точку P плоскость, перпендикулярную к данной прямой, и ищем точку пересечения с этой прямой. Найденная точка есть середина отрезка между данной точкой P и искомой точкой.

181. $d = 3$. *Указание:* для решения задачи достаточно найти расстояние любой точки одной прямой до другой прямой, например, расстояние от точки $(2; -1; 0)$ до второй из заданных прямых.

182. $d = 7$. *Указание:* воспользоваться формулами (140) и (141).

183. $d = 13$. *Указание:* воспользоваться формулами (140) и (141).

184. $\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}$.

185. **a)** $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. *Указание:* записать уравнение (122) прямой, проходящей через точки $B(3,0,2)$ и $C(7,4,6)$; **b)** $h = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$. *Указание:* искомую высоту h найти по формуле (139), полагая $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$, $x_2 = 3$, $y_2 = 0$, $z_2 = 2$, $m = n = p = 1$; **c)** $d = \sqrt{2}$. *Указание:* каноническое уравнение оси абцисс имеет вид $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{0}$, так как ось проходит через начало координат $O(0,0,0)$, а $\bar{i} = (1,0,0)$ – ее направляющий вектор. Кананическое уравнение прямой BC получено в пункте (a): $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$. Полагая в формуле (141) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_2 = 0$, $z_2 = 2$, $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) = (1; 0; 0)$, $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2) = (1; 1; 1)$, вычислим искомое расстояние; **d)** $\varphi = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание:* острый угол φ найти из формулы (137), полагая $\bar{s}_1 = (m_1; n_1; p_1) = (1; 0; 0)$, $\bar{s}_2 = (m_2; n_2; p_2) = (1; 1; 1)$;

e) $\psi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{26}}$. *Указание:* сначала необходимо составить уравнение плоскости π, проходящей через три точки $A(1,2,3)$, $B(3,0,2)$, $C(7,4,6)$, воспользовавшись уравнением (117). Уравнение плоскости при этом должно получиться следующим $x+3y-4z+5=0$. Затем нужно вычислить угол ψ по формуле (132).

186. a) $\varphi = \arcsin\dfrac{7}{11}$. *Указание:* чертеж к данной задаче приведен на рис. (66). Записать каноническое уравнение (121) прямой OA, проходящей через начало координат $O(0,0,0)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{OA} = (1,3,-1)$: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$. Составляем уравнение плоскости π, проходящей через три точки $A(1,3,-1)$, $B(2,1,-2)$, $C(3,-2,4)$, воспользовавшись уравнением (117). Уравнение плоскости при этом должно получиться следующим $15x+7y+z-35=0$. Вычисляем искомый угол φ по формуле (132); **b)** $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$. *Указание:* координаты точек пересечения медиан треугольника ABC найти как среднее арифметическое координат его вершин: $M\left(\dfrac{1+2+3}{3}; \dfrac{3+1-2}{3}; \dfrac{-1-2+4}{3}\right)$. Составить уравнение (122) прямой, проходящей через две точки O и M. **c)** $H\left(\dfrac{21}{11}; \dfrac{49}{55}; \dfrac{7}{55}\right)$. *Указание:* составить параметрическое уравнение (124) прямой. Направляющим вектором этой прямой служит нормаль $\bar{n} = (15;7;1)$ к плоскости грани ABC (см. пункт (a)). Поэтому

$$\begin{cases} x &= 15t, \\ y &= 7t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t, \end{cases}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение плоскости грани ABC, находим значение параметра $t = \frac{7}{55}$, соответствующее точке H. Координаты точки H вычисляем по параметрическому уравнению прямой OH, подставляя найденное значение параметра t; **d)** $\dfrac{x-2}{300} = \dfrac{y-\frac{2}{3}}{184} = \dfrac{z-\frac{1}{3}}{-13}$. *Указание:* координаты точки O', симметричной точке O относительно плоскости ABC, находим, подставляя в параметрическое уравнение прямой OH значение

$t = 2 \cdot \dfrac{7}{55} = \dfrac{14}{55}$. Получим $O' = \left(\dfrac{42}{11}; \dfrac{98}{55}; \dfrac{14}{55}\right)$. Осталось составить уравнение (122) прямой, проходящей через две точки M и O'; **e)** $\psi = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{246}}$. *Указание:* угол ψ между прямыми OM и AB находим как угол между их направляющими векторами $\overrightarrow{OM} = (2; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{AB} = (1; -2; -1)$ (формула (137)); **f)** $d = \sqrt{5}$. *Указание:* расстояние между прямыми OM и AB найти по формуле (141). **g)** $C' = \left(-\dfrac{7}{11}; -\dfrac{21}{11}; \dfrac{7}{11}\right)$. *Указание:* составить уравнение (91) плоскости, проходящей через точку $C(3, -2, 4)$ перпендикулярно прямой OA (нормалью к этой плоскости служит вектор $\overrightarrow{OA} = (1, 3, -1)$. Точка пересечения этой плоскости с прямой OA и будет искомая точка C'.

h) $\begin{cases} 15x + 7y + z - 35 = 0, \\ x - 3y + 6z = 0. \end{cases}$. *Указание:* составить общее уравнение искомой прямой HN как линии пересечения плоскости основания ABC пирамиды и плоскости, проходящей через точку O и перпендикулярной прямой BC. Уравнение плоскости грани ABC было найдено в п. а): $15x + 7y + z - 35 = 0$. Общее уравнение (91) плоскости, проходящей через точку $O(0; 0; 0)$, с нормалью $\overrightarrow{BC} = (1, -3, 6)$ имеет вид: $x - 3y + 6z = 0$. Записывая уравнения плоскостей в систему, получаем общее уравнение искомой прямой HN.

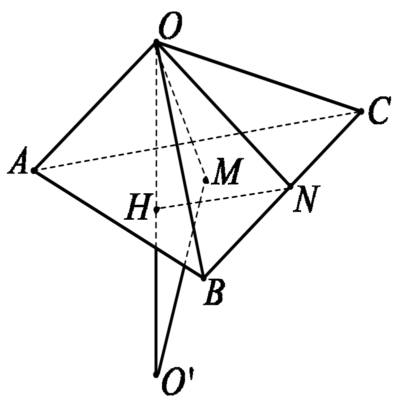

Рис. 66

187. **a)** $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$;
b) $x^6 + x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$.

188. **a)** Частное $2x^2 + 3x + 11$, остаток $25x - 5$;

b) Частное $(3x-7)/9$, остаток $(-26x-2)/9$.

189. $p=-q^2-1 (m=q)$.

190. 1) $q=p-1 (m=0)$, 2) $q=1 (m=\pm\sqrt{2-p})$.

191. **a)** $f(x)=(x-4)(x^3+x^2+10x+30)+136$; $f(x_0)=136$;
b) $f(x)=(x-1)(x^3-x^2+3x-3)+5$; $f(x_0)=5$;
c) $f(x)=(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+109)-327$; $f(x_0)=-327$.

192. **a)** $f(x)=(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$;
b) $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)+1$;
c) $f(x)=(x-2)^4-18(x-2)+38$.

193. **a)** $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{11}{(x-2)^4}+\frac{7}{(x-2)^5}$;
b) $\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{4}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x+1)^5}$.

194. **a)** $f(2)=18$, $f'(2)=48$, $f''(2)=124$, $f^{(3)}(2)=216$, $f^{(4)}(2)=240$, $f^{(5)}(2)=120$; **b)** $f(1)=6$, $f'(1)=8$, $f''(1)=2$, $f^{(3)}(1)=6$, $f^{(4)}(1)=24$.

195. **a)** $k=3$; **b)** $k=4$.

196. **a)** $(x-1)^2(x+2)$; **b)** $(x+1)^2(x^2+1)$; **c)** $(x-1)^3$.

197. **a)** $x+1$; **b)** x^2+1; **c)** x^3+1; **d)** x^2-2x+2; **e)** x^3-x+1.

198. **a)** $(x-1)^2(x+1)$; **b)** $(x-1)^3(x+1)$.

199. **a)** $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)$; **b)** $(x+1)^3(x-3)(x-4)$.

200. **a)** $(x-1)^2(x-2)(x-3)(x^2-2x+2)$; **b)** $(x^2-4x+13)^3$.

201. **a)** $(x^2+4)(x^2+9)$; **b)** $(x-2i)(x+2i)(x-3i)(x+3i)$.

202. **a)** $(x+2)(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)$; **b)** $(x-2i)(x+2i)$;
c) $(x-3-i)(x-3+i)$; **d)** $(x-1)(x-1-i)(x-1+i)(x+1-i)(x+1+i)$.

203. **a)** $x^2(4x^2-12x+13)$; **b)** $(x^2+2)(x^2+6)$;
c) $(x^2+3)(x^2+3x+3)(x^2-3x+3)$; **d** $(x-1)(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

204. $8r=4pq-p^3$.

205. $x_1=1/6$, $x_2=1/2$, $x_3=-1/3$.

206. $\lambda=\pm6$.

207. 1) $b=c=0, \forall a$; 2) $a=-1$; $b=-1$; $c=1$.

208. $\lambda=-3$.

209. **a)** 2; **b)** -3; **c)** -2; 3; **d)** 1; -2; 3; **e)** 1/2; -2/3; 3/4; **f)** -1; -2; -3; 4; **g)** 1/2; **h)** $x_1 = 3$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = -1$.

210. **a)** $x_e = (0; -1; 1)$, $y = (-6, 0, 7)$; **b)** $x_e = (-4; 1; -1)$, $y = (3, 2, -9)$; **c)** $x_e = (0; 1; 3)$, $y = (-3, 4, -7)$; **b)** $x_e = (0; -2; 3)$, $y = (-1, -4, 6)$.

211. **a)** $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $x_{e'} = (0, 2, -2)$, $y_e = (-1, -3, -1)$,

b) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $y_{e'} = (2, -2, 0)$, $x_e = (-5, -7, -4)$;

c) $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y_{e'} = (-1, 0, -2)$, $x_e = (-1, -6, 3)$.

212. **a)** $X = (1; 3; 1)$; **b)** $X = (2; -2; -2)$.

213. **a)** поменяются местами две строки; **b)** поменяются местами два столбца; **c)** произойдет симметричное отражение матрицы относительно ее центра.

214. **a)** нет; **b)** нет; **c)** да, если прямая проходит через начало координат и нет, в противном случае; **d)** да; **e)** нет.

215. **a)** $dim = 3$, базис, например, состоит из векторов a_1, a_2, a_4; **b)** $dim = 3$, базис, например, состоит из векторов a_1, a_2, a_5.

216. **a)** базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, b_1. Базис пересечения состоит из одного вектора $c = 2a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = (3; 5; 1)$; **b)** базис суммы образуют, например, векторы a_1, a_2, a_3, b_2. Базис пересечения, например, $b_1 = -2a_1 + a_2 + a_3$, $b_3 = 5a_1 - a_2 - 2a_3$.

217. **a)** φ_1 – линейный оператор, $A_{\varphi_1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **b)** φ_3 –

линейный оператор, $A_{\varphi_3} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **c)** φ_2 – линейный оператор, $A_{\varphi_2} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

218. **a)** $A' = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $A' = \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

219. **a)** $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **b)** $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

220. $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

221. $A' = \begin{pmatrix} 29 & -41 & -9 \\ 19 & -27 & -6 \\ 7 & -9 & -4 \end{pmatrix}$.

222. $A' = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

223. $A' = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

224. **a)** $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;
c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

225. **a)** $\begin{pmatrix} 60 & -12 \\ 48 & 12 \end{pmatrix}$;**b)** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;**c)** $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ 40 & -15 \end{pmatrix}$;**d)** $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$.

226. **a)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

228. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(1, -1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 0$ имеют вид $c(1, -1)$, а для $\lambda_2 = 2$ – вид $c(1, 1)$, где $c \neq 0$; **c)** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Собственные векторы имеют вид $c(1, -1)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = -2 + i$ имеют вид $c(1, i)$, а для $\lambda_2 = -2 - i$ – вид $c(1, -i)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = i$ имеют вид $c(1, 1 + i)$, а для $\lambda_2 = -i$ – вид $c(1, 1 - i)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 2i$ имеют вид $c(1, i)$, а для $\lambda_2 = -2i$ – вид $c(i, 1)$, где $c \neq 0$;

229. **a)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы имеют вид $c(1; 1; -1)$, где $c \neq 0$; **b)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1; 2; 0) + c_2(0; 0; 1)$, где c_1 и c_2 не равны нулю одновременно; **c)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1; 1; 1)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ – вид $c(1; 2; 3)$, где $c \neq 0$; **d)** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $c(3; 1; 1)$, где $c \neq 0$; **e)** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значения

$\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;2;2)$, а для $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ – вид $c(1;2;1)$, где $c \neq 0$; **f)** $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. Собственные векторы для значения $\lambda_1 = 5$ имеют вид $c(1;-1;1)$, для значения $\lambda_1 = 3$ имеют вид $c(1;1;-1)$, для значения $\lambda_1 = 1$ имеют вид $c(1;1;1)$, где $c \neq 0$.

230. **a)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (3;1;3)$, $a_2 = (0;1;3)$, $a_3 = (1;2;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** матрица к диагональному виду не приводится; **c)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;-1;1)$, $a_2 = (1;1;-1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **d)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **e)** базис состоит, например, из векторов $a_1 = (1;1;-1)$, $a_2 = (1;-1;1)$, $a_3 = (1;1;1)$, матрица в этом базисе имеет вид $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

231. **a)** $5\pi/6$; **b)** $3\pi/4$; **a)** $2\pi/3$; **a)** $\pi/2$.

232. **a)** Можно добавить векторы $(2;2;1;0)$, $(5;-2;-6;-1)$; **b)** Можно добавить векторы $(1;-2;1;0)$, $(25;4;-17;-6)$.

233. **a)** Один из векторов $\pm\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$; **b)** Например, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

234. **a)** $(1;2;2;-1)$, $(2;3;-3;2)$, $(2;-1;-1;-2)$; **b)** $(1;1;-1;-2)$, $(2;5;1;3)$.

235. **a)** Например, $b_1 = (2;-2;-1;0)$, $b_2 = (1;1;0;-1)$. **b)** **c)**

236. **a)** $y = 3a_1 - 2a_2 = (1;-1;-1;5)$, $z = (3;0;-2;-1)$; **b)** $y = 2a_1 - a_2 = (3;1;-1;-2)$, $z = (2;1;-1;4)$.

238. **a)** $4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$; **b)** $6y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$; **c)** $y_1^2+\sqrt{3}y_2^2-\sqrt{3}y_3^2$.

239. **a)** $3y_1^2+6y_2^2+9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; $x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$; $x_3=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; **b)** $5y_1^2-y_2^2-y_3^2$; $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3$; $x_3=\frac{1}{\sqrt{3}}y_1-\frac{2}{\sqrt{6}}y_2$; **c)** $9y_1^2+18y_2^2-9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2-\frac{1}{3}y_3$; $x_2=-\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; **d)** $9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2$; $x_1=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3$; $x_2=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3$; $x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3$; **e)** $3y_1^2-6y_2^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; $x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}\sqrt{2}y_2$; $x_3=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_2-\frac{1}{2}\sqrt{2}y_3$; **f)** $9y_1^2+9y_2^2-9y_3^2$; $x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{2}\sqrt{2}y_2+\frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$; $x_2=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}\sqrt{2}y_3$; $x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}y_2-\frac{1}{6}\sqrt{2}y_3$.

240. **a)** $\lambda>2$; **b)** $|\lambda|<\sqrt{\frac{5}{3}}$; **c)** $-0.8<\lambda<0$; **d)** требуемых значений λ не существует; **e)** требуемых значений λ не существует.

241. **a)** $a=4$, $b=2$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $F_1(-2\sqrt{3},0)$, $F_2(2\sqrt{3},0)$, $x=\pm\frac{8}{\sqrt{3}}$; **b)** $a=2$, $b=4$, $\varepsilon=\sqrt{5}$, $F_1(-2\sqrt{5},0)$, $F_2(2\sqrt{5},0)$, $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y=\pm 2x$; **c)** $a=5$, $b=2$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}$, $F_1(-\sqrt{21},0)$, $F_2(\sqrt{21},0)$, $x=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}$; **d)** $a=3$, $b=2$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $F_1(-\sqrt{13},0)$, $F_2(\sqrt{13},0)$, $x=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$, $y=\pm\frac{2}{3}x$.

242. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

243. $(x-5)^2+(y+1)^2=18$.

244. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

245. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4/9}=1$.

246. $S=480/7$.

247. $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

248. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

249. $A(0;0)$, $B(5;25)$.

250. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{216/5}=1$.

251. $\frac{x^2}{29/4}+\frac{y^2}{116/25}=1$.

252. $(\pm 3;\pm 1)$. **253.** $3/2$.

254. **a)** $\frac{(x+2)^2}{144/9}+\frac{(y-2)^2}{144/16}=1$; **b)** $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$; **c)** $(y-2)^2=2\cdot 2\cdot(x+3)$; **d)** $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$; **e)** $-\frac{(x-3)^2}{144/9}+\frac{(y+1)^2}{144/16}=1$; **f)** $(y-1)^2=2\cdot(-1)\cdot(x+4)$; **g)** $(x-2)^2=2\cdot(-2)\cdot(y+1)$; **h)** $\frac{(x-2)^2}{225/9}+\frac{(y-1)^2}{225/25}=1$; **i)** $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$; **j)** $\frac{(x-1)^2}{144/9}-\frac{(y+2)^2}{144/16}=1$.

255. **a)** $\frac{(x-2/3)^2}{4/9}+\frac{y^2}{1/3}=1$; **b)** $\frac{(x-7/3)^2}{4/9}-\frac{y^2}{4/3}=1$; **c)** $y^2=-2\cdot(x-3/2)$.

256. **a)** гипербола: $\frac{x_2^2}{5/9}-\frac{y_2^2}{5/16}=1$, $\varphi=\arccos(1/\sqrt{5})$, $O_1(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}})$; **b)** мнимый эллипс: $\frac{x_2^2}{1/4}+\frac{y_2^2}{1/6}=-1$, $\varphi=\pi/4$, $O_1(-1/4,0)$; **c)** парабола: $y_2^2=-0,8x_2$, $\varphi=\arccos(1/\sqrt{5})$, $O_1(-1;-0,7)$; **d)** две совпадающие прямые: $y_2^2=0$, $\varphi=\arcsin(-3/\sqrt{13})$, $O_1(0,-1)$; **e)** вырожденный эллипс — точка: $x_2^2+\frac{y_2^2}{0{,}5}=0$, $\varphi=\pi/4$, $O_1(-2,-3)$; **f)** эллипс: $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{16}=1$, $\varphi=\pi/4$, $O_1(\sqrt{2},0)$; **g)** гипербола: $x_2^2-\frac{y_2^2}{9}=1$, $\varphi=\arcsin(3/\sqrt{10})$, $O_1(\sqrt{10}/2,\sqrt{10}/2)$; **h)** гипербола: $\frac{x_2^2}{25}-\frac{y_2^2}{9}=1$, $\varphi=\arccos(4/\sqrt{17})$, $O_1(\frac{13}{3\sqrt{17}},\frac{4}{5\sqrt{17}})$; **i)** парабола: $y_1^2=2x_1$, $\varphi=\arcsin(4/5)$, $O_1(0,0)$; **j)** пара пересекающихся прямых: $\frac{x_1^2}{(1/3)^2}-\frac{y_1^2}{1^2}=0$; **k)** пара параллельных прямых: $x_1^2-\left(\sqrt{\frac{9}{8}}\right)^2=0$.

Литература

[1] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2007. – 431 с.

[2] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. – 382 с.

[3] Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2004. – 287 с.

Рунг Елена Владимировна

Стехина Кристина Николаевна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие