Л. И. Гафиятуллина, Р. Г. Салахудинов, Об одном обобщении неравенств Полиа–Сегё и Макаи для жесткости кручения, *Изв. вузов. Матем.*, 2021, номер 11, 86–91

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-11-86-91

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2021, №11, с. 86–91 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.Р. Насыровым

Л.И. ГАФИЯТУЛЛИНА, Р.Г. САЛАХУДИНОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВ ПОЛИА–СЕГЁ И МАКАИ ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Аннотация. Применяя степенные евклидовы моменты области относительно границы, мы доказываем обобщения классических неравенств Полиа–Сегё и Макаи об оценке жесткости кручения выпуклой области. Доказательство основано на новом точном изопериметрическом неравенстве, которое имеет широкий класс экстремальных областей и представляет самостоятельный интерес.

Ключевые слова: жесткость кручения, момент области относительно границы, изопериметрическое неравенство, выпуклая область, функция расстояния до границы области, экстремальная область.

УДК: 514.763

DOI: 10.26907/0021-3446-2021-11-86-91

Введение

Первоначальный математический интерес к жесткости кручения однородных стержней с фиксированным поперечным сечением был связан с точностью измерения крутильными весами. Помимо физических характеристик материала однородного стержня, а также длины стержня и угла скручивания, величина прилагаемого усилия зависит от формы поперечного сечения.

Одним из первых результатов по вычислению жесткости кручения P однородного стержня с круговым сечением была формула $\mathrm{P} = \pi r^4/2$ (где r — радиус круга), предложенная Кулоном в XIX в. [1]. Отметим, что эта формула выражает в явном виде зависимость жесткости кручения от геометрии области. Однако выяснилось, что нахождение точных формул для жесткости кручения стержня с заданной формой поперечного сечения — непростая задача. С другой стороны, развитие математического аппарата позволило строить оценки для жесткости кручения, при этом неравенства охватывали более широкие классы областей. К таким оценкам относятся классические неравенства Коши, Сен–Венана, Полиа, Сегё, Пейна и многих других [1]–[4].

Напомним определения используемых нами величин и понятий. Пусть G — односвязная область на плоскости. Одной из важных характеристик области в математической физике является функционал

$$\mathbf{P}(G) := 2\int_G \mathrm{u}(x, G)\mathrm{dA},$$

Поступила в редакцию 15.07.2021, после доработки 15.07.2021. Принята к публикации 29.09.2021.

называемый в теории упругости жесткостью кручения, а в гидродинамике — потоком (см., например, [1], [5]). Здесь $u(x,G)$ — функция напряжения, которая удовлетворяет уравнению $\triangle u = -2$ в G и граничному условию $u\,|_{\partial G} = 0$, а через $\mathrm{d}A$ обозначен дифференциальный элемент площади на плоскости.

Одним из известных неравенств для жесткости кручения является неравенство Сен–Венана–Полиа

$$\mathbf{P}(G) \le \frac{\mathbf{A}(G)^2}{2\pi}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(G)$ — площадь области G. Это, с одной стороны, простейшее неравенство в то же время является одним из важных в теории кручения. С другой стороны, неравенство (1) является примером одностороннего неравенства для $\mathbf{P}(G)$, т. е. неравенство (1) нельзя обратить за счет домножения на абсолютную константу даже в классе выпуклых областей.

Существенным продвижением в задаче двусторонней оценки функционала $\mathbf{P}(G)$ стало определение новых геометрических характеристик области [6]. Обозначим через $\rho(x,G)$ функцию расстояния от точки x до границы области G. Геометрический функционал

$$\mathbf{I}_p(G) = \int\limits_G \rho(x,G)^p \mathrm{dA}$$

называется евклидовым моментом области относительно границы порядка $p > -1$.

Ф.Г. Авхадиев [7], [8] показал, что при $p = 2$ жесткость кручения и евклидов момент инерции являются сравнимыми величинами в классе односвязных областей. Более того, были получены двусторонние оценки

$$\mathbf{I}_2(G) \le \mathbf{P}(G) \le 64\,\mathbf{I}_2(G). \tag{2}$$

Далее, левое неравенство в (2) было усилено в [9], а именно показано, что

$$\frac{3}{2}\,\mathbf{I}_2(G) < \mathbf{P}(G). \tag{3}$$

Насколько нам известно, константы 64 и $3/2$ в (2) и (3) не являются оптимальными.

В работе [10] было показано, что неравенство (3) является частным случаем неравенства

$$\frac{(p+1)\mathbf{I}_p(G)}{2\boldsymbol{\rho}(G)^{p-2}} + \frac{\pi(p-2)\boldsymbol{\rho}(G)}{4(p+2)} \le \mathbf{P}(G), \tag{4}$$

где $p \ge 2$, а $\boldsymbol{\rho}(G)$ — радиус максимального круга, содержащегося в G. С другой стороны, в [11] установлено, что в классе выпуклых областей справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(G) < \frac{4(p+1)}{3}\mathbf{I}_p(G)\boldsymbol{\rho}(G)^{2-p} - \frac{2\pi\boldsymbol{\rho}(G)^4(2-p)}{3(p+2)}, \tag{5}$$

где $-1 \le p \le 2$. При этом, полагая $p = 2$ в (5), получим неравенство Макаи [12]

$$\mathbf{P}(G) < \frac{4}{3}\mathbf{A}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^2.$$

Отметим, что в (4) и (5) параметр p меняется в разных промежутках. В классе выпуклых областей в [11] оказалось возможным связать двусторонними неравенствами евклидовы моменты области различных порядков и получить оценки жесткости кручения

$$\frac{(p+1)\mathbf{I}_p(G)}{2\boldsymbol{\rho}(G)^{p-2}} + \frac{p\pi\boldsymbol{\rho}(G)^4}{2(p+2)} \le \mathbf{P}(G) \le \frac{2}{3}\left(\frac{(p+1)(p+2)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p-2}}\mathbf{I}_p(G) - p\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^3\right),$$

где $p \geq 0$, $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ (см. формулу (6) ниже). Левое неравенство при $p = 0$ совпадает с известным неравенством Г. Полиа и Г. Сегё [1] и является его обобщением. Правое неравенство при $p = 0$ принадлежит Е. Макаи [12].

В нашей работе предложен еще один метод для построения оценок в классе выпуклых областей.

1. Основные результаты

Будем называть выпуклую область G растяжением выпуклой области G_0, если G_0 можно получить из G путем вырезания прямоугольного фрагмента и объединения оставшихся частей так, чтобы $\boldsymbol{\rho}(G_0) = \boldsymbol{\rho}(G)$. С другой стороны, область G_0 естественно назвать сжатием G. Например, сжатием прямоугольника является квадрат, а сам квадрат является несжимаемым. Растяжение и сжатие области определяются неоднозначно: растягивать область можно до бесконечности, сжимать до касания стороны области максимальной вписанной окружности. С другой стороны, не все области можно растянуть. Действительно, нетрудно видеть, что треугольник, правильный многоугольник с нечетным чистом сторон являются примерами нерастяжимых областей. Если область G не растяжима, то положим $G_0 \equiv G$.

Обозначим через Γ подмножество выпуклых областей, содержащее описанные около некоторой окружности многоугольники, а также круговые многоугольники, получаемые из описанных многоугольников заменой некоторых сторон или их частей дугами вписанной окружности. Формирование множества Γ закончим добавлением областей, являющихся растяжениями элементов из Γ.

Пусть $\mu \geq 0$. Введем некоторые обозначения:

$$G(\mu) := \{x \in G \mid \rho(x, G) > \mu\}, \quad \mathbf{a}(\mu) := \mathbf{A}(G(\mu)) := \int\limits_{G(\mu)} \mathrm{dA}$$

— множество уровня функции расстояния $\rho(x, G)$ и площадь множества уровня $G(\mu)$ соответственно.

Через $\mathbf{L}(G)$ обозначим длину границы области G. Пусть

$$\boldsymbol{l}(\mu) := \mathbf{L}(G(\mu)), \ \ \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) := \lim_{\mu \to \boldsymbol{\rho}(G)} \boldsymbol{l}(\mu). \tag{6}$$

В [11] доказаны следующие предложения.

Лемма 1. *Пусть G — выпуклая плоская область и пусть $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. Тогда $G(\mu)$ является тоже выпуклой областью, а множество $G(\boldsymbol{\rho}(G)) := \{x \in G : \rho(x, G) = \boldsymbol{\rho}(G)\}$ является либо одноточечным множеством, либо отрезком длины $l(\boldsymbol{\rho}(G))/2$.*

Лемма 2. *Пусть G — выпуклая плоская область и $\mathbf{A}(G) < +\infty$. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\mathbf{a}(\mu) \geq \mathbf{A}(G)\left(1 - \frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right)^2 + \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\mu\left(1 - \frac{\mu}{\boldsymbol{\rho}(G)}\right), \tag{7}$$

где $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G(\mu))$. Равенство для всех таких μ достигается тогда и только тогда, когда $G \in \Gamma$.

Отметим, что случаи равенства в (7) в работе [11] были описаны не полностью.

Пусть G — выпуклая область. Сопоставим области G любую область $G^{\diamondsuit} \in \Gamma$, которая имеет ту же самую площадь, радиус максимального круга и функционал $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G^{\diamondsuit})) = \boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$. Заметим, что такая область $G^{\diamondsuit}$ не единственна.

Теорема 1. *Пусть G — выпуклая область конечной площади. Пусть $P(t)$ — непостоянная абсолютно непрерывная функция на $(0, \boldsymbol{\rho}(G))$ и $dP(t) \geq 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_G P(\rho(x,G))\mathrm{dA} \geq \int\limits_{G^\diamondsuit} P(\rho(x,G^\diamondsuit))\mathrm{dA},$$

где $G^\diamondsuit \in \Gamma$, соответствующий G. Равенство достигается для всех областей из класса Γ.

Доказательство основано на приведенных леммах и симметризационных методах.

Следуя [10], для $p > 0$ определим функционал

$$\mathbf{i}_p(\mu) := p\int_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{p-1}\mathbf{a}(t)\mathrm{d}t, \tag{8}$$

$0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$. Отметим, что в классе выпуклых областей в дополнительных ограничениях на параметр p нет необходимости, в отличие от случая, рассмотренного в [10]. При $\mu = 0$ (8) совпадает с евклидовым моментом области G относительно границы, т. е. $\mathbf{i}_p(0) = \mathbf{I}_p(G)$.

Справедливо следующее вспомогательное утверждение, являющееся в некотором смысле обратным к аналогичной лемме из [10].

Лемма 3. *Пусть G — выпуклая область на плоскости конечной площади. Тогда для $0 \leq \mu \leq \boldsymbol{\rho}(G)$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{i_q}(\mu) \geq \frac{\mathbf{I}_q(G)y_q(\mu)}{2\boldsymbol{\rho}(G)^{q+2}} + \frac{q\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\mu^q(\boldsymbol{\rho}(G)-\mu)^2}{2\boldsymbol{\rho}(G)}, \tag{9}$$

где $q \geq 0$ и

$$y_q(\mu) = q(q+1)(q+2)\int\limits_\mu^{\boldsymbol{\rho}(G)} t^{q-1}(\boldsymbol{\rho}(G)-t)^2\mathrm{dt}.$$

Знак равенства в (9) для всех допустимых μ имеет место только для областей из класса Γ.

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая область на плоскости ограниченной площади и пусть $0 \leq q \leq 2$. Тогда при $p \geq q$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \leq \frac{4}{3(q+2)}\left[\frac{(p+1)(p+2)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p-2}}\mathbf{I}_p(G) - (p-q)\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^3\right] - \frac{2\pi(2-q)\boldsymbol{\rho}(G)^4}{3(q+1)(q+2)}. \tag{10}$$

Константы при функционалах $\mathbf{I}_p(G)$ и $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ являются неулучшаемыми.

При $q = 2$ утверждение теоремы 2 совпадает с теоремой, доказанной в [11].

Теорема 3. *Пусть G — выпуклая область на плоскости конечной площади и пусть $q > 0$. Тогда при $0 \leq p \leq q$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \geq \frac{1}{2(q+2)}\left[\frac{(p+1)(p+2)}{\boldsymbol{\rho}(G)^{p-2}}\mathbf{I}_p(G) + (q-p)\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^3\right] + \frac{\pi q\boldsymbol{\rho}(G)^4}{2(q+2)}, \tag{11}$$

равенство в котором достигается для круга.

Следует отметить, что в обеих теоремах функционал, заключенный в квадратных скобках, состоит из двух слагаемых, каждое из которых сравнимо с жесткостью кручения области в смысле Полиа и Сеге [1], тогда как оставшийся функционал в правых частях (10) и (11) является величиной более высокого порядка малости. Таким образом, функционалы в квадратных скобках являются примерами более сложных геометрических характеристик области, сравнимых с жесткостью кручения.

Ключевой при доказательстве приведенных утверждений является следующая теорема, полученная применением леммы 3 и представляющая самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть G — выпуклая область на плоскости ограниченной площади. Тогда при $0 \le q \le p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{I}_p(G) \ge \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^{p-q}}{(p+1)(p+2)} \left[(q+1)(q+2)\mathbf{I}_q(G) + (p-q)\boldsymbol{l}(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{q+1}\right].$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $G \in \Gamma$.

В заключении отметим, что разнообразие неравенств для жесткости кручения рассматриваемого вида связано отчасти с тем, что в классе выпуклых областей следующие условия эквивалентны:

$$\boldsymbol{L}(G) < +\infty \Leftrightarrow \mathbf{A}(G) < +\infty \Leftrightarrow \mathbf{I}_p(G) < +\infty, \ \ (-1 < p < +\infty) \Leftrightarrow \mathbf{P}(G) < +\infty$$

(см. [4], [9], [11]).

Литература

[1] Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике* (Физматгиз, М., 1962).

[2] Тимошенко С. П. *История науки о сопротивлении материалов* (ГИФМЛ, М., 1957).

[3] Михлин С. Г. *Вариационные методы в математической физике* (Наука, М., 1970).

[4] Payne L. E. *Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions, Studies in Mathematical analisis and Related Topics. Essays in honor of G. Polya*, Standford Univ. Press., Standford, California, 270–280 (1962).

[5] de Saint-Venant,Ḃ. *Memoire sur la torsion des primes.*, Memories presentes par divers savants a l'Academie des Sci. **14** (1853).

[6] Авхадиев Ф.Г. *Геометрические характеристики области эквивалентные некоторым нормам операторов вложения*, в сб.: *Материалы международн. конф. «Чебышевские чтения»*, 12–14 (1996).

[7] Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи* (Казанск. фонд «Математика», Казань, 1996).

[8] Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, в сб.: *Матем. сб.*, 3–12 (1998).

[9] Salahudinov R.G. *An isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane*, J. Inequal. and Appl. **6**, 253–260 (2001).

[10] Салахудинов Р.Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области*, Изв. вузов. Матем. (8), 66–79 (2013).

[11] Salahudinov R.G. *Torsional rigidity and euclidian moments of a convex domain*, The Quarterly J. of Math. **67**, 669–681 (2016).

[12] Makai. E. *On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Regidity of a Beam.*, Stanford Univ. Press., 227–231 (1962).

Лилия Ильгизяровна Гафиятуллина

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` gafiyat@gmail.com

Рустем Гумерович Салахудинов

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` rsalakhud@gmail.com

L.I. Gafiyatullina and R.G. Salakhudinov

A generalization of the Polia–Szego and Makai inequalities for torsional rigidity

Abstract. We prove generalizations of the classical inequalities of Polia — Szego and Makai about torsional rigidity of convex domains. The main idea of the proof is to apply an exact isoperimetric inequality of for Euclidean moments of a domain. This inequality has a wide class of extremal regions and is of independent interest.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moments of the domain with respect to its boundary, isoperimetric inequalities, convex domains, distance to the boundary of domain.

Liliya Ilgizyarovna Gafiyatullina

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` gafiyat@gmail.com

Rustem Gumerovich Salakhudinov

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` rsalakhud@gmail.com