КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Памяти профессора
Владимира Васильевича Клокова

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Учебно-методическое пособие

Казань - 2010

УДК 531.01

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

*методической комиссии механико-математического факультета
Протокол № 2 от 26 ноября 2010 г.*

*заседания кафедры аэрогидромеханики
Протокол № 1 от 28 октября 2010 г.*

Составитель
канд. физ.-мат. наук, К.А. Поташев

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.И. Филатов

Практические занятия по механике сплошной среды: Учебно-методическое пособие / К.А. Поташев. – Казань: Казанский университет, 2010. – 44 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для использования студентами и преподавателями механико-математического факультета при изучении и изложении курса механики сплошной среды. Пособие содержит набор задач по основам тензорного исчисления и их приложениям к задачам механики. Материал изложен в форме отдельных занятий, состоящих из перечня основных формул и определений, примеров решения типовых задач и набора дополнительных заданий.

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАНЯТИЕ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ. БАЗИСНЫЕ ВЕКТОРЫ. МЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА. СОПРЯЖЕННЫЙ БАЗИС

Основные формулы и определения

Соглашение о суммировании (правило суммирования Эйнштейна): при наличии у некоторого одночлена двух индексов, обозначенных одной и той же буквой и расположенных один вверху (контравариантный индекс), а другой внизу (ковариантный индекс), предполагается суммирование по всем значениям, которые может принимать данный индекс (для трехмерного пространства – от единицы до трех). Индексы, по которым осуществляется суммирование, называются *немыми индексами* (так как их буквенное обозначение не влияет на результат). Например:

$$a^i b_i = \sum_{i=1}^{3} a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3.$$

Координатной поверхностью $x^i = const$ называют геометрическое место точек, для которых указанная координата постоянна. Например, в координатной плоскости yOz декартовой прямолинейной системы координата x ее точек постоянна и равна нулю.

Координатной линией называют геометрическое место точек, для которых одна и только одна координата переменна. Координатные линии – пересечения координатных поверхностей.

Если координатные линии прямолинейны, то система координат называется *прямолинейной*. В противном случае система координат является *криволинейной*.

Базисные векторы $Э_i$ (или векторы базиса) по определению равны

$$Э_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \lim_{\substack{\vartriangle x^i \to 0 \\ x^j, x^k = const}} \frac{\vec{r}\left(x^i + \vartriangle x^i, x^j, x^k\right) - \vec{r}\left(x^i, x^j, x^k\right)}{\vartriangle x^i}$$

направлены по касательным к координатным линиям в данной точке в сторону возрастания соответствующей координаты (индексы i, j, k могут принимать значения 1, 2, 3 и расположены в циклическом порядке). Концы векторов, стоящих в числителе дроби, лежат на координатной линии x^i.

В отличие от прямолинейных координатных систем в криволинейных системах координат векторы не являются свободными, так как направления и, вообще говоря, величины базисных векторов зависят от точки приложения.

Метрическая матрица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \left(g_{ij} \right)$$

позволяет выразить квадрат расстояния между парой бесконечно близких точек в виде:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,. \tag{1.1}$$

Компоненты метрической матрицы могут быть вычислены как скалярное произведение базисных векторов:

$$g_{ij} = Э_i \cdot Э_j\,.$$

Сопряженной матрицей или обратной к метрической матрице $\left(g_{ij} \right)$ называется матрица $\left(g^{ij} \right)$, если элементы этих двух матриц связаны следующим образом:

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \text{ или } g^{jk} = G^{jk*} / g\,,$$

где G^{jk*} – элементы транспонированной матрицы $\left(G^{jk} \right)$; G^{jk} – алгебраическое дополнение к элементу g_{jk}, $g = \left\| g_{ij} \right\|$ – определитель матрицы $\left(g_{ij} \right)$. $G^{jk} = A^{jk} \left(-1 \right)^{j+k}$, A^{jk} – миноры к элементу g_{jk}, δ_i^j – *символ Кронекера*, определяемый как

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Сопряженный (обратный, контравариантный) базис векторов $Э^j$ определяется выражением:

$$Э^j = g^{ji} Э_i\,.$$

Величины с нижней индексацией называются *КОвариантными*, с верхней индексацией – *КОНТРАвариантными*.

Примеры решения задач

Задача 1.1. Дать развернутую запись выражений $M_{i\bullet\bullet}^{\bullet i \alpha}$; $a^i \delta_i^j$; δ_i^i; $a^\alpha b_{\alpha j}$.

Решение.

1. $M_{1\bullet\bullet}^{\bullet 1 \alpha} + M_{2\bullet\bullet}^{\bullet 2 \alpha} + M_{3\bullet\bullet}^{\bullet 3 \alpha}$, индекс α – свободный (по нему нет суммирования);

2. $a^i \delta_i^j = a^1 \delta_1^j + a^2 \delta_2^j + a^3 \delta_3^j = \left\{ \begin{matrix} a^1, & j = 1 \\ a^2, & j = 2 \\ a^3, & j = 3 \end{matrix} \right\} = a^j$;

3. $\delta_1^1+\delta_2^2+\delta_3^3=3$;   4. $a^1 b_{1j}+a^2 b_{2j}+a^3 b_{3j}$.

Задача 1.2. Определить координатные поверхности и координатные линии сферической системы координат r,φ,λ. Показать, что касательные к координатным линиям в точке M сферической системы координат взаимно перпендикулярны.

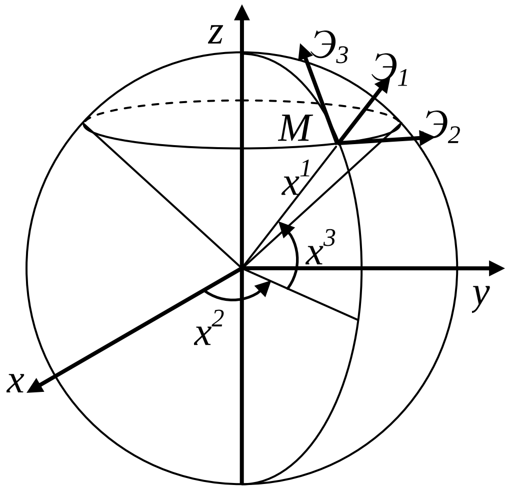

Рис. 1

Решение. Используем обозначения $x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=\lambda$ (рис. 1). Координатная поверхность $x^1=const$ – сфера радиуса $r=x^1$ с центром в точке O; координатная поверхность $x^2=const$ – полуплоскость, проходящая через ось Oz и точку M; координатная поверхность $x^3=const$ – коническая поверхность, ось симметрии которой – Oz, образующая, составляет с осью угол $\pi/2-x^3$.

Координатная линия x^1 – луч, проходящий через O и M; координатная линия x^2 – окружность радиуса $x^1\cos x^3$, плоскость которой параллельна xOy; координатная линия x^3 – полуокружность радиуса x^1, лежащая в координатной плоскости $x^2=const$.

Касательные лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях, следовательно, они взаимно перпендикулярны.

Задача 1.3. Определить модули векторов базиса введенной сферической системы координат в точке M.

Решение.

$\left|Э_1\right|=\lim\limits_{\substack{\vartriangle x^1\to 0\\ x^2,x^3=const}}\left|\vartriangle\vec{r}/\vartriangle x^1\right|=\lim\limits_{\vartriangle x^1\to 0}\left|\vartriangle x^1/\vartriangle x^1\right|=1$, здесь $\vartriangle\vec{r}=MN$, где M и N - точки, лежащие на координатной линии x^1.

$$\left|Э_2\right|=\lim\limits_{\substack{\vartriangle x^2\to 0\\ x^1,x^3=const}}\left|\vartriangle\vec{r}/\vartriangle x^2\right|=\lim\limits_{\vartriangle x^2\to 0}\left|x^1\cos x^3\vartriangle x^2/\vartriangle x^2\right|=\left|x^1\cos x^3\right|,$$

$$\left|Э_3\right|=\lim\limits_{\substack{\vartriangle x^3\to 0\\ x^1,x^2=const}}\left|\vartriangle\vec{r}/\vartriangle x^3\right|=\lim\limits_{\vartriangle x^3\to 0}\left|x^1\vartriangle x^3/\vartriangle x^3\right|=\left|x^1\right|.$$

Задача 1.4. Найти компоненты g_{ij} в произвольной точке для сферической системы координат. Записать компоненты сопряженной метрической матрицы.

Решение. Запишем выражение длины внутренней диагонали прямоугольного параллелепипеда, сторонами которого являются $\left|dx^1\right|$, $\left|x^1 \cos x^3\, dx^2\right|$, $\left|x^1\, dx^3\right|$:

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(x^1 \cos x^3\, dx^2\right)^2 + \left(x^1\, dx^3\right)^2.$$

Сравнивая полученное соотношение с выражением (1.1), получаем матрицу:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^1 \cos x^3\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Это симметричная матрица с нулевыми недиагональными элементами, что характерно для ортогональных систем координат.

Вычисляя по указанным правилам компоненты сопряженной метрической матрицы, получим:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^1 \cos x^3\right)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^{-2} \end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Найти разложение базисных векторов $Э^j$ по базисным векторам $Э_i$ в точке M в случае введенной сферической системы координат.

Решение.

$$Э^1 = g^{1i}Э_i = Э_1,\; Э^2 = g^{2i}Э_i = \left(x^1 \cos x^3\right)^{-2} Э_2,\; Э^3 = g^{3i}Э_i = \left(x^1\right)^{-2} Э_3.$$

Дополнительные задачи

Задача 1.6. Упростить выражения $\delta_i^2 n^i$, $\delta_2^i A_{ji} \delta_1^j$, $\delta_j^i\, \delta_k^j$, $\delta_j^i \delta_k^j \delta_i^k$, $\delta_j^i\, \delta_k^j\, A_i^k$, $\delta_j^i\, A_i^k$, $B_{ij} x^i x^j$, если $B_{ij} = -B_{ji}$.

Задача 1.7. Показать, что $\left(P_{ijk} + P_{jki} + P_{jik}\right) x^i x^j x^k = 3P_{ijk}\, x^i x^j x^k$.

Задача 1.8. Для заданных матриц

$$\left(a_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2&0&3\\5&1&2\\4&5&7\end{pmatrix},\ \left(x^i\right)=(2,1,4),\ \left(y^i\right)=(3,7,-1)$$

вычислить а) $a_{ij}\,x^j$, б) $a_{ij}\,x^i$, в) $a_{ij}\,x^i\,y^j$, г) $a_{ij}\,y^i\,x^j$, д) $a_{ij}\,\delta_i^j$, е) $\left(a_{ij}-\dfrac{2}{5}\delta_j^l\,a_{ll}\right)x^i\,y^j$.

Задача 1.9. Решить задачи 1.2-1.5 в случае цилиндрической системы координат.

Задача 1.10. Сколько различных соотношений содержит выражение $g_{ij}=Э_i\cdot Э_j$?

Задача 1.11. Доказать, что $g^{ij}=Э^i\cdot Э^j$.

Задача 1.12. Доказать, что $Э^i\cdot Э_j=\delta_j^i$.

Задача 1.13. Доказать, что $Э_i=g_{ij}Э^j$.

Задача 1.14. Определить компоненты метрической матрицы для косоугольной системы координат, первая ось которой параллельна оси абсцисс декартовой системы координат, а вторая ось образует с первой угол α.

Задача 1.15. Найти вектора сопряженного базиса, если

$$Э_1=3\vec{i}+8\vec{k},\ Э_2=\vec{i}+2\vec{k},\ Э_3=2\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}.$$

Задача 1.16. Указать, какая из систем координат с метрической матрицей

$$\text{а)}\begin{pmatrix}g_{11}&0&0\\0&g_{22}&0\\0&0&g_{33}\end{pmatrix},\quad\text{б)}\begin{pmatrix}1&\cos\theta_{12}&\cos\theta_{13}\\\cos\theta_{12}&1&\cos\theta_{23}\\\cos\theta_{13}&\cos\theta_{23}&1\end{pmatrix},\ \text{в)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

является 1) ортонормированной, 2) нормированной неортогональной, 3) ортогональной.

Задача 1.17. В некоторых случаях, например при изучении течения в тонком слое вблизи тела, удобно использовать специальную криволинейную систему координат. Если течение рассматривается как плоское, система координат вводится в плоскости следующим образом. Пусть в плоскости течения граница тела – гладкая кривая L, заданная параметрически $\vec{r}=\vec{f}(s)=a(s)\vec{i}+b(s)\vec{j}$, где s – длина дуги кривой L. Тогда в окрестности кривой каждой точке с радиус-вектором $\vec{r}$ с помощью рассматриваемой системы координат можно поставить в соответствие пару чисел (s,h), определяемых из уравнения (рис. 2)

$$\vec{r}=\vec{f}(s)+\vec{n}(s)h,$$

где $\vec{n}(s)$ – единичная нормаль к кривой L, h – расстояние до L.

Найдите базис системы координат $x^1=s$, $x^2=h$ и ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты ее метрического тензора.

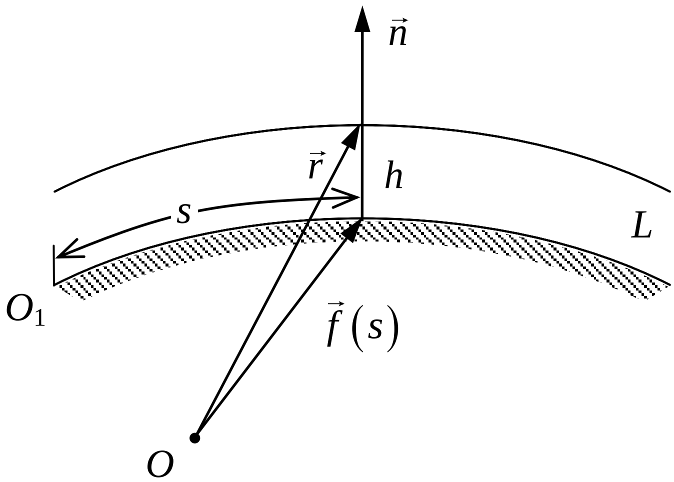

Рис. 2

ЗАНЯТИЕ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ. ИНВАРИАНТНЫЕ ОБЪЕКТЫ

Основные формулы и определения

Преобразование координат характеризуется соотношениями $x^i = x^i\left(x'^1, x'^2, x'^3\right) = x^i\left(x'^j\right)$ и выражает отображение областей изменения переменных x^i и x'^j друг на друга. Штрих в дальнейшем означает переменную в новой системе координат. Отображение является непрерывным, взаимно однозначным, если якобиан преобразования $\left\|\partial x^i / \partial x'^j\right\| \neq 0, \infty$; при этом якобиан обратного преобразования $\left\|\partial x'^i / \partial x^j\right\| \neq \infty, 0$.

При переходе от одной системы координат к другой используются *формулы преобразования*:

дифференциала:
$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^1} dx'^1 + \frac{\partial x^i}{\partial x'^2} dx'^2 + \frac{\partial x^i}{\partial x'^3} dx'^3 = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j,$$

базисных векторов:
$$Э_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} Э'_j, \quad Э^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^m} Э'^m,$$

компонент метрической матрицы:
$$g_{ij} = Э_i \cdot Э_j = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} Э'_\alpha \cdot Э'_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} g'_{\alpha\beta}, \quad g^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta} g'^{\alpha\beta},$$

компонент вектора:
$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a'^j,$$

компонент тензора второго ранга:
$$T_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^j}{\partial x^\beta} T'_{ij}.$$

Инвариантными относительно преобразования координат называют свойства, не меняющиеся при названном преобразовании. В частности, инвариантным является квадрат расстояния между близкими точками (форма записи остается неизменной):

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j} g'_{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial x'^\gamma} dx'^\gamma \frac{\partial x^j}{\partial x'^\nu} dx'^\nu =$$
$$= \delta^\alpha_\gamma \delta^\beta_\nu g'_{\alpha\beta} dx'^\gamma dx'^\nu = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = ds^2.$$

Вектор $\vec{a}$ – линейная комбинация базисных векторов, инвариантная относительно непрерывного, однозначного преобразования координат:

$$\vec{a} = a^i Э_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a'^j \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^i} Э'_\gamma = \delta^\gamma_j a'^j Э'_\gamma = a'^j Э'_j.$$

Вектор может быть записан в ко- и контравариантных компонентах:

$$\vec{a} = a^i Э_i = a_j Э^j .$$

Здесь a_j, a^i – ко- и контравариантные компоненты вектора.

Тензор второго ранга – линейная комбинация диад базисных векторов, инвариантная относительно непрерывного, однозначного преобразования координат. Тензор второго ранга может быть записан в диадах векторов исходного и сопряженного базиса:

$$\overset{\Rightarrow}{T} = T^{\alpha\beta}\, Э_\alpha \circ Э_\beta = T^{i\cdot}_{\cdot\beta}\, Э_i \circ Э^\beta = T^{\cdot j}_{\alpha\cdot}\, Э^\alpha \circ Э_j = T_{\alpha\beta}\, Э^\alpha \circ Э^\beta .$$

Число индексов у компонент тензора $T^{\alpha\beta}$ определяет его ранг. Скаляр - тензор нулевого ранга, вектор – тензор первого ранга. *Матрицей тензора* называется матрица, составленная из его компонент.

Операция *«жонглирования» индексами* производится с использованием компонент метрической матрицы при переходе от ковариантных величин к контравариантным и наоборот. Например,
для компонент вектора:

$$a^i = g^{ij} a_j , \quad a_i = g_{ij} a^j .$$

для компонент тензора:

$$T^{\alpha\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\tau} = T^{\alpha\bullet}_{\bullet\gamma}\, g_{\alpha\tau} = T_{\tau\gamma} \quad \text{и} \quad T_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\tau}\, g^{\beta\gamma} = T^{\tau\bullet}_{\bullet\beta}\, g^{\beta\gamma} = T^{\tau\beta} .$$

Диадой двух произвольных векторов $\vec{a} \circ \vec{b}$ является элемент девятимерного линейного пространства (тензор второго ранга), характеризуемый разложением: $\vec{a} \circ \vec{b} = a^i b^j\, Э_i \circ Э_j$. Здесь диады $Э_i \circ Э_j$, $i, j = \overline{1,3}$, образуют базис данного девятимерного пространства. *Матрицей диады* является матрица 3x3, составленная из коэффициентов линейной комбинации – $a^i b^j$.

При обозначении диадного произведения знак $(\ )\circ(\ )$ может быть опущен. Скалярное же произведение впредь всегда будем обозначать точкой $(\ )\cdot(\ )$.

Метрический тензор в качестве компонент имеет элементы метрической матрицы.

$$\overset{\Rightarrow}{g} = g^{ij}\, Э_i \circ Э_j = \delta^i_\beta\, Э_i \circ Э^\beta = \delta^j_\alpha\, Э^\alpha \circ Э_j = g_{\alpha\beta}\, Э^\alpha \circ Э^\beta .$$

Примеры решения задач

Задача 2.1. Записать явный вид соотношения $x^i = x^i\left(x'^j\right)$ и якобиана $\left\| \partial x^i / \partial x'^j \right\|$, если $x^i = (x, y, z)$ – декартовы координаты, а $x'^j = (r, \varphi, \lambda)$ – сферические координаты.

Решение:

$$x^1 = x'^1 \cos x'^3 \cos x'^2, \quad x^2 = x'^1 \cos x'^3 \sin x'^2, \quad x^3 = x'^1 \sin x'^3,$$
$$\left\| \partial x^i / \partial x'^j \right\| = \left(x'^1 \right)^2 \cos x'^3 .$$

Задача 2.2. В сферической системе координат в точке $M = \left(x'^i_M \right) = \left(2\sqrt{2}, 0, \pi/4 \right)$ задан вектор $\vec{a} = \left(a'^i \right) = \left(\sqrt{2}, 0, 1 \right)$. Записать данный вектор в декартовой системе координат.

Решение. Для записи решения задачи необходимо отыскать компоненты вектора в декартовой системе координат.

$$a^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^1}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \cos x'^2_m \cos x'^3_m + 0 - 1 \cdot x'^1_m \cos x'^2_m \sin x'^3_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1,$$
$$a^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^2}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 = 0 + 0 + 0 = 0,$$
$$a^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x'^j} a'^j = \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^1}\right|_M a'^1 + \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^2}\right|_M a'^2 + \left.\frac{\partial x^3}{\partial x'^3}\right|_M a'^3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$$

Здесь при вычислении частных производных были использованы координаты точки приложения вектора. Таким образом, в декартовой системе координат:

$$\vec{a} = \left(a^i \right) = (-1, 0, 3) = -1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} .$$

Следует обратить внимание, что вектор $\vec{a}$ с теми же компонентами в сферической системе координат, но приложенный к другой точке пространства, имел бы иные компоненты в декартовой координатной системе.

Задача 2.3. Определить матрицу компонент $T^{i.}_{.k}$, если

$$\left(T^{ij} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \left(g_{ij} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Осуществив «жонглирование» индексами, получим $T^{ij} g_{jk} = T^{i\bullet}_{\bullet k}$. Порядок индексов матрицы $\left(g_{jk} \right)$ несущественен. В результате произведения матриц находим искомую:

$$\left(T^{ij} g_{jk} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \left(T^{i\bullet}_{\bullet k} \right).$$

Полученная матрица определяет компоненты тензора в базисе $Э_i \, Э^k$.

Задача 2.4. Доказать инвариантность и найти представления скалярного произведения векторов.

Решение.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a^i Э_i \cdot b^j Э_j = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a'^{\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}} b'_{\beta}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^i} = a'^{\alpha} b'_{\beta}\delta^{\beta}_{\alpha} = a'^{\alpha} b'_{\alpha}.$$

Задача 2.5. Найти формулу преобразования компонент тензора второго ранга $T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ со смешанным строением индексов при переходе к новой системе координат.

Решение.

$$T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} э_{\alpha} э^{\beta} = T'^{i\cdot}_{\cdot j} э'_i э'^j = T'^{i\cdot}_{\cdot j}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^i} э_{\alpha}\frac{\partial x'^j}{\partial x^{\beta}} э^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^j}{\partial x^{\beta}} T'^{i\cdot}_{\cdot j} э_{\alpha} э^{\beta}.$$

Из сравнения получаем $T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta} = \dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^i}\dfrac{\partial x'^j}{\partial x^{\beta}} T'^{i\cdot}_{\cdot j}$.

Задача 2.6. Записать матрицу диады, составленной из векторов $\vec{a}(1,0,2)$, $\vec{b}(0,3,-1)$. В скобках указаны компоненты векторов в декартовой системе координат.

Решение.

$$\left(a^i\, b^j\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Дополнительные задачи

Задача 2.7. Показать, что компоненты тензора Кронекера δ_i^j не изменяются при преобразованиях координат.

Задача 2.8. Найти связь между дифференциалами ковариантных компонент метрического тензора и дифференциалами его контравариантных компонент. *Ответ:* $dg_{ij} = -g_{im}\, g_{jk}\, dg^{mk}$.

Задача 2.9. Доказать, что если x^i – декартовые координаты, а x'^j – произвольные криволинейные, связанные соотношением $x^i = x^i\left(x'^j\right)$, то компоненты метрической матрицы $g'_{\alpha\beta}$ удовлетворяют равенству

$$g'_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^i}{\partial x'^{\beta}}.$$

Задача 2.10. Задана прямолинейная, косоугольная система координат, угол между двумя координатными линиями в точке равен α, третья координатная линия перпендикулярна первым двум. Определить величины и направления базисных векторов $Э_i$ и $Э^i$.

Задача 2.11. Записать формулы преобразования сферической системы координат в цилиндрическую и найти якобиан преобразования.

Задача 2.12. Показать, что частные производные произвольной функции $\varphi\left(x^1, x^2, x^3\right)$ преобразуются при переходе к новой системе координат как ковариантные величины.

Задача 2.13. Записать метрический тензор в сферической системе координат.

Задача 2.14. Получить формулы преобразования компонент $T_{\alpha\beta}$ тензора при переходе от сферической системы к декартовой.

Задача 2.15. Составить матрицу из компонент следующего тензора второго ранга: $\overset{\Rightarrow}{T} = 3\vec{i}\,\vec{i} + 5\vec{i}\,\vec{j} + 4\vec{j}\,\vec{i} - \vec{k}\,\vec{k}$.

Задача 2.16. Записать явный вид соотношений $x^i = x^i\left(x'^j\right)$, если $\left\{x^i\right\}$ – сферическая, а $\left\{x'^i\right\}$ – прямоугольная декартова СК. Найти якобиан преобразования $\left\|\partial x^i / \partial x'^j\right\|$. Для указанного перехода найти формулу преобразования компонент тензора $T^{2\cdot}_{\cdot 2}$ и $T^{3\cdot}_{\cdot 1}$.

Задача 2.17. Записать матрицы компонент $T^{i\cdot}_{\cdot j}$, $T^{\cdot j}_{i\cdot}$, T_{ij}, если

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАНЯТИЕ 3. ОПЕРАЦИИ НАД ТЕНЗОРАМИ. ФИЗИЧЕСКИЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА

Основные формулы и определения

Тензорное (внешнее) произведение тензоров есть тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей, а компоненты произведению компонент сомножителей. В частном случае диада - тензорное произведение двух векторов. Если $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij}Э^iЭ^j$, $\overset{\Rightarrow}{D} = D^{\alpha\beta\gamma}Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma$, то их тензорное произведение $\overset{\Rightarrow}{T D} = T_{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, Э^iЭ^jЭ_\alpha Э_\beta Э_\gamma$ – тензор 5-го ранга.

Сложение тензоров определяется только для тензоров одной валентности. Компоненты тензора суммы определяются как сумма компонент слагаемых с одинаковым строением индексов. Например, если $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij}\, Э^iЭ^j$ и $\overset{\Rightarrow}{D} = D_{ij}\, Э^iЭ^j$, то тензор $\overset{\Rightarrow}{A} = \overset{\Rightarrow}{T} + \overset{\Rightarrow}{D} = A_{ij}\, Э^iЭ^j = \left(T_{ij} + D_{ij}\right)Э^iЭ^j$.

Скалярное произведение тензоров вычисляется следующим образом:

$$\begin{gathered}\overset{\Rightarrow}{T}\cdot\overset{\Rightarrow}{D} = T_{ij}\, Э^iЭ^j \cdot D^{\alpha\beta\gamma}Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T_{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, Э^i\left(Э^j\cdot Э_\alpha\right)Э_\beta Э_\gamma = \\ = T_{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, \delta^j_\alpha\, Э^iЭ_\beta Э_\gamma = T_{i\alpha}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, Э^iЭ_\beta Э_\gamma\end{gathered}$$

Скалярное произведение тензоров – тензор, ранг которого меньше суммы рангов сомножителей на два.

Двойное скалярное произведение вычисляется следующим образом:

$$\begin{gathered}\overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{D} = T_{ij}\, Э^iЭ^j : D^{\alpha\beta\gamma}Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T_{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\left(Э^j\cdot Э_\alpha\right)\left(Э^i\cdot Э_\beta\right)Э_\gamma = \\ = T_{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, \delta^j_\alpha\, \delta^i_\beta\, Э_\gamma = T_{\beta\alpha}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, Э_\gamma\end{gathered}$$

или при другом строении индексов:

$$\begin{gathered}\overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{D} = T^{ij}\, Э_iЭ_j : D^{\alpha\beta\gamma}Э_\alpha Э_\beta Э_\gamma = T^{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\left(Э_j\cdot Э_\alpha\right)\left(Э_i\cdot Э_\beta\right)Э_\gamma = \\ = T^{ij}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, g_{j\alpha}\, g_{i\beta}\, Э_\gamma = T_{\beta\alpha}\, D^{\alpha\beta\gamma}\, Э_\gamma\end{gathered}$$

Следом тензора называют двойное скалярное произведение тензора на метрический тензор:

$$\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T} = \mathrm{tr}\overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{g}\,.$$

Степенью n тензора называется последовательное n-кратное скалярное произведение тензора самого на себя и обозначается $\overset{\Rightarrow}{T}^n$.

Физические компоненты вектора вводятся для ортогональных систем координат путём нормировки векторов базиса $\vec{e}_i = \dfrac{Э_i}{|Э_i|} = \dfrac{Э_i}{\sqrt{Э_i \cdot Э_i}} = \dfrac{Э_i}{\sqrt{g_{ii}}}$:

$$\vec{a} = a^i\, Э_i = a^i\, \frac{Э_i}{|Э_i|}|Э_i| = a^i\, \vec{e}_i\, |Э_i| = \left(a^i \sqrt{g_{ii}}\right)\vec{e}_i = a^i_{физ}\, \vec{e}_i \qquad (3.1)$$

то есть
$$a^i_{физ} = a^i \sqrt{g_{ii}}\, . \qquad (3.2)$$

Примеры решения задач

Задача 3.1. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g} \cdot \overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T}$, где $\overset{\Rightarrow}{T} = T_{ij} Э^i Э^j$.

Решение.

$$\overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{g} = T_{ij}\, Э^i Э^j \cdot g^{\alpha\beta} Э_\alpha Э_\beta = T_{ij}\, g^{\alpha\beta}\, \delta^j_\alpha\, Э^i Э_\beta = T_{i\alpha}\, g^{\alpha\beta}\, Э^i Э_\beta = T_{i\bullet}^{\bullet\beta}\, Э^i Э_\beta = \overset{\Rightarrow}{T}\, .$$

Задача 3.2. Для векторов $\vec{a} = (3;0;4)$, $\vec{b} = (0;2;-6)$ и тензора $\overset{\Rightarrow}{D}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ в декартовой системе координат вычислить произведения $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$, $\overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$.

Решение. Пусть $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} = \vec{v}$. Тогда $(v_x; v_y; v_z) = (3;0;4)\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = (9;-20;6)$.

Пусть $\overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b} = \vec{w}$. Тогда $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Пусть $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{b} = \lambda$. Тогда $\lambda = (9;-20;6)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = -76$.

Дополнительные задачи

Задача 3.3. В цилиндрической системе координат найти сумму тензоров:

$\overset{\Rightarrow}{A} = 2Э^1 Э_1 + 6\left(x^1\right)^{-2} Э^1 Э_2 + 7Э_1 Э_3 + 4\left(x^1\right)^{-2} Э_2 Э^1 + 8Э^2 Э^2$,

$\overset{\Rightarrow}{B} = 4Э^1 Э^1 + 5Э^1 Э^2 + 3\left(x^1\right)^{-2} Э_2 Э_1 + 4Э_3 Э^3$.

Задача 3.4. Представить все формы записи тензора третьего ранга, используя тензорные произведения трех базисных векторов.

Задача 3.5. Найти выражение следа тензора второго ранга через его компоненты.

Задача 3.6. Задан тензор второго ранга $\overset{\Rightarrow}{T} = 2\vec{i}\,\vec{i} + 3\vec{j}\,\vec{k} + \vec{k}\,\vec{k}$ и тензор первого ранга $\overset{\Rightarrow}{D} = 3\vec{i}$. Определить результаты скалярного умножения $\overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$ и $[\overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}] \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$.

Задача 3.7. Различаются ли матрицы, составленные из метрических коэффициентов смешанного типа, в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат?

Задача 3.8. Для векторов $\vec{a} = (1;4;0)$, $\vec{b} = (-2;0;3)$ и тензора $\overset{\Rightarrow}{D}$ с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ в декартовой системе координат вычислить произведения $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D}$, $\overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \overset{\Rightarrow}{D} \cdot \vec{b}$.

Задача 3.9. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g} \cdot \overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} \cdot \overset{\Rightarrow}{g} = \overset{\Rightarrow}{T}$.

Задача 3.10. Пользуясь определением степени тензора, выразить компоненты $\overset{\Rightarrow}{T}{}^2$, $\overset{\Rightarrow}{T}{}^3$ через компоненты тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$ второго ранга.

Задача 3.11. Вычислить $\overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{T}$, если $\overset{\Rightarrow}{T}$ – тензор второго ранга.

Задача 3.12. Доказать, что $\overset{\Rightarrow}{g} : \overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{T} : \overset{\Rightarrow}{g}$.

Задача 3.13. Вычислить $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^2$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^3$, если $\overset{\Rightarrow}{T}$ – тензор второго ранга. *Ответ:* $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^2 = T^{\alpha\bullet}_{\bullet i}\, T^{i\bullet}_{\bullet\alpha}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}{}^3 = T^{\alpha\bullet}_{\bullet i}\, T^{i\bullet}_{\bullet k}\, T^{k\bullet}_{\bullet\alpha}$.

Задача 3.14. Аналогично понятию физических компонент вектора $a^i_{\text{физ}}$ ввести понятие физических компонент тензора второго ранга $T^{ij}_{\text{физ}}$.

Задача 3.15. Доказать, что $a^{\mathrm{i}}_{\text{физ}} = a_{\text{физ i}}$.

Задача 3.16. Записать выражение квадрата вектора в ортогональной системе координат через его физические компоненты.

ЗАНЯТИЕ 4. АЛЬТЕРНИРОВАНИЕ И СИММЕТРИРОВАНИЕ. ТЕНЗОРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Основные формулы и определения

Альтернирование и симметрирование тензора – выделение его антисимметричной и симметричной частей. Тензор называется *симметричным* (*антисимметричным*) по некоторой паре индексов, если компоненты его не меняются (изменяют только знак) при перестановке этих индексов местами. При выделении симметричной и антисимметричной частей тензоров второго ранга пользуются тождеством

$$T_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) = S_{ij} + A_{ij}. \tag{4.1}$$

Компоненты S_{ij}, A_{ij} представляют соответственно симметричную и антисимметричную части исходного тензора.

Тензорная поверхность симметричного тензора второго ранга в некоторой точке определяется уравнением:

$$T_{ij}\, dx^i\, dx^j = C\,.$$

В осях, соответствующих *главным направлениям*, уравнение поверхности приводится к каноническому виду. Единичный вектор $\vec{e}$, определяющий главное направление, удовлетворяет соотношению:

$$\left(\overset{\Rightarrow}{T} - T\,\overset{\Rightarrow}{g}\right)\cdot \vec{e} = \vec{0}\,,$$

где T – величина соответствующего главного значения тензора.

Для нахождения главных значений и главных направлений тензора второго ранга необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. составить и решить относительно T характеристическое уравнение $\det\left(T^{i\bullet}_{\bullet k} - T\,\delta^i_k\right) = 0$; в общем случае уравнение третьего порядка имеет три решения, соответствующие трём главным значениям $T_{(1)}$, $T_{(2)}$, $T_{(3)}$,
2. для каждого найденного главного значения $T_{(n)}$ решить систему трёх уравнений $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k} - T_{(n)}\,\delta^i_k\right)\cdot e^k_{(n)} = 0$ для отыскания трёх компонент соответствующего главного направления $\vec{e}_{(n)} = \left(e^1_{(n)}, e^2_{(n)}, e^3_{(n)}\right)$;
3. зная компоненты метрической матрицы пространства, нормировать найденные главные вектора.

Первый инвариант тензора второго ранга

$$I_1 = T_{(1)} + T_{(2)} + T_{(3)}.$$

Второй инвариант тензора второго ранга:

$$I_2 = T_{(1)}\, T_{(2)} + T_{(2)}\, T_{(3)} + T_{(3)}\, T_{(1)}.$$

Третий инвариант тензора второго ранга:

$$I_3 = T_{(1)}\, T_{(2)}\, T_{(3)}.$$

Примеры решения задач

Задача 4.1. Установить, по каким парам индексов симметричен или антисимметричен тензор, если для его компонент выполняются равенства

$$\alpha_{i\,jkl} = \alpha_{ik\,jl} = -\alpha_{\,jikl} = -\alpha_{l\,jki}.$$

Решение. Из первого равенства можно заключить, что тензор симметричен по индексам (2, 3). Из второго (с учетом первого) – антисимметричен по (1, 2). Из последнего – антисимметричен по (1, 4). При решении подобных задач в сквозном равенстве необходимо сопоставлять выражения по принципу «каждый с каждым».

Задача 4.2. Определить матрицы компонент симметричной и антисимметричной частей тензора, если его компоненты заданы матрицей

$$\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя тождество (4.1), получим

$$\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3. Найти главные значения и главные направления тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$, если в декартовой системе координат $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-T & -1 & 0 \\ -1 & 3-T & 0 \\ 0 & 0 & 1-T \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \left(1-T\right)\left[3-T^2-1\right] = 0.$$

Корни этого уравнения определяют три главных значения $T_{(1)} = 1$, $T_{(2)} = 2$, $T_{(3)} = 4$.

Компоненты $e_{(1)}^{k}$, соответствующие $T_{(1)}=1$, определяются из системы

$$(3-1)e_{(1)}^{1}-e_{(1)}^{2}=0, \quad -e_{(1)}^{1}+(3-1)e_{(1)}^{2}=0, \quad (1-1)e_{(1)}^{3}=0.$$

Первые два уравнения имеют лишь тривиальное решение $e_{(1)}^{1}=e_{(1)}^{2}=0$. Следовательно, для того, чтобы вектор главного направления не был нулевым, необходимо, чтобы $e_{(1)}^{3}\neq 0$, что не противоречит третьему уравнению.

Аналогично для второго и третьего главных значений определим:

$$e_{(2)}^{1}=e_{(2)}^{2}\neq 0, \quad e_{(2)}^{3}=0; \qquad e_{(3)}^{1}=-e_{(3)}^{2}\neq 0, \quad e_{(3)}^{3}=0.$$

Из условия, что главные вектора являются единичными в декартовой системе координат, отыщем величины их компонент:

$$\vec{e}_{(1)}=\pm\vec{k}, \quad \vec{e}_{(2)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right), \quad \vec{e}_{(3)}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right).$$

Дополнительные задачи

Задача 4.4. Установить, по каким парам индексов симметричен или антисимметричен тензор, если для его компонент выполняются равенства

$$R_{ijkm}=R_{ikjm}, \ \varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kji}, \ G_{ijkm}=G_{jikm}=G_{ijmk}=G_{jimk},$$

$$\beta_{ijk}=\beta_{ikj}=\beta_{kji}=\beta_{jik}.$$

Задача 4.5. Доказать, что если тензор с компонентами a_{ijk} симметричен по индексам (1, 2) и антисимметричен по индексам (2, 3), то он равен нулю.

Задача 4.6. Показать, что любой симметричный тензор при переходе к любой другой системе координат преобразуется также в симметричный тензор.

Задача 4.7. Пусть $D_{ij}=D_{ji}$. Доказать, что $D_{\cdot j}^{i\cdot}=D_{j\cdot}^{\cdot i}$.

Задача 4.8. В цилиндрической системе координат разложить на симметричную и антисимметричную части тензор

$$\overset{\Rightarrow}{T}=3Э^{1}Э^{1}+8Э^{1}Э_{3}+\left(x^{1}\right)^{-2}Э_{2}Э^{2}+6Э_{3}Э^{1}+4\left(x^{1}\right)^{-2}Э^{3}Э_{2}+4Э^{3}Э^{3}.$$

Задача 4.9. Зная матрицу $T_{\bullet k}^{i\bullet}$ задачи 4.3, вычислить $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^{2}$, $\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^{3}$. (*Ответ:* 7, 21, 73). Убедиться в том, что а) характеристические уравнения могут быть записаны в виде

$$T^{3}-I_{1}T^{2}+I_{2}T-I_{3}=0;$$

б) инварианты могут быть определены следующим образом:

$$I_1 = \mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\right)^2 - \mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^2\right], \quad I_3 = \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\cdot\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}^2 + \frac{1}{6}\left(\mathrm{Sp}\overset{\Rightarrow}{T}\right)^3.$$

Задача 4.10. Показать, что след антисимметричной части тензора второго ранга равен нулю.

Задача 4.11. Найти главные значения и главные направления тензора $\overset{\Rightarrow}{T}$, если в декартовой системе координат $\left(T^{i\bullet}_{\bullet k}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 4.12. В ортогональной декартовой системе координат найти главные значения и главные направления симметричной части тензора с компонентами $\left(T^{ij}\right) = \begin{pmatrix} a & 2a & 2a \\ 0 & a & 2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Задача 4.13. Непосредственным вычислением найти инварианты тензора с компонентами $\left(T_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ в ДСК. *Ответ*: $I_1 = 20, \quad I_2 = 123, \quad I_3 = 216$.

ЗАНЯТИЕ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРА И ТЕНЗОРА ПО КООРДИНАТЕ

Основные формулы и определения

Коэффициенты связности (символы Кристоффеля первого рода) $\Gamma^k_{\alpha i}$ вводятся при дифференцировании базисных векторов:

$$\frac{\partial Э_\alpha}{\partial x^i} = \Gamma^k_{\alpha i} Э_k, \qquad \frac{\partial Э^\alpha}{\partial x^i} = -\Gamma^\alpha_{k i} Э^k$$

и могут быть вычислены по формулам

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{ls} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^s} \right). \tag{5.1}$$

Дифференцирование вектора по координате:

– ковариантная производная от контравариантных компонент:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i w^\alpha \right) Э_\alpha = \left(\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i} + w^\beta \Gamma^\alpha_{\beta i} \right) Э_\alpha,$$

– ковариантная производная от ковариантных компонент:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i w_\alpha \right) Э^\alpha = \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x^i} - w_\beta \Gamma^\beta_{\alpha i} \right) Э^\alpha .$$

Дифференцирование тензора по координате:

$$\frac{\partial \overset{\Rightarrow}{T}}{\partial x^i} \equiv \left(\nabla_i T^{\alpha\beta} \right) Э_\alpha Э_\beta = \left(\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^i} + T^{k\beta} \Gamma^\alpha_{ki} + T^{\alpha k} \Gamma^\beta_{ki} \right) Э_\alpha Э_\beta .$$

Символический *вектор-оператор Гамильтона «набла»*: $\vec{\nabla} = \nabla_i Э^i$.

Градиент скалярной функции:

$$\operatorname{grad} \psi = \vec{\nabla} \psi \left(x^i \right) = \nabla_i Э^i \psi = \nabla_i \psi Э^i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} Э^i .$$

Производная функции по направлению $\vec{n}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} \psi \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} . \tag{5.2}$$

Примеры решения задач

Задача 5.1. Вычислить коэффициенты связности в сферической и цилиндрической системах координат.

Решение. С использованием соотношения (5.1) получим, что в сферической системе координат отличны от нуля лишь компоненты

$$\Gamma_{22}^{1} = -x^1 \cos^2 x^3, \quad \Gamma_{33}^{1} = -x^1, \quad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = 1/x^1,$$
$$\Gamma_{23}^{2} = \Gamma_{32}^{2} = -\operatorname{tg} x^3, \quad \Gamma_{13}^{3} = \Gamma_{31}^{3} = 1/x^1, \quad \Gamma_{22}^{3} = \frac{1}{2}\sin\left(2x^3\right),$$

в цилиндрической системе координат отличны от нуля лишь следующие компоненты

$$\Gamma_{22}^{1} = -x^1, \; \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12}^{2} = 1/x^1 .$$

Задача 5.2. Определить производную тензора первого ранга (вектора) $\vec{a} = a^i\, Э_i$ по каждой из трех координат x^1, x^2, x^3, считая, что он задан в цилиндрической системе координат $\left(x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z\right)$ следующим образом: $a^1 = 2r^2 + 3z$, $a^2 = 0$, $a^3 = 5r + 2z^2$.

Решение. Производной тензора первого ранга по координате является также тензор первого ранга $\vec{b} = \dfrac{\partial \vec{a}}{\partial x^j} = \left(\nabla_j\, a^i\right) Э_i = b^i\, Э_i$, компоненты которого – ковариантные производные компонент исходного тензора:

$$b^i = \nabla_j\, a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + a^k\, \Gamma_{k\,j}^{i} .$$

Тогда компоненты результирующего вектора запишутся так

$$b^1 = \frac{\partial a^1}{\partial x^j} + a^1\, \Gamma_{1j}^{1} + a^2\, \Gamma_{2j}^{1} + a^3\, \Gamma_{3j}^{1} = \frac{\partial a^1}{\partial x^j},$$
$$b^2 = \frac{\partial a^2}{\partial x^j} + a^1\, \Gamma_{1j}^{2} + a^2\, \Gamma_{2j}^{2} + a^3\, \Gamma_{3j}^{2} = a^1\, \Gamma_{1j}^{2},$$
$$b^3 = \frac{\partial a^3}{\partial x^j} + a^1\, \Gamma_{1j}^{3} + a^2\, \Gamma_{2j}^{3} + a^3\, \Gamma_{3j}^{3} = \frac{\partial a^3}{\partial x^j}.$$

В частности, при $j = 1$ получим

$$b^1 = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} = \frac{\partial\left(2r^2 + 3z\right)}{\partial r} = 4r, \quad b^2 = a^1\, \Gamma_{11}^{2} = 0, \quad b^3 = \frac{\partial a^3}{\partial x^j} = \frac{\partial\left(5r + 2z^2\right)}{\partial r} = 5$$

и результирующий тензор первого ранга принимает вид $\vec{b} = 4r\, Э_1 + 5Э_3$.

Аналогично, при $j = 2$ получим $\vec{b} = \left(2r + 3z/r\right) Э_2$. При $j = 3$ – $\vec{b} = 3Э_1 + 4z\, Э_3$.

Задача 5.3. Напряженное состояние в любой точке сплошной среды задано тензором

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3xy & 5y^2 & 0 \\ 5y^2 & 0 & 2z \\ 0 & 2z & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $P\left(2;1;\sqrt{3}\right)$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $y^2 + z^2 = 4$.

Решение. Компоненты напряжения в точке P принимают значения

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор нормали в точке P определяется вектором

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\left(y^2 + z^2 - 4\right) = 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Следовательно, в точке P: $\nabla\varphi = 2\vec{j} + 2\sqrt{3}\vec{k}$.

Тогда единичный вектор нормали в точке P есть $\vec{n} = \vec{j}/2 + \sqrt{3}\vec{k}/2$. Вектор напряжения на площадке, перпендикулярной к $\vec{n}$ в точке P, равен

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Дополнительные задачи

Задача 5.4. Вывести формулу ковариантного дифференцирования ковариантных по обоим индексам компонент тензора второго ранга.

Задача 5.5. Вывести формулу ковариантного дифференцирования тензора третьего ранга $\overset{\Rightarrow}{T} = T^{\alpha\beta\cdot}_{\cdot\cdot\gamma}\,Э_\alpha\,Э_\beta\,Э^\gamma$.

Задача 5.6. Исходя из определения базисных векторов, доказать, что $\Gamma^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{ji}$.

Задача 5.7. В цилиндрической системе координат найти ковариантные производные от ковариантных компонент вектора $\vec{W}$:

$$W_1 = 3x^1\sin x^2,\; W_2 = \left(x^1\right)^2\cos x^3,\; W_3 = \left(x^3\right)^2\ln x^1.$$

Задача 5.8. Вычислить ковариантные производные от компонент вектора в сферической системе координат:

$$w^1 = 2x^1\cos x^3,\quad w^2 = \ln x^1,\quad w^3 = \operatorname{tg} x^2.$$

Задача 5.9. Доказать равенства:
а) $\nabla_i\left(w^\alpha+v^\alpha\right)=\nabla_i\, w^\alpha+\nabla_i\, v^\alpha$, б) $\nabla_i\left(w^\alpha v^\beta\right)=\left(\nabla_i\, w^\alpha\right)v^\beta+w^\alpha\,\nabla_i\, v^\beta$.

Задача 5.10. В цилиндрической системе координат найти ковариантные производные от ковариантных компонент тензора:

$$\left(T_{ij}\right)=\begin{pmatrix} x^1\ln x^3 & 0 & x^1\operatorname{tg}x^2 \\ 0 & x^3\operatorname{ctg}x^2 & 0 \\ x^1\operatorname{tg}x^2 & 0 & \left(x^1\right)^2\sin x^2 \end{pmatrix}.$$

Задача 5.11. Найти производную функции $\lambda=x^2+2\,x\,y-z^2$ по направлению, заданному единичным вектором $\vec{n}=\left(2/7;-3/7;-6/7\right)$.

Задача 5.12. Задано скалярное поле температуры $T=T\left(x,y,z\right)=x\,y-5\,z$. В точке пространства $\left(x=2,y=3,z=0\right)$ определить максимально и минимально возможные значения ее производной по направлению.

Задача 5.13. В точке пространства с координатами $x=y=z=0$ заданы значение давления $p=1$ и градиент давления $\operatorname{grad}p=1\vec{i}+3\,\vec{j}+4\,\vec{k}$. Определите приближенно значение давления в точке, расположенной в малой окрестности данной точки и имеющей координаты $x=0.01$, $y=0.02$, $z=-0.01$.

Задача 5.14. Найти выражение ковариантной производной от компоненты $T^{\alpha\cdot}_{\cdot\beta}$ тензора 2-го ранга со смешанным строением индексов.

Задача 5.15. Напряженное состояние в любой точке сплошной среды задано тензором

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 3x^2 & 4\,x\,y & -5\,z \\ 4\,x\,y & 0 & 0 \\ -5\,z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить вектор напряжения в точке $P\left(\sqrt{2};2;1\right)$ на площадке, касательной в этой точке к цилиндрической поверхности $y^2+2\,x^2=8$.

ЗАНЯТИЕ 6. ОСНОВНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основные формулы и определения

Градиент (тензорное произведение набла): $\operatorname{grad}(\ ) = \vec{\nabla} \circ (\ )$,

$$\operatorname{grad}\psi\left(x^i\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} Э^i \tag{6.1}$$

Дивергенция (скалярное произведение набла): $\operatorname{div}(\ ) = \vec{\nabla} \cdot (\ )$,

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^k \Gamma^i_{k\,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(a^\alpha \sqrt{g}\right)}{\partial x^\alpha}. \tag{6.2}$$

Ротор (векторное произведение набла): $\operatorname{rot}(\ ) = \vec{\nabla} \times (\ )$.

$$\left(\operatorname{rot}\vec{V}\right)^k = \varepsilon^{k\,i\,j} \nabla_i V_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\nabla_i V_j - \nabla_j V_i\right), \tag{6.3}$$

где i, j, k образуют циклическую перестановку (1,2,3).

Лапласиан: $\Delta(\ ) = \operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(\ )\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \circ (\ )\right)$.

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}\,g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}\,g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}\,g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)\right]$$

Псевдотензор Леви-Чевиты:

$$\varepsilon^{i\,j\,k} = \begin{cases} 1/\sqrt{g}\text{, если } (i, j, k) - \text{четная перестановка,} \\ -1/\sqrt{g}\text{, если } (i, j, k) - \text{нечетная перестановка,} \\ 0\text{, если индексы повторяются} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{i\,j\,k} = \begin{cases} \sqrt{g}\text{, если } (i, j, k) - \text{четная перестановка,} \\ -\sqrt{g}\text{, если } (i, j, k) - \text{нечетная перестановка,} \\ 0\text{, если индексы повторяются} \end{cases}$$

Векторное поле $\vec{a}\left(x^i\right)$ называется *потенциальным*, если существует такое скалярное поле $\varphi\left(x^i\right)$, что $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$.

Векторное поле $\vec{a}\left(x^i\right)$ называется *безвихревым*, если всюду $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$.

Векторное поле является *соленоидальным*, если его поток через любую поверхность равен нулю, что равносильно условию $\operatorname{div}\vec{a} = 0$.

Примеры решения задач

Задача 6.1. Записать градиент скалярной функции в декартовой и сферической системе координат.

Решение. Для декартовой системы координат:

$$\operatorname{grad}\psi\left(x,y,z\right)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}.$$

Для сферической системы координат:

$$\operatorname{grad}\psi\left(r,\varphi,\lambda\right)=\frac{\partial\psi}{\partial r}Э^1+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}Э^2+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}Э^3.$$

Задача 6.2. Записать дивергенцию вектора в декартовой и сферической системе координат.

Решение. Согласно (6.2) для декартовой системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(x,y,z\right)=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Для сферической системы координат:

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(r,\varphi,\lambda\right)=\frac{\partial a^1}{\partial r}+\frac{\partial a^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a^3}{\partial\lambda}+\frac{1}{r^2\cos\lambda}\left(a^1\,2r\cos\lambda-a^3r^2\sin\lambda\right)=$$

$$=\frac{\partial a^1}{\partial r}+\frac{\partial a^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a^3}{\partial\lambda}+\frac{2a^1}{r}-a^3\operatorname{tg}\lambda$$

Задача 6.3. Выразить дивергенцию вектора через его физические компоненты в сферической системе координат.

Решение. Используя результат задачи 6.2 и соотношение (3.2), получим

$$\operatorname{div}\vec{a}\left(r,\varphi,\lambda\right)=\frac{\partial a_r}{\partial r}+\frac{1}{r\cos\lambda}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{2a_r}{r}-\frac{a_\lambda}{r}\operatorname{tg}\lambda.$$

Здесь физические компоненты векторов обозначены символами соответствующих координат вместо нумерации и подписи «*физ*».

Задача 6.4. Для заданного поля скоростей сплошной среды

$$v_x=x^2,\quad v_y=-3y,\quad v_z=0$$

вычислить изменение содержания данного вещества за единицу времени в объеме

$$V=\left\{x\in\left[1,2\right]\right\}\cup\left\{y\in\left[2,4\right]\right\}\cup\left\{z\in\left[3,15\right]\right\}.$$

Решение. Изменение содержания вещества сплошной среды за единицу времени в объеме V есть разность между втекшим и вытекшим через ограничивающую объем поверхность количеством данного вещества. Это изменение может быть вычислено с использованием формулы Остроградского-Гаусса:

$$-dM = \int_S v_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV .$$

В рамках заданных условий это уравнение запишется в виде:

$$-dM = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} (2x-3)\, dxdydz = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(x^2 - 3x \right)\Big|_{x_1}^{x_2} dydz = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} (-2+2) dydz = 0 .$$

Таким образом, для заданного поля скоростей в любой части полосы, ограниченной плоскостями $x=1$ и $x=2$, изменения количества вещества не происходит.

Дополнительные задачи

Задача 6.5. Записать лапласиан скалярной функции в декартовой и сферической системах координат.

Задача 6.6. Выразить ротор вектора через частные производные его компонент. Записать ротор вектора в декартовой системе координат.

Задача 6.7. Записать дивергенцию вектора через его физические компоненты в цилиндрической системе координат.

Задача 6.8. Записать физические компоненты градиента скалярной функции в сферической и в цилиндрической системах координат.

Задача 6.9. Записать лапласиан скалярной функции в цилиндрической системе координат.

Задача 6.10. Показать, что тензор с компонентами $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}\, a^j$ антисимметричен.

Задача 6.11. Найти физические компоненты векторов $\operatorname{grad}\psi, \operatorname{rot}\vec{V}$ и вычислить $\operatorname{div}\vec{V}, \Delta\psi$ в цилиндрической системе координат, если

$$\psi = r^2 + \sin\varphi,\ \vec{V} = z \operatorname{tg}\varphi\, Э_1 + 4r^2 z\, Э_2 + r\sin\varphi\, Э_3 .$$

Задача 6.12. Найти физические компоненты векторов $\operatorname{grad}\psi, \operatorname{rot}\vec{V}$ и вычислить $\operatorname{div}\vec{V}, \Delta\psi$ в сферической системе координат, если

$$\psi = \ln r + \cos\lambda,\ \vec{V} = r\cos\lambda\, Э_1 + \sin\varphi \operatorname{tg}\lambda\, Э_2 + r^2 \cos\varphi\, Э_3 .$$

Задача 6.13. Для заданного поля скоростей сплошной среды

$$v_x = 0, \quad v_y = y^2, \quad v_z = 3z$$

вычислить изменение содержания данного вещества за единицу времени в объеме

$$V = \{ x \in [0,\, 4] \} \cup \{ y \in [1,\, 2] \} \cup \{ z \in [1,\, 10] \} .$$

Задача 6.14. Мгновенное поле скоростей твердого тела можно записать в виде $\vec{v} = \vec{a} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$, где векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависят от положения рассматриваемой частицы. Показать, что ротор этих скоростей равен $2b^i$, а дивергенция равна нулю.

Задача 6.15. Найти выражение ротора вектора скорости $\vec{v} = \vec{v}(r,\varphi)$ для плоского течения в полярных координатах и записать условие несжимаемости $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

Задача 6.16. Упростить выражения а) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f$, б) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}$.

Задача 6.17. Доказать, что всякое потенциальное векторное поле является безвихревым.

Задача 6.18. Векторное поле $\vec{a}$ в сферических координатах имеет компоненты

$$a^1 = \frac{2k\cos x^2}{\left(x^1\right)^3},\ a^2 = \frac{k\sin x^2}{\left(x^1\right)^2},\ a^3 = 0.$$

Доказать, что это поле потенциально и соленоидально, и найти его потенциал.

Задача 6.19. Найти решения уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ в сферических координатах, если функция f зависит лишь от одной сферической координаты x^1, x^2 или x^3. Рассмотреть все три случая.

ЗАНЯТИЕ 7. ЛАГРАНЖЕВО И ЭЙЛЕРОВО ОПИСАНИЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. МАТЕРИАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВРЕМЕНИ

Основные формулы и определения

Лагранжева (материальная) система координат ξ^i связана с деформирующейся средой.

Эйлерова (лабораторная) система координат x^i связана с наблюдателем. Если какое-либо свойство сплошной среды описано с помощью переменных Лагранжа (Эйлера), то имеем соответственно лагранжево (эйлерово) описание. Лагранжевы координаты фиксированных материальных частиц остаются неизменными в течение всего процесса движения сплошной среды.

Материальная (полная, индивидуальная, субстанционная) производная

$$\frac{d[\ ]}{dt} = \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \xi^i = const}} \frac{[\ ](t+\Delta t)-[\ ](t)}{\Delta t} = \left.\frac{\partial[\ ]}{\partial t}\right|_{\xi^i = const} = \frac{\partial}{\partial t}[\ ]+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)[\ ].$$

Примененный к вектору скорости $\vec{V}$, оператор материальной производной имеет вид:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\mathrm{grad}\vec{V} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+V^i\nabla_i\vec{V}\,.$$

Контравариантные компоненты вектора ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ равны

$$a^j = \frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\nabla_i V^j = \frac{\partial V^j}{\partial t}+V^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}+V^iV^\beta\Gamma^j_{\beta i} = \frac{dV^j}{dt}+V^iV^\beta\,\Gamma^j_{\beta i}\,.$$

Примеры решения задач

Задача 7.1. Дано описание движения сплошной среды (континуума) $x^1 = \xi^1 e^t+\xi^3\left(e^t-1\right)$, $x^2 = \xi^3\left(e^t-e^{-t}\right)+\xi^2$, $x^3 = \xi^3$. а) С какой точки зрения описано движение? б) Убедиться, что лагранжевы координаты точек сплошной среды совпадают со значениями эйлеровых координат в началаный момент времени. в) Выразить лагранжевы координаты через эйлеровы.

Решение. а) Лагранжево описание. б) При $t = 0$ $x^1 = \xi^1, x^2 = \xi^2, x^3 = \xi^3$. в) $\xi^1 = x^1 e^{-t}-x^3\left(1-e^{-t}\right)$, $\xi^2 = x^2-x^3\left(e^t-e^{-t}\right)$, $\xi^3 = x^3$.

Задача 7.2. Определить компоненты вектора скорости точки сплошной среды как функции а) лагранжевых, б) эйлеровых координат и времени. Движение сплошной среды задано соотношениями задачи 7.1.

Решение.

а)
$$V^1=\left.\frac{\partial x^1}{\partial t}\right|_{\xi^i=const}=\xi^1 e^t+\xi^3 e^t=\left(\xi^1+\xi^3\right)e^t,$$
$$V^2=\left.\frac{\partial x^2}{\partial t}\right|_{\xi^i}=\xi^3\left(e^t+e^{-t}\right),\quad V^3=\left.\frac{\partial x^3}{\partial t}\right|_{\xi^i}=0.$$

б) учитывая эйлерово описание движения, выразим ξ^i через x^i и t .В итоге имеем:

$$V^1=x^1+x^2,\quad V^2=x^3\left(e^t+e^{-t}\right),\quad V^3=0.$$

Задача 7.3. Записать компоненты вектора $\vec{a}=\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ в сферической системе координат.

Решение. Используя найденные ранее коэффициенты связности, получим:

$$a^1=\frac{\partial V^1}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^1}{\partial r}+V^2\frac{\partial V^1}{\partial \varphi}+V^3\frac{\partial V^1}{\partial \lambda}-r\cos^2\lambda\left(V^2\right)^2-r\left(V^3\right)^2,$$
$$a^2=\frac{\partial V^2}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^2}{\partial r}+V^2\frac{\partial V^2}{\partial \varphi}+V^3\frac{\partial V^2}{\partial \lambda}+\frac{2V^1V^2}{r}-\frac{2V^2V^3}{tg\lambda},$$
$$a^3=\frac{\partial V^3}{\partial t}+V^1\frac{\partial V^3}{\partial r}+V^2\frac{\partial V^3}{\partial \varphi}+V^3\frac{\partial V^3}{\partial \lambda}+\frac{2V^1V^3}{r}+\frac{\left(V^2\right)^2\sin 2\lambda}{2}.$$

Дополнительные задачи

Задача 7.4. Какое из двух соотношений дает эйлерово описание преобразования: 1) $\xi^i=\xi^i\left(x^j,t\right)$ 2) $x^i=x^i\left(\xi^j,t\right)$.

Задача 7.5. Описание движения сплошной среды, занимавшей первоначально куб с единичной стороной, дается выражениями задачи 7.1.

а) Какое движение совершает точка A (рис. 3)?

б) Какое движение совершает точка B (рис. 3)? (*Ответ:* деформация чистого сдвига).

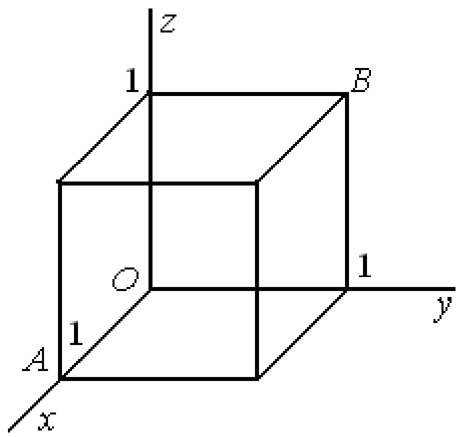

Рис. 3

Задача 7.6. Дано поле скоростей

$$V^1=\frac{x^1}{1+t},\quad V^2=\frac{2x^2}{1+t},$$

$V^3 = \dfrac{3x^3}{1+t}$. Найти компоненты ускорения $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ в эйлеровых и лагранжевых переменных. *Ответ*:

$$\left\{a^1 = 0,\, a^2 = \frac{2x^2}{(1+t)^2},\, a^3 = \frac{6x^3}{(1+t)^2}\right\},\ \left\{a^1 = 0,\, a^2 = 2\xi^2,\, a^3 = 6\xi^3(1+t)\right\}.$$

Задача 7.7. Поле скоростей в ДСК задано в переменных Лагранжа $V^1 = -\xi^2 e^{-t}$, $V^2 = -\xi^3$, $V^3 = 2t$. Найти компоненты ускорения в эйлеровой системе координат. *Ответ:* $a^1 = e^{-t}\left(x^2 + t x^3 - t^3\right)$, $a^2 = 0$, $a^3 = 2$.

Задача 7.8. Движение континуума задано уравнениями: $x^1 = A + \dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda}\sin\left[\lambda(A+\omega t)\right]$, $x^2 = -B - \dfrac{e^{-B\lambda}}{\lambda}\cos\left[\lambda(A+\omega t)\right]$, $x^3 = \xi^3$. Доказать, что траектории всех частиц – окружности, а величина скорости постоянна. Определить связь между A и B и лагранжевыми координатами ξ^1, ξ^2, совпадающими с $x^1(0)$, $x^2(0)$.

Задача 7.9. Дан закон движения сплошной среды $x = \xi^1$, $y = e^t\left(\xi^2 + \xi^3\right)/2 + e^{-t}\left(\xi^2 - \xi^3\right)/2$, $z = e^t\left(\xi^2 + \xi^3\right)/2 - e^{-t}\left(\xi^2 - \xi^3\right)/2$. Определить компоненты скорости в эйлеровой и лагранжевой форме.

Задача 7.10. Задано поле перемещений в сопутствующей системе координат $\vec{u} = \left(\xi^1 - \xi^2\right)^2 Э^1 + \left(\xi^2 + \xi^3\right)^2 Э^2 - \xi^1\xi^2 Э^3$, являющейся в начальный момент времени декартовой прямоугольной. При ограничениях, принятых в теории малых деформаций, определите тензор деформаций и тензор поворота в индивидуальной точке с лагранжевыми координатами $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 2$, $\xi^3 = -1$.

Задача 7.11. Вектор перемещения задан в лагранжевых координатах $u^1 = \xi^1\left(e^{at} - 1\right)$, $u^2 = \xi^2\left(e^{bt} - 1\right)$, $u^3 = \xi^3\left(e^{ct} - 1\right)$. Найти вектор скорости $\vec{v}$ как функцию эйлеровых координат x^i.

Задача 7.12. Поле скоростей задано в ДСК вектором $\vec{v} = \left(x^1\right)^2 t\, Э_1 + x^2 t^2\, Э_2 + x^1 x^3\, Э_3$. Определить скорость и ускорение частицы, находящейся в момент $t = 1$ в точке $P(1,3,2)$.

ЗАНЯТИЕ 8. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ. ПЕРЕМЕЩЕНИЕ. ДЕФОРМАЦИЯ

Основные формулы и определения

Компоненты *тензора малых деформаций* могут быть выражены через компоненты вектора перемещений u_j:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right). \tag{8.1}$$

Уравнения совместности в случае бесконечно малых деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^k \, \partial x^m} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{km}}{\partial x^i \, \partial x^j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x^j \, \partial x^m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jm}}{\partial x^i \, \partial x^k} = 0 . \tag{8.2}$$

Тензор градиента скорости определяется матрицей, составленной из частных производных компонент вектора скорости сплошной среды $\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)$.

Симметричная часть тензора градиента скорости представляет собой *тензор скоростей деформаций*. Антисимметричная часть – *тензор завихренности*.

Вихревой линией называется такая линия, касательная к которой в каждой точке движущейся среды направлена по вектору вихря $\vec{q} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$. Уравнения вихревых линий имеют вид $dx^1/q^1 = dx^2/q^2 = dx^3/q^3$.

Примеры решения задач

Задача 8.1. Для некоторого момента времени задано векторное поле скорости течения жидкости в декартовой системе координат $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = x\vec{i} - 3yz\vec{j} + 2z\vec{k}$. Что можно сказать о характере движения частицы среды, находящейся в данный момент времени в точке пространства с координатами $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$?

Решение. Поле скоростей позволяет определить поступательную, деформационную и вращательную составляющие движения любой частицы среды. Скорость движения данной частицы определяется подстановкой координат частицы в векторное поле скорости: $\vec{v} = \vec{i} - 18\vec{j} + 6\vec{k}$.

Согласно физическому смыслу дивергенции вектора, для векторного поля скорости течения жидкости (при отсутствии в потоке внутренних источников массы) $\operatorname{div}\vec{v}$ определяет относительную скорость изменения объема бесконечно малой индивидуальной частицы:

$$\lim_{V\to 0}\frac{\dot V}{V}=\operatorname{div}\vec v=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial(-3yz)}{\partial y}+\frac{\partial(2z)}{\partial x}=-3z+3.$$

Для данной частицы $\operatorname{div}\vec v=-6<0$, что говорит о проявлении в данный момент времени тенденции к сжатию частицы, уменьшению ее объема и увеличению плотности.

Согласно физическому смыслу ротора вектора, для векторного поля скорости течения жидкости $\operatorname{rot}\vec v$ определяет мгновенную угловую скорость $\vec\omega$ вращательного движения бесконечно малой индивидуальной частицы:

$$2\vec\omega=\operatorname{rot}\vec v=\left[\frac{\partial(2z)}{\partial y}-\frac{\partial(-3yz)}{\partial z}\right]\vec i-\left[\frac{\partial(2z)}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}\right]\vec j+$$
$$+\left[\frac{\partial(-3yz)}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right]\vec k=3y\vec i.$$

Для данной частицы $2\vec\omega=6\vec i$ – ось вращения параллельна оси Ox, вращение происходит против хода часовой стрелки по отношению к этой оси.

Зависимость величин $\vec v, \operatorname{div}\vec v, \operatorname{rot}\vec v$ от координат говорит о том, что частицы деформируемой среды в общем случае движутся с разными скоростями, испытывают различные деформации и вращательные движения.

Задача 8.2. Некоторое течение задано в декартовой системе координат полем скоростей $v^1=0$, $v^2=A\left(x^1x^2-\left(x^3\right)^2\right)e^{-Bt}$, $v^3=A\left(\left(x^2\right)^2-x^1x^3\right)e^{-Bt}$, где A, B – константы. Найти тензор градиента скорости и вычислить тензор скоростей деформации и тензор завихренности в точке $P(1, 0, 3)$ в момент $t=0$.

Решение. Тензор градиента скорости равен $\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right)^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}0&0&0\\x^2&x^1&-2x^3\\-x^3&2x^2&-x^1\end{pmatrix}^{\mathrm T}Ae^{-Bt}$. Этот тензор можно вычислить в точке P в момент $t=0$. Его симметричная и антисимметричная составные части являются тензорами скоростей деформации и завихренности, соответственно:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&A&-6A\\-3A&0&-A\end{pmatrix}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}0&0&-1.5A\\0&A&-3A\\-1.5A&-3A&-A\end{pmatrix}^{\mathrm T}+\begin{pmatrix}0&0&1.5A\\0&0&-3A\\-1.5A&3A&0\end{pmatrix}^{\mathrm T}.$$

Задача 8.3. Доказать, что для поля скоростей $\vec v=\left(Ax^3-Bx^2\right)Э_1+\left(Bx^1-Cx^3\right)Э_2+\left(Cx^2-Ax^1\right)Э_3$ вихревые линии являются прямыми. Написать их уравнения. Доказать, что такое поле скоростей представляет вращение абсолютно твердого тела, так как для него тензор скоростей деформаций равен нулю.

Решение. По определению вектора вихря $\vec{q} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\left(C\,Э_1 + A\,Э_2 + B\,Э_3\right)$. Тогда уравнения вихревых линий будут $A dx^3 = B dx^2$, $B dx^1 = C dx^3$, $C dx^2 = A dx^1$. Интегрируя их, найдем уравнения вихревых линий в конечной форме $x^3 = B x^2 / A + K_1$, $x^1 = C x^3 / B + K_2$, $x^2 = A x^1 / C + K_3$, где K_i – постоянные интегрирования.

Вычислим матрицу тензора градиента скорости: $\left(\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B & A \\ B & 0 & -C \\ -A & C & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку этот тензор антисимметричен в любой точке сплошной среды, то его симметричная составляющая (тензор скоростей деформаций) представляет собой нулевой тензор также во всех точках сплошной среды.

Задача 8.4. Считая деформации малыми, записать выражения для геометрических компонент тензора деформаций в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Решение*:* а) декартова с.к.:

$$\varepsilon^{xx} = \frac{\partial u^x}{\partial x}, \quad \varepsilon^{yy} = \frac{\partial u^y}{\partial y}, \quad \varepsilon^{zz} = \frac{\partial u^z}{\partial z},$$

$$\varepsilon^{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^x}{\partial y} + \frac{\partial u^y}{\partial x}\right), \quad \varepsilon^{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^x}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial x}\right), \quad \varepsilon^{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^y}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial y}\right),$$

б) цилиндрическая с.к.

$$\varepsilon^{rr} = \frac{\partial u^r}{\partial r}, \quad \varepsilon^{\varphi\varphi} = \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + r u^r, \quad \varepsilon^{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} - \frac{2u^\varphi}{r}\right),$$

$$\varepsilon^{zz} = \frac{\partial u^z}{\partial z}, \quad \varepsilon^{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial \varphi}\right), \quad \varepsilon^{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^r}{\partial z} + \frac{\partial u^z}{\partial r}\right),$$

в) сферическая с.к.

$$\varepsilon^{rr} = \frac{\partial u^r}{\partial r}, \quad \varepsilon^{\varphi\varphi} = \frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + u^\lambda \sin\lambda \cos\lambda + r u^r \sin^2\lambda,$$

$$\varepsilon^{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} - \frac{2u^\varphi}{r}\right), \quad \varepsilon^{\lambda\lambda} = \frac{\partial u^\lambda}{\partial \lambda} + r u^r,$$

$$\varepsilon^{\varphi\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^\varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial u^\lambda}{\partial \varphi}\right) - \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} u^\varphi, \quad \varepsilon^{r\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^r}{\partial \lambda} + \frac{\partial u^\lambda}{\partial r} - \frac{2u^\lambda}{r}\right).$$

Задача 8.5. Деформированное состояние сплошной среды задано матрицей тензора деформаций $\left(\varepsilon_{ij}\right)=\begin{pmatrix} \left(x^1\right)^2 & \left(x^2\right)^2 & x^1 x^3 \\ \left(x^2\right)^2 & x^3 & \left(x^3\right)^2 \\ x^1 x^3 & \left(x^3\right)^2 & 5 \end{pmatrix}$. Удовлетворяются ли уравнения совместности?

Решение. Из 81 уравнения совместности только шесть различны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\left(\partial x^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\left(\partial x^1\right)^2}=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\left(\partial x^3\right)^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\left(\partial x^2\right)^2}=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x^2 \partial x^3}, \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\left(\partial x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\left(\partial x^3\right)^2}=2\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x^3 \partial x^1}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(-\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3}\right)=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2 \partial x^3}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1}-\dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3}\right)=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^3 \partial x^1}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x^1}+\dfrac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x^3}\right)=\dfrac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^1 \partial x^2}. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой в них заданных компонент матрицы деформаций можно удостовериться, что уравнения совместности выполняются.

Дополнительные задачи

Задача 8.6. Дано поле перемещений $u^1=3x^1\left(x^2\right)^2$, $u^2=2x^3 x^1$, $u^3=\left(x^3\right)^2-x^1 x^2$. Определить тензор деформаций $\varepsilon_{ij}\left(x^1,x^2,x^3\right)$ и проверить, удовлетворяются ли условия совместности.

Ответ: $\left(\varepsilon_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 3\left(x^2\right)^2 & 3x^1x^2+x^3 & -x^2/2 \\ 3x^1x^2+x^3 & 0 & x^1/2 \\ -x^2/2 & x^1/2 & 2x^3 \end{pmatrix}$, да.

Задача 8.7. Некоторое течение задано полем скоростей в декартовой системе координат $v^1=0$, $v^2=A\left(x^1x^2-\left(x^3\right)^2\right)e^{-Bt}$, $v^3=A\left(\left(x^2\right)^2-x^1 x^3\right)e^{-Bt}$, где A, B – константы. Найти градиент скорости $\partial v^i \big/ \partial x^j$ для этого движения и вычислить компоненты тензора скоростей деформации e^{ij} и тензора скоростей поворота w^{ij} в точке $P(1,0,3)$ в момент времени $t=0$. Будет ли сплошная среда сжиматься при таком движении?

Задача 8.8. Дано стационарное поле скоростей $\vec{v}=\left[\left(x^1\right)^3-x^1\left(x^2\right)^2\right]Э_1+\left[\left(x^1\right)^2x^2+x^2\right]Э_2$. Найти скорости относительно точки $P(1,1,3)$ частиц в точках $Q_1(1,0,3)$, $Q_2\left(1,{}^3\!/_4,3\right)$, $Q_3\left(1,{}^7\!/_8,3\right)$, отнесенные к расстоянию от этих точек до точки P. К чему стремятся отнесенные скорости точек Q_i при стремлении последних к точке P?

Задача 8.9. Что можно сказать об изменении объема и формы индивидуальной частицы сплошной среды, деформированное состояние которой характеризуется тензором с матрицей

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -5\\ 3 & -5 & -5\end{pmatrix}?$$

Задача 8.10. Однородное тело подвергается деформации сдвига так, что все плоскости, параллельные плоскости x_1Ox_2, переходят в себя и все точки тела перемещаются в направлении единичного вектора $\vec{l}=l^1\vec{e}_1+l^2\vec{e}_2$, параллельного этой плоскости. Найти тензор малых деформаций тела.

Задача 8.11. Малая деформация тела задается тензором

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}\right)=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 1 & 6 & 0\\ -5 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot 10^{-6}.$$

а) Определить тензор чистой деформации и тензор поворота.

б) Найти главные коэффициенты и главные направления деформации тела.

в) Найти направление оси вращения и угол поворота тела.

ЗАНЯТИЕ 9. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ. НАПРЯЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Основные формулы и определения

σ_{ij} – компоненты *тензора напряжений* $\overset{\Rightarrow}{\Sigma}$ сплошной среды.

Вектор полного напряжения $\vec{\sigma}$ на площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ вычисляется по формуле

$$\vec{\sigma} = \overset{\Rightarrow}{\Sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} Э^i Э^j \cdot n^k Э_k = \sigma_{ij} n^j Э^i = \sigma_{ni}\, Э^i . \tag{9.1}$$

Нормальное σ_n и *касательное* τ напряжения в любой точке сплошной среды на площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ определяются тензором напряжений в этой точке и ориентацией площадки:

$$\sigma_n = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma_{ni}\, Э^i \cdot n^k Э_k = \sigma_{ni}\, n^i , \tag{9.2}$$

$$\tau = \sqrt{\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} - \left(\sigma_n\right)^2} = \sqrt{\sigma_{ni}\, \sigma_n^i - \left(\sigma_n\right)^2} . \tag{9.3}$$

Главные площадки – площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Направления по нормали к этим площадкам определяют *главные направления* тензора напряжений, а нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются *главными напряжениями* или *главными значениями тензора напряжений*. Главные оси и главные значения тензора напряжений определяются по аналогии с принципом нахождения главных осей и главных значений тензора.

Среднее напряжение выражается через первый инвариант:

$$\sigma = \Sigma_{\mathrm{I}}/3 = \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)/3 .$$

Интенсивность напряжений выражается через первый и второй инварианты тензора напряжений:

$$\sigma_i = \sqrt{2}\sqrt{3\Sigma_{\mathrm{II}} - \Sigma_{\mathrm{I}}^2}\Big/2 .$$

Компоненты *шарового тензора напряжений*:

$$S_{\sigma\, ij} = \sigma\, g_{ij}$$

характеризуют лишь ту часть полных напряжений, которые вызваны изменением объема индивидуальных частиц и не связаны с их формоизменением.

Компоненты *девиатора напряжения* дополняют компоненты шарового тензора до полных напряжений:

$$D_{\sigma\, ij} = \sigma_{ij} - \sigma\, g_{ij}$$

и характеризуют лишь ту часть полных напряжений, которые связаны лишь с изменением формы индивидуальных частиц и не связаны с изменением их объема.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} + \rho b_i = 0. \tag{9.4}$$

Здесь ρ – плотность сплошной среды, b_i – компоненты вектора распределенных массовых сил.

Примеры решения задач

Задача 9.1. Напряженное состояние в некоторой точке задано тензором напряжений с матрицей $\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix}$. Определить константы a, b, c так, чтобы вектор напряжения на площадке с единичной нормалью $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} Э_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} Э_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} Э_3$ в декартовой системе координат был равен нулю.

Решение. По уравнению (9.1) для данных тензора напряжений и вектора нормали величина $\sigma_n{}^i = \sigma_{ij}\, n^j$ должна быть равна нулю. Запишем это в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \sigma & a\sigma & b\sigma \\ a\sigma & \sigma & c\sigma \\ b\sigma & c\sigma & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } \begin{cases} a + b = -1, \\ a + c = -1, \\ b + c = -1. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, получим $a = b = c = -1/2$. Тогда итоговая матрица тензора напряжений имеет вид:

$$\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \sigma & -\sigma/2 & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & \sigma & -\sigma/2 \\ -\sigma/2 & -\sigma/2 & \sigma \end{pmatrix}.$$

Задача 9.2. Напряженное состояние сплошной среды в декартовой прямоугольной системе координат задано полем тензора напряжений $\overset{\Rightarrow}{\Sigma}$ с компонентами $\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2xy & 3y^2 & 0 \\ 3y^2 & 0 & z \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}$. Определите вектор полного напряжения, нормальное и касательное напряжения в точке $P\left(2,1,\sqrt{3}\right)$ на площадке, касательной к цилиндрической поверхности $y^2+z^2=4$.

Решение. Компоненты напряжения в точке среды P принимают вид

$$\left(\sigma_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

а единичный вектор нормали в точке P к поверхности $\Phi\left(x,y,z\right)=y^2+z^2-4=0$ определяется вектором $\vec{n}=\dfrac{\operatorname{grad}\Phi}{\left|\operatorname{grad}\Phi\right|}$:

$$\operatorname{grad}\Phi\big|_P=\nabla\left(y^2+z^2-4\right)\Big|_P=\left(2y\,\vec{j}+2z\,\vec{k}\right)\Big|_P=2\,\vec{j}+2\sqrt{3}\,\vec{k},$$

$$\left|\operatorname{grad}\Phi\right|_P=4,\ \vec{n}=\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}.$$

В итоге вектор полного напряжения (9.1) определяется как

$$\vec{\sigma}=\left(\sigma_{11}n^1+\sigma_{12}n^2+\sigma_{13}n^3\right)\vec{i}+\left(\sigma_{21}n^1+\sigma_{22}n^2+\sigma_{23}n^3\right)\vec{j}+$$
$$+\left(\sigma_{31}n^1+\sigma_{32}n^2+\sigma_{33}n^3\right)\vec{k}=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k},$$

а нормальное (9.2) и касательное (9.3) напряжения будут равны:

$$\sigma_n=\sigma_{n1}n^1+\sigma_{n2}n^2+\sigma_{n3}n^3=\frac{3}{2}\cdot 0+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4},$$
$$\tau=\sqrt{\sigma_{ni}\,\sigma_n^i-\left(\sigma_n\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{4}.$$

Дополнительные задачи

Задача 9.3. Тензор напряжений в точке сплошной среды задан матрицей $\left(\sigma_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Определите вектор полного напряжения $\vec{\sigma}_n$ в данной точке на площадке, ориентация которой задается единичным вектором нормали $\vec{n}=\frac{2}{3}Э_1-\frac{2}{3}Э_2+\frac{1}{3}Э_3$.

Задача 9.4. Тензор напряжений в точке сплошной среды задан матрицей $\left(\sigma_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Определите нормальное напряжение в данной точке на площадке, ориентация которой задается единичным вектором нормали $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} Э_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} Э_2$.

Задача 9.5. Тензор напряжений в точке сплошной среды задан матрицей $\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Определите касательное напряжение в данной точке на площадке, ориентация которой задается единичным вектором нормали $\vec{n} = \frac{1}{3} Э_1 + \frac{\sqrt{8}}{3} Э_3$.

Задача 9.6. Какой вид должны иметь компоненты массовой силы b_i, если при распределении напряжений $\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3x^1 x^2 & 5\left(x^2\right)^2 & 0 \\ 5\left(x^2\right)^2 & 0 & 2x^3 \\ 0 & 2x^3 & \sigma \end{pmatrix}$ в декартовой системе координат всюду выполнены уравнения равновесия?

Ответ: $b_1 = -13x^2/\rho, \quad b_2 = -2/\rho, \quad b_3 = 0$.

Задача 9.7. Напряженное состояние во всех точках тела задано тензором напряжений с компонентами

$$\left(\sigma_{ij}\right) = \begin{pmatrix} \left(x^1\right)^2 x^2 & \left(1-\left(x^2\right)^2\right)x^1 & 0 \\ \left(1-\left(x^2\right)^2\right)x^1 & \left(\left(x^2\right)^3 - 3x^2\right)\Big/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(x^3\right)^2 \end{pmatrix}.$$

Определить: а) распределение массовых сил, если уравнения равновесия выполнены всюду, б) величины главных напряжений в точке $P\left(a, 0, 2\sqrt{a}\right)$, в) максимальное касательное напряжение в точке P, г) главные значения девиатора напряжений в точке P.

Ответ: а) $b_3 = -4x^3$, б) $\left\{a, -a, 8a\right\}$, в) $\pm 4.5a$, г) $\left\{-\frac{11a}{3}, -\frac{5a}{3}, \frac{16a}{3}\right\}$.

Задача 9.8. Однородное тело находится под действием растягивающего усилия, направленного вдоль единичного вектора $\vec{l} = l^i \vec{e}_i$ и равного $\sigma\, кг/см^2$. Определить тензор напряжения этого тела.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

<table>
<tr><td>Цилиндрическая система координат</td><td>Сферическая система координат</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метрическая матрица</td></tr>
<tr><td>$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$</td><td>$$\left(g_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^2\end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сопряженная метрическая матрица</td></tr>
<tr><td>$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\right)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$</td><td>$$\left(g^{ij}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(x^1\cos x^3\right)^{-2} & 0\\ 0 & 0 & \left(x^1\right)^{-2}\end{pmatrix}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Коэффициенты связности (ненулевые)</td></tr>
<tr><td>$$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=1/r,$$ $$\Gamma^1_{22}=-r$$</td><td>$$\Gamma^1_{22}=-x^1\cos^2 x^3,\ \Gamma^1_{33}=-x^1,$$ $$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=1/x^1,\quad \Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=-\operatorname{tg}x^3,$$ $$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=1/x^1,\quad \Gamma^3_{22}=\frac{1}{2}\sin\left(2x^3\right)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формулы преобразования при переходе к новой системе координат
$$Э_i=\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}Э'_j,\quad Э^j=\frac{\partial x^j}{\partial x'^m}Э'^m,\quad T_{ij}=\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^j}T'_{\alpha\beta},\quad T^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial x'^\beta}T'^{\alpha\beta}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формулы дифференцирования
$$\frac{\partial Э_\alpha}{\partial x^i}=\Gamma^k_{\alpha i}Э_k,\quad \frac{\partial Э^\alpha}{\partial x^i}=-\Gamma^\alpha_{ki}Э^k,\quad \nabla_i w^\alpha=\frac{\partial w^\alpha}{\partial x^i}+w^\beta\Gamma^\alpha_{\beta i},\quad \nabla_i w_\alpha=\frac{\partial w_\alpha}{\partial x^i}-w_\beta\Gamma^\beta_{\alpha i},$$
$$\nabla_i T^{\alpha\beta}=\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^i}+T^{k\beta}\Gamma^\alpha_{ki}+T^{\alpha k}\Gamma^\beta_{ki},\qquad \vec{\nabla}=\nabla_i Э^i,$$
$$\operatorname{grad}\psi=\vec{\nabla}\circ\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x^i}Э^i,\ \operatorname{div}\vec{a}=\vec{\nabla}\cdot\vec{a}=\nabla_i a^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^i}+a^k\,\Gamma^i_{ki}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(a^\alpha\sqrt{g}\right)}{\partial x^\alpha},$$
$$\operatorname{rot}(\ )=\vec{\nabla}\times(\ ),\ \left(\operatorname{rot}\vec{V}\right)^k=\varepsilon^{kij}\,\nabla_i V_j=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\nabla_i V_j-\nabla_j V_i\right)$$
$$\Delta\psi=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}\,g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}\,g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}\,g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\psi}{\partial x^3}\right)\right]$$</td></tr>
</table>

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1,2. М.: Наука. 1978.
2. Клоков В.В., Филатов Е.И., Насибулин В.Г. Механика сплошной среды. Методическая разработка практических занятий. Казань: Лаборатория оперативной полиграфии КГУ, 1987. – 45 с.
3. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: «Мир», 1974. – 320 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: «Наукова думка», 1972. – 148 с.
5. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов. – 3-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 376 с. (Прикладная механика сплошных сред: В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 1).
6. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 200 с.
7. Прокопьев В.П., Нустров В.С., Гасилов Г.Л. Механика сплошной среды в примерах и задачах. Учебное пособие. Свердловск: Изд-во Уральского гос. ун-та, 1979. – 108 с.
8. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды: Учебник для вузов. – М.: Наука, 2000. – 214 с.
9. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 352 с.
10. Коренев Г.В. Тензорное исчисление: Учебное пособие: Для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.
11. Денисова И.П. Введение в тензорное исчисление и его приложения. Учебное пособие. – 2-е изд., стер. – М.: Издательство УНЦ ДО, 2004. – 230 с.
12. Механика сплошных сред в задачах. Том 1: Теория и задачи. Под ред. М.Э. Эглит. – М.: «Московский Лицей», 1996. – 396 с.