Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

Классическая и современная геометрия

Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.)

МПГУ
Москва • 2019

ББК 22.36
К 36

К 36 **Классическая и современная геометрия:** Материалы Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) / под ред. А.В. Царева. — Москва: МПГУ, 2019. — 154 с.

Сборник содержит материалы участников Международной конференции «Классическая и современная геометрия», посвященной 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева, прошедшей в г. Москва 22–25 апреля 2019 г.

Адресован специалистам в различных областях геометрии.

СОДЕРЖАНИЕ

Вячеслав Тимофеевич Базылев

(15.03.1919 – 5.01.1989)

Вячеслав Тимофеевич родился в деревне Путятино Смоленской области в многодетной крестьянской семье. Он был в ней самым младшим, одиннадцатым ребенком. Окончив семилетнюю школу, в 1934 году В.Т. Базылев приехал в Москву и поступил в Московский педагогический техникум, после окончания которого в 1937 году был направлен на математический факультет Московского городского педагогического института им. В.П. Потемкина. В 1941 году В.Т. Базылев с отличием окончил институт.

С началом Великой Отечественной войны В.Т. Базылев был призван на военную службу. С августа 1941 года и по декабрь 1945 года он находился в Советской армии в войсках ПВО, участвовал в боях в Подмосковье и Прибалтике, был награжден медалями «За оборону Москвы», «За боевые заслуги», «За победу над Германией», а впоследствии — орденом Отечественной войны.

После демобилизации из армии в декабре 1945 года В.Т. Базылев начал свой педагогический путь работой па подготовительных курсах Московского энергетического института. Но уже в сентябре 1946 года он — ассистент кафедры геометрии Московского городского пединститута им. В.П. Потемкина, где под руководством зав. кафедрой профессора С.П. Финикова начал заниматься дифференциальной геометрией. Его первые работы посвящены изучению квазилапласовых преобразований многомерных многообразий проективного пространства. Эта же тема становится предметом его кандидатской диссертации, которая была им успешно защищена в 1953 году. В 1956 году В.Т. Базылеву было присвоено звание доцента.

После слияния Московского городского пединститута им. В.П. Потемкина в 1960 году с Московским государственным педагогическим институтом им. В.И. Ленина, В.Т. Базылев переходит на кафедру математической физики МГПИ им. В.И. Ленина и преподает на ней до 1968 года. Кроме геометрических курсов, он читает также математический анализ, высшую алгебру, теоретическую механику. В 1969 году В.Т. Базылев защищает докторскую диссертацию на тему «Основы теории многомерных сетей». Вскоре после защиты докторской диссертации ему было присвоено звание профессора. С 1968 года В.Т. Базылев заведует кафедрой геометрии Московского областного педагогического института им. Н.К. Крупской.

Важный вид деятельности В.Т. Базылева — его методическая работа. С 1969 года он — член и затем председатель комиссии по геометрии научно-методического совета по математике при Министерстве просвещения СССР. Он является соавтором всех программ по геометрии для педагогических институтов, которые издавались с 1970 года. В 1974, 1975 годах им совместно с К.И. Дуничевым и В.П. Иваницкой были изданы учебные пособия по геометрии для педагогических институтов. В 1980 году совместно с К.И. Дуничевым, В.П. Иваницкой и группой преподавателей Ярославского пединститута издан сборник задач по геометрии. В 1986–87 годах выходит новое учебное пособие по геометрии, написанное совместно с Л.С. Атанасяном. Эти книги имели большое значение для геометричского образования будущих учителей.

В 1975 году В.Т. Базылев возвращается в МГПИ им. В.И. Ленина и занимает должность профессора кафедры геометрии. Здесь он читает лекции по геометрии студентам, ведет занятия на факультете повышения квалификации, а также продолжает работу с аспирантами. Под его руководством работает научный семинар по дифференциальной геометрии на математическом факультете.

На основании спецкурсов, читаемых В.Т. Базылевым для аспирантов, в 1978 и 1979 годах им были изданы в МГПИ им. В.И. Ленина учебные пособия «Материалы по геометрии» (части 1 и 2), а также подготовлена к печати книга «Геометрия дифференцируемых многообразий».

Научные и педагогические заслуги В.Т. Базылева по достоинству оценены: он был награжден знаками «Отличник народного просвещения РСФСР», «Отличник просвещения СССР» и медалью им. К.Д. Ушинского.

В.Т. Базылев принимал активное участие в работе Всесоюзных геометрических конференций, был членом Бюро Всесоюзного геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева при ВИНИТИ АН СССР, членом Московского математического общества. Немаловажна его работа и в реферативном журнале «Математика», у истоков создания которого он стоял вместе с С.П. Финиковым.

В работах В.Т. Базылева, его учеников и сотрудников широкое и общее развитие получила теория многомерных сетей. В.Т. Базылевым была создана проективная теория многомерных сетей общего вида, изучены сети на гладких многообразиях евклидова и аффинного пространств, а также пространства аффинной связности. Теория сетей связывалась В.Т. Базылевым с теорией дифференцируемых отображений гладких многообразий.

Им было введено понятие графика отображения и изучены графики отображений различных типов. Работы В.Т. Базылева по теории многомерных сетей, а также по теории точечных отображений представляют собой ценный вклад в современную дифференциальную геометрию и имеют большое значение для ее дальнейшего развития.

ON THE FIRST QUADRATIC INTEGRALS OF GEODESIC EQUATION AND PROJECTIVE MOTIONS OF 5-DIMENSIONAL PSEUDO-RIEMANNIAN SPACES

A. V. Aminova, D. R. Khakimov

(Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia)

E-mail address: asya.aminova@kpfu.ru, dzhamoliddink@mail.ru

In this paper, five-dimensional h-spaces of the type $\{5\}$ are considered, their metrics and the corresponding first integrals of the geodesic equation are determined, and the Eisenhart equations are integrated using the method of the skew-normal frame (Aminova). It is easy to verify that the first quadratic integral of the geodesic equation is associated with each solution h of the Eisenhart equation

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

By symmetrizing this equation over all three indices, the result is

$$q_{(ij,k)} = 0,$$

where

$$q_{ij} \equiv 4\varphi g_{ij} - h_{ij}.$$

If γ is the geodesic in M^n, then the field of its tangent vectors $\dot{\gamma}$ is parallel along γ. Accordingly, the quantity $q(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ remains constant along each geodesic γ in M^n, i.e. $q(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ is the first integral of the geodesic equations.

HOMOGENEOUS Φ-SPACES, CANONICAL STRUCTURES AND THEIR APPLICATIONS

V. V. Balashchenko

(Belarusian State University, Minsk, Belarus)

E-mail address: balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by

Homogeneous Φ-spaces were first introduced by V.I. Vedernikov in 1964. Fundamental results for regular and, in particular, homogeneous k-symmetric spaces were obtained by N.A. Stepanov in 1967. These spaces were intensively studied by A. Ledger, A. Gray, J.A. Wolf, A.S. Fedenko, O. Kowalski and others. It turned out that homogeneous k-symmetric spaces G/H admit a commutative algebra $\mathcal{A}(\theta)$ of *canonical* structures [1]. The remarkable feature of these structures is that all of them are invariant with respect to both the Lie group G and the generalized "symmetries" of G/H. The classical example is the canonical almost complex structure J on homogeneous 3-symmetric spaces with its many applications (N.A. Stepanov, A. Gray, V.F. Kirichenko, S. Salamon and others). For $k > 3$ the algebra $\mathcal{A}(\theta)$ contains a large family of classical structures such as almost complex ($J^2 = -id$), almost product ($P^2 = id$), f-structures of K. Yano ($f^3 + f = 0$) and some others [1]. We dwell on several applications of canonical structures.

1) *The generalized Hermitian geometry* (V.F. Kirichenko, D. Blair, S. Salamon and others): canonical nearly Kähler, Killing, Hermitian metric f-structures on homogeneous k-symmetric spaces [2]; left-invariant nearly Kähler and Hermitian f-structures on some classes of nilpotent Lie groups (especially, on 2-step nilpotent and some filiform Lie groups); generalized (in various senses) Heisenberg groups in dimension 5, 6, and 8; heterotic strings.

2) *Homogeneous Riemannian geometry*: the Naveira classification of Riemannian almost product structures; canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces; the classes **F** (foliations), **AF** (anti-foliations), **TGF** (totally geodesic foliations); the Reinhart foliations [1].

3) *Elliptic integrable systems*: homogeneous k-symmetric spaces and associated elliptic integrable systems; a new generalization of almost Hermitian geometry; a new contribution to nonlinear sigma models (F. Burstall, I. Khemar [4]).

4) *Metallic structures*: so-called metallic structures (golden, silver and others), which are fairly popular (especially, golden structures) in many recent publications (M. Crasmareanu, C.-E. Hretcanu [5], A. Salimov, F. Etayo and others); canonical structures of metallic family on homogeneous k-symmetric spaces.

5) *Symplectic geometry*: canonical almost symplectic structures on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces.

REFERENCES

[1] Balashchenko V.V., Stepanov N.A. Canonical affinor structures of classical type on regular Φ-spaces // Sbornik: Mathematics. 1995. V. 186. P. 1551–1580.

[2] Balashchenko V.V., Samsonov A.S. Nearly Kähler and Hermitian f-structures on homogeneous k-symmetric spaces // Doklady Mathematics. 2010. V. 81. P. 386–389.

[3] Balashchenko V.V. Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces // J. Geom. and Phys. 2015. V. 87. P. 30–38.

[4] Khemar I. Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation // Memoirs of the AMS. 2012. V. 219, No. 1031. 217 P.

[5] Hretcanu C.-E., Crasmareanu M. Metallic structures on Riemannian manifolds // Revista de la Union Matematica Argentina. 2013. V. 54, No. 2. P. 15–27.

ON NEARLY KÄHLERIAN SIX-DIMENSIONAL SPHERE

G. Banaru

(Smolensk State University, Smolensk, Russia)

E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

The systematic geometrical researches on six-dimensional almost Hermitian (AH-) manifolds are performed since 1960s (E. Calabi, A. Gray). Later such prominent geometers as V.F. Kirichenko and K. Sekigawa wrote a number of important works on the subject. Nowadays this area is being successfully developed — annually dozens of articles concerning different geometrical aspects of six-dimensional almost Hermitian manifolds are published in quality mathematical journals. For example, only six-dimensional manifolds of one Gray-Hervella class of AH-manifolds — the class of nearly Kählerian manifold — got two surveys [1], [2] in one of recent issues of an established Russian journal and a special issue of a leading differential geometry journal [3].

This report is intended to give a short overview of the new results in researching nearly Kählerian six-dimensional manifold geometry (sphere S^6 and the product of spheres $S^3 \times S$). Besides the facts from the already mentioned sources [1], [2] and [3], new results will be present — recently published [4], [5] and absolutely new. In general, these results are connected with the geometry of almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian six-dimensional manifolds. We also demonstrate the connection between the new results and some already known facts about the geometry of six-dimensional AH-manifolds, which have been obtained in the last 30 years [6].

REFERENCES

[1] Банару М.Б. О шестимерной сфере с приближенно кэлеровой структурой // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 146. С. 3–16.

[2] Даурцева Н.А., Смоленцев Н.К. О почти комплексных структурах на шестимерных произведениях сфер // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 146. С. 17–47.

[3] (Non)-existence of complex structures on S^6 / Edited by Th. Friedrich. Differential Geometry and its Applications. 2018. V. 57. P. 1–146.

[4] Banaru M.B., Banaru G.A. A note on almost contact metric hypersurfaces of nearly Kählerian 6-sphere // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III. Mathematics, Informatics, Physics. 2015. V. 8(57), No. 2. P. 21–28.

[5] Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. Т. 85, №3. С. 107–114.

[6] Banaru M.B. Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 207, №3. C. 354–388.

FIBERINGS REDUCTION OF THE GRASSMANN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

O. Belova

(Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: olgaobelova@mail.ru

The Grassmann-like manifold $Gr^*(m,n)$ of centered m-planes is considered in projective space P_n. The principal bundle $G(Gr^*)$ is constructed over the manifold.

A normalization of the manifold $Gr^*(m,n)$ is made by the fields of the geometric patterns: a normal of the 1st type, i.e. $(n-m)$-plane N_{n-m} ($N_{n-m} \cap P_m^0 = A$), and a normal of the 2nd type, i.e. $(m-1)$-plane N_{m-1} contained in the centered plane P_m^0 and not passing through its centre A.

Dynamics of changes of fibering $G(Gr^*)$ is investigated at consecutive canonizations:

1) $A_\alpha \in N_{n-m}$ (the 1st canonization);

2) $A_a \in N_{m-1}$ (the 2nd canonization);

3) $A_\alpha \in N_{n-m}, \quad A_a \in N_{m-1}$ (full canonization).

We have proved the following theorems:

Theorem 1. *The principal bundle $G(Gr^*)$ at the first canonization is narrowed to the principal bundle $G^1(Gr^*)$ with a typical fiber is the stationary subgroup $G^1 \subset G$ of a pair of the affine additional planes $\{P_m, N_{n-m}\}$. There are four quotient bundles in the subbundle $G^1(Gr^*)$:*

1) *the quotient bundle of plane linear frames;*

2) *the quotient bundle of normal linear frames;*

3) *the quotient bundle of plane coaffine frames;*

4) *the quotient bundle of normal coaffine frames.*

Theorem 2. *The principal bundle $G(Gr^*)$ at the second canonization is narrowed to the principal bundle $G^2(Gr^*)$ with a typical fiber is the stationary subgroup $G^2 \subset G$ of the pair $\{A, N_{m-1}\}$. There are four quotient bundles in the subbundle $G^2(Gr^*)$:*

1) *the quotient bundle of plane linear frames;*

2) *the quotient bundle of normal linear frames;*

3) *the quotient bundle $H(Gr^*)$ with a typical fiber H is an affine quotient group;*

4) *the quotient bundle of normal coaffine frames.*

Theorem 3. *At simultaneous canonization three quotient bundles stand out from the narrowing $G^{1,2}(Gr^*)$ of the principal bundle $G(Gr^*)$, where $G^{1,2}$ is the stationary subgroup of the centered $(n-m)$-pair $\{N^*_{n-m}, N_{m-1}\}$*

1) *the quotient bundle of plane linear frames;*

2) *the quotient bundle of normal linear frames;*

3) *the quotient bundle of normal coaffine frames.*

TO THE GEOMETRY OF COMPLEXES OF m-DIMENSIONAL PLANES IN PROJECTIVE SPACE P^n CONTAINING A FINITE NUMBER OF DEVELOPABLE SURFACES

I. V. Bubyakin

(M. K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia)

E-mail address: bubyakiniv@mail.ru

Lets consider in the projective space P^n ρ-dimensional complexes C^ρ of m-dimensional planes containing a finite number of developable surfaces. The complex C^ρ of m-dimensional planes in projective space P^n contains a finite number of developable surfaces if dimensions of complex ρ, its generator m and projective space n are related by relation $\rho - 1 = m(n-m-1)$ [1].

The complex C^ρ in the Grassmann maping [2] corresponds to ρ-dimensional manifold V^ρ which lies on algebraic manifold $\Omega(m,n)$. This manifold $\Omega(m,n)$ is an image of the manifold $G(m,n)$ of m-dimensional planes in projective space P^n. At each point l corresponding to m-dimensional plane L of projective space P^n the variety V^ρ has a ρ-dimensional tangent plane T_lV^ρ. Projectivization of tangent plane T_lV^ρ with the center at point l is $(\rho-1)$-dimensional projective plane PT_lV^ρ. Various types of mutual arrangement of plane PT_lV^ρ with Segre invariant manifold $S_l(m,n-m-1)=P^m\times P^{n-m-1}$ which is asymptotic cone projectivization second order asymptotic directions $PB_l(2)$ correspond to different classes of complexes $C^\rho G(m,n)$.

In the projective space P^n consider ρ-dimensional complex C^ρ of m-dimensional planes L and $m+1$ different developable surfaces belonging to this complex C^ρ. Let these developable surfaces have a common characteristic $(m+1)$- dimensional plane tangent along the m-dimensional developable surface generator. We denote considered complexes by $C^\rho(1)$. Then the following theorem takes place.

Теорема 1. *The complex C^ρ of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces is a complex of $C^\rho(1)$ if and only if each of its m-dimensional generators belong to $(m+1)$-dimensional planes of some $m(n-m-2)$-dimensional manifold.*

The following theorem reveals an image of complexes $C^\rho(1)$ on algebraic manifold $\Omega(m,n)$:

Теорема 2. *The complex C^ρ of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces is a complex of $C^\rho(1)$ if and only if for each of its m-dimensional generators the intersection of PT_lV^ρ plane with Segre manifold $S_l(m,n-m-1)$ contains an α-forming of $S_l(m,n-m-1)$ manifold.*

REFERENCES

[1] Bubyakin I.V. About the structure of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces // Mathematical notes of NEFU. 2017. V. 24. P. 3–16.

[2] Akivis M.A. On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor (NS). 1982. V. 38. P. 73–282.

ABOUT COHOMOGENEITY ONE ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON THE $S^2 \times S^4$

N. Daurtseva

(Kemerovo State University, Kemerovo, Russia)

E-mail address: `natali0112@ngs.ru`

The action of a group G on a manifold M is said to be *cohomogeneity one* if the orbit space M/G is one-dimensional. M is called *an interval cohomogeneity one manifold* if the orbit space M/G is a closed interval $[0,T] \subset \mathbb{R}$. Such a manifold is determined by its group diagram $G \supset K^{\pm} \supset K$. Here K is called a *principal isotropy subgroup* and $K^{\pm}$ are *non-principal isotropy subgroups.* These groups satisfy the condition $K^{\pm}/K \simeq S^{l_{\pm}}$. The open set $M^* \subset M$ corresponding to the interior of M/G is diffeomorphic to $(0,T) \times G/K$, and $G/K^{\pm}$ are non-principal orbits corresponding to the boundary points of M/G. Conversely any collection of compact groups $G \supset K^{\pm} \supset K$, with $K^{\pm}/K \simeq S^{l_{\pm}}$ determines an interval cohomogeneity one manifold.

At [1, 2] authors classified all possible group diagrams of cohomogeneity one nearly Kähler 6-manifolds. The case of $S^2 \times S^4$, with group diagram

$$SU(2) \times SU(2) \supset U(1) \times SU(2),\ U(1) \times SU(2) \supset \Delta U(1)$$

was overlooked, but later was specified at [3] by Foscolo L. and Haskins M. In [3] authors have proven the existence of exotic nearly Kähler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ which are inhomogeneous but of cohomogeneity one. For $S^2 \times S^4$ was conjectured that it carries no cohomogeneity one nearly Kähler structure.

The $S^2 \times S^4$ is a special manifold for a number of reasons. Firstly this is in list of almost complex even-dimensional spheres products [4], and the unique one with non almost complex multiplier S^4. It is diffeomorphicaly embeddable in $\mathbb{R}^7$ and inherits Cayley structure. The Cayley structure is practically unique example of the almost complex structure on $S^2 \times S^4$, and it is not $SU(2) \times SU(2)$-cohomogeneity one structure. The questions about existence of nearly Kähler or complex structures on $S^2 \times S^4$ are open.

At the talk I will give examples of cohomogeneity one almost complex structures with some additional properties on $S^2 \times S^4$.

REFERENCES

[1] Podestà F., Spiro A. Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one // J. Geom. Phys. 2010. V. 60, No. 2. P. 156–164.

[2] Podestà F., Spiro A. Six-dimensional nearly Kähler manifolds of cohomogeneity one (II) // Comm. Math. Phys. 2012. V. 312, No. 2. P. 477–500.

[3] Foscolo L., Haskins M. New G_2-holonomy cones and exotic nearly Kahler structures on S^6 and $S^3 \times S^3$ // Ann. Math. 2017. V. 185, No. 1. P. 59–130.

[4] Datta B., Subramanian S. Nonexistence of almost complex structures on product of even-dimensional spheres // Top. and App. 1990. V. 36. P. 39–42.

ON THE EQUATION OF HOMOLOGOUS SPHERE OF POINCARE

V. Dryuma

(Institute of Mathematics and Informatics, Kishinew, Moldova)

E-mail address: `valdryum@gmail.com`

Topology of a 3-dim manifold defined by the system of equations

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 1 = 0, \quad z_1^l + z_2^m + z_3^n = 0, \tag{1}$$

where $z_k = x_k + iy_k$ are the complex coordinates, depends from the values of the parameters $l,\ m,\ n$.

In the case $l = 2$, $m = 3$, $n = 4$ the manifold defined by the conditions (1) is famous homologous sphere of Poincare, which has a set of homologies some with standard $3D$-sphere $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, but differs from it by fundamental group. It has an important applications in various branch of modern algebraic topology (J. Milnor, 1968).

In the report will be told how to present the homologous sphere defined by intersection of five-dimensional sphere with singular manifold ($l = 2$, $m = 3$, $n = 5$)

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 - 1 = 0, \quad z_1^2 + z_2^3 + z_3^5 = 0. \tag{2}$$

in the form of an explicit expression for one function between the four variables $H(x, y, u, v) = 0$.

Theorem 1. *In the Eulerian coordinates*

$$z_1 = \cos(\theta)\, \mathrm{e}^{-2/3\, i\sqrt{3}\phi}, \quad z_2 = -\sin(\theta)\sin(1/2\,\beta)\, \mathrm{e}^{-1/2\, i\left(\alpha-\delta+4/3\,\sqrt{3}\phi\right)},$$

$$z_3 = \sin(\theta)\cos(1/2\,\beta)\, \mathrm{e}^{1/2\, i\left(\alpha+\delta-4/3\,\sqrt{3}\phi\right)}, \tag{3}$$

the equation of the unit five-dimensional sphere is identically satisfied and the equation of the orbifold $z_1^2 + z_2^3 + z_3^3 = 0$ takes the form

$$(\cos(\theta))^2\, e^{-4/3\, i\sqrt{3}\phi} - \sin(\theta)\sin(1/2\,\beta) e^{-1/2\, i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha - \sqrt{3}\delta + 4\,\phi\right)} +$$

$$+\sin(\theta)\sin(1/2\,\beta)e^{-1/2\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha-\sqrt{3}\delta+4\,\phi\right)}\left(\cos(1/2\,\beta)\right)^2+$$
$$+\sin(\theta)\sin(1/2\,\beta)e^{-1/2\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha-\sqrt{3}\delta+4\,\phi\right)}\left(\cos(\theta)\right)^2-$$
$$-\sin(\theta)\sin(1/2\,\beta)e^{-1/2\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha-\sqrt{3}\delta+4\,\phi\right)}\left(\cos(\theta)\right)^2\left(\cos(1/2\,\beta)\right)^2+$$
$$+\sin(\theta)\left(\cos(1/2\,\beta)\right)^5e^{5/6\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\delta-4\,\phi\right)}-$$
$$-2\,\sin(\theta)\left(\cos(1/2\,\beta)\right)^5e^{5/6\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\delta-4\,\phi\right)}\left(\cos(\theta)\right)^2+$$
$$+\sin(\theta)\left(\cos(1/2\,\beta)\right)^5e^{5/6\,i\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\delta-4\,\phi\right)}\left(\cos(\theta)\right)^4=0. \qquad (4)$$

Using then the variable χ, defined by the condition

$$e^{5/2\,i\alpha+5/2\,i\delta-10/3\,i\sqrt{3}\phi}-e^{5\,\chi}=0,$$

we express the variable ϕ as $\phi=-1/4\,i\,(i\alpha+i\delta-2\,\chi)\sqrt{3}$ and after separation of the real and imaginary parts of complex equation (4)*, are obtained two equations into the five variables α, δ, χ and θ, β . As result of elimination of the variable χ from both equations is derived equation of homologic sphere of Poincare in the form of one function of the four variables. The equation is the summa of the functions* sin *and* cos *with linear arguments. It contains more than* 200 *items and its begin looks as follows*

$$21/8\,\sin(5\,f+c-16\,b+12\,a)-5/2\,\cos(-66\,c-11\,b+77\,a+88\,f)+$$
$$+15/2\,\cos(-29\,c-9\,b+15\,a+31\,f)+567/4\,\sin(24\,a+43\,f-31\,c-10\,b)+$$
$$6\,\cos(-4\,c-13\,b+7\,a+2\,f)+81/8\,\sin(4\,a+9\,f-7\,c-20\,b)-\ldots=0.$$

CANTOR SETS ALL OF WHOSE PROJECTIONS HAVE POSITIVE DIMENSION

O. Frolkina

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: `olga-frolkina@yandex.ru`

L. Antoine constructed a Cantor set in R^2 all of whose projections coincide with those of a regular hexagon [2, **9**, p.272; and fig.2 on p.273]. By K. Borsuk, there exists a Cantor set in R^d such that its projection onto every hyperplane contains a $(d-1)$-dimensional ball, or equivalently, has dimension $(d-1)$ [4]. J. Cobb constructed a Cantor set in $\mathbb{R}^3$ each of whose projections into 2-planes is one-dimensional [5] (for higher-dimensional extensions, see e.g. [6], [3]). We show that an Antoine's necklace [1, **78**, p. 91–92] can serve as an example of a Cantor set all of whose projections are one-dimensional and connected. We prove that each Cantor set in $\mathbb{R}^3$ can be moved by a small ambient isotopy so that the projection of the resulting Cantor set into each plane is one-dimensional; the higher-dimensional case will also be discussed.

We use the technique of defining sequences which comes back to Louis Antoine.

Supported by Russian Foundation of Basic Research; Grant No. 19–01–00169.

REFERENCES

[1] Antoine L., Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. Thèses de l'entre-deux-guerres. 1921. V. 28.

[2] Antoine L. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 265–287.

[3] Barov S., Dijkstra J.J., van der Meer M. On Cantor sets with shadows of prescribed dimension // Topol. and Appl. 2012. V. 159. P. 2736–2742.

[4] Borsuk K. An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points // Fund. Math. 1947. V. 34. P. 272–277.

[5] Cobb J. Raising dimension under *all* projections // Fund. Math. 1994. V. 144, No. 2. P. 119–128.

[6] Frolkina O. A Cantor set in with "large" projections // Topol. and Appl. 2010. V. 157, No. 4 P. 745–751.

ON ACTION OF SPACES, CONTINUOUSLY CONTAINING TOPOLOGICAL GROUPS

S. Iliadis

(M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: iliadis@gmail.com

In this paper we give the notion of action of a space continuously containing topological groups on a space and prove that if for each element G of a given collection $\mathbb{G}$ of topological groups of weight less than or equal to τ, an action F_G on a space X is given, the same for all groups, then there exists a continuously containing space T for this collection of weight less than or equal to τ and an action F_T of T on X, which "contains" all actions F_G.

ON DECOMPOSITION OF TENSORS

M. Jukl, L. Juklová, J. Mikeš

(Palacký University, Olomouc, Czechia)

E-mail address: marek.jukl@upol.cz, lenka.juklova@upol.cz, josef.mikes@upol.cz

The contribution deals with the solution of the trace decomposition problem in the F-tracelles case. The trace decomposition may be considered as a finding of an expression of given tensor as a summ of a certain traceless tensor and linear combination of tensors of certain type. It is well known in the case of tensors on real vector spaces with metric tensor, when independent elements of the mentioned linear combinations are Kronecker δ-tensors (cf. Weyl [4]). This decomposition problem may be naturally generalized for *F-traceless* case (cf. [1]). The solution of this case is used for the study of geodesic and holomorphically projective mappings of certain Riemannian spaces, especially.

Theorem 1. *Let $A^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}$ be a tensor of type (p,q). If $n+1\geqslant p+q$ then there exists a unique decomposition of $A^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}$ of the form*

$$A^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}=B^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}+\sum_{t=1}^{min\{p,q\}}\sum_{\bigoplus}\delta^{i_{\rho_1}}_{j_{\sigma_1}}\delta^{i_{\rho_2}}_{j_{\sigma_2}}\cdots\delta^{i_{\rho_t}}_{j_{\sigma_t}}\overset{\star}{B}{}^{\cdots}_{\cdots}\,, \tag{1}$$

where $\bigoplus=\begin{cases}\forall\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_t=1,\,2,\,\ldots,\,p & (\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_t)\\ \forall\sigma_1,\,\sigma_2,\,\ldots,\,\sigma_t=1,\,2,\,\ldots,\,q & (\sigma_i \text{ are mutually different}),\end{cases}$

$\star=\left\{\begin{matrix}\rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_t\\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_t\end{matrix}\right\}$ *and tensors $B^{i_1i_2\cdots i_p}_{j_1j_2\cdots j_q}$ and $\overset{\star}{B}{}^{\cdots}_{\cdots}$ are traceless.*

Tensor T is called *traceless*, if all its traces are zero. Decomposition (1) is called *traceless* decomposition of the tensor A. The Theorem 1 was generalized by Mikeš in [1], where the notion *F-traceless tensor* is introduced by the following way: Let F^i_j be an arbitrary affinor ($F^i_j\in E^1_1$ such that $F^\alpha_\alpha=0$.) Tensor $A\in E^p_q$ is called *F-traceless* if the following condition holds:

$$\forall k=\overline{1,\,p};\quad\forall r=\overline{1,\,q};\quad A^{\cdots\ i_{k-1}\alpha i_{k+1}\ \cdots}_{\cdots\ j_{r-1}\beta j_{r+1}\cdots}F^\beta_\alpha=0;\quad A^{\cdots\ i_{k-1}\alpha i_{k+1}\ \cdots}_{\cdots\ j_{r-1}\alpha j_{r+1}\cdots}=0;$$

$$\overset{\{0\}}{F}{}^i_j=\delta^i_j;\quad\overset{\{1\}}{F}{}^i_j=F^i_j.$$

The next formula (2) is called *F-traceless decomposition* of tensor A. We also will work with e-structures. For these structures the condition $F^i_\alpha F^\alpha_j=e\delta^i_j$ holds, where $e=\pm1$. For $e=-1$ is this structure is the almost complex structure and for $e=1$ it is the almost product structure [3, 5].

Theorem 2. *If* $A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ *is a tensor of the type* (p, q). *If* $n > 2(p + q)$, *then there exists a unique decomposition of* A *of the form*

$$A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = B^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} + \sum_{t=1}^{min\{p,q\}} \sum_{\bigoplus} \overset{*}{Q}{}^{i_{\rho_1} i_{\rho_2} \cdots i_{\rho_t}}_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} \cdots j_{\sigma_t}} \overset{\diamond}{B}{}^{\cdots}_{\cdots} \tag{2}$$

where

$$\bigoplus = \begin{cases} \forall \rho_1, \rho_2 \ldots \rho_t \in \overline{1,p} & (\rho_1 < \rho_2 \ < \cdots \ < \rho_t) \\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_t \in \overline{1,q} & (\sigma_i \text{ are different to each other}), \\ \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_t \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\diamond = \left\{ \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2 & \ldots & \rho_t \\ \sigma_1, & \sigma_2 & \ldots & \sigma_t \\ \tau_1, & \tau_2 & \ldots & \tau_t \end{matrix} \right\}, \quad * = \{\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_t\}.$$

Tensors $B^{\cdots}_{\cdots}$ *and* $\overset{\diamond}{B}{}^{\cdots}_{\cdots}$ *are* F*-traceless and* $\overset{*}{Q}{}^{i_{\rho_1} i_{\rho_2} \cdots i_{\rho_t}}_{j_{\sigma_1} j_{\sigma_2} \cdots j_{\sigma_t}} = \overset{\{\tau_1\}}{F}{}^{i_{\rho_1}}_{j_{\sigma_1}} \overset{\{\tau_2\}}{F}{}^{i_{\rho_2}}_{j_{\sigma_2}} \ldots \overset{\{\tau_t\}}{F}{}^{i_{\rho_t}}_{j_{\sigma_t}}$.

REFERENCES

[1] Mikeš J. On General Trace Decomposition Problem / Proc. Conf. Aug. 28–Sept. 1. 1995, Brno, Czech Republic. P. 45–50.

[2] Mikeš J., Jukl M., Juklová L. Some results on traceless decomposition of tensors // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2011. V. 174. P. 627–640.

[3] Vishnevskij V.V., Shirokov A.P., Shurygin V.V. Spaces over algebras. Kazan, 1985.

[4] Weyl H. The Classical Groups Princenton. Princenton Univ. Press, 1946.

[5] Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces. Pergamon Press, 1965.

LINEAR FRAMES AS H-ORBITS OF PROJECTIVE FRAME SPACE

A. Kuleshov

(Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: arturkuleshov@yandex.ru

We consider an n-dimensional projective space $\mathbb{P}_n$ $(n \geqslant 2)$ and a fixed point A on it. Let $F(\mathbb{P}_n)$ be the manifold of all adapted projective frames of $\mathbb{P}_n$. We define the action of $G = St_A \subset GP(n)$ on $F(\mathbb{P}_n)$ in a natural way. The Lie group epimorphism $\beta\colon G \to GL(V)$ acts as follows $g \mapsto d_A g$ where $V = T_A\mathbb{P}_n$. Linear frames (i.e. bases of V) can be considered as orbits of projective frame space $F(\mathbb{P}_n)$ under the action of the kernel H of this epimorphism β. By applying some n-dimensional version of the Desargues theorem we could get a purely geometrical description of such H-orbits without referring to the tangent space V.

An *adapted projective frame* in $\mathbb{P}_n$ is an ordered set $\mathcal{R}$ of $n+2$ points such that any $n+1$ points of $\mathcal{R}$ are in generic position: $\mathcal{R} = \{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ and its first vertex A_0 coincides with the center, i.e. $A_0 = A$. We denote by X^i $(i = \overline{1,n})$ the affine (or non-homogeneous) coordinates w.r.t. the frame $\mathcal{R}$.

Two frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ are said to be *in perspective* if [1]

$$A'_i \in A_iA_0 \quad (i = \overline{1,n}), \quad E' \in EA_0.$$

The frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ are in perspective iff the transforation law of the corresponding affine coordinates is

$$X'^i = \frac{hX^i}{1 + a_jX^j}, \quad h \neq 0.$$

Theorem 1. *$\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ are lying in the same H-orbit $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ are in perspective* & $h = 1$.

We say the frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ to be *in strict perspective* if they are in perspective and their corresponding points are not coincide, i.e.

$$A'_i \neq A_i \ (i = \overline{1,n}), \quad E' \neq E.$$

For any two frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ in strict perspective the minimal subspace (with respect to inclusion) $\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')} \subset P_n$ containing the set of points B_{ij}, B_i is defined, where

$$B_{ij} = A_iA_j \cap A'_iA'_j, \quad B_i = A_iE \cap A'_iE', \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Theorem 2. *$\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')} \subset P_n$ is a hyperplane in $\mathbb{P}_n$ for any two frames $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ in strict perspective. We say $\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')}$ to be the Desargues hyperplane generated by $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$.*

Theorem 3. *Let $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ be in strict perspective. Then they are belonging to the same H-orbit iff the Desargues hyperplane $\mathcal{L}_{(\mathcal{R},\mathcal{R}')}$ is passing through A.*

Proofs of the theorems see in [2]. The proof of Theorem 2 is based on [1].

REFERENCES

[1] Bell P.O. Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 675–681.

[2] A. Kuleshov. On some interpretation of linear frames on projective differential geometry // Diff. geom. of manifolds of figures. 2018. V. 49. P. 112–122.

THE GENERALIZED TRANSFORMATION OF LEGENDRE OF CONFORMALLY FLAT METRICS

M. Kurkina, E. Rodionov, S. Semenov, V. Slavsky

(Altai State University, Ugra State University, Russia)

E-mail address: edr2002@mail.ru, mavi@inbox.ru, ssp@ugrasu.ru, slavsky2004@mail.ru

In work [1] Legendre's duality for conformal convex functions was determined by formulas $\{f(x) : x \in S^n\}$, $\{f^*(y) : y \in S^n\}$ for sphere [2], or that too most, conformally flat and convex metrics $\left\{ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)} : x \in S^n\right\}$, $\left\{ds^{*2} = \frac{dy^2}{f^{*2}(y)} : y \in S^n\right\}$ on the sphere:

$$f^*(y) = \frac{2f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad \vec{y} = \vec{x} - 2f(x)\frac{\vec{\nabla} f(x)}{|\nabla f(x)|^2},$$
$$f(x) = \frac{2f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2}, \quad \vec{x} = \vec{y} - 2f^*(y)\frac{\vec{\nabla} f^*(y)}{|\nabla f^*(y)|^2},$$

where functions $f(x)$, $f^*(y)$ are continued on homogeneity on R^{n+1}. In work [3] the generalized Legendre's transformation on poorly regular conformal convex functions was given by formulas:

$$f^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x-y\|^2}{2f(x)}, \quad f(x) = \max_{y \in S^n} \frac{\|x-y\|^2}{2f^*(y)},$$

where $\|x-y\|$ is chordate distance between points on the sphere. In work [4] Legendre's transformation is realized in the MatLab system for functions of one variable. In this paper the general case of Legendre transformation and also its applications are examined under processing images.

REFERENCES

[1] Rodionov E., Slavsky V. Polar transformation of conformal and flat metrics // Matem. tr. 2017. V. 20, No. 2. P. 120-138; Siberian Adv. Math. 2018. V. 28, No. 2. P. 101–114.

[2] Rodionov E., Kurkina M., Slavsky V. Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature // Doklady Akademii Nauk. 2015. V. 462, No. 2. P. 141–143.

[3] Rodionov E., Kurkina M., Slavsky V. Transformation of Legendre of the poorly regular conformally flat metrics // The Lomonosov readings in Altai: fundamental problems of science and education. Barnaul, on November 14–17. 2017. P. 324–332.

[4] Semenov S., Kurkina M., Slavsky V. Numerical implementation of transformation of Legendre of conformal convex functions // The Lomonosov readings in Altai: fundamental problems of science and technology: sb. nauch. Art. mezhdunar. konf.; On November 13–16, 2018 [Electronic resource] URI: http://elibrary.asu.ru/handle/asu/6367. 321–326.

RECOVERY OF A TRIANGLE ON A PLANE ACCORDING TO THREE PROJECTIONS

M. Kurkina, S. Semenov, V. Slavsky

(Ugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia)

E-mail address: mavi@inbox.ru, ssp@ugrasu.ru, slavsky2004@mail.ru

The work solves the following problem. Let $\triangle ABC$ and three straight lines l_1, l_2, l_3 are given in the plane. Denote the projections of the triangle $\triangle ABC$ on corresponding lines through $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ (them can be considered as degenerate triangles). The task is following one: by the known side lengths triangles $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ necessary restore lengths of the sides $\triangle ABC$ (lines of l_1, l_2, l_3 in general position and their location is unknown).

Similar tasks and their multidimensional generalizations are of interest in the theory of computer images [1, 2, 3] were also considered earlier at known foreshortenings provisions of cameras (or straight lines of l_1, l_2, l_3).

Let $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ — ordered couples of numbers (values of projections of vectors of $v_1 = \overrightarrow{AB}$, $v_2 = \overrightarrow{AC}$ on the straight l_1, l_2, l_3), are defined up to multiplication on ± 1 depending on the choice of orientation on straight lines. Let's enter designations:

$$q_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1,\ q_2 = a_1 c_2 - a_2 c_1,\ q_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

The following theorems are true in above conditions [4]:

Theorem 1. *If strict inequality of a triangle for the three of numbers* $\{|q_1|, |q_2|, |q_3|\}$ *is carried out, then on projections* $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ *unambiguously, up to motion.*

Theorem 2. *Let* $\triangle bac$ *– a triangle with the sides of* $ba = |q_1|$, $ac = |q_2|$, $cb = |q_3|$. *Then equality is true:* $S = r$, *where* S *the area of triangle* $\triangle ABC$, r*– the radius of a circle circumscribed about a triangle* $\triangle bac$.

Theorem 3. *Let* $\widetilde{\triangle}$ *— a triangle with the sides parallel to direct* $l_2 l_2 l_3$, *then triangles* $\triangle abc \sim \widetilde{\triangle}$ *are similar.*

Triangle $\triangle ABC$ may be constructed by means of compass and a ruler [5]. In this work the general case and also applications are examined when processing images.

REFERENCES

[1] Richard H., Andrew Z. Multiple View Geometry in Computer Vision Second Edition. Cambridge University Press, 2000, 2003. 672 p.

[2] Olivier F., Quang-uan L., Papadopoulo T. The Geometry of Multiple Images: The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications. Massachusetts Institute of Technology, 2001. 645 p.

[3] Piazzi J., Cowan N.J.. Multi-view visual servoing using epipoles // Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on Issue Date: 28 Sept.-2 Oct. 2004. P. 674–679.

[4] Kurkina M. About one tomographic property of a triangle on the plane // Modern problems of mathematics: theses International (the 44th All-Russian) youth school of a conference. Yekaterinburg, 2013. P. 354–357.

[5] Kirichenko B. Constructions by compasses and ruler and Galois's theory. (Summer school "Modern Mathematics"). MCCME. 2005.

RIEMANNIAN AND PSEUDO-RIEMANNIAN METRICS OF DIAGONAL CURVATURE

O. I. Mokhov

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: `mokhov@mi-ras.ru`

We study spaces of diagonal curvature arising in a number of modern problems of mathematical physics and the theory of integrable systems of hydrodynamic type, in particular, the geometry of semi-Hamiltonian systems discovered by S.P. Tsarev [1] (this wide class of diagonalizable systems of hydrodynamic type possesses the richest infinite-dimensional set of conservation laws and symmetries (commuting flows) among all systems of hydrodynamic type; systems of this class are integrable, they are integrated (linearized) by the generalized hodograph method [1], many the most important systems of hydrodynamic type belong namely to this class of systems), is just exactly the geometry of spaces of diagonal curvature; a metric of diagonal curvature (a semi-Hamiltonian metric) is connected to each such system. The Riemannian (or pseudo-Riemannian) spaces of diagonal curvature are characterized by presence of a Riemannian (or pseudo-Riemannian) diagonal metric (orthogonal coordinates in the space) with additional conditions on the Riemann curvature tensor and locally described by an integrable system of equations.

An efficient necessary condition for metrics of diagonal curvature, namely, the vanishing of the Haantjes tensor for the Ricci affinor, is obtained and the theory of metrics of diagonal curvature is developed.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 18-11-00316.

REFERENCES

[1] Tsarev S.P. The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method // Math. USSR Izvestiya. 1990. V. 54. P. 397–419.

THE COMPLEXITY OF ORIENTABLE GRAPH MANIFOLDS

M. Mulazzani

(Università di Bologna, Bologna, Italy)

E-mail address: `michele.mulazzani@unibo.it`

We give an upper bound for the Matveev complexity introduced in of the whole class of closed orientable graph manifolds that is sharp for all the 14502 graph manifolds of the Recognizer catalogue (available at `http://matlas.math.csu.ru/?page=search`).[1]

REFERENCES

[1] Matveev S. Complexity theory of 3-dimensional manifolds // Acta Appl. Math. 1990. V. 19. P. 101–130.

ON THE ISOMETRIC GROUP OF FOLIATED MANIFOLDS

A. Narmanov, A. Sharipov

(National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

E-mail address: `narmanov@yandex.ru`, `asharipov@mail.ru`

The diffeomorphism groups of smooth manifolds are of great importance in differential geometry and in analysis. The purpose of our paper is to study topologycal properties of the group $Iso_F^r(M)$ of all isometries of foliated manifold (M,F), with new topology. It's proven that group $Iso_F^r(M)$ is a topological group with F-compact open topology, where $r \geqslant 0$.

Let M be a n-dimensional smooth connected Riemannian manifold with Riemannian metric g, $F-$ foliation of dimension k on M.

Definition 1. If for the some C^r- diffeomorphism $\varphi : M \to M$ the image $\varphi(L_\alpha)$ of any leaf L_α of foliation F is a leaf of foliation F, we say that the f is C^r- diffeomorphism of foliated manifold and write as $f : (M,F) \to (M,F)$.

Example 1. Let (M,F) — foliated manifold, where F is k-dimensional smooth foliation where $0 < k < n$. A vector field X is called a foliated field if for every vector field Y, tangent to F, Lie brocket $[X,Y]$ also is tangent to F. Flow of every foliated field consists of diffeomorphisms of foliated manifold (M,F). For foliated plane R^2 by curves $L_\alpha : x^2 - y = \alpha$ vector field $X = (x^2 - y)\frac{\partial}{\partial y}$ is foliated field and its flow consists of diffeomorphisms $\varphi^t : (x,y) \in R^2 \to (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in R^2$ of foliated plane (R^2,F). Every diffeomorphism $\varphi^t : (x,y) \in R^2 \to (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in R^2$ sends a leaf L_α to $L_{e^{-t}\alpha}$.

Definitionn 2. An isometry $\varphi : M \to M$ a class $C^r (r \geqslant 0)$ is called an isometry of foliated manifold (M,F)) if it is diffeomorphism of foliated manifold (M,F).

[1]This is a joint work with S Alessia Cattabriga (University of Bologna).

We will introduce some topology on the group $Diff_F^r(M)$ of diffeomorphisms of foliated manifold which depends on foliation F and coincides with compact open topology when F is n-dimensional foliation.

Let $\{K_\lambda\}$ be a family of all compact sets where each K_λ is a subset of some leaf of foliation F and let $\{U_\beta\}$ — family of all open sets on M. We consider for each pair K_λ and U_β set of all mappings $f \in G_F^r(M)$, for which $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. This set of mappings we denote through

$$[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \to M | f(K_\lambda) \subset U_\beta\}.$$

It isn't difficult to show that every possible finite intersections of sets of the form $[K_\lambda, U_\beta]$ forms a base for some topology. This topology we call foliated compact open topology or in brief F-compact open topology.

Let's denote as $Iso_F^r(M)$ the set of all C^r isometries of foliated manifold (M, F), where $r \geqslant 0$. It is known that The diffeomorphism group $Diff(M)$ of smooth manifold M is is a topological group with compact open topology [1]. Therefore subgroup $Diff_F^r(M)$ is also a topological group with compact open topology.

Theorem 1. *Let (M, F) — foliated manifold where M is a smooth, connected and finite-dimensional manifold. Then the group $Iso_F^r(M)$ is a topological group with F-compact open topology.*

REFERENCES

[1] Narmanov A., Sharipov A. On the group of oliation isometries // Methods of Functional Analysis and Topology. 2009. V. 15, No. 2. P. 195–200.

RICCI SOLITONS AND KILLING FIELDS ON K-SYMMETRIC LORENTZIAN SPACES

D. Oskorbin, E. Rodionov, I. Ernst

(Altai State University, Barnaul, Russia)

E-mail address: oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru, texttigeh@ya.ru

We study the Ricci soliton equation on 2-symmetric and 3-symmetric Lorentzian spaces. A Lorentzian manifold $(\mathcal{M}, g)$ is called a Ricci soliton if there is a vector field S on $\mathcal{M}$ such that:

$$L_S g + r = \lambda g, \tag{1}$$

where r is the Ricci tensor, $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_S g$ is the Lie derivative of the metric tensor along S. Ricci solitons were pioneered by R. Hamilton.

Let R be the Riemann curvature tensor of the metric g. If

$$\nabla^{k-1} R \neq 0, \nabla^k R = 0,$$

then $(\mathcal{M}, g)$ is called *k-symmetric Lorentzian manifold.* For Riemannian metrics g the condition $\nabla^k R = 0$ for some $k > 1$ implies $\nabla R = 0$, but there exist pseudo-Riemannian k-symmetric spaces with $k \geq 2$. It is known that indecomposable 2-symmetric and 3-symmetric Lorentzian manifolds are generalized Cahen–Wallach spaces. We proved the following theorem.

Theorem 1. *Let $(\mathcal{M}, g)$ be generalized Cahen–Wallach spaces of dimension $n \geq 4$. Then the Ricci soliton equation on $(\mathcal{M}, g)$ has a particular solution for any $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Consequently, indecomposable 2-symmetric and 3-symmetric Lorentzian manifolds are Ricci solitons. In addition, we have obtained a description of the Killing vector fields and possible dimensions of the Lie algebra of Killing fields on generalized Cahen–Wallach spaces.

REFERENCES

[1] Alekseevsky D., Galaev A. Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2011. V. 61, No. 12. P. 2331–2340.

[2] Batat W., Onda K. K. Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // Journal of Geometry. 2014. V. 105, No. 3. P. 561–575.

HIGHER ORDER NORMALS ON MANIFOLD

K. Polyakova

(Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: `KaPolyakova@kantiana.ru`

Let x^i be local coordinates of a current point of a smooth m-dimensional manifold X_m, $i, j, k, ... = 1, ..., m$. In the coordinate frame $\{\partial_i, \partial_{ij}\}$ for the first- and second-order tangent vectors ε_i, ε_{ij} we have the following expressions $\varepsilon_i = \overset{*}{x}{}^j_i \partial_j$, $\varepsilon_{ij} = \overset{*}{x}{}^k_i \overset{*}{x}{}^l_j \partial_{kl} + x^k_{ij} \overset{*}{x}{}^l_k \partial_l$, where $\det(x^i_j) \neq 0$, $x^i_k \overset{*}{x}{}^k_j = \delta^i_j$,

$\partial_i = \partial/\partial x^i$, $\partial_{ij} = \partial/\partial x^i \partial x^j$. The space $T^2X_m = span(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$ is said to be the second-order tangent space (osculating space [1] of the first order).

The rth order normal of the tangent space $T^{r-1}X_m$ is the subspace N^r_{r-1} complementing the space $T^{r-1}X_m$ to T^rX_m, i.e., $N^r_{r-1} \oplus T^{r-1}X_m = T^rX_m$ (cf. [1]). In particular, for T^2X_m we have the normal N^3_2: $N^3_2 \oplus T^2X_m = T^3X_m$.

The rth order normal of the tangent space TX_m is the subspace N^r_1 complementing TX_m to T^rX_m, i.e., $N^r_1 \oplus TX_m = T^rX_m$. In particular, for TX_m we have two normals, that is N^2_1: $N^2_1 \oplus TX_m = T^2X_m$, and N^3_1: $N^3_1 \oplus TX_m = T^3X_m$.

The linear maps $d\varepsilon_i : TX_m \to N^2_1 = T^2X_m \backslash TX_m$ define the second-order normal N^2_1, i.e., $d\varepsilon_i(\varepsilon_j) = \varepsilon_{ij} - x^k_{ij}\varepsilon_k = \dot{\varepsilon}_{ij}$, $N^2_1 = span(\dot{\varepsilon}_{ij})$.

Let $u : X_m \to TX_m$ be a vector field. Then $du : TX_m \to T^2X_m$ is a linear map from TX_m to T^2X_m. For the basic tangent vectors $\varepsilon_i : X_m \to TX_m$ the linear maps $d\varepsilon_i : TX_m \to N^2_1 \subset T^2X_m$ move a tangent vector into the normal N^2_1. The map $d\varepsilon_i$ assigns vectors of the second-order normal to all tangent vectors. Such a split of the second-order tangent space defines the simplest (canonical) affine connection [2]. The vectors $\dot{\varepsilon}_{ij}$ are horizontal for this connection.

For the first- and second-order tangent vectors $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon_{ij}\}$ we have the following equalities $\partial_\varepsilon \varepsilon' = d\varepsilon'(\varepsilon)$, $\partial_{\varepsilon'}\varepsilon = d^2\varepsilon(\varepsilon')$, $\partial_{\varepsilon'}\varepsilon' = d^2\varepsilon'(\varepsilon')$. We denote $\partial_{\varepsilon_k}\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}(\varepsilon_k) = \varepsilon_{ij,k}$, $\partial_{\varepsilon_{ij}}\varepsilon_k = d^2\varepsilon_k(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{k,ij}$. If the fiber coordinates x^i_{jk}, x^i_{jkl} are symmetrical, then $\varepsilon_{ij,k} = \varepsilon_{k,ij}$. The vectors $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\varepsilon_{kl,p}$ are invariant and define the third-order normal $N^3_1 = T^3X_m \backslash TX_m$ for TX_m. The vectors $\dot{\varepsilon}_{ij,k} = \varepsilon_{ij,k} - x^l_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl}$ are invariant.

Let $U : X_m \to T^2X_m$ be a vector field. Then $dU : TX_m \to T^3X_m$ is a linear map from TX_m to T^3X_m. For the tangent vectors $\dot{\varepsilon}_{ij} : X_m \to N^2_1 \subset T^2X_m$ the linear maps $d\dot{\varepsilon}_{ij} : TX_m \to N^3_2 \subset T^3X_m$ move a tangent vector of the first-order into the normal N^3_2 for the space T^2X_m. For the map defined by the basic vectors of the second-order normal N^2_1 we have the following assignment $d\dot{\varepsilon}_{ij} : \varepsilon_k \in TX_m \to d\dot{\varepsilon}_{ij}(\varepsilon_k) = \dot{\varepsilon}_{ij,k} \in N^3_2 = T^3X_m \backslash T^2X_m$. The vectors $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\varepsilon_{ij,k}$ are horizontal for the second-order simplest connection [2]. Indeed, third-order horizontal vectors $\tilde{\varepsilon}_{ijk} = \varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{lj}\Gamma^l_{ik} + \varepsilon_{il}\Gamma^l_{jk} + \varepsilon_l\Gamma^l_{ijk}$ ($\tilde{\varepsilon}_{ijk} \in T^3X_m$) for the second-order simplest connection with the components $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = -x^i_{jk}$, $\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jkl} = -x^i_{jkl} + x^i_{sk}x^s_{jl} + x^i_{js}x^s_{kl}$ have the form $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$. The horizontal vectors for the second-order simplest connection can be expressed in terms of the basic vectors of second- and third-order normals, i.e., $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ijk} = x^l_{jk}\dot{\varepsilon}_{li} + \dot{\varepsilon}_{jk,i}$, $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$.

REFERENCES

[1] Rybnikov A.K. Affine connections of second order // Mathematical Notes. 1981. V. 29, No. 2. P. 143–149.

[2] Polyakova K. Special affine connection of the 1st and 2nd orders // Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. 2015. V. 46. P. 114–128 (in Russian).

THE EVOLUTION OF HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC SUBSPACES IN $f(R)$ GRAVITY

A. Popov

(Kazan Federal University, Kazan, Russia)

E-mail address: apopov@kpfu.ru

The compact extra spaces is widely used idea [1, 2, 3, 4]. Any multi-dimensional model has to lead to the effective 4-dim theory. This would imply relations between the observable four-dimensional geometry and a geometry of the higher dimensions.

One of the question remaining not clarified yet is: why specific number of dimensions are compactified and stable while others expand? Which specific property of subspace leads to its quick growth? There are many attempts to clarify the problem, mostly related to introduction of fields other than gravity. It may be a scalar field (most used case) or gauge fields. A static solutions can be obtained using the Casimir effect or form fields. Sometimes one of the subspace is assumed to be Friedmann-Robertson-Walker space by definition. Another possibility was discussed in [5]: it was shown that if the scale factor of our 3D space is much larger than the growing scale factor of the extra dimensions, a contradiction with observations can be avoided.

The origin of our Universe is usually related to its quantum creation from the space-time foam. Here we are interested in the subsequent classical evolution of the metrics rather than a calculation of this probability. Manifolds are nucleated having specific metrics. The set of such metrics is assumed to be very rich. After nucleation, these manifolds evolve classically forming a set of asymptotic manifolds, one of which could be our Universe. In paper [6] we consider models of the $f(R)$ gravity acting in 5 and 6 dimensions. No other fields are attracted to stabilize an extra space. We have found out that a number of asymptotic solutions is quite limited. This conclusion was confirmed both analytically and numerically. There is a set of initial conditions that lead to a common asymptote of classical solutions.

REFERENCES

[1] Arkani-Hamed N., Dimopoulos S. and Dvali G. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 263–272.

[2] Dienes K.R., Dudas E. and Gherghetta T. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions // Nucl. Phys. B. 1999. V. 537. P. 47–108.

[3] Starkman G.D., Stojkovic D. and Trodden M. Large extra dimensions and cosmological problems // Phys. Rev. D. 2001. V. 63. 103511.

[4] Günther U., Moniz P. and Zhuk A. Nonlinear multidimensional cosmological models with form fields: Stabilization of extra dimensions and the cosmological constant problem // Phys. Rev. D. 2 V. 68. 044010.

[5] Yoshimura M. Effective action and cosmological evolution of scale factors in higher-dimensional curved spacetime // Phys. Rev. D. 1984. V. **30**. P. 344–356.

[6] Lyakhova Ya., Popov A., Rubin S. Classical evolution of subspaces // Eur. Phys. J. C. 2018. V. **78**. 764.

GENERALIZATIN OF THE NOTION OF COMPLETENESS OF RIEMANNIAN ANALYTIC MANIFOLDS

V. Popov

(Financial University under the Government of Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail address: vlapopov@gmail.com

The possibility of analytic extension of an analytic function allows us to analyse the analytic extension of a locally given Rumannian metric, in other words, the analytic extension of a Riemannian manifold. However, there are a lot of maximum extensions. A correct analytic extension of a locally given Riemannian metric would be an extension to a complete Riemannian manifold, but this is not always possible.

Let's consider an arbitrary Riemannian metric defined on the ball U. Then in the class of Riemannian analytic manifolds locally isometric U, we can define the "most complete" manifold.

Definition 1. A Riemannian analytic simply-connected oriented manifold M is called *pseudo complete* if it has the following properties.

1. M is unextendable.

2. There is no locally isometric orientation preserving covering map $f : M \to N$, where N is a simply connected Riemannian analytic manifold, and $f(M)$ is an open subset of N that is not equal to N.

There are the property of the Lie algebra of Killing vector fields of a locally homogeneous Riemannian manifold, which guaranties that corresponding pseudo-complete manifold will be homogeneous.

Theorem 1. *Let* $\mathfrak{g}$ *be Lie algebra of all Killing vector fields on locally homogeneous Riemann analytic manifold* M*,* $\mathfrak{h}$ *be its stationary subalgebra at some point* $p \in M$*,* $\mathfrak{z}$ *be the center of algebra* $\mathfrak{g}$*. Let* G *be simply connected group generated by algebra* $\mathfrak{g}$ *and* H *be its subgroup generated by subalgebra* $\mathfrak{h}$*. If*

$$\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g}; \mathfrak{g}]) = \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g}; \mathfrak{g}]$$

then H *is closed in* G*.*

A pseudo-complete manifold is not unique in general. Select the most symmetric of them.

Definition 2. A Riemannian analytic simply-connected manifold M is called a *regular pseudo-complete manifold* if there is no covering locally isometric map $f : M \setminus S \to N$ to another pseudo-complete manifold N locally isometric to M. Where S is some subset of M. It consists of fixed points of some discreet pseudo group of local isometries.

The analytic extension of the Riemannian metric becomes more understandable if the Lie algebra of Killing vector fields has zero center. In this case, we can define a generalized complete manifold with the property of uniqueness and extendability of all local isometries [1], [2].

Definition 3. A Riemannian analytic oriented manifold M whose Lie algebra of Killing vector fields has no center is called *quasi-complete* if it has the following properties.

1. M is unextendable.

2. M does not admit local isometry preserving orientation and Killing vector fields.

Theorem 2. *Any local isometry* $\varphi : U \to V$ *between two balls of two qusicomplete manifolds* M *and* N *can be extended to isometry* $\varphi : M \to N$

REFERENCES

[1] Popov V. Extendibility of Local Isometries Groups // Math. Sb. 1988. V. 135(177). P. 45–64.

[2] Popov V. On Closeness of Stationary Subgroup of Affine Transformation Groups // Lobachevsrii J. Math. 2017. V. 38. P. 724–729.

ADMISSIBLE AND BOUNDARY PHASE TRAJECTORIES OF FRACTIONAL-ORDER SYSTEMS WITH LUMPED PARAMETERS

S. Postnov, E. Postnova

(V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia)

E-mail address: postnov.sergey@inbox.ru, postnova@ipu.ru

Later a concept of phase portrait for differential inclusions was introduced [1] for description of behaviour of dynamical systems with control. This concept based on the concept of integral vortex of differential inclusion. The last can be constructed as manifold including all of admissible trajectories of considered system with control. In this work we study qualitative dynamics of some two-dimensional fractional-order systems with control and calculate its boundary trajectories as trajectories which bound a domain on phase plane including all of admissible trajectories of considered systems. Also we investigate a phase trajectories for such systems in optimal control mode.

We consider two kinds of the following linear fractional-order system with control:

$$ {}_{t_0}D_t^{\sigma} q_1(t) = q_2(t), {}_{t_0}D_t^{\sigma} q_2(t) = aq_1(t) + u(t). \tag{1} $$

In case of $a = 0$ this system represents a double integrator and the case of $a = -1$ corresponds to the pendulum. The fractional derivative operator ${}_{t_0}D_t^{\sigma}$ means in sense of Hilfer [2] or Hadamard [3]. Initial conditions for system (1) in nonlocal form used and final conditions have an ordinary form.

For both of double integrator and pendulum of fractional order boundary trajectories were calculated. It's shown that these trajectories bound a domain on phase plane which contains in the same domain corresponding to analogous systems of integer order. So, the domain of admissible trajectories for fractional-order systems is less than that one for integer-order systems. Also phase trajectories in optimal control mode calculated and overcontrol effect revealed for fractional-order double integrator.

REFERENCES

[1] Butkovskiy A.G. Phase portraits of control dynamical systems. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] Hilfer R. Fractional time evolution // Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific, 2000. P. 87–130.

[3] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

EXTRINSIC GEOMETRY OF FOLIATED MANIFOLDS

V. Rovenski

(Department of Mathematics, University of Haifa, Mount Carmel, 31905 Haifa, Israel)

E-mail address: vrovenski@univ.haifa.ac.il

The lecture is devoted to particular geometric problems of foliation theory, namely, those which belong to so called Extrinsic geometry, which, roughly speaking, describes how the leaves (or, single submanifolds) are located within the ambient Riemannian space.

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE CURVATURE TENSORS OF A FUNDAMENTAL GROUP AND AFFINE CONNECTIONS

N. A. Ryazanov

(Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: ryazanov-92@mail.ru

The main bundle is considered, the base of which is a n-dimensional smooth manifold, and the type layer is a r-fold Lie group. Structure equations for the forms of the bundle group and affine it's prolongations are given

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk};$$

$$D\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \quad D\omega^\alpha_i = \omega^j_i \wedge \omega^\alpha_j + \omega^\beta_i \wedge \theta^\alpha_\beta + \omega^j \wedge \omega^\alpha_{ij};$$

$$\theta^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\omega^\alpha_\beta, \quad \omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma, \quad \omega^i_{[jk]} \cong 0, \quad \omega^\alpha_{[ij]} \cong 0 \ (mod\ \omega^i);$$

$$(i, ... = \overline{1, n}, \quad \alpha, ... = \overline{n+1, n+r}) \ ,$$

fundamental-group and affine connections are defined by connection forms that satisfy structure equations, contains the corresponding components of the curvature object:

$$\Omega^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma^\alpha_i \omega^i, \quad \Omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k,$$

$$D\Omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma + R^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$

$$R^\alpha_{ij} = \Gamma^\alpha_{[ij]} - C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j, \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^t_{j[k}\Gamma^i_{tl]}.$$

For each connection, an approach is shown that allows one to find the differential equations for the components of the curvature object of the corresponding connection in a faster way than by differentiating the expressions of these objects through the connection objects and their Pfaff derivatives. The method consists in successively solving cubic equations

$$(\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma} R^\beta_{ij} \Gamma^\gamma_k \omega^k) \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

$$(dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l) \wedge \omega^k \wedge \omega^l = 0,$$

first by the Laptev Lemma

$$(\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma} R^\beta_{ij} \Gamma^\gamma_k \omega^k) \wedge \omega^j = \omega^j \wedge \widetilde{\omega}^\alpha_{[ij]}, \quad \widetilde{\omega}^\alpha_{[ij]} \cong 0;$$

$$(dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l) \wedge \omega^l = \omega^l \wedge \widetilde{\omega}^i_{j[kl]}, \quad \widetilde{\omega}^i_{j[kl]} \cong 0;$$

then by the Cartan Lemma:

$$\Delta R^\alpha_{ij} - 2C^\alpha_{\beta\gamma} R^\beta_{ij} \Gamma^\gamma_k \omega^k + \widetilde{\omega}^\alpha_{ij} = \overline{R}^\alpha_{ijk}\omega^k,$$

$$dR^i_{jkl} + R^m_{jkl}\Omega^i_m - R^i_{mkl}\Omega^m_j - R^i_{jml}\omega^m_k - R^i_{jkm}\omega^m_l + \widetilde{\omega}^i_{jkl} = \overline{R}^i_{jklm}\omega^m.$$

Taking into account comparisons modulo basic forms $\widetilde{\omega}^\alpha_{[ij]} \cong 0$, $\widetilde{\omega}^i_{j[kl]} \cong 0$, we obtain (see [1]):

$$\Delta R^\alpha_{ij} = R^\alpha_{ijk}\omega^k, \quad \Delta R^i_{jkl} = R^i_{jklm}\omega^m.$$

Thus, differential equations are derived for the components of the curvature object of the fundamental-group connection, as well as for the components of the object of curvature of the affine connection.

REFERENCES

[1] Рязанов Н.А. Объект кривизны фундаментально-групповой связности 2-го порядка // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. №4. С. 10–15.

THREE-CHANNEL IMAGES ANALYSIS, BASED ON THREE-WEBS THEORY

O. Samarina, S. Semenov, V. Slavsky

(Ugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia)

E-mail address: samarina_ov@mail.ru, ssp@ugrasu.ru, slavsky2004@mail.ru

In this paper we present a geometrical approach to the three-channel images analysis and processing, based on W. Blaschke's web geometry [1, 2]. We consider three-channel RGB-image as a set of three non-negative functions $u_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ in a two-dimensional domain D. Families of lines for this functions calls an image's topographical grid or three-webs [1]. The major researched is the problem of finding topological invariants of the RGB-image such as connection form, element of surface, curvature and other. The algorithm of numerical calculation for invariants will be also described.

This topological invariants are the effective characteristics which can be used in the various applied problem [3, 4]. It can be used at biomedical images analysis, geological researches, problems of images classification and their recognition.

REFERENCES

[1] Blaschke W. Einfuhrung in die Geometrie der Waben // Russian transl.: GITTL, Moskva. 1959. 108 p.

[2] Bazylev V.T. About multidimensional networks and their transformations // Science results. Geometry. 1963. VINITI. P. 138–164.

[3] Samarina O.V. Group images invariants. Lambert Academic Publ, 2010. 79 p.

[4] Samarina O.V., Slavsky V.V. W. Blaschke's theory application in digital image processing // J. of Math. Sciences and Appl. 2013. V. 1, No. 2. P. 17–23.

GEODESIC MAPPINGS OF MANIFOLDS WITH DEGENERATE METRIC

I. G. Shandra

(Financial University under the Government of Russian Federation, Moscow, Russia)

E-mail address: ma-tematika@yandex.ru

Let M be a smooth n-dimensional manifold. We denote the ring of smooth functions on M by $f(M)$, the Lie algebra of smooth vector fields on M by $\mathfrak{X}(M)$ and arbitrary smooth vector fields on M by X, Y, Z.

A *linear pseudoconnection* on M is a pair of operators $(h;\nabla)$, where $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ and h is an affinor on M satisfying the following conditions [1], [2]:

$$\nabla_X(fY+Z) = f\nabla_X Y + X(f)\cdot hY + \nabla_X Z, \tag{1}$$

$$\nabla_{fX+Y}Z = f\nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M), \quad f \in f(M). \tag{2}$$

If $h = \mathrm{id}$ the linear pseudoconnection is the linear connection.

A linear pseudoconnection $(h;\nabla)$ is said to be *almost idempotent* if $h^2 = h$. In this case, h is called the *horizontal projector*. An almost idempotent pseudoconnection is said to be *completely idempotent* if [2]:

$$\nabla_X Y = h\nabla_X(hY). \tag{3}$$

A manifold on which a completely idempotent pseudoconnection $(h;\nabla)$, $\mathrm{rk}h = r$, is given is denoted by A_n^r Let g and h be tensor fields on M of types $(0;2)$ and $(1;1)$, respectively. The pair (g,h) is called an *HR-structure* of rank r on M if it satisfies the following conditions [2]:

$$h^2 = h,$$

$$g(hX,Y) = g(X,Y) = g(Y,X),$$

$$\mathrm{rk}h = \mathrm{rk}g = r \leqslant n.$$

Manifolds equipped with an HR-structure of rank r are called *semiRiemannian space* and are denoted by V_n^r. For any HR-structure $(g;h)$ on M there exists a unique, completely idempotent pseudo-connection $(h;\nabla)$ satisfying the following conditions [2]:

$$\nabla_X g = 0,$$

$$g(S(X,hY),Z) = g(S(X,hZ),Y).$$

This pseudoconnection is called the *Levi-Civita pseudoconnection* and is defined by the relation [2]:

$$2g(Y,Z) = Xg(Y,Z) + (hY)g(X,Z) - (hZ)g(X,Y) +$$
$$+g([hY,X],Z) + g([hZ,X],Y) - g(X,[hZ,hY]). \tag{4}$$

A curve γ in A_n^r satisfying the condition

$$\nabla_X X = \tau X$$

where $X = \dot{\gamma}$ is the tangent vector is called *geodesic*. A mapping A_n^r onto $\bar{A}_n^r$ preserving geodesic curves is called *geodesic*.

We study semiRiemannian spaces admitting (do not admitting) geodesic mapping.

REFERENCES

[1] Otsuki T. On general connections // Math. J. Okayama Un. 1960. V. 9, No. 2. P. 99–164.

[2] Shandra I.G. Pseudoconnections and Manifolds with Degenerate Metrics // Journal of Mathematical Sciences. 2004. V. 119, No. 5. P. 658–681.

THREE-WEBS $W(r,\, r,\, 2)$

A. M. Shelekhov

(Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia)

E-mail address: `amshelekhov@yandex.ru`

A three-web on a smooth manifold X is a triple of foliations. We study the local theory of three-webs, while three-webs are considered up to local diffeomorphisms. Three-webs $W(r,r,r)$ formed by foliations of the same codimension r on a manifold of dimension $2r$ have been actively studied since the work of Chern [1]. M. Akivis in [2] built a modern apparatus for the study of such webs, his method produced numerous results in this direction, see monograph [3].

Three-webs formed by foliations of different dimensions are much less studied. Their structure equations are obtained by M.A. Akivis and V.V. Goldberg in [5], some special classes were considered in [6]; in connection with the study of smooth mappings and in connection with differential equations, see also [7], [8], [9], [10], [11], [12]. We consider three-webs $W(r,r,2)$ formed on a $2r$-dimensional manifold M by foliations of codimensions $r, r, 2$. Such, in particular, are three-webs defined by complex-analytic functions of r arguments. The structure equations of the $W(r,r,2)$-web are found in an adapted coframe. In particular, in the natural frame, structure equations take a simpler form and they are structure equations of some affine connection (canonical connection of the web $W(r,r,2)$). Formulas are obtained for calculating (in natural coframe) the components of the first structure tensor of the web $W(r,r,2)$ in terms of derivatives of the web function. Three special classes of webs $W(r,r,2)$ are considered in detail: regular and group three-webs and also $CW(r,r,2)$-webs generated by holomorphic functions.

REFERENCES

[1] Chern S.S. Abzählungen für Gewebe// Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11, No. 1–2. P. 163–170.

[2] Акивис М.А. О три-тканях многомерных поверхностей // Тр. геом. сем. (ВИНИТИ АН СССР). 1969. Т. 2. С. 7–31.

[3] Akivis M.A., Shelekhov A.M. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London, 1992. 358 pp.

[4] Акивис М.А., Гольдберг В.В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // ДАН СССР. 1972. Т. 203, № 2. Р. 263–266.

[5] Акивис М.А., Гольдберг В.В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей // Тр. геометр. сем. (ВИНИТИ АН СССР). 1973. Т. 4. С. 179–204.

[6] Гольдберг В.В. Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей // Сборник статей по дифференциальной геометрии. Калинин. Калининский гос. ун-т. 1974. С. 52–69.

[7] Азизова (Селиванова) Н.Х. О тканях из кривых и поверхностей // Ученые зап. МГПИ. Вопросы дифференциальной геометрии. 1970. Т. 374, № 1. С. 7–17.

[8] Азизова (Селиванова) Н.Х. Интранзитивные семейства преобразований // Изв. вузов. Матем. 1984. № 12 С. 69–71.

[9] Дуюнова А.А., Шелехов А.М. О три-тканях $W(1, n, 1)$ с нулевым первым структурным тензором // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. 2011. № 26. С. 82–88.

[10] Дуюнова А.А. О приведении системы ОДУ к каноническому виду // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. 2011. № 26. С. 76–81.

[11] Дуюнова А.А. Три-ткани $W(1, n, 1)$ и ассоциированные системы ОДУ // Изв. ВУЗов. Математика. 2012. № 2. С. 43–56.

[12] Дуюнова А.А. Три-ткани, определяемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений // Фундам. и прикл. математика. 2010. Т. 16, № 2. С. 13–31.

ON OHOLOMORPHICALLY PROJECTIVE MAPPINGS OF PARABOLIC KÄHLER MANIFOLDS

M. Shiha, J. Mikeš, P. Peška

(Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyzstan; Palacký University, Olomouc, Czechia)

E-mail address: almazbek.asanovich@mail.ru, patrik.peska@upol.cz, josef.mikes@upol.cz

In this paper we study fundamental equations of holomorphically projective mappings of parabolic Kähler spaces (which are generalization of classical, pseudo- and hyperbolic Kähler spaces) with respect to the smoothness class of metrics.

We show that holomorphically projective mappings preserve the smoothness class of metrics.

Theorem 1. *A diffeomorphism* $f : K_n^{o(m)} \to \bar{K}_n^{o(\bar{m})}$ *is a holomorphically-projective mapping if and only if there exist a solution of the following linear Cauchy-like system*

$$\begin{array}{rrcl} a) & a_{ij,k} & = & \lambda_{(i}g_{j)k} + \theta_{(i}F_{j)k}; \\ b) & \theta_{i,j} & = & \tau F_{ij} + a_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}_{1|ij}; \\ c) & \tau_{,i} & = & \theta_\alpha M^{\alpha}_{2|i} + a_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}_{3|i} \end{array} \tag{1}$$

on unknown tensor a_{ij} $(a_{ij} = a_{ji},\ a_{\bar{i}\bar{j}} + a_{i\bar{j}} = 0,\ \det a_{ij} \neq 0)$*, a vector* λ_i*, and a function* τ*. Here* $M^{\alpha\beta}_{1|ij}$*,* $M^{\alpha}_{2|i}$*,* $M^{\alpha\beta}_{3|i}$ *are tensors determined from metric and structure tensors* g_{ij} *and* F_i^h *of the space* $K_n^{o(m)}$.

REFERENCES

[1] Shirokov P.A. Constant vector and tensor fields // Izv. Kazan. Phys.-Math. Soc. 1925. V. 25. P. 86–114.

[2] Shirokov P.A. Selected investigations on geometry. Kazan Univ. Press, 1966.

[3] Cartan É. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, I, II // Bull. S.M.F. 1926. V. 54. P. 214–264; 1927. V. 55. P. 114–134.

[4] Hinterleitner I., Mikeš J. Fundamental equations of geodesic mappings and their generalizations // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 174, No. 5. P. 537–554.

[5] Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings onto Weyl manifolds // J. Appl. Math. 2009. V.2, No. 1. P. 125–133.

[6] Lichnerowicz A. Courbure, nombres de Betti, et espaces symetriques // Proc. Internat. Congr. Math., (Cambridge, Mass., Aug. 30-Sept. 6, 1950). 1952. V. 2. P. 216–223.

[7] Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations. Palacky Univ. Press, Olomouc, 2009.

[8] Mikeš J. , et al, Differential geometry of special mappings. Palacky Univ. Press, Olomouc, 2015.

[9] Norden A.P. Spaces of affine connection. Nauka, Moscow, 1976.

[10] Petrov A.Z. Einstein spaces. Pergamon Press, 1969.

[11] Prvanović M. Projective and conformal transformations in recurrent and Ricci-recurrent Riemannian spaces // Tensor. 1962. V. 12. P. 219–226.

[12] Sinyukov N.S. Geodesic mappings of Riemannian spaces. Nauka, Moscow, 1979.

[13] Takeno H., Ikeda M. Theory of the spherically symmetric spaces-times. VII. Space-times with corresponding geodesics // J. Sci. Hiroshima Univ. 1953. **A17**:1. P. 75–81.

ABOUT THE INVARIANCE OF GENERAL IDENTITIES OF RICCI AND BIANCHI IN THE SPACE OF AFFINE CONNECTION

A. V. Shults

(Immanuel Kant Baltic Federal University, Russia, Kaliningrad)

E-mail address: tonja92@mail.ru

Let us consider the space of affine connection $A_{n,n}$ with torsion, the Cartan structure equations of which have the form:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J + S^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K, \; d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L. \quad (1)$$

Differentiate the equations (1), the products of the basic forms are put out of brackets and collect the terms included in the operator of covariant differentiation ∇:

$$(\nabla S^I_{JK} - R^I_{JKL}\omega^L + 2S^I_{MJ}S^M_{KL}\omega^L) \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0,$$

$$(\nabla R^I_{JKL} + 2R^I_{JKN}S^N_{ML}\omega^M) \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0. \quad (2)$$

The differential equations for the components of the torsion object $S = \{S^I_{JK}\}$ and the components of the curvature object $R = \{R^I_{JKL}\}$ have the form:

$$\nabla S^I_{JK} = S^I_{JK;L}\omega^L, \; \nabla R^I_{JKL} = R^I_{JKL;M}\omega^M. \quad (3)$$

Substituting differential equations (3) into (2), we obtain the following:

$$(S^I_{JK;L} - R^I_{JKL} + 2S^I_{MJ}S^M_{KL})\omega^J \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0,$$

$$(R^I_{JKL;M} + 2R^I_{JKN}S^N_{ML})\omega^K \wedge \omega^L \wedge \omega^M = 0.$$

The coefficients of the products of the basic forms, which are iterated over the three indices, vanish. Given that the tensors of torsion, curvature and their Pfaff derivatives of the two indices are antisymmetric, alternation can be replaced by cycling (comp.[1]):

$$S^I_{\{JK;L\}} - R^I_{\{JKL\}} + 2S^I_{M\{J}S^M_{KL\}} = 0, \; R^I_{J\{KL;M\}} + 2R^I_{J\{K|N|}S^N_{ML\}} = 0. \quad (4)$$

These are general identities of Ricci and Bianchi.

Introduce the notation:

$$A^I_{JKL} \equiv S^I_{\{JK;L\}} - R^I_{\{JKL\}} + 2S^I_{M\{J}S^M_{KL\}},$$

$$B^I_{JKLM} \equiv R^I_{J\{KL;M\}} + 2R^I_{J\{K|N|}S^N_{ML\}}. \quad (5)$$

We continue with equations (3), resulting in comparisons:

$$\Delta S^I_{JKL} \cong 0,\ \Delta R^I_{JKLM} \cong 0\ (mod\ \omega^I). \tag{6}$$

Given the comparison (6) in the differentiation of quantities (5), we obtain

$$\Delta A^I_{JKL} \cong 0,\ \Delta B^I_{JKLM} \cong 0\ (mod\ \omega^I). \tag{7}$$

From comparisons (7) it follows that A^I_{JKL} and B^I_{JKLM} — tensors.

Statement. *General identities of Ricci and Bianchi* (4) *in the space affine connections $A_{n,n}$ are invariant.*

REFERENCES

[1] Шульц А.В. Об инвариантности тождеств Риччи и Бянки в пространстве аффинной связности с кручением // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. "Лобачевские чтения–2018". 2018. Т. 56. С. 329–332.

EXTREME NETWORKS AND THEIR TOPOLOGIES

E. Stepanova

(M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

E-mail address: ekfila@gmail.ru

The study is devoted to optimal weighted graphs with the vertices on the Euclidean plane. We construct bifurcation diagrams of topologies and types of Steiner minimal networks and minimal fillings (it is a generalisation of shortest network [1]) for four boundary points and discuss general properties of such diagrams for an arbitrary number of initial points [2]. It is an actual problem, as building of these kinds of optimal connecting graphs is NP-hard, and the most difficult point is to define the correct topological type.

One of the applications of this investigation is that we can easily compare the weight of a minimal filling and the length of a Steiner minimal network for a fixed boundary. The infimum of the ratio between them over all n-point sets in a metric space is called the Steiner subratio of this space. Based on bifurcations, we calculate the four-point Steiner subratio of the plane [3] and estimate this characteristic for Riemmanian manifolds.

REFERENCES

[1] Ivanov A.O., Tuzhilin A. A. One-dimensional Gromov minimal filling // arXiv:1101.0106v2 (2011) (дата обращения 02.02.2019).

[2] Stepanova E. Bifurcations of Steiner tree topologies on the Euclidean plane // Fundamental and Applied Mathematics. 2016. V. 21, No. 6. P. 183–204.

[3] Stepanova E. Bifurcations of Steiner minimal trees and minimal fillings for non-convex four-point boundaries and the Steiner subratio of the Euclidean plane // Vestnik Moskovskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. 2016. V. 71, No. 2. P. 48–51.

MANIFOLDS OF FREDHOLM OPERATORS

V. Vasilyev

(Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia)

E-mail address: vbv57@inbox.ru

We introduce some geometric structure generated by Fredholm operators acting in different functional spaces. This consideration is initiated by previous author's results [1, 3, 7].

Let M be a compact m-dimensional manifold with a boundary ∂M, and $A(x)$ be a certain operator-function defined on M. Let $M_k, k = 0, ..., m-1$, be smooth k-dimensional sub-manifolds on ∂M so that by definition $M_{m-1} \equiv \partial M$, M_0 consists of isolated points on ∂M. Further, we introduce a set of operator classes $\mathfrak{T}_k, k = 0, 1, ..., m$, so that for $x \in M_k$, $A(x) : H_k^{(1)} \to H_k^{(2)}$ is a linear bounded operator, where $H_k^{(j)}, k = 0, 1, ..., m, j = 1, 2$, are some Banach spaces.

Here we consider such functional spaces which include smooth functions and corresponding multipliers and only local operators, i.e. such operators A for which the operator $f \cdot A \cdot g$ is a compact operator for arbitrary smooth functions with non-intersecting supports.

Additionally all considered operators are defined up to compact operators.

We say that sub-manifold M_k is a singular k-sub-manifold if $\forall x \in M_k$ we have $A(x) \in \mathfrak{T}_k$.

Theorem 1. *If the family $A(x)$ consists of local Fredholm operators and this family is continuous on each component $\overline{M_k \setminus \cup_{i=0}^{k-1} M_i}, k = 0, 1, ..., m,$ then it generates a unique Fredholm operator A acting in the spaces*

$$\sum_{k=0}^{m} \oplus H_1^{(k)} \to \sum_{k=0}^{m} \oplus H_2^{(k)}.$$

Such operator A is called an elliptic operator if the operator-function $A(x)$ consists of Fredholm operators $\forall x \in M$. In a certain sense we can obtain the inverse result. Certain concrete realizations of this abstract approach were considered in papers [2, 4, 5, 6].

REFERENCES

[1] Vasilyev V.B. Pseudo-differential operators on manifolds with a singular boundary. In: Drygaś P., Rogosin S. (eds.) Modern Problems in Applied Analysis. Cham, Birkhäuser, 2018. 169–179.

[2] Vasilyev V. Pseudo-differential operators, equations and boundary value problems. AIP Conf. Proc. 2018. **2037**, 020028.

[3] Васильев В.Б. Об операторах, уравнениях и краевых задачах. Оптимальное управление и дифференциальные игры. Материалы международной конференции, посв. 110-летию со дня рождения Л.С Понтрягина. Москва, 12–14 декабря 2018 г. М.: МАКС Пресс. 2018. С. 285–287.

[4] Васильев В.Б. Об эллиптических уравнениях и краевых задачах. Тезисы докладов V Международной конференции, посв. 95-летию член-корр. РАН Л.Д. Кудрявцеву, Москва, РУДН, 26–29 ноября 2018 2018. С. 121.

[5] Vasilyev V.B. On some operator families. Abstracts of International Conference "Geometric Methods in Control Theory and Mathematical Physics". 25–28 September, Ryazan. 2018. P. 41–42.

[6] Vasilyev V.B. Pseudodifferential operators and equations of variable order // Differ. Equ. 2018. V. 54, No 9. P. 1184–1195.

[7] Vasilyev V.B. Operator symbols. `arXiv:math.FA/1901.06630`.

О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ К ХОРДОВОМУ ПРОСТРАНСТВУ НЕПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

П. Д. Андреев

(Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия)

E-mail address: `pdandreev@mail.ru`

Хордовые пространства, введены Буземаном и Пхадке в книге [1] как обобщение понятия G-пространств Буземана (см. [2]). В [3] показано, что всякое G-пространство M неположительной кривизны является n-мерным топологическим многообразием при некотором $n \in \mathbb{N}$, причём в каждой точке $x \in M$ корректно определён касательный конус $K_x M$, обладающий структурой n-мерного нормированного пространства со строго выпуклой нормой.

Возникает вопрос, справедлив ли аналогичный результат для хордовых пространств неположительной кривизны. В [4] приведена конструкция касательного конуса к хордовому пространству неположительной кривизны. Он получен объединением некоторого семейства образующих лучей с началом в x. Кроме того, в [4] изучены свойства конуса K_xM. На их основе получен следующий результат

Теорема 1. *Пусть M — хордовое пространство неположительной кривизны, K_xM — касательный конус к M в точке $x \in M$. Тогда для любых двух образующих лучей $a, b : [0, +\infty) \to K_xM$ существует слабо выпуклое подмножество $\alpha \subset K_xM$, изометричное двумерной нормированной плоскости, содержащее эти лучи: $a, b \subset \alpha$.*

Здесь слабая выпуклость подмножества $\alpha \subset K_xM$ означает, что для любых точке $x, y \in \alpha$ существует соединяющий их метрический отрезок, содержащийся в α.

Список литературы

[1] Busemann H., Phagke B. Spaces wis distinguished geodesics. New-York–Basel–Marcel, Dekker Inc., 1987.

[2] Буземан Г. Геометрия геодезических. М. Физматгиз, 1962.

[3] Андреев П.Д. Структура нормированного пространства в G-пространстве Буземана конического типа // Мат. Заметки. 2017. Т. 101, №2. С. 169–180.

[4] Андреев П.Д., Старостина В.В. Геометрия касательного конуса к G-пространству неположительной кривизны с выделенным семейством отрезков // Изв. вузов. Математика. 2016. №1. С. 3–14.

ГЕОМЕТРИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ РЭНДЕРСА

П. Д. Андреев, Д. В. Коротяев

(Северный (Арктический) федеральный университет, Архангельск, Россия)

E-mail address: pdandreev@mail.ru, dennis.korotyaev@gmail.com

Мы рассматриваем на плоскости с координатами $(x,\, y)$ верхнюю полуплоскость $y > 0$ и финслерову метрику Рэндерса, задаваемую функцией:

$$F(x, y, dx, dy) = \alpha + \beta, \tag{1}$$

где

$$\alpha^2(x, y, dx, dy) = \frac{1}{y}(a_{11}dx^2 + 2a_{12}dxdy + a_{22}dy^2)$$

— гиперболическая риманова метрика, подобная метрике модели Пуанкаре геометрии Лобачевского, а

$$b(x, y, dx, dy) = \frac{1}{y}(b_1 dx + b_2 dy)$$

— линейная форма, причём

$$\|\beta\|_\alpha = \frac{1}{y}(a_{11}b_1^2 + 2a_{12}b_1 b_2 + a_{22}b_2^2) < 1.$$

Для данной метрики изучается геометрическое строение геодезических. Мы используем метод, разработанный в [1] для случая симметричных финслеровых квазигиперболических метрик на полуплоскости и основанный на применении принципа максимума Понтрягина.

Основной результат даёт геометрическое описание семейства геодезических указанной метрики в следующем виде:

Теорема 1. *Семейство полных геодезических метрики* (1) *разбивается на следующие три подсемейства:*

1. *дуги эллипсов с началом и концом на оси ox, имеющие общее направление касательных в начале и общее направление касательных в конце (эти направления не обязательно совпадают);*

2. *лучи, начинающиеся на оси ox, идущие в направлении общих касательных в началах дуг первого семейства;*

3. *лучи, идущие из бесконечности, и оканчивающиеся на оси ox так, что касательные в конечной точке параллельны касательным в концах дуг первого семейства.*

Список литературы

[1] Грибанова И.А. Квазигиперболическая плоскость // Сиб. мат. ж. 1999. Т. 40, №2. С. 288—301.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A^8

О. А. Арабян

(Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения)

E-mail address: ofelya.arabyan@mail.ru

Проблема вложения того или иного многообразия в аффинное пространство является является одной из интересных в современной геометрии. Если теория подмногообразий в Евклидовом пространстве до некоторой степени построена, то теория подмногообразий в остальных пространствах включает только отдельные классы [1]. В настоящей работе в аффинном пространстве A^8 методом внешних форм изучен класс четырехмерных подмногообразий M. Вводится подвижной репер, адаптированный к структуре этого подмногообразия.

В касательном расслоении действуют линейные дифференциальные формы ω^i, ω^i_k, $i,k = 1,2,3,4$, а в нормальном — дифференциальные формы ω^α, ω^α_β, $\alpha,\beta = 5,6,7,8$. Линейные дифференциальные формы ω^α_i, ω^i_α, $i = 1,2,3,4$; $\alpha = 5,6,7,8$ устанавливают связь между касательным и нормальным расслоениями. В многообразии M базисные формы ω^5, ω^6, ω^7, ω^8 выражаются через ω^1, ω^2, ω^3, ω^4

$$\omega^\alpha = a^\alpha_i \omega^i, \quad \text{где} \quad i = 1,2,3,4, \ \ \alpha = 5,6,7,8; \tag{1}$$

$$\operatorname{rank}(a^\alpha_i) = 0,1,2,3,4.$$

В работе рассматривается случай, когда $\operatorname{rank}(a^\alpha_i) = 4$. Это означает, что $a^\alpha_i = \delta^{\alpha-4}_i$ и в этом случае вторичные формы ω^α_β выражаются через вторичные формы ω^i_k и линейная дифференциальная форма ω^i_α выражается в виде линейной комбинации главных базисных форм ω^1, ω^2, ω^3, ω^4.

Теорема 1. *Если четырехмерное подмногообразие аффинного пространства A^8 задано вложением (1) и $\omega^\alpha_k = a^\alpha_i a^\beta_k \omega^i_\beta$, то связность объемлющего пространства индуцирует на этом подмногообразии аффинную связность специального вида, которая определяется дифференциальными формами ω^i, ω^i_k, $i,k = 1,2,3,4$ и системой функций b^i_{kp}, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$d\omega^i = \omega^i_k \wedge \omega^k, \quad d\omega^i_k = \omega^i_p \wedge \omega^p_k + b^i_{pt} b^p_{km} \omega^t \wedge \omega^m$$
$$db^i_{kp} = b^t_{kp}\omega^i_t - b^i_{tp}\omega^{t+3}_{k+3} - b^i_{kt}\omega^t_p + b^i_{kpt}\omega^t, \quad b^i_{kpt} = b^i_{kr} b^r_{qp}.$$

Из теоремы Уитни следует, что четырёхмерные многообразия могут быть вложены в аффинное девятимерное пространство. Результат, полученный в теореме 1, показывает, что в случае $\mathrm{rank}(a_i^\alpha) = 4$ четырехмерное многообразие допускает вложение в аффинное пространство A^8, если кручение этого подмногообразия является нулевым.

Список литературы

[1] Arabyan O. About a class of three-dimensional submanifolds in affine space A^6 // AAPP, Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 2017. V. 95(2)A*. P. 53–57.

РЕТРАКТАБЕЛЬНЫЕ И КОРЕТРАКТАБЕЛЬНЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Д. Ю. Артемов

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: dyu.artemov@mail.ru

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Левый R-модуль M называется *ретрактабельным*, если для каждого его ненулевого подмодуля N выполнено $\mathrm{Hom}_R(M,\, N) \neq 0$ [2]. Левый R-модуль M называется *коретрактабельным*, если для каждого его собственного подмодуля N выполнено $\mathrm{Hom}_R(M/N,\, M) \neq 0$ [1].

В нашей работе получено полное описание классов ретрактабельных и коретрактабельных модулей над кольцом целых чисел (т. е. ретрактабельных и коретрактабельных абелевых групп). Абелева группа A называется *ретрактабельной*, если для каждой её ненулевой подгруппы B выполняется $\mathrm{Hom}(A,\, B) \neq 0$. Аналогично, абелева группа A называется *коретрактабельной*, если для каждой её собственной подгруппы B выполняется $\mathrm{Hom}(A/B,\, A) \neq 0$.

Все группы, о которых пойдёт речь в дальнейшем, предполагаются абелевыми, записанными аддитивно. Через $t_p(A)$ мы обозначаем p-компоненту группы A, через $\mathbb{Q}$ — аддитивную группы всех рациональных чисел, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — обозначение квазициклической p-группы (p — простое число). Абелева группа называется *свободной*, если она раскладывается в прямую сумму бесконечных циклических групп.

Теорема 1. *Пусть A — периодическая группа. A является ретрактабельной тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевых делимых p-компонент.*

Напомним, что группа A называется *коредуцированной*, если она не содержит свободных прямых слагаемых.

Получены следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть A — непериодическая группа. A является ретрактабельной тогда и только тогда, когда A не является коредуцированной.*

Теорема 3. *Не существует ненулевых коретрактабельных групп без кручения.*

Теорема 4. *Пусть A — периодическая группа. A является коретрактабельной тогда и только тогда, когда для каждой её p-компоненты $t_p(A)$ выполняется одно из следующих условий:*

1. *$t_p(A)$ является ограниченной.*

2. *$t_p(A)$ не является редуцированной.*

Теорема 5. *Пусть A — смешанная группа. Тогда*

1. *Если A содержит подгруппу вида $\mathbb{Q}$, то A является коретрактабельной тогда и только тогда, когда она для любого простого числа p содержит подгруппу вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$.*

2. *Если A не содержит подгрупп вида $\mathbb{Q}$, то A является коретрактабельной тогда и только тогда, когда для всех простых чисел p таких, что A не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, любая факторгруппа группы A также не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и дополнительно $t_p(A)$ отлична от нуля.*

Список литературы

[1] Amini B., Ershad M., Sharif H. Coretractable modules // J. Aust. Math. Soc. 2009. V. 86, No. 3. P. 289–304.

[2] Khuri S.M. Endomorphism rings and lattice isomorphisms // J. Algebra. 1979. V. 56, No. 2. P. 401–408.

О СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ РАШЕВСКОГО E_n^{2n}

С. Х. Арутюнян

(Армянский государственный педагогический университет, Ереван, Армения)

E-mail address: sharoutunian2017@gmail.com

Пространство Рашевского — это $2n$-мерное псевдориманово пространство с метрикой индекса n. Структурные уравнения псевдоевклидова пространства Рашевского (тензор кривизны — нулевой) могут быть представлены в виде

$$d\omega^I = \omega_K^I \wedge \omega^K,\;\; d\omega_I = -\omega_I^K \wedge \omega_K,\;\; d\omega_K^I = \omega_P^I \wedge \omega_K^P, \quad I, K, P = 1, 2, \ldots, n,$$

где линейные дифференциальные вторичные формы ω_K^I не зависят от главных базисных форм ω^1, ω^2, …, ω^n, ω_1, ω_2, …, ω_n и друг от друга, заданы на расслоении $T^{(2)}E_n^{2n}$ реперов второго порядка на E_n^{2n}. Настоящая работа посвящена геометрии специального класса подмногообразий M размерности $2m$ $(2m > n)$ со структурой двойного расслоения, заданного системой линейных дифференциальных уравнений

$$\omega^{m+i} = \omega_i,\;\; \omega_{m+i} = -\omega^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Билинейная форма $d\varphi = \omega^I \wedge \omega_I$, играющая роль метрики на M, может быть записана в виде $d\varphi = \omega^I \wedge \omega_I = 2\omega^i \wedge \omega_i + \omega^\xi \wedge \omega_\xi$, $\xi = n-m+1, \ldots, m$ [1]. Класс подмногообразий $N \subset M \subset E_n^{2n}$, $\dim N = 2(2m-n)$ задается структурными уравнениями

$$d\omega^\alpha = \omega_b^\alpha \wedge \omega^b,\;\; d\omega^a = 0,\;\; d\omega_\alpha = 0,\;\; d\omega_a = -\omega_a^\alpha \wedge \omega_\alpha,$$
$$d\omega_a^\alpha = -C_i^{\alpha\beta} C_{ab}^i\, \omega^b \wedge \omega_\beta, \tag{1}$$

где

$$dC_{ab}^i = C_{ab}^k\, \omega_k^i + C_{\xi\eta\nu}^i\, \omega^\nu,\;\; dC_i^{\alpha\beta} = -C_k^{\xi\eta}\omega_i^k + C_i^{\xi\eta\nu}\omega_\nu,$$
$$\operatorname{rank}(C_{\xi\eta}^i) = u,\;\; \operatorname{rank}(C_i^{\xi\eta}) = v, \tag{2}$$

$\alpha, \beta = n-m+1, \ldots, n-m+u$; $a, b = n-m+u+1, \ldots, m$. $u + v = 2m - n$.

Теорема 1. *Параметрические уравнения подмногообразия N могут быть приведены к виду $X^i = x^i$, $X^\xi = x^\xi - C_i^\xi(y_{n-m+1}, \ldots, y_m)x^i$, $X^{m+i} = y_i$, $Y_i = y_i + C_i(y_{n-m+1}, \ldots, y_m)$, $Y_\xi = y_\xi$, $Y_{m+i} = -x^i$.*

Теорема 2. *Дифференциально-геометрическая структура* (1)–(2) *индуцируется на подмногообразии* N *интегралом формы*

$$\Omega = P(x)Q(y)\exp(x^\alpha y_\alpha + x^a y_a - \frac{1}{2}C_i^\alpha C_a^i x^a y_\alpha)\omega^{n-m+1} \wedge \dots \wedge \omega^m,$$

где $P(x) = P(x^{n-m+1}, \dots, x^m)$ *и* $Q(y) = Q(y_{n-m+1}, \dots, y_m)$ *суть интегралы некоторых положительных гладких функций переменных* x *и* y *соответственно.*

Заметим, что компоненты тензора кривизны — производные функций C_i^α и C_a^i.

Список литературы

[1] Haroutunian S. On special class of submanifolds in pseudoeuclidean space E_n^{2n} // Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti — Classe di Scienze Fisiche. Matematiche e Naturali. 2017. V. 93 (2). A4-1–A4-14.

О ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ n-КРУЧЕНЫХ ГРУПП

В. С. Атабекян

(Yerevan State University, Yerevan, Armenia)

E-mail address: avarujan@ysu.am

Группа называется *гиперболической*, если, снабжённая словарной метрикой относительно некоторого порождающего множества, она оказывается гиперболической как метрическое пространство. Можно показать, что это определение не зависит от выбора порождающего множества. Всякая собственно разрывная группа G изометрий полного односвязного риманова многообразия отрицательной секционной кривизны, для которой факторпространство M/G компактно, является гиперболической. Если G — гиперболическая, то для некоторого ее конечного представления проблема равенства слов этой группы решается алгоритмом Дэна.

Скажем, что группа $G = \langle X \mid R^n = 1, R \in \mathcal{R}\rangle$ является *n-крученой группой*, если для любого элемента $Y \in G$ либо $Y^n = 1$, либо Y имеет бесконечный порядок. Свободные бернсайдовы группы периода n — классические примеры n-крученых групп. Очевидно, абсолютно свободные группы любого ранга являются n-кручеными группами для любого натурального n. Любая фактор группа вида F/H^n абсолютно свободной группы F

тоже n-крученая при условии, что фактор группа F/H является группой без кручения. Можно показать, что существует континуум неизоморфных 2-порожденных n-крученных групп. Нами показана

Теорема 1. *Любая конечно порожденнная n-крученая группа либо гиперболична, либо является прямым пределом гипорболических групп при достаточно больших нечетных экспонент n.*

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ГЕОМЕТРИИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ AH-МНОГООБРАЗИЙ

М. Б. Банару

(Смоленский государственный университет, Смоленск, Россия)

E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

Почти контактная метрическая структура относится к числу важнейших дифференциально-геометрических структур. Напомним, что под почти контактной метрической структурой на многообразии N мы понимаем систему тензорных полей $\{\Phi,\xi,\eta,g\}$, для которой выполняются такие условия [1]:

$$\eta(\xi) = 1,\ \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,\ \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,$$

$$\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right),\ X, Y \in \aleph(N),$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,\ 1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Наиболее важными примерами почти контактных метрических структур являются структуры на пространствах так называемых главных T^{-1}-расслоений над почти эрмитовыми многообразиями, а также на ориентируемых гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий [2].

В докладе предполагается привести ряд новых результатов, полученных в последние годы в геометрии почти контактных метрических гиперповерхностей АН-многообразий. Некоторые результаты были получены совместно В.Ф. Кириченко, А. Абу-Салимом, Г.А. Банару и Л.В. Степановой; часть их них уже опубликована [2], [3], [4], [5], часть — еще нет.

Среди наиболее интересных результатов выделим два следующих:

1) установлено, что в почти эрмитовых многообразиях, принадлежащих классам келеровых, приближенно келеровых, локально конформно келеровых, почти келеровых и специально эрмитовых многообразий, почти контактные метрические структуры на вполне геодезической гиперповерхности и на гиперповерхности с типовым числом 1 являются идентичными;

2) показано существование отличной от косимплектической и кенмоцевой структуры косимплектического типа на гиперповерхностях специальных эрмитовых и локально конформных келеровых многообразий.

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013.

[2] Banaru M.B., Kirichenko V.F. Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2015. V. 207, No. 4. P. 513–537.

[3] Abu-Saleem A., Banaru M.B., Banaru G.A. A note on 2-hypersurfaces of the nearly Kählerian six-sphere // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. 2017. Т. 85, №3. P. 107–114.

[4] Степанова Л.В., Банару М.Б., Банару Г.А. О геометрии QS-гиперповерхностей келеровых многообразий // Сибирские электронные математические известия. 2018. Т. 15. С. 815–822.

[5] Банару М.Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4-многообразиях // Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. 2018. №1. С. 67–70.

ПРОСТРАНСТВО ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА КАК ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ БЕЗ СВЯЗНОСТИ

К. В. Башашина

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: baschaschina@mail.ru

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_I\}$ $(I, J, K, \ldots = \overline{0, n})$ с деривационными формулами $dA_I = \omega_I^J A_J$ и структурными уравнениями $d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I$, причем выполняется условие проективности

$$\omega_I^I = 0. \tag{1}$$

В рассматриваемом пространстве P_n эффективно действует специальная линейная группа $SGL(n+1)$, $\dim SGL(n+1) = n(n+2)$.

Фиксируя точку $A \in P_n$ получим центропроективное пространство P_n^0. Совместим вершину A_0 репера $\{A_0, A_i\}$ $(i, j, k, \ldots = \overline{1, n})$ с центром A пространства P_n^0. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega_0^i = 0$ обеспечивает фиксацию точки A_0. Эта система выделяет из специальной линейной группы $SGL(n+1)$ центрированную специальную линейную подгруппу стационарности G_{n^2+n} со структурными уравнениями $d\tilde{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^k \wedge \tilde{\omega}_k^i$, $d\tilde{\omega}_i^0 = \tilde{\omega}_i^0 \wedge \tilde{\omega}_0^0 + \tilde{\omega}_i^j \wedge \tilde{\omega}_j^0 \quad (\tilde{\omega} = \omega|_{\omega_0^i=0})$.

Возьмем n-мерное гладкое многообразие M_n со структурными уравнениями [1] $d\Omega^i = \Omega^j \wedge \Omega_j^i$. Вполне интегрируемая система уравнений $\Omega^i = 0$ фиксирует точку x данного M_n.

К каждой точке $x \in M_n$ присоединим проективное пространство $P_n(x)$ со структурными уравнениями $d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^i \wedge \omega_{Ji}^I$. В результате приклеивания [2], т.е. при $x = A$, пространства $P_n(x)$ становятся центропроективными пространствами $P_n^0(x)$ с центром x. Отметим [3], что смежное пространство $P_n^0(x+dx)$ отображается на исходное, если выполняются условия: $\omega_{Ji}^I = R_{Jij}^I \omega_0^j$.

Таким образом, приходим к структурным уравнениям пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$:

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R_{Jij}^I \omega_0^i \wedge \omega_0^j, \tag{2}$$

причем коэффициенты R_{Jij}^I антисимметричны по индексам i, j.

Из этих уравнений следует, что базисные формы ω_0^i удовлетворяют структурным уравнениям $d\omega_0^i = \omega_0^j \wedge (\omega_j^i + \delta_j^i \omega_k^k + R_{0jk}^i \omega_0^k)$. Сравнивая их с уравнениями M_n, получим $\omega_0^i = \Omega^i$, $\Omega_j^i = \omega_j^i + \delta_j^i \omega_k^k + R_{0jk}^i \omega_0^k$.

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ со структурными уравнениями (2) и условиями (1) есть главное расслоение $G_{n^2+n}(M_n)$ над базой M_n, типовым слоем которого служит центрированная специальная линейная группа G_{n^2+n}, действующая эффективно в каждом центропроективном пространстве $P_n^0(x)$, приклеенном к базе в точке $x \in M_n$. Причем в этом главном расслоении связность отсутствует.

Список литературы

[1] Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. 1966. Т. 1. С. 139–189.

[2] Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геом. 1979. Т. 9. 248 с.

[3] Картан Э. Пространство аффинной, проективной и конформной связности. 1962. 210 с.

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА–СТИЛТЬЕСА ТРЕТЬЕГО РОДА

Н.С. Беделова

(Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан)

E-mail address: kireshe78@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$m(t)v(t) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)v(s)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [t_0, T], \quad T > t_0, \tag{1}$$

где $K(t,s)$, $f(t)$, $m(t)$ — заданные функции, $m(t_0) = 0$, $m(t)$ — неубывающая непрерывная функция на $[t_0, T]$, $v(t)$ — неизвестная функция на $[t_0, T]$, $\varphi(t)$ — возрастающая непрерывная функция на $[t_0, T]$.

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать уравнение

$$(\varepsilon + m(t))\vartheta(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\vartheta(s,\varepsilon)d\varphi(s) = f(t) + \varepsilon u(t_0), \quad t \in [t_0, T], \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon$ — малый параметр, $(t,s) \in G = \{(t,s) : t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$. Предположим выполнения следующих условий:

а) $K(t,s) \in C(G), K(t,t) \geqslant 0$, при $t \in [t_0, T]$;

б) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau, s), (\eta, s) \in G = \{(t,s) : t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ справедлива оценка $|K(\tau,s) - K(\eta,s)| \leqslant l(s) \int_{\eta}^{\tau} K(s,s)d\varphi(s)$, где $l(t) \geqq 0$ при $t \in [t_0, T]$ и $l(t) \in C[t_0, T]$, $q \geqslant 1$. Здесь $C[t_0, T]$ — пространство всех непрерывных функций $v(t)$, определенных на $[t_0, T]$ с нормой

$$\|v(t)\|_C = \max\{\|v(t)\|, t \in [t_0, T]\}.$$

Доказана следующая теорема

Теорема 1. *Пусть выполняются условии* а) *и* б)*. Тогда, если* $K(t,t) > 0$ *при почти всех* $t \in [t_0, T]$ *и уравнение* (1) *имеет решение* $\nu(t) \in C[t_0, T]$, *то решение* $\upsilon(t, \varepsilon)$ *уравнения* (2) *при* $\varepsilon \to 0$ *сходится по норме* $C[t_0, T]$ *к* $\nu(t)$*. При этом справедлива оценка*

$$\|\upsilon(t,\varepsilon) - \nu(t)\|_\zeta \leqslant 3e^{-1}M_3\|\upsilon(t)\|_\zeta \varepsilon^{1-\beta} + M_3\overline{\omega}_{\overline{\upsilon}}(\varepsilon^\beta), \tag{3}$$

где β *— произвольное число из* $(0, 1)$.

Различные вопросы для интегральных уравнений исследованы в работах [1]–[3]. Для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра–Стилтьеса третьего рода выбран параметр регуляризации для регуляризирующего оператора по М.М. Лаврентьеву.

Список литературы

[1] Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. 1959. Т. 127, №1. С. 31–38.

[2] Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра–Стилтьеса второго и первого рода // Журнал Естественных наук. КТУМ. 2002. №2. С. 79–95.

[3] Беделова Н.С. Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра–Стилтьеса третьего рода // Вестник ОшГУ. 2007. №2. С. 142–147.

ОБ УСЛОВИЯХ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ТЕНЗОРА НОРМАЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

И. И. Бодренко

(ООО «Интерактивные системы», Волгоград, Россия)

E-mail address: `irina@bodrenko.org`

Пусть F^n — n-мерное ($n \geq 2$) гладкое подмногообразие в $(n+p)$-мерном ($p \geq 2$) пространстве постоянной кривизны $M^{n+p}(\tilde{c})$. Обозначим через $\tilde{g}$ риманову метрику на $M^{n+p}(\tilde{c})$, через g — индуцированную риманову метрику на F^n, через $\tilde{\nabla}$ и ∇ — римановы связности на $M^{n+p}(\tilde{c})$ и F^n, согласованные с $\tilde{g}$ и g, соответственно. Пусть b — вторая фундаментальная форма F^n в $M^{n+p}(\tilde{c})$. Обозначим через D и $R^{\perp}$ соответственно нормальную связность и тензор нормальной кривизны F^n в $M^{n+p}(\tilde{c})$, через $\overline{\nabla} = \nabla \oplus D$ — связность Ван дер Вардена–Бортолотти.

Вторая фундаментальная форма $b \neq 0$ называется циклически рекуррентной, если на F^n существует 1-форма μ такая, что

$$\overline{\nabla}_X b(Y,Z) = \mu(X)b(Y,Z) + \mu(Y)b(Z,X) + \mu(Z)b(X,Y)$$

для любых векторных полей X, Y, Z, касательных к F^n.

Подмногообразия F^n в $M^{n+p}(\tilde{c})$ с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой $b \neq 0$ (коротко, циклически рекуррентные подмногообразия) являются естественными обобщениями поверхностей Дарбу в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Циклически рекуррентные подмногообразия F^n с плоской нормальной связностью $R^{\perp} \equiv 0$ в евклидовых пространствах E^{n+p} классифицированы в [1].

Тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ называется параллельным,если $\overline{\nabla} R^{\perp} \equiv 0$.

Основным инвариантом нормальной связности D двумерной поверхности F^2 в евклидовом пространстве E^4 является гауссово кручение $\varkappa$. В работе [2] установлено, что поверхность $F^2 \subset E^4$ имеет постоянное гауссово кручение $\varkappa \equiv \text{const} \neq 0$ тогда и только тогда, когда тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$ параллелен.

Теорема 1. *Пусть на подмногообразии F^2 в пространстве постоянной кривизны $M^4(\tilde{c})$ тензор нормальной кривизны $R^{\perp} \neq 0$. Тогда, если $F^2 \subset M^4(\tilde{c})$ имеет циклически рекуррентную вторую фундаментальную форму $b \neq 0$, то $F^2 \subset M^4(\tilde{c})$ имеет параллельный тензор нормальной кривизны $\overline{\nabla} R^{\perp} \equiv 0$.*

Список литературы

[1] Бодренко И.И. Строение подмногообразий с циклически рекуррентной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве // Вестник Волгоградского гос. ун-та. Серия 1: Математика. Физика. 2011. № 1(14). С. 10–17.

[2] Бодренко И.И. Характеристический признак поверхностей с постоянным гауссовым кручением в E^4 // Вестник Волгоградского гос. ун-та. Серия 1: Математика. Физика. 2013. №2(19). С. 13–17.

МЕТОД "ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА" В РАЗВИТИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ

Г. М. Борбоева

(Ошский государственный университет, Ош, Кыргызстан)

E-mail address: Borbo71@mail.ru

В настоящее время при изображении особенностей теоретических проблем, исследуемые в науке и технике, и их применение или воздействие в других областей науки широко применяется графическое моделирование. Здесь от специалиста требуется не только его профессиональная подготовка, но и высокое пространственное мышление.

Большое значение в развитии пространственного мышления имеют изображения пространственных фигур на плоскости. В работах [1], [2] показана роль параллельной проекции в изображении пространственных фигур и геометрических построений в пространстве, способствующие развитию пространственного мышления студентов.

Изображения цилиндрических, конических поверхностей, поверхностей вращения, многогранников можно давать с помощью параллельной проекции. Но не всегда изображение пространственной фигуры на плоскости дает пространственное представление о нем. Например, изображение скрещивающихся прямых, совокупность прямых и плоскостей в пространстве. С помощью вспомогательного куба [3] можно преодолеть эти трудности. Ребра куба дают пространственное представление о скрещивающихся прямых, а если убрать куб, то исчезает пространственная наглядность, получим пересекающие прямые на плоскости. Но, и не все пространственные фигуры удобно изобразить с помощью вспомогательного куба. Например, расположение точек, векторов в пространстве. Вершины параллелепипеда дают пространственное представление о точке, а диагонали — о векторах. Изображенный на плоскости параллелепипед облегчает работу нашего восприятия о пространственной фигуре. А также использование вспомогательного параллелепипеда не только "превращает" плоскостное изображение в пространственную, но и указывает пути решения некоторых стереометрических задач.

Список литературы

[1] Борбоева Г.М. Роль метода параллельной проекции в развитии пространственного мышления студентов // Вестник КГУСТА (Бишкек). 2016. №2(52). С. 218–223.

[2] Матиева Г., Борбоева Г.М. Решение задач на построение — как один из способов развитию пространственного мышления студентов-математиков // Вестник КГУСТА (Бишкек). 2016. №2(52). С. 227–232.

[3] Либерзон М.Р. Вспомогательный куб // Квант. 1986. №5. С. 46–50.

О СТРУКТУРАХ В ИНФОРМАТИКЕ

Ю. И. Бродский

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: yury_brodsky@mail.ru

Эрлангенская программа Ф. Клейна [1] положила начало возрождению интереса в точных науках к методам структурализма, которые до этого были в тени преимущественно позитивистских подходов Нового времени. В основе этих методов лежит выявление структуры, как совокупности отношений на базисных множествах, которая сохраняется (инвариантна) при определенных их преобразованиях (морфизмах) и перенос исследовательского внимания с объектов базисных множеств и их свойств, на отношения между ними и определяемые этими отношениями свойства системы в целом. Известны математические формализации упомянутого выше понятия структуры, например, теория родов структур Н. Бурбаки, теория категорий.

В математическом моделировании всякая модель начинается с неформализуемого отображения с помощью аналогии (неформальной версии морфизма) атрибутов изучаемой сущности на множество числовых характеристик будущей модели. Затем на этих характеристиках, как на базисном множестве, придумывается структура, которая и будет математической моделью изучаемой сущности.

В работе [2] удалось формализовать семейство имитационных моделей сложных систем семейством родов структур в смысле Н. Бурбаки. Базисными множествами представителей семейства являются совокупности множеств характеристик модели, методов (того, что модель умеет делать) и событий (того, на что модель должна уметь реагировать). Семейство родов структур "модель-компонента" обладает двумя важными свойствами:

1. Организация имитационных вычислений инвариантна для всех представителей семейства. Значительная часть этих вычислений может выполняться параллельно. Это означает возможность создания универсальной программы, ориентированной на высокопроизводительные или распределенные вычисления, способной запустить на выполнение любую имитационную модель, если та является математическим объектом, снабженным структурой рода семейства "модель-компонента".

2. Семейство родов структур "модель-компонента" оказывается замкнутым, относительно операции объединения моделей-компонент в модель-комплекс. Комплекс, полученный объединением моделей-компонент, сам принадлежит семейству родов структур "модель-компонента", и, следовательно, может включаться в новые комплексы, а организация его вычислений может осуществляться той же самой универсальной программой.

Приведенные выше свойства семейства родов структур "модель-компонента" позволяют предложить новый модельно-ориентированный метод программирования для программной реализации имитационных моделей сложных систем.

Список литературы

[1] Об основаниях геометрии // Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей / Ред. и вступ. статья А.П. Нордена, М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956. 533 с.

[2] Бродский Ю.И. Роды структур Н. Бурбаки в задаче синтеза имитационных моделей сложных систем и модельно-ориентированное программирование // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 1. С. 153–164.

ПРЕПОДАВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ В ВУЗЕ: ДИАЛЕКТИКА КЛАССИКИ И СОВРЕМЕННОСТИ

А. Букушева

(Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия)

E-mail address: bukusheva@list.ru

Преподавание геометрии, как в педагогических, так и в классических вузах имеет давние традиции, которые развивались и изменялись в соответствии с запросами общества и на базе научных исследований в области математики, психологии, педагогики.

В настоящее время в преподавании геометрии в вузе можно выделить следующие тенденции.

1. Современная геометрия, также как и другие области математики, использует информационные технологии для решения своих задач. В последние десятилетия активно развивается компьютерное геометрическое моделирование. Компьютерные методы решения задач активно проникают в многочисленные приложения современной геометрии: инженерное дело, дизайн, распознавание образов и т.п. Разработано много программ, позволяющих визуализировать геометрические объекты, наглядно демонстрировать их свойства и ставить компьютерные эксперименты с целью проверки гипотез. В русле этой тенденции набирает силу "экспериментальная математика" со своими принципами, методами и критериями.

2. Образовательное, развивающее, прикладное значение геометрии не только не утрачивается, но и, наоборот, возрастает. Классические геометрические идеи и понятия лежат в основе разнообразных разделов современной математики, в большинстве ее разделов используется геометрический язык и методы. Более того, можно констатировать геометризацию многих математических объектов [1]. Часто проникновение геометрических идей

приводит к созданию новых теорий, постановке новых задач, не только в математике, но и теоретической физике. В современном образовании геометрия играет исключительную роль. Геометрия знакомит обучающихся с разнообразием пространственных форм, дает метод научного познания, способствует развитию логического мышления.

3. Соединение этих двух тенденций возможно на основе общенаучного принципа дополнительности, сформулированного Н. Бором: противоположности не противоречат, а дополняют друг друга.

Список литературы

[1] Иванов А., Тужилин А., Шафаревич А. Геометрия [Электронный ресурс] URL: http://dfgm.math.msu.su/files/encycl_geometry.pdf. (дата обращения: 26.02.2019)

О ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ $\mathbb{R}$-ДЕРЕВЬЯХ

А. И. Булыгин

(Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия)

E-mail address: alexey.buligin@gmail.com

Подобно однородные пространства с внутренней метрикой рассматривались В.Н. Берестовским для локально компактного случая в статье [1]. Им была получена полная характеризация указанных типов пространств и их групп подобий. Если отбросить условие локальной компактности, то теорема Берестовского утрачивает силу: появляется класс локально полных подобно однородных $\mathbb{R}$-деревьев.

В нашей работе исследуются подобно однородные пространства общего вида и в частности $\mathbb{R}$-деревья. Геодезическое пространство называется $\mathbb{R}$-деревом, если любые две его точки соединяются единственной дугой, то есть путём, не имеющим наложений. Всякий такой путь автоматически является отрезком.

Локально полное подобно однородное $\mathbb{R}$-дерево называется строго вертикальным, если функция радиуса полноты $c(x)$ на каждом отрезке имеет не более одного экстремума. Строго вертикальные $\mathbb{R}$-деревья классифицируются по числу ветвления и типу ветвления: кверху либо книзу. Примеры локально полных подобно однородных $\mathbb{R}$-деревьев построены П.Д. Андреевым в статье [2]. Мы называем такие $\mathbb{R}$-деревья модельными.

Теорема 1. *Всякое строго вертикальное $\mathbb{R}$-дерево с ветвлением кверху (соответственно, книзу) изометрично модельному строго вертикальному $\mathbb{R}$-дереву с ветвлением кверху (соответственно, книзу) и тем же числом ветвления.*

Помимо строго вертикальных $\mathbb{R}$-деревьев, изучаются $\mathbb{R}$-деревья, которые можно охарактеризовать, как вертикальные, но не строго вертикальные. Для такого $\mathbb{R}$-дерева функция радиуса полноты $c(x)$ является пилообразной. В этом случае показано, что число ветвления такого $\mathbb{R}$-дерева в каждой точке как минимум континуально.

Список литературы

[1] Берестовский В.Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Матем. 2004. №11. С. 3–22.

[2] Андреев П.Д. Полулинейные метрические полурешетки на $\mathbb{R}$-деревьях // Изв. вузов. Матем. 2007. №6. С. 3–13.

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

И. М. Бурлаков

(Тверской государственный университет, Тверь, Россия)

E-mail address: `don.burlakoff@yandex.ru`

Обобщением евклидовых и псевдоевклидовых пространств, геометрия которых определяется группами преобразований, сохраняющих квадратичную форму $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = g_{kh}x^k x^h$, будут *почти евклидовы пространства*, геометрия которых определяется группами преобразований, сохраняющих форму $\mathbf{g}_m(\mathbf{x}) = g_{k_1 k_2 \dots k_m} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_m}$, где $m \geqslant 2$.

Однако, задача отыскания преобразований линейного пространства, сохраняющих форму, степень которой больше двух, в общем случае представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Если линейные преобразования, сохраняющие квадратичную форму можно отыскать средствами теории матриц, то для поиска преобразований, сохраняющих форму степени выше двух, мы должны использовать гораздо более сложный аппарат теории многомерных матриц. Но ситуация изменится, если у нас будет простой способ, позволяющий отыскать группу линейных преобразований, сохраняющих ту или иную форму какой-либо степени. Один такой способ связан с линейными алгебрами и в общих чертах может быть описан следующим образом.

Пусть $\mathbf{K}_n$ — какая-либо унитальная алгебра, а $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{K}_n)$ — группа обратимых элементов алгебры $\mathbf{K}_n$. И пусть $\mathbf{L}_k \subseteq \mathbf{K}_n$ — линейное подпространство, такое, что для любых $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_k$ и любых элементов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ некоторой подгруппы $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{\Gamma}(\mathbf{K}_n)$ всегда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b} \in \mathbf{L}_k$. Тогда, если найдётся функция $\varphi\colon \mathbf{K}_n \to \mathbf{K}_n$, такая что $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$ и $\varphi(\mathbf{axb}) = \varphi(\mathbf{x})$ для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{G}$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_k$, то на подпространстве $\mathbf{L}_k \subseteq \mathbf{K}_n$ возникает почти евклидова геометрия. Её фундаментальная форма получается ограничением функции $\varphi(\mathbf{x})$ на $\mathbf{L}_k$, а движениями в этой геометрии будут преобразования $\mathbf{L}_k$, порождаемые линейными алгебраическими функциями $\mathbf{x}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{G}$.

Примерами таких алгебр могут служить любые ассоциативные алгебры, у которых в качестве фундаментальной формы берётся детерминант текущего элемента, а так же элементальные алгебры, обобщающие алгебры комплексных альтернионов.

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

М. П. Бурлаков

(Москва, Россия)

E-mail address: `burlakovmihail@mail.ru`

Как показал Эли Картан, механике Ньютона можно дать геометрическую интерпретацию, подобную той, какую Герман Минковский дал механике Лоренца, описывающей движение заряженных частиц в электромагнитных полях. В этой интерпретации пространство-время представляет собой четырёхмерное аффинное пространство с дополнительной "метрической" структурой, определяемой группой Галилея, преобразования которой имеют вид: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$, $t' = t$. В дальнейшем такая геометрия получила имя Галилея. При этом в пространстве-времени Галилея "расстояние" между двумя точками даётся разностью их временных координат, а "геодезическими" линиями будут решения дифференциального уравнения $d^2\mathbf{r}/dt^2 = 0$.

Обобщением геометрии пространства Галилея будут *пространства подвижности m-го порядка* $\mathbf{Q}_m$, у которых группа движений даётся преобразованиями:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v_1}t + \mathbf{v_2}t^2 + \ldots + \mathbf{v_m}t^m \text{ и } t' = \theta(t),$$

где $\theta(t)$ — некоторый многочлен степени m, принимающий значение в факторкольце $\mathbf{R}[t]/\mathbf{J}^m$ кольца многочленов $\mathbf{R}[t]$ по идеалу $\mathbf{J}^m$, порождённому тождеством $t^{m+1} = 0$.

В пространстве подвижности того порядка роль "геодезических" линий будут играть *траектории свободного движения*, т. е. решения дифференциального уравнения $d^{m+1}\mathbf{r}/dt^{m+1} = 0$. При этом через любой набор из $(m+1)$ *разделённых точек*, у которых не совпадают временные координаты проходит единственная траектория свободного движения, что даёт возможность определить *совокупные расстояния* между точками наборов из $(m+1)$ разделённых точек.

Пространства подвижности описывают геометрию пространства-времени механики, в которой силовые поля зависят от производных скорости различных порядков. При этом пространственная гиперповерхность может быть как трёхмерным евклидовым пространством, так и четырёхмерным псевдоевклидовым пространством Минковского, в случае, когда в качестве "мирового времени" берётся собственное время движущихся материальных точек.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. Галаев

(Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия)

E-mail address: sgalaev@mail.ru

Первые результаты из геометрии распределений почти контактных метрических многообразий опубликованы в работах [1], [2]. Как было показано в цитируемых работах, на распределении D многообразия M, наделенного почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$, естественным образом задается структура нового почти контактного метрического многообразия. Эта структура получила название продолженной структуры. Для задания продолженной структуры используется эндоморфизм $N : TM \to TM$ такой, что для всех $x \in M : N(D_x) \subset D_x$, $N\vec{\xi} = 0$. С геометрической точки зрения задание эндоморфизма N позволяет продолжить внутреннюю связность многообразия M до связности в векторном расслоении (D, π, M), где $\pi : D \to M$ — естественная проекция. Если ∇ — внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N : D \to D$ — поле допустимого тензора типа (1,1), то N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D,π,M), определяемую разложением $TD=\widetilde{HD}\oplus VD$, такую, что $\widetilde{HD}=HD\oplus Span(\vec{u})$, где $\vec{u}_{\vec{x}}=\vec{\varepsilon}-(N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon}=\partial_n$, $\vec{x}\in D$, $(N\vec{x})^v$ — вертикальный лифт [1]. Идея использования эндоморфизма специального строения для построения связности в векторном расслоении (D,π,M) принадлежит Вагнеру [1]. Конструкция Вагнера обобщается автором настоящей статьи в работах [1], [2]. Определим на распределении D субриманова многообразия почти контактную метрическую структуру $(D,J,\vec{u},\lambda=\eta\circ\pi_*,\tilde{g},\tilde{D})$, полагая $J\vec{x}^h=\vec{x}^v$, $J\vec{x}^v=-\vec{x}^h$, $J\vec{u}=0$, $\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h)=\tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v)=g(\vec{x},\vec{y})$, $\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^v)=\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{u})=\tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{u})=0$.

Пусть N_1, N_2 — эндоморфизмы, определяющие две продолженные почти контактные метрические структуры $(D,J,\vec{u}_1,\lambda=\eta\circ\pi_*,G_1,\tilde{D})$, $(D,J,\vec{u}_2,\lambda=\eta\circ\pi_*,G_2,\tilde{D})$. В работе доказывается, что соответствующие римановы пространства (D,G_1), (D,G_2) принадлежат разным геодезическим классам, если $N_1\neq N_2$.

Список литературы

[1] Галаев С. Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3(59). С. 53–63,

[2] Bukusheva A., Galaev S. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. V. 4(53), No. 2. P. 13–22.

МНОГОМЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ГРАМА И p-ОБЪЁМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ С p-СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

А. С. Гаспарян

(Переславль-Залесский, Россия)

E-mail address: armenak.gasparyan@yandex.ru

В данной работе излагается теория p-евклидовых пространств, в которых длина вектора порождена p-местным скалярным произведением $(\vec{a}^{(1)},\dots,\vec{a}^{(p)})$, а объём параллелепипеда $\Pi(\vec{x}^{(1)},\dots,\vec{x}^{(k)})$, натянутого на векторы $\vec{x}^{(1)},\dots,\vec{x}^{(k)}$, определяется по формуле

$$V_p^{(\sigma)}(\vec{x}^{(1)},\dots,\vec{x}^{(k)})=\left[G_p^{(\sigma)}(\vec{x}^{(1)},\dots,\vec{x}^{(k)})\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $G_p^{(\sigma)}(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)})$ — p-мерный определитель Грама сигнатуры σ:

$$G_p^{(\sigma)}(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}) = \left|(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)})\right|^{(\sigma)}, \quad i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, k.$$

Пояснение. По определению, сигнатура σ p-мерного определителя есть последовательность $(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ из нулей и чётного числа единиц, а определитель сигнатуры σ от p-мерной кубической матрицы $A = \|a_{i_1 \ldots i_p}\|$ n-го порядка определяется по формуле

$$|A|^{(\sigma)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi_1, \ldots, \pi_p \in S_n} \prod_{r=1}^{p} (sgn(\pi_r))^{\sigma_r} \prod_{s=1}^{n} a_{\pi_1(s) \ldots \pi_p(s)}.$$

Известный из евклидовой геометрии аналог теоремы Пифагора для объёмов гласит: квадрат объёма k-параллелепипеда в E^n равен сумме квадратов объёмов его проекций на координатные k-плоскости.

Имеет место p-аналог этого факта.

Теорема 1. *Справедливы следующие формулы:*

$$G_p^{(\sigma)}(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(k)}) = \sum_{\omega \in Q_{k,n}} (det(X[1, \ldots, k|\omega]))^d \, (per(X[1, \ldots, k|\omega]))^{p-d}$$

при $\sigma \neq (0, \ldots, 0)$ *и*

$$= \sum_{\omega \in G_{k,n}} \frac{1}{\mu(\omega)} \, (per(X[1, \ldots, k|\omega]))^p$$

при $\sigma = (0, \ldots, 0)$.

В частности, при чётном p и $\sigma = (1, \ldots, 1)$ имеем формулу для p-объёма k-параллелепипеда

$$V_p^p(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k) = \sum_{\omega \in Q_{k,n}} V_\omega^p(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k),$$

где $V_\omega = det(X[1, \ldots, k|\omega])$ — ориентированный объём проекции параллелепипеда на координатную k-плоскость, определяемую выборкой ω.

Список литературы

[1] Гаспарян А.С. О некоторых приложениях многомерных матриц // Сообщения по прикладной математике. ВЦ АН СССР. М. 1983.

[2] Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев. Наукова Думка, 1972.

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

П. С. Геворкян

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail: pgev@yandex.ru

Определяются понятия слабо локально тривиального эквивариантного расслоения и равномерно локально стягиваемого G-пространства. С помощью этих понятий изучается связь между локальными и глобальными свойствами эквивариантных расслоений.

Эквивариантное отображение $p\colon E \to B$ назовем *слабо локально тривиальным G-расслоением*, если для произвольной точки G-пространства B существуют открытая инвариантная окрестность U этой точки и эквивариантное отображение $\omega : U \times p^{-1}(U) \to E$, что

(1) $p \circ \omega(b, e) = b$ для всех $(b, e) \in U \times p^{-1}(U)$,

(2) $\omega(p(e), e) = e$ для всех $e \in p^{-1}(U)$.

Очевидно, что эквивариантное отображение $p|p^{-1}(U)\colon p^{-1}(U) \to U$ является G-расслоением Гуревича. Следовательно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Слабо локально тривиальное G-расслоение $p : E \to B$ является локальным G-расслоением Гуревича.*

Поскольку для паракомпактного G-пространства B эквивариантное отображение $p\colon E \to B$ является G-расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда оно является локальным G-расслоением Гуревича, то из последней леммы непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $p\colon E \to B$ слабо локально тривиальное G-расслоение, где B — паракомпактное G-пространство. Тогда $p\colon E \to B$ является G-расслоением Гуревича.*

Обратное утверждение верно при достаточно слабых ограничениях на G-пространство B.

G-пространство X назовем *эквивариантно равномерно локально стягиваемым*, если существует инвариантная окрестность V диагонали $\Delta \subset X \times X$ и эквивариантное отображение $\lambda\colon V \times I \to X$ такие, что выполняются условия:

(i) $\lambda(x,y,0)=x$ и $\lambda(x,y,1)=y$ для всех $(x,y)\in V$,

(ii) $\lambda(x,x,t)=x$ для всех $x\in X$ и $t\in I$.

Как показывает следующая лемма, эквивариантно равномерно локально стягиваемых G-пространств много.

Лемма 2. *Произвольное G-ANR-пространство является эквивариантно равномерно локально стягиваемым.*

В частности, G-CW-комплексы являются эквивариантно равномерно локально стягиваемыми G-пространствами.

Теорема 2. *Эквивариантное отображение $p\colon E\to B$, где B — эквивариантно равномерно локально стягиваемое G-пространство, является локальным G-расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда оно является слабо локально тривиальным G-расслоением.*

Из этого результата в качестве следствия получается следующая важная для применения теорема.

Теорема 3. *Эквивариантное отображение $p\colon E\to B$, где B — паракомпактное и эквивариантно равномерно локально стягиваемое G-пространство, является G-расслоением Гуревича тогда и только тогда, когда оно является слабо локально тривиальным G-расслоением.*

Список литературы

[1] Геворкян П.С., Хименес Р. Об эквивариантных расслоениях G-CW-комплексов // Матем. сб. (в печати).

[2] tom Dieck T. Transformation groups. 8. Walter de Gruyter, 1987.

[3] James I.M., Segal G.B. On Equivariant homotopy type // Topology. 1978. V. 17. P. 267–272.

[4] May J., Sigurdsson J. Parametrized homotopy theory. American Mathematical Soc. V. 132, 2006.

[5] Steinberger M., West J. Covering homotopy properties of maps between CW complexes or ANR's // Proceedings of the American Mathematical Society. 1984. V. 92, No. 4. P. 573–577.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЧИННЫЕ СВОЙСТВА РАССЛОЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т. Гончар

(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия)

E-mail address: `gonchar.t.a@yandex.ru`

Е. Яковлев

(НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия)

E-mail address: `eyakovlev@hse.ru`

Пусть $\xi = (E, p, B, G)$ — гладкое главное расслоение с проекцией $p\colon E \to B$ и структурной группой G, g — лоренцева метрика на E, инвариантная относительного действия группы G. Будем предполагать, что слои расслоения ξ пространственноподобны относительно g. При этом ортогональные дополнения к вертикальным подпространствам касательных пространств к E образуют G-связность H.

Рассмотрим точку $b \in B$ и касательные векторы $X, Y \in T_bB$. Для произвольной точки $v \in p^{-1}(b)$ и горизонтальных лифтов X_v^*, Y_v^* векторов X, Y в точку v относительно H положим $h(X, Y) = g(X_v^*, Y_v^*)$. Этим определена лоренцева метрика h на многообразии B.

Если временная ориентация многообразия (E, g) инвариантна относительно G, то она также индуцирует временную ориентацию на (B, h).

Целью работы является установление связей между причинными свойствами пространственно-временных многообразий (E, g) и (B, h).

Теорема 1. *Если базовое пространство-время (B, h) является хронологическим, причинным или устойчиво причинным, то расслоенное пространство-время (E, g) будет обладать теми же свойствами.*

Теорема 2. *Предположим, что пространство-время (B, h) сильно причинно и структурная группа G компактна. Тогда расслоенное пространство-время (E, g) также является сильно причинным.*

Теорема 3. *Пусть пространство-время (B, h) глобально гиперболично и S — его поверхность Коши. Тогда если структурная группа G компактна, то $S^* = p^{-1}(S)$ — поверхность Коши глобально гиперболического пространства-времени (E, g).*

Показано, что в общей ситуации (без предположения о компактности группы G) обратные утверждения не являются верными.

Рассмотрены примеры, в которых (B, h) — пространство-время Робертсона-Уокера и внешнее пространство-время черной дыры Рейсснера-Нордстрема.

Работа выполнена при поддержке ЦФИ НИУ ВШЭ в 2019 г. (проект № 100).

О МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЯХ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ПОЧТИ ЭРМИТОВОГО МНОГООБРАЗИЯ

Ю. Горгинян

(Московский Педагогический Государственный Университет, Москва, Россия)

E-mail address: `kiyulia0@gmail.com`

Мы рассматривали почти эрмитово многообразие (M, J, g), на котором естественным образом возникает риманова связность ∇, а так же определяется 2-форма $\Omega(X, Y) = g(JX, Y)$, которая называется келеровой формой. С помощью оператора кодифференцирования определим 1-форму α, называемую формой Ли: $\alpha(X) = -\frac{1}{n-1}\delta\Omega(JX)$.

На многообразии M мы рассматривали множество связностей

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \lambda_1\alpha(X)Y + \lambda_2\alpha(Y)X + \lambda_3\alpha(JX)Y + \lambda_4\alpha(JY)X + \lambda_5\alpha(X)JY + \\ + \lambda_6\alpha(Y)JX + \lambda_7\alpha(JX)JY + \lambda_8\alpha(JY)JX + \lambda_9 g(X, Y)\xi + \lambda_{10} g(JX, Y)\xi + \\ + \lambda_{11} g(X, Y)J\xi + \lambda_{12} g(JX, Y)J\xi, \qquad (1)$$

где ξ — векторное поле, дуальное форме Ли, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 12$. Связность $\tilde{\nabla}$ задает подпространство в пространстве аффинных связностей.

Сегодня, для построении теории гравитационного поля и изучении его свойств, часто используются многообразия, оснащенные метрикой и произвольной аффинной связностью [1]. На многообразии, снабженном метрикой и аффинной связностью, можно выделить геометрии [2]. Если тензор неметричность имеет вид $Q = W \otimes g$, где W — 1-форма, которая называется формой Вейля, то говорят, что на многообразии задана геометрия Римана–Картана–Вейля. Если добавить добавить условие тривиальности тензора кручения, то получим геометрию, которая называется геометрией Римана–Вейля. Требование нулевой неметричности при нетривиальном кручении дает геометрию, называемую геометрией Римана–Картана.

Теорема 1. *Пространство аффинных связностей* (1) *является* 12*-ти мерным аффинным пространством, тогда и только тогда, когда форма*

Ли α не является тождественным нулем. Если форма Ли тождественный нуль, то множество связностей (1) *состоит только из римановой связности.*

Теорема 2. 8*-плоскость геометрий Римана–Картана–Вейля является тривиальным аффинным расслоением* $(\mathscr{A}, \Sigma, \pi)$ *с* 2*-мерной базой* Σ *и* 6*-мерными слоями. Тензор неметричности при этом имеет вид:*

$$Q(X, Y, Z) = 2(\lambda_1 \alpha(X) + \lambda_3 \alpha(JX))g(Y, Z).$$

Теорема 3. *В* 8*-мерном тотальном пространстве расслоения геометрий Римана–Картана–Вейля существует единственная* 2*-плоскость связностей* Π*, задающих геометрию Римана–Вейля. При этом* Π *пересекает каждый слой расслоения по единственной связности.*

Теорема 4. *Плоскость* Π *связностей, которые задают геометрию Римана–Вейля, является образом сечения расслоения* $(\mathscr{A}, \Sigma, \pi)$*. При этом каждой форме Вейля* $W(X) = \lambda_1 \alpha(X) + \lambda_3 \alpha(JX)$ *соответствует единственная связность.*

Теорема 5. *Множество связностей, задающих геометрию Римана–Картана, является* 6*-мерным слоем над точкой* $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ *базы* Σ.

Список литературы

[1] Бабурова О.В., Фролов Б.Н. Математические основы современной теории гравитации. М.: Прометей, 2012. 128 с.

[2] Катанаев М.О. Геометрические методы в математической физике. Приложения в квантовой механике. Часть 1. М.: МИАН, 2015. 176 с.

РЕГУЛЯРНЫЕ ПОКРЫТИЯ ПЛОСКОСТИ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТРЕХМЕРНЫЕ РЕШЕТКИ

О. Горкуша

(Хабаровское отделение Института Прикладной Математики Дальневосточного отделения РАН, Хабаровск, Россия)

E-mail address: `684bmts@rambler.ru`

В статье Карпенкова и Устинова [1] множество минимальных систем трехмерной решетки рассматривается как каноническая диаграмма (граф на плоскости, ребрами которого являются отрезки трех направлений), грани которой — минимальные узлы решетки, вершины — минимальные системы. Такие графы сохраняют информацию о взаимном расположении минимальных систем решетки. В этой же работе описаны канонические диаграммы для двух-параметрических семейств трехмерных решеток ранга 1. В работе [2] Устинов сформулировал задачу о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы граф, удовлетворяющий свойствам канонической диаграммы, представлял каноническую диаграмму некоторой решетки.

В нашем исследовании мы рассматриваем регулярные покрытия (назовем их $\mathcal{T}$ покрытиями) плоскости многоугольниками специального вида с целью установить связь таких покрытий и трехмерных неприводимых максимальных решеток. Наиболее полно теория таких решеток, как геометрическое изложение теории алгебраических иррациональностей, изложена в работе Б.Н. Делоне, Д.К. Фаддеева [3].

Мы описываем алгоритм построения регулярного покрытия, соответствующего заданной трехмерной неприводимой максимальной решетке. Одно из определений покрытий плоскости состоит в следующем [4]. Система $\mathcal{T}$ трансляций множества $\mathbf{T}$ на векторы, образованные узлами решетки $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$, образует покрытие плоскости множеством $\mathbf{T}$, если каждая точка плоскости принадлежит одному из множеств системы $\mathcal{T}$. Наш алгоритм основан на нахождении $\mathbf{T}$ и базиса решетки Γ.

Оказывается, множество $\mathbf{T}$ описывается узлами трехмерной неприводимой максимальной решетки, которые образуют конечные цепочки локальных минимумов, тесно связанные с автоморфизмами решетки. А векторы двумерной решетки Γ зависят от геометрической структуры $\mathbf{T}$.

Для трехмерных максимальных решеток, повторяющихся умножением, мы доказываем теорему.

Теорема 1. *Канонической диаграмме графа Вороного максимальной решетки, повторяющейся умножением, соответствует $\mathcal{T}$ покрытие плоскости.*

Список литературы

[1] Karpenkov O., Ustinov A. Geometry of Minkowski–Voronoi tessellations of the plane // `arXiv:1407.0135` (2014).

[2] Устинов А.В. Трехмерные цепные дроби и суммы Клостермана // Успехи матем. наук. 2015. Т. 70, №3(423). С. 107—180.

[3] Делоне Б.Н., Фаддеев Д.К. Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1940. Т. **11**. С. 3—340.

[4] Rogers C.A. Packing and Covering. Cambridge. At the univ. Press, 1964. 118 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ К МАГНИТНОМУ НЕРАЗРУШАЮЩЕМУ КОНТРОЛЮ

Т. А. Жильников, М. С. Маскина

(Академия ФСИН, Рязань, Россия)

E-mail address: quadrus02@mail.ru, mariaya_maskina@mail.ru

В классической литературе прямое и обратное преобразование Радона, а также их свойства приводятся для скалярных величин [1]. Авторами предложено исследование преобразования Радона исходной векторной функции $\overline{f}$, заданной в $\mathbf{R^3}$. Геометрический смысл данного преобразования в трехмерном пространстве определяется интегралом от исходной векторной функции по гиперплоскости перпендикулярной вектору нормали $\overline{n}$ и проходящей на расстоянии s от начала координат. Интеграл по гиперплоскости, реализуемый в прямом преобразовании Радона $\overline{p}$, определен с помощью свертки с дельта-функцией Дирака через интеграл по всему пространству $\mathbf{R^3}$:

$$\overline{p}(s,\overline{n}) = \int\limits_{\mathbf{R^3}} \overline{f}(\overline{r}) \cdot \delta\left(s - (\overline{r}\cdot\overline{n})\right) d\overline{r},$$

где δ — дельта-функция Дирака, $\overline{r}$ — радиус-вектор точки пространства (x, y, z), исходящий из начала координат, $d\overline{r}$ — трехмерный элемент объема $d\overline{r} = dxdydz$, $\overline{n} = (\cos\alpha\cdot\sin\theta, \sin\alpha\cdot\sin\theta, \cos\theta)$ – вектор нормали, причем α — зенитный и θ — азимутальный углы сферической системы координат. Представление обратного преобразования Радона:

$$\overline{f}(\overline{r'}) = \int\left[\int h\left(\left(\overline{r'}\cdot\overline{n}\right) - s\right)\cdot\overline{p}\left(s,\overline{n}\right) ds\right]\cdot\sin\theta d\overline{n} = \int h(s) * \overline{p}\left(s,\overline{n}\right)\cdots\in\theta d\overline{n},$$

где h — свертывающая функция, $d\overline{n} = d\theta\cdot d\alpha$, а символ «$*$» — знак операции свертки. Приложением проведенного исследования является расширение функциональных возможностей магнитного неразрушающего контроля [2]. Подобно компьютерной томографии, базируемой на частном случае преобразовании Радона скалярных величин, результаты исследования позволяют осуществлять неразрушающую регистрацию векторных магнитных полей внутри объектов в местах, недоступных для механического проникновения [3].

Список литературы

[1] Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte ängs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. Bande 29. S. 262–277, Leipzig, 1917.

[2] Клюев В.В. Неразрушающий контроль и диагностика: Справочник / В.В. Клюев, Ф.Р. Соснин, А.В. Ковалев и др. М.: Машиностроение, 2003.

[3] Жильников А.А., Жильников Т.А., Жулев В.И. Квазистационарная модель описания магнитного поля при реализации способа магнитоиндукционного исследования ферромагнитных тел внутри объектов // Инженерная физика. 2017. №9. С. 33–39.

УЧЕБНЫЕ ЗАДАЧИ НА МАТЕРИАЛЕ КОНЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Ю. Золотухин

(Гродненский государственный университет, Гродно, Беларусь)

E-mail address: YZOL@mail.ru

В статье [1] обсуждалась проблема построения системы задач, сконструированных на базе модельных топологических пространств, и последовательного ее применения на всех этапах обучения теоретико-множественной топологии. В качестве одного из компонентов такой системы было предложено использовать задачи, составленные на материале конечных пространств. Укажем теоретические основания, на которых базируется указанная система задач, на примере трехэлементных пространств.

На любом трехэлементном множестве существует 29 топологий, которые разбиваются на 9 классов эквивалентных (т.е. порождающих гомеоморфные пространства) топологий $K_1 - K_9$. Если топологию, заданную на множестве $X = \{a, b, c\}$, содержащую m одноэлементных и n двухэлементных подмножеств множества X, обозначить через τ_{mn}^p, где p — порядковый номер топологии в списке топологий данного комбинаторного типа, то $K_1 = \left\{\tau_{00}^1\right\}$ $\left(\tau_{00}^1 \text{ — антидискретная топология}\right)$, $K_2 = \left\{\tau_{01}^1, \tau_{01}^2, \tau_{01}^3\right\}$,

$K_3 = \{\tau_{10}^1, \tau_{10}^2, \tau_{10}^3\}$, $K_4 = \{\tau_{11}^1, \tau_{11}^2, \tau_{11}^3, \tau_{11}^4, \tau_{11}^5, \tau_{11}^6\}$ (одноэлементное и двухэлементное множества имеют непустое пересечение), $K_5 = \{\tau_{11}^7, \tau_{11}^8, \tau_{11}^9\}$ (одноэлементное и двухэлементное множества не пересекаются), $K_6 = \{\tau_{12}^1, \tau_{12}^2, \tau_{12}^3\}$, $K_7 = \{\tau_{21}^1, \tau_{21}^2, \tau_{21}^3\}$, $K_8 = \{\tau_{22}^1, \tau_{22}^2, \tau_{22}^3, \tau_{22}^4, \tau_{22}^5, \tau_{22}^6\}$, $K_9 = \{\tau_{33}^1\}$ $(\tau_{33}^1$ — дискретная топология$)$.

Обозначим через CK_i — класс пространств над множеством X с топологиями дополнения класса K_i (топология дополнения $C\tau$ состоит из дополнений множеств топологии τ). Назовем классы K_i и K_p *взаимно дополнительными*, если $K_p = CK_i$ (тогда, в силу идемпотентности дополнения, и $K_i = CK_p$). Если же $K_i = CK_i$, то класс K_i назовем *самодополнительным.*

Самодополнительный класс конечноэлементных пространств может быть двух типов: *строго самодополнительным* — когда топология дополнения для каждого пространства класса совпадает с топологией пространства; *нестрого самодополнительным* — в противном случае.

По введенному отношению дополнения совокупность трехэлементных топологических пространств разбивается на следующие группы: взаимно дополнительные — K_2 и K_3, K_6 и K_7, самодополнительные — K_1, K_4, K_5, K_8, K_9, причём из них строго самодополнительными являются K_1, K_5, K_9, а нестрого самодополнительными — K_4 и K_8.

Отношение дополнения помогает сделать интересные наблюдения. Так, наряду с известными антидискретным и дискретным пространствами, с его помощью получаются нетривиальные примеры пространств, в которых нет ни одного строго открытого и ни одного строго замкнутого множества. Таковыми являются все пространства строго самодополнительного класса K_5.

На материале конечных пространств, составлены содержательные задачи к основным разделам общей топологии, в частности, предлагающие студентам провести полное исследование их главных топологических свойств (наибольший интерес конечные пространства представляют с точки зрения демонстрации свойств отделимости, связности и линейной связности). Такие задачи, естественно поставленные и доступные студентам, помогают организовать непрерывную линию практической работы. Самостоятельное получение, осмысление и накопление фактов, моделируя процесс построения математической теории, способствует выработке навыков исследовательской работы.

Список литературы

[1] Золотухин Ю.П. Модельные пространства в преподавании топологии // Вестник Могилевского государственного университета. 2000. № 1. С. 133–140.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ЛИФТОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПРИ ДИФФЕОМОРФИЗМАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ СЕЧЕНИЯМИ

С. К. Зубкова, В. В. Шурыгин

(Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия)

E-mail address: zubkova.s.k@gmail.com, Vadim.Shurygin@kpfu.ru

Касательное расслоение T^pM_n порядка p гладкого многообразия M_n несет на себе структуру $\mathbb{D}^p$-гладкого многообразия, где $\mathbb{D}^p$ — алгебра срезанных многочленов степени p одного переменного. Всякий $\mathbb{D}^p$-гладкий диффеоморфизм ($\mathbb{D}^p$-диффеоморфизм) $\Phi\colon T^pM_n \to T^pM_n$ однозначно определяется своим ограничением $\varphi = \Phi|M_n$ на многообразие M_n, рассматриваемое как множество p-скоростей постоянных отображений. В частности, всякое сечение $\sigma\colon M_n \to T^pM_n$ однозначно продолжается до $\mathbb{D}^p$-диффеоморфизма $\sigma^p\colon T^pM_n \to T^pM_n$.

В работе изучается поведение $\mathbb{D}^p$-гладких геометрических объектов на расслоении T^pM_n при $\mathbb{D}^p$-диффеоморфизмах $\Phi\colon T^pM_n \to T^pM_n$.

Пусть $\rho\colon G^r_n \times F \to F$ — гладкое правое действие дифференциальной группы G^r_n на многообразии F и P^rM_n — расслоение реперов порядка r на M_n. Эквивариантное отображение $\lambda\colon P^rM_n \to F$ задает поле геометрического объекта на M_n. Применение функтора T^p к полю λ определяет $\mathbb{D}^p$-гладкое поле

$$T^p\lambda\colon T^pP^rM_n \simeq P^r(\mathbb{D}^p)T^pM_n \to T^pF$$

на расслоении T^pM_n — лифт поля геометрического объекта λ. Применение функтора Вейля $T^{\mathbb{R}(n,r)}$ [1], определяемого алгеброй $\mathbb{R}(n,r)$ срезанных многочленов степени r от n переменных, к сечению σ приводит к сечению $\sigma^{\mathbb{R}(n,r)}\colon P^rM_n \to T^pP^rM_n$. Композиция $\mathcal{L}_\sigma\lambda = T^p\lambda \circ \sigma^{\mathbb{R}(n,r)}$ называется джетом Ли поля λ по отношению к сечению σ [2].

Поле λ^p инвариантно относительно $\mathbb{D}^p$-диффеоморфизма $\sigma^p\colon T^pM_n \to T^pM_n$, определяемого сечением σ тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_\sigma\lambda = \lambda$ [2].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *С сечением $\sigma\colon M_n \to T^p M_n$ взаимно однозначно ассоциируется набор $X_1, \ldots, X_p$ векторных полей на многообразии M_n, и лифт λ^p инвариантен относительно $\mathbb{D}^p$-диффеоморфизма σ^p тогда и только тогда, когда объект λ инвариантен относительно действия локальных однопараметрических групп преобразований, порождаемых векторными полями $X_1, \ldots, X_p$.*

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.13556.2019/13.1.

Список литературы

[1] Kolář I., Michor P.W., Slovák J. Natural Operations in Differential Geometry. Springer, Berlin, 1993.

[2] Шурыгин В.В. Джеты Ли и симметрии продолжений геометрических объектов // Фундам. и прикл. мат. 2010. Т. 16, № 2. С. 163–181.

НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ПОЧТИ ЭРМИТОВА МНОГООБРАЗИЯ

Л. А. Игнаточкина

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: `ignlia@gmail.com`

Пусть на гладком многообразии M фиксирована почти эрмитова структура (J, g), где J — антиинволютивный эндоморфизм, g — риманова метрика, согласованная с ним. Если фиксировать на M еще и произвольную линейную связность $\bar{\nabla}$, то на M возникает аффинно-метрическая структура $(g, \bar{\nabla})$. Во множестве аффинно-метрических структур выделяется три класса: Римана–Картана–Вейля — условием: $-\bar{\nabla}g = W \otimes g$; Римана–Картана — условием: $-\bar{\nabla}g = 0$, $S \neq 0$; Римана–Вейля — условием: $-\bar{\nabla}g = W \otimes g$, $S = 0$, где S — тензор кручения связности $\bar{\nabla}$, W — 1-форма Вейля. Рассмотрение аффинно-метрической структуры на почти эрмитовом многообразии позволяет выделить множество связностей, определяемых почти эрмитовой структурой. Пусть ∇ — риманова связность g.

Рассмотрим множество $\mathscr{A}$ связностей

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \lambda_1 \alpha(X) Y + \lambda_2 \alpha(Y) X + \lambda_3 \alpha(JX) Y + \lambda_4 \alpha(JY) X + \\ + \lambda_5 \alpha(X) JY + \lambda_6 \alpha(Y) JX + \lambda_7 \alpha(JX) JY + \lambda_8 \alpha(JY) JX + \lambda_9 g(X,Y)\xi + \\ + \lambda_{10} g(JX,Y)\xi + \lambda_{11} g(X,Y) J\xi + \lambda_{12} g(JX,Y) J\xi, \quad (2)$$

где λ_i, $i = 1, \ldots, 12$ — произвольные вещественные числа, α — форма Ли, ξ — вектор Ли. Оно является 12-мерным аффинным пространством тогда и только тогда, когда $\alpha \not\equiv 0$. Когда $\alpha \equiv 0$, то $\mathscr{A}$ состоит только из связности ∇. Будем рассматривать только те структуры (J, g), для которых $\alpha \not\equiv 0$. Тогда, указанные в (2) тензорные поля $\alpha \otimes id$, $id \otimes \alpha$ и т.д., будут базисом аффинной системы координат с началом в связности ∇.

При конформном преобразовании (J, g), то есть при переходе к почти эрмитовой структуре $(J, e^{2f} g)$, f — гладкая функция на M, получим еще одно множество линейных связностей $\tilde{\mathscr{A}}$ вида (2), где вместо ∇ будет стоять $\tilde{\nabla}$ — риманова связность метрики $e^{2f} g$.

Теорема 1. *Если конформное преобразование задается функцией f, такой, что $\alpha = -2df$, то множество $\tilde{\mathscr{A}}$ будет состоять из единственной связности $\tilde{\nabla}$. Эта связность принадлежит аффинному пространству $\mathscr{A}$, задает геометрию Римана–Картана–Вейля и является точкой K пересечения медиан тетраэдра с вершинами в точках $A_0 \equiv \nabla$, $A_1 \equiv \nabla - 2\alpha \otimes id$, $A_2 \equiv \nabla - 2id \otimes \alpha$, $A_3 \equiv \nabla + 2g \otimes \xi$.*

Отметим в качестве следствия, что в 3-плоскости $A_0 A_1 A_2 A_3$ 2-плоскость $A_0 A_1 K$ будет состоять из связностей, задающих структуру Римана–Картана–Вейля, прямая $A_0 M$ будет состоять из связностей, задающих структуру Римана–Вейля, а точка пересечения 2-плоскости $A_0 A_1 K$ с ребром $A_2 A_3$ будет связностью, задающей структуру Римана–Картана.

Если конформное преобразование задается функцией f, такой, что $\alpha \neq -2df$, то множество $\tilde{\mathscr{A}}$ является 12-мерным аффинным пространством. Зададим аффинное отображение $\mathscr{A}$ на $\tilde{\mathscr{A}}$ по равенству координат в паре аффинных систем координат. Был получен явный вид этого отображения.

Теорема 2. *Для каждой связности из $\mathscr{A}$, задающей структуру Римана–Картана–Вейля, построенное отображение является расширенным конформным преобразованием* [1] *с константой $C = -(1 + 2\lambda_1)$.*

Список литературы

[1] Smalley L.L. Brans-Dicke-type models with nonmetricity // Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 3590–3593.

УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА НА ТРЕХМЕРНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУППАХ ЛИ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

П. Н. Клепиков, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова

(Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия)

E-mail address: klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Данная работа посвящена изучению трехмерных групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической связностью вида

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X,$$

где V — некоторое фиксированное левоинвариантное векторное поле, ∇^g — связность Леви-Чивита. Данная связность является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в работе [1], и называется метрической связностью с векторным кручением.

Пусть (G,g) — трехмерная группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Зафиксируем некоторое левоинвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на G метрическую связность ∇ с векторным кручением. Определим тензор кривизны связности ∇ равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Тогда тензор Риччи определяется как

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

В данной работе исследуется вопрос: существует ли на данной трехмерной метрической группе Ли левоинвариантное векторное V такое, что тензор Риччи соответствующей связности с векторным кручением удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$r = \lambda g$$

для некоторой константы λ. В качестве ответа на данный вопрос доказана

Теорема 1. *Если для трехмерной метрической группы Ли с векторным кручением выполняется уравнение Эйнштена, то либо векторное поле V тривиально, либо тензор кривизны равен нулю.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант: № 18–31–00033 мол_а).

Список литературы

[1] Cartan E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie) // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. V. 42. P. 17–88.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ K-ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕНУЛЕВОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Д. С. Климентов

(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия)

E-mail address: dklimentov75@gmail.com

Пусть S — регулярная поверхность класса C^3 с первой квадратичной формой $I = g_{ij}dx^i dx^j$, второй формой $II = b_{ij}dx^i dx^j$ и третьей $III = f_{ij}dx^i dx^j$. Пусть на S заданы диффузии X_t, Z_t, порождённые квадратичными формами I и III соответственно (то есть генератор диффузии X_t $A = g^{ij}\partial_i\partial_j$, для диффузии Z_t аналогично). Переходную плотность процесса X_t будем обозначать $p_1(t, \vec{x}, \vec{y})$ (отметим, что $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются точками на поверхности S с контравариантными внутренними координатами (x^1, x^2), (y^1, y^2)), переходную плотность процесса Z_t будем обозначать $p_3(t, \vec{x}, \vec{y})$. Кроме того, будем требовать, чтобы поверхность S была односвязной, конформно эквивалентной кругу. В работе [1] был выведен стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны. В работе [2] был выведен стохастический критерий k-движения для поверхности положительной кривизны. Применяя методы работы [1] к результатам работы [2] можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для того, чтоб деформация поверхности S была k-движением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\delta^l \left(\frac{\Delta p(t, \vec{x}, \vec{y})}{\partial_t p(t, \vec{x}, \vec{y})} \right) = 0, l = 1, \ldots, k, \tag{3}$$

$$\delta^l b_{ij} = 0, l = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

где $b_{ij} = \frac{K g_{ij} + f_{ij}}{2H}$,

$f_{ij} = \Sigma_{k,l=1}^{2} \frac{1}{|I|^2} \int \partial_t [P_3(t, \vec{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_i y_k}{1+\delta_{ik}} \int \partial_t [P_3(t, \vec{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_j y_l}{1+\delta_{jl}}$
$\int \partial_t [P_3(t, \vec{x}, dy)]_{t=0} \frac{y_k y_l}{1+\delta_{kl}}$,

$g_{ij} = \delta_{ij} \frac{\Delta p(t, \vec{x}, \vec{y})}{\partial_t p(t, \vec{x}, \vec{y})}$.

Список литературы

[1] Климентов Д.С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ненулевой средней кривизны // Известия ВУЗов Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2014. №1. С. 15–18.

[2] Климентов Д.С. Стохастический критерий неизгибаемости поверхности положительной кривизны // Геометрические методы в теории управления и математической физике, 25–28 сентября, 2018. Рязань.

ИЗГИБАНИЯ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕНУЛЕВОГО РОДА

С. Б. Климентов

(Южный федеральный университет, Южный математический институт ВНЦ РАН, Ростов-на-Дону, Россия)

E-mail address: sbklimentov@sfedu.ru

Цель доклада — обзор результатов по теории изгибаний поверхностей рода $p \geqslant 0$ и положительной внешней кривизны.

Первые примеры замкнутых поверхностей рода $p > 0$ и положительной внешней кривизны были сконструированы А.В. Погореловым [1, гл.6, §12]. В этой работе А.В. Погорелов доказал жёсткость таких поверхностей при точечной внешней связи и сформулировал гипотезу о жёсткости без каких-либо условий при $p > 1$.

Эта гипотеза была доказана В.Т. Фоменко [2]. Дальнейшее изучение таких поверхностей, замкнутых и с краем, было продолжено В.Т. Фоменко и его учениками (Е.В. Тюриков, С.Б. Климентов, Ю.П. Золотухин). В докладе приводится обзор этих работ.

Приведём здесь один недавний результат автора доклада [3].

Теорема 1. *Пусть S и S' — изометричные регулярные поверхности в $\mathbb{E}^3$, класса C^k_α, $k \geqslant 3$, $0 < \alpha < 1$, с краями и рода $p \geqslant 0$.*

Предположим, что их гауссова кривизна удовлетворяет условию

$$K \geqslant k_0 = \text{const} > 0.$$

Если эти поверхности содержат соответствующие друг другу по изометрии C^k_α-регулярные конгруэнтные дуги γ and γ', то поверхности S и S' конгруэнтны.

Список литературы

[1] Погорелов А.В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.

[2] Фоменко В.Т. О жёсткости и однозначной определённости замкнутых поверхностей рода $p \geqslant 1$ в римановом пространстве // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. С. 45–48.

[3] Климентов С.Б. Об однозначной определённости локально выпуклых поверхностей положительной кривизны рода $p \geqslant 0$ с краем // Сибирский математический журнал. 2019. Т. 60, №1. С. 109–117.

ОПРАВДАНИЕ КЕМПЕ И ВОПРОСЫ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

М. Д. Ковалев

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: mdkovalev@mtu-net.ru

Давид Гильберт в своих лекциях по наглядной геометрии [1] так определял шарнирный механизм: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости".

Альфредом Кемпе в статье [2] был положительно решен вопрос о черчении по частям произвольной плоской алгебраической кривой с помощью шарнирных механизмов. В этой работе, носящей название "Об общем методе черчения шарнирным механизмом плоских кривых n-ой степени", не содержится формулировок каких-либо теорем. В середине 1970-х известный американский математик У. Тёрстон обратил внимание на проблематику теоремы Кемпе. После чего, начиная с 1998 года появилась работа М. Каповича и Дж. Миллсона [3], а также ряд статей Г. Кинга [4, 5, 6], посвящённых истолкованию результата Кемпе на языке современной алгебраической геометрии. Их авторы утверждали, что рассуждения Кемпе содержат существенные ошибки. И это мнение получило распространение среди математиков.

Однако, при внимательном рассмотрении претензий к Кемпе выясняется, что они носят надуманный характер. Дело в том, что результат Кемпе есть результат "в малом", имеет локальный характер. Авторы же вышеназванных работ получили результаты "в целом" относительно конфигурационного пространства шарнирных механизмов. Пытаясь уличить Кемпе в неточности, они приписывают Кемпе свою формулировку его основного результата и указывают на недостаточность его аргументов для доказательства этой их теоремы.

В докладе будет рассказано о результатах М. Каповича, Дж. Миллсона и Г. Кинга, подробно проанализированы претензии, выдвинутые к Кемпе. Будет сформулирована теорема, к которой с небольшими уточнениями приводят построения Кемпе. А также сформулированы вопросы, относящиеся к вещественной алгебраической геометрии, возникающие при анализе плоских шарнирных механизмов.

Список литературы

[1] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.

[2] Kempe A.B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by Linkwork // Proc. of the London Math. Soc. 1876. V. 7, No. 102. P. 213–216.

[3] Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. V. 41, No. 6. P. 1051–1107.

[4] King H.C. Planar Linkages and Algebraic Sets. arXiv.org:math/9807023 (Preprint July 4, 1998, 22 p.)

[5] King H.C. Semiconfiguration spaces of planar linkages, arXiv.org:math/9810130.

[6] King H.C. Configuration spaces of linkages in Rn, arXiv.org:math/9811138.

МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ РАМСЕЯ-КАССА-КУПМАНСА

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
РАНХиГС, Москва, Россия)

E-mail address: prozerpi@yahoo.co.uk, lluzhina@gmail.com, aleblinov@yandex.ru

В. Г. Чирский

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: vgchirskii@yandex.ru

Предлагаемая работа относится к классической (так называемой, нереалистичной) модели Рамсея–Касса–Купманса [1], [2], [3]. Исследование модели и её усовершенствование были заложены в работах Касса и Купманса, поэтому часто модель называют моделью Касса–Купманса, чтобы подчеркнуть её отличие от первоначального вида, рассмотренного Рамсеем.

Также отметим большой вклад в развитие данной теории Маленво, в некоторых источниках [4] считают, что модель лучше называть моделью Касса–Маленво–Купманса.

Рассматривается постановка задачи, в которой для соответствующего дифференциального уравнения предложен метод аналитической аппроксимации его решений. Суть метода наиболее явно проявляется именно в этой постановке задачи. В последующих работах предполагается развить этот метод и применить его к задачам в более общей постановке.

Отметим, что это работа представляет собой начальный этап исследований в намеченных выше направлениях построения аналитической аппроксимации оптимальных процессов вложения капитала. Продолжение исследований предполагает, в том числе, проведение вычислительных экспериментов.

Список литературы

[1] Ramsey F. P. A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December 1928. P. 543—559.

[2] Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

[3] Benassy J.-P. "The Ramsey Model". Macroeconomic Theory. New York: Oxford University Press, 2011. P. 145–160.

[4] Spear S.E., Young W. Optimum savings and optimal growth: the Cass-Malinvaud-Koopmans nexus // Macroeconomic Dynamics. 2014. V. 18, No. 1. P. 215–243.

РИЧЧИ-ПЛОСКИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВЫ КЭЛЕРОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В. Н. Кокарев

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, Самара, Россия)

E-mail address: `ko1949@yandex.ru`

Для определенных в [1] асимптотически локально евклидовых (ALE) многообразий найдены достаточные условия на кривизны, при которых (ALE) многообразие является Риччи-плоским. В нашей работе мы рассматриваем обратную задачу. Из условия, что (ALE) многообразие является Риччи-плоским, мы находим некоторые условия на его кривизны.

Пусть M – кэлерово многообразие с кэлеровой метрикой g и комплексной структурой J. Через $K_\sigma(x)$ обозначим голоморфную секционную кривизну в точке $x \in M$ в направлении голоморфной 2-плоскости σ (т. е. $\sigma = J(\sigma)$). Обозначим $H(x) = \max_{\sigma=J(\sigma)} |K_\sigma(x)|$, где максимум берется по всем голоморфным 2-плоскостям в касательном пространстве T_xM. Пусть $B_r(x)$ – геодезический шар радуса r с центром в точке $x \in M$.

Теорема 1. *Пусть M – кэлерово Риччи-плоское (ALE) многообразие порядка $\lambda(t)$. Для достаточно больших r и любой точки $O \in M$*

$$\inf_{x\in B_r(O)} H(x) < \frac{C\lambda(r)}{r^2},$$

где C – константа, зависящая от размерности M.

Список литературы

[1] Ni Lei, Shi Yuguang, Tam Luen-Fai. Ricci flatness of asymptotically locally Euclidean metrics // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, №5. P. 1933–1959.

ОБУЧЕНИЕ ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК ФАКТОР РАЗВИТИЯ НАУЧНОГО МИРОВОЗЗРЕНИЯ СТУДЕНТОВ

В. С. Корнилов

(Московский городской педагогический университет, Москва, Россия)

E-mail address: vs_kornilov@mail.ru

В мировой науке среди научных методов познания окружающего мира математическое моделирование занимает одно из центральных мест, так как математические модели обладают многими полезными свойствами, в том числе универсальностью и научно-познавательным потенциалом. Математическое моделирование широко используется в теории обратных задач для дифференциальных уравнений (ОЗДУ). С помощью математических моделей ОЗДУ возможно эффективно проводить исследования разнообразных процессов и явлений, происходящих в воздушном пространстве, земной и водной среде. Неудивительно, что в некоторых российских вузах на физико-математических направлениях подготовки преподаются ОЗДУ в виде курсов по выбору. Ставятся цели и задачи такого преподавания, в результате которого у студентов развивались бы творческие математические способности, формировались фундаментальные предметные знания в области ОЗДУ, развивалось научное мировоззрение. На практических занятиях по ОЗДУ студенты приобретают умения и навыки применять эффективные подходы и математические методы нахождения решений обратных задач с последующим логическим анализом их решений. В результате студенты приобретают полезный опыт анализа новой информации об исследуемых физических процессах и явлениях, формируют новые научные знания об окружающем мире, на основе которых развивается их научное мировоззрение. Развитое, в процессе преподавания ОЗДУ, научное мировоззрение помогает студентам понять, что математические модели ОЗДУ имеют отношение к теории, эксперименту и философии — основным методам познания исследователей; осмыслить гуманитарную ценность математических моделей ОЗДУ. В докладе обсуждаются научно-методические аспекты развития научного мировоззрения студентов в результате преподавания ОЗДУ [1].

Список литературы

[1] Корнилов В.С. Теория и методика обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений: монография. М.: Изд-во «ОнтоПринт», 2017. 500 с.

АНАЛОГИ ГЕЛИКОИДА ДИНИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

А. В. Костин

(Казанский федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга, Россия)

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

Геликоид Дини — поверхность, получаемая винтовым движением евклидовой трактрисы. Она является обобщением псевдосферы и несёт на себе геометрию постоянной отрицательной кривизны. В работе рассматриваются различные псевдоевклидовы аналоги этой поверхности, изучаются их взаимосвязи с евклидовыми и псевдоевклидовыми поверхностями вращения постоянной кривизны.

Теорема 1. *Геометрии поверхностей, полученных винтовыми движениями евклидовой трактрисы и её псевдоевклидова продолжения, согласованы в том смысле, что одна поверхность является продолжением другой,* *только в случае нулевой скорости трансляции, т. е. в случае, когда винтовое движение становится чистым вращением.*

Будут рассмотрены также аналоги геликоида с индефинитной и вырожденной метриками и некоторые задачи, связанные с чебышёвскими сетями на поверхностях постоянной кривизны [2].

Список литературы

[1] Костин А.В. Эволюты трактрис и асимптотические на псевдосферах // Геометрические методы в теории управления и математической физике: Тезисы докладов Международной конференции, посв. 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко. Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. Рязань, 2018. С. 51.

ОБОБЩЕННО ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Костин, Н. Н. Костина

(Казанский федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга, Россия)

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru, natnikost@mail.ru

Подмножество U гиперболического пространства H^n называется m-выпуклым относительно точки a, не принадлежащей U, если существует содержащая эту точку $m-$мерная плоскость, не имеющая с U общих точек. Подмножество, m- выпуклое относительно каждой точки из H^n, не принадлежащей U, называется m-выпуклым. Минимальное m-выпуклое множество, содержащее множества U_i, называется m-выпуклой оболочкой (или выпуклой m-оболочкой) семейства множеств U_i. Заменив в этих определениях m-плоскость на m-мерную полуплоскость, получим определение полувыпуклой оболочки семейства множеств.

В работе находятся условия, обеспечивающие принадлежность точки гиперболического пространства обобщённо выпуклой оболочке семейства шаров и их обобщений. Большой круг задач такого типа в евлидовом пространстве рассматривался Ю.Б. Зелинским и его учениками [1]. Ряд аналогичных задач в пространстве Лобачевского рассмотрен в работе [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы точка плоскости Лобачевского принадлежала выпуклой* 1*-оболочке орикругов, достаточно двух орикругов.*

Теорема 2. *Для того, чтобы точка плоскости Лобачевского принадлежала полувыпуклой* 1*-оболочке орикругов, достаточно трёх орикругов.*

Будут рассмотрены также вопросы, связанные с контактным числом сферы в гиперболическом пространстве, и некоторые их обобщения. Результаты в пространстве Лобачевского, как и во многих других смежных задачах [3], зависят от радиуса сферы.

Список литературы

[1] Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Дакхил Х.К. Задача о тени и смежные задачи // Proceedings of the International Geometry Center. 2016. No. 9. P. 50–58.

[2] Костин А.В. Задача о тени в пространстве Лобачевского // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70, № 11. С. 1525–1532.

[3] Е.А. Костина, Н.Н. Костина. Описанные многогранники в гиперболическом пространстве // Геометрические методы в теории управления и математической физике: Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию С.Л. Атанасяна, 70-летию И.С. Красильщика, 70-летию А.М. Самохина, 80-летию В.Т. Фоменко. Ряз. гос. ун-т им. С.А. Есенина. Рязань, 2018. С. 52.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ МЕСТЕ ПОЯВЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В УЧЕБНИКЕ

С. Костин

(МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия)

E-mail address: kostinsv77@mail.ru

В нашем докладе мы хотели бы обсудить следующий вопрос: каково оптимальное место появления геометрической задачи в учебнике? Поясним, что мы имеем в виду. Рассмотрим две задачи.

Задача 1. В треугольнике ABC ($\angle B = 90^\circ$) биссектриса AE равна отрезку EC. Докажите, что $AC = 2AB$.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике ABC на боковых сторонах AB и BC отложены равные отрезки $AN = CM$. Доказать, что прямая MN параллельна прямой AC.

Эти задачи взяты нами из учебника геометрии для 7-го класса [1]: задача 1 — это задача 9.44, а задача 2 — это часть (фрагмент) задачи 15.27.

В принципе, задачи 1 и 2 являются очень простыми. Но смущает только одно — то место, где они помещены в учебнике. Задачи помещены до изучения теоремы о сумме углов треугольника (S 16), до изучения признаков равенства прямоугольных треугольников (S 18) и до изучения свойства прямоугольного треугольника с острым углом в 30° (S 19).

Таким образом, задачи предлагается решить, располагая самым минимумом известных геометрических фактов. Это не делает задачи нерешаемыми, но все-таки существенно усложняет дело.

Для решения задачи 1 можно поступить следующим образом: отложить на луче AC отрезок AK такой, что $AK = AB$. Тогда треугольники BAE и KAE равны по первому признаку (у них сторона AE общая, $AK = AB$ по построению и $\angle BAE = \angle KAE$). Поэтому $\angle AKE = \angle ABE = 90^\circ$. Следовательно, EK — высота треугольника AEC. А поскольку этот треугольник является равнобедренным ($AE = EC$), то высота EK является также медианой, то есть $AK = KC$. Итак, $AC = AK + KC = 2AK = 2AB$, что и требовалось доказать.

Для решения задачи 2 можно поступить следующим образом: провести биссектрису BL треугольника ABC; пусть O — точка пересечения биссектрисы BL с отрезком NM. Поскольку каждый из двух треугольников ABC и NBM является равнобедренным, то в каждом из них биссектриса, проведенная из вершины, является одновременно высотой. Следовательно, $AC \perp BL$ и $NM \perp BL$. Получается, что прямые AC и NM перпендикулярны к одной и той же прямой. Следовательно, эти две прямые параллельны, что и требовалось доказать.

Приведенные выше рассуждения (с введением в рассмотрение новых точек, с выполнением дополнительных построений и т. д.), возможно, являются не такими уж простыми для учеников 7-го класса (хотя у учеников 9–11 классов эти рассуждения не должны вызывать каких-либо трудностей). В то же время, если бы задачи 1 и 2 были помещены в учебнике [1] «попозже» (после изучения теоремы о сумме углов треугольника, признаков равенства прямоугольных треугольников и свойства прямоугольного треугольника с острым углом в 30°), то стали бы возможными другие, существенно более простые и понятные (особенно для учеников 7-го класса) решения этих задач.

Список литературы

[1] Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Геометрия. 7 класс. М.: Вентана-Граф, 2017. 208 с.

О ВЕКТОРНОМ ПОЛЕ ПОВОРОТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Я. Кржижек, Й. Микеш, Л. Рыпарова

(Palacký University, Olomouc, Czechia)

E-mail address: jan.krizek02@upol.cz, josef.mikes@upol.cz, lenry@seznam.cz

Понятие *изопериметрических экстремалей поворота* ввел в рассмотрение Лейко, см. [2, 2]. Вопрос существования этих кривых рассмотрен в работе [5].

В работе [2] определено понятие *отображения поворота*, это понятие обобщено в работе [1] следующим образом: диффеоморфизм f между пространством аффинной связности $\bar{A}_2$ и (псевдо-) римановым пространством $\mathbb{V}_2$ называется *поворотным отображением*, если любая геодезическая линия $\bar{A}_2$ отображается на изопериметрическую кривую пространства $\mathbb{V}_2$.

Худа, Микеш и Сохор [1] доказали, что необходимым и достаточным условием, чтобы $\bar{A}_2$ допускало отображение поворота на $\mathbb{V}_2$, является существование специального торсообразующего векторного поля θ в $\mathbb{V}_2$, которое удовлетворяет следующим уравнениям

$$\nabla_X \theta = \theta \cdot (\Theta(X) + \nabla_X K/K) + \nu \cdot X \tag{1}$$

для любого касательного векторного поля X, где ∇ – связность Леви-Чивита $\mathbb{V}_2$, K – Гауссова кривизна, ν – некоторая функция, форма Θ определена условием $\Theta(X) = g(\theta, X)$, и g – метрика $\mathbb{V}_2$.

Эти условия являются необходимыми для существования поворотных отображений римановых пространств [2]. В этой же статье Лейко утверждает, что пространства в которых существуют эти поля (1), изометричны поверхностям вращения. Однако, это утверждение является ошибочным. Контрпример построен в работе Микеша, Рыпаровой и Худой [3].

Работа [6] посвящена изучению полей поворота. Доказана

Теорема 1. *Двумерное (псевдо-)риманово пространство $\mathbb{V}_2$ допускает векторное поле поворота θ тогда и только тогда, когда в нем имеет решение следующая система уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно неизвестных $\theta_i(x)$ и $\nu(x)$:*

$$\theta_{i,j} = \theta_i(\theta_j + \partial_j K/K) + \nu g_{ij},$$

$$\nu_i = \nu(\theta_i - \partial_i K/K) - K\theta_i - \theta_\alpha \theta_\beta g^{\alpha\beta} \partial_i K/K + \theta_i g^{\alpha\beta} \theta_\alpha \partial_\beta K/K.$$

Для начальных значений $\theta_i(x_0) = \theta_i^0$ и $\nu(x_0) = \nu_0$, где $x_0 \in \mathbb{V}_2 \in C^3$, эта система имеет не более одного решения $\theta_i(x)$ и $\nu(x)$.

Нами доказано, что общее решение этих уравнений для пространств непостоянной кривизны, зависит от не более чем двух реальных параметров.

Список литературы

[1] Chudá H., Mikeš J., Sochor M. Rotary diffeomorphism onto manifolds with affine connection // Geometry, Integrability and Quantization. 2017. V. 18. P. 130–137.

[2] Leiko S.G. Rotary diffeomorphisms on Euclidean spaces // Math. Notes. 1990. V. 47, No. 3–4. P. 261–264.

[3] Mikeš J., Rýparová L., Chudá H. On theory of rotary mappings // Math. Notes. 2018. V. 104, No. 3–4, P. 617–620.

[4] Mikeš J., et al. Differential geometry of special mappings, Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. 568 p.

[5] Mikeš J., Sochor M., Stepanova E. On the existence of isoperimetric extremals of rotation and the fundamental equations of rotary diffeomorphisms // Filomat. 2015. V. 29, No. 3. P. 517–523.

[6] Rýparová L., Mikeš J., Křížek J. On fundamental equations of rotary vector fields // 18th Conf. APLIMAT, 2019. P. 1030–1034.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИУВИЛЛЕВЫХ ЧИСЕЛ

Е.С. Крупицын

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: krupitsin@gmail.com

Изучены арифметические свойства некоторых лиувиллевых чисел в p-адической, g-адической и полиадической области. Доказана трансцендентность и алгебраическая независимость некоторых классов чисел.

В p-адической области рассмотрены числа вида $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)p^{\gamma(n)}$, для которых получена мера трансцендентности.

Пусть $\gamma(x)$ — возрастающая функция такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\gamma(x+1)}{\gamma(x)} = \infty$ и $\gamma(n) \in \mathbb{N}$ при $n \in \mathbb{N}$. Пусть p — фиксированное простое число, $a(n), \gamma(n)$ — натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < p$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$.

Теорема 1. *Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{p^2}{p-1}\right)^d p^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_p H)+1))}\right)^{-1}.$$

Пример 1. *Пусть $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{n!}$. Тогда для любого натурального числа d и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left(H(d+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^d\right)^{-1} H^{-d(\ln \log_p H)^{1+\varepsilon}}.$$

Совершенно аналогичные результаты получены для g-адических чисел.

Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, $a(n), \gamma(n)$ — натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < g$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) g^{\gamma(n)}$.

Теорема 2. *Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_g \geqslant \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{g^2}{g-1}\right)^d g^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_g H)+1))}\right)^{-1}.$$

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon > 0$, $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g^{n!}$. Существует эффективная постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого отличного от нуля многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0$ выполнена оценка*

$$|P(\alpha)|_g \geqslant \left(H(d+1)\left(\frac{g}{g-1}\right)^d\right)^{-d} H^{-d(\ln \log_g H)^{1+\varepsilon}}.$$

Результатами для полиадических чисел служат следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant a_k \leqslant n_k, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{(n_k+1)\ln(n_k+1)}{n_k+1} \to 0 \textit{ при } k \to +\infty.$$

Пусть $\varepsilon(H) \to 0$ при $H \to +\infty$. Пусть $\widetilde{p} \in \mathbb{N}$. Тогда существует $H_0 = H_0(\widetilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p \leqslant \widetilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H, $H \geqslant H_0$, имеющего степень m, удовлетворяющую неравенству $m\varepsilon(H) < \dfrac{\ln \widetilde{p}}{2(\widetilde{p}-1)}$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)\left(\ln\ln H + \ln \varepsilon^{-1}(H)\right)\cdot m}.$$

Теорема 5. *Пусть $\alpha_i = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n,i}(\varphi_i(n))!$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant a_{n,i} \leqslant \varphi_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а функции $\varphi_i(n)$ принимают натуральные значения и удовлетворяют условиям*

$$\frac{\varphi_{i+1}(n)}{\varphi_i(n)\ln\varphi_i(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty, \quad i = 1, \ldots, m-1$$

$$\frac{\varphi_1(n+1)}{\varphi_m(m)\ln\varphi_m(n)} \to +\infty, \quad n \to +\infty$$

$$\frac{\varphi_1(n)\ln\varphi_1(n)\,(\ln\varphi_m(n))^{\frac{3}{2}m}}{\varphi_m(n)} \to +\infty \quad n \to +\infty.$$

Пусть $p_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \delta = 1 - \dfrac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}m+2}}$. Тогда существует число $H_0 = H_0(p_0, \varepsilon)$ такое, что для любого отличного от нулевого многочлена $P(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_m$ при условиях $H \geqslant H_0$,

$$\ln\frac{(d+m)!}{d!m!} \leqslant (1+\delta)\ln H$$

для любого простого числа $p \leqslant p_0$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_p > H^{-d(1+\varepsilon)(\ln\ln H)^{\frac{3}{2}m+1}}.$$

Теорема 6. *Любое целое полиадическое число α допускает представление в виде $\alpha = L_1 + L_2$, где L_1, L_2 — полиадические лиувиллевы числа.*

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В ГЕМОДИНАМИКЕ

Г. В. Кузнецов

(Тульский филиал финансового университета, Тула, Россия)

E-mail address: kuzgv-tula@mail.ru

При решении различных задач, связанных с движением крови, часто используются числовые модели, в которых не совсем точно выполняется одна из основных характеристик движущейся крови — ее непрерывность. Используя геометрию движущейся крови такую трудность можно избежать. Для этого рассматривается геометрия вектора скорости крови при ее движении по участку сосуда в евклидовом пространстве, а при движении крови в рамках всей сердечно-сосудистой системы — в одном из видов риманова пространства — субпроективном пространстве.

Движение крови по участку сосуда, в зависимости от характеристик крови, представляется в виде дифференцируемого отображения из одной точки в другую. Если движение "в норме", то чаще всего в качестве отображений рассматриваются конформное и геодезическое отображения. Геометрия крови изучается по интегральным линиям вектора скорости. Причем, характеристики отображений определяются вектором скорости крови, который определяет для отображений соответствующий вектор. Как правило, этот вектор является сходящимся векторным полем. Это позволяет разделить всю кровеносную систему на области, в которых кровь имеет постоянную скорость. В каждой такой области можно пренебречь кривизной кровеносной системы и рассматривать сосуд как прямолинейный участок, который ассоциируется с евклидовым пространством. Рассматривая движение крови как стационарный поток несжимаемой жидкости, проще отделить структурные характеристики от динамических. Это обстоятельство позволяет проводить математическое моделирование структурных параметров системы кровообращения и исследовать движение крови в ней методом внешних форм, без привлечения динамических характеристик. При этом число параметров, на основании которых исследуется движение крови, сводится к трем базисным дифференциальным формам, а все остальные величины выражаются через них определенным образом.

Структура сердечно-сосудистой системы ассоциируется с субпроективным пространством и движение крови в рамках всей системы изучается на основе интегральных линий вектора скорости крови в субпроективном пространстве. Показано, что при таком подходе основные результаты о движущейся крови также можно получить. При этом в качестве основных параметров рассматриваются три базисные формы и это позволяет не увеличивать число параметров при увеличении точности результатов. В геометрии системы кровообращения рассматривается как геометрия поверхностей, так и геометрия распределений. Последняя, как правило, появляется при патологии или при движении крови в сердце.

О ВОЗМОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СЦЕНАРИЯ ЛАНДАУ-ХОПФА ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ МУЛЬТИПЛИКАТОР-АКСЕЛЬРАТОР

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

(Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия)

E-mail address: anat_kulikov@mail.ru, kulikov_d_a@mail.ru

В [1], [2] был предложен сценарий перехода к турбулентности как каскада бифуркаций инвариантных торов возрастающей размерности. Ф. Такенс в [3] предложил план реализации такого сценария как каскада бифуркаций Андронова–Хопфа. Такой план удается реализовать при анализе краевой задачи, моделирующей макроэкономическую динамику с учетом пространственных эффектов [4]. После преобразований и нормировок, в ряде случаев, такая математическая модель может быть сведена к анализу краевой задачи

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon\nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -\varepsilon u \int_0^\pi u_t u dx, \tag{1}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{2}$$

где $u = u(t,x), x \in [0,\pi], \sigma > 0, \nu > 0$, а ε — малый положительный параметр.

Пусть $\nu \in [1/(k+1)^2; 1/k^2)$, тогда можно показать, что краевая задача (1)–(2) имеет $2^k - 1$ инвариантных торов $T_q(\varepsilon)$ ($\dim T_q(\varepsilon) = 1$, $q = 1,\dots,k$), но притягивающим будет тор наибольшей размерности из возможных $T_k(\varepsilon)$. Для решений, формирующих эти инвариантные торы получены асимптотические формулы. При уменьшении ν и переходе в интервал $\nu \in [1/(k+2)^2; 1/(k+1)^2)$ уже существует $2^{k+1} - 1$ инвариантных торов любой размерности $q = 1, 2, \dots, k, k+1$, но теперь устойчивым становится тор $T_{k+1}(\varepsilon)$, а остальные будут седловыми.

Обоснование результатов основано на применении и развитии метода интегральных многообразий, аппарата нормальных форм Пуанкаре, использовании модифицированного варианта метода Крылова–Боголюбова.

Аналогичные результаты получены для уравнения (1), рассмотренного вместе с краевыми условиями Неймана: $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №18-01-00672.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Доклады академии наук СССР. 1944. V. 44. P. 339–342.

[2] Hopf E. A mathematical example displaying the features of turbulence // Comm. Pure. Appl. Math. 1948 No. 1. P. 303–322.

[3] Broer H., Dumortier W., van Strien S.J., Takens F. Structure in Dynamics. North-Holland: Elsevier, 1991.

[4] Puu T. Nonlinear Economics. Dynamics. Berlin: Springer-Verlag: Elsevier, 1997.

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПОРЯДКИ 2×2 МАТРИЦ НАД ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

И. А. Кульгускин

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: `ivan-kull@rambler.ru`

В работе исследуются мультипликативные порядки 2×2 матриц над некоторыми полями алгебраических чисел. Заметим, что над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ существуют 2×2 матрицы любого конечного мультипликативного порядка. Совсем другая картина наблюдается над полем $\mathbb{Q}$. Несложно показывается, что 2×2 матрицы с коэффициентам из поля $\mathbb{Q}$ могут иметь только следующие конечные мультипликативные порядки: 1, 2, 3, 4 и 6.

Пусть α — квадратичная иррациональность, т. е. число вида $a + b\beta$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, а β — иррациональное число, квадрат которого лежит в $\mathbb{Q}$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *В кольце $M_2(\mathbb{Q}(\alpha))$, где α — квадратичная иррациональность, могут существовать элементы только следующих конечных мультипликативных порядков:* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 *и* 12.

Для каждого возможного конечного порядка приведено конкретное поле $\mathbb{Q}(\alpha)$ и пример конкретной матрицы из $M_2(\mathbb{Q}(\alpha))$ с таким порядком. Показано, что матрицы мультипликативного порядка 8 и 12 существуют только над полями $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ соответственно, а матрицы мультипликативных порядков 5 и 10 существуют только над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Примеры матриц, мультипликативные порядки которых равны соответственно 8, 12 и 5:

$$\mathtt{ord}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = 8,\ \mathtt{ord}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 12,\ \mathtt{ord}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} = 5.$$

Теорема 2. *Если α — квадратичная иррациональность, причем $\mathbb{Q}(\alpha)$ не совпадает ни с одним из полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, то в кольце $M_2(\mathbb{Q}(\alpha))$ существуют элементы только следующих конечных мультипликативных порядков:* 1, 2, 3, 4, *и* 6.

КОНТАКТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

А. Г. Кушнер

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: kushner@physics.msu.ru

В докладе представлены результаты по классификации уравнений Монжа–Ампера переменного типа относительно псевдогруппы контактных преобразований. К таким уравнениям относятся, например, уравнение Трикоми

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0,$$

для которого в работе [1] построены симплектические инварианты.

Уравнению Монжа–Ампера переменного типа отвечает геометрическая структура — два двумерных распределения (вещественных или комплексных) в пространстве 1-джетов $J^1(\mathbb{R}^2)$, прямая сумма которых в точках гиперболичности и эллиптичности совпадает с распределением Картана, а в точках вырождения типа уравнения эти распределения совпадают [3].

Для уравнений общего положения построена e-структура (абсолютный параллелизм). Применение контактной геометрии к уравнениям Монжа–Ампера начато в работе [2].

Список литературы

[1] Кушнер А.Г. Нормальные формы Чаплыгина и Келдыша уравнений Монжа-Ампера // Математические заметки. 1992. Т. 52, №5. С. 63–67.

[2] Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // УМН. 1979. Т. 34, №1(205). С. 137–165.

[3] Kushner A.G. Classification of mixed type Monge-Ampère equations // In: Pràstaro, A., Rassias, Th.M. (ed) Geometry in Partial Differential Equations. Singapore New-Jersey London Hong-Kong: "World Scientific". 1993. P. 173–188.

[4] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **101**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 496 p.

ДИНАМИКИ УРАВНЕНИЙ БЮРГЕРСА–ХАКСЛИ И ЕГО ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

А. Г. Кушнер, Р. И. Матвийчук

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: kushner@physics.msu.ru, mathvich@gmail.com

Понятие (конечномерных) динамик эволюционных уравнений было введено в работе [1].

Обыкновенное дифференциальное уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ называется *динамикой* для эволюционного уравнения $u_t = \varphi\left(u, u_x, u_{xx}, \dots\right)$, если φ является производящей функцией тасующих симметрий этого уравнения [2], то есть уравнение $F = 0$ инвариантно относительно сдвига вдоль траекторий векторного поля S_φ. Число k называется *порядком* динамики.

Пусть Φ_t — сдвиг вдоль траекторий векторного поля S_φ от $t = 0$ до t и $y = h(x)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения $F = 0$. Тогда функция $u(t, x) = \Phi_t^*(h(x))$ является решением эволюционного уравнения $u_t = \varphi$.

В докладе представлены конечномерные динамики первого и второго порядка для уравнения Бюргерса–Хаксли

$$u_t + uu_x = u_{xx} + f(u)$$

и его точные решения. Отметим, что эти точные решения не могут быть найдены с помощью техники симметрий.

Например, решением уравнения Бюргерса–Хаксли при $f(u) = -\frac{5}{9}u^3$ является функция

$$u(t,x) = \frac{6c((x-a)+3b)}{((x-a)^2+12t)\,c+6b(x-a)+18},$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Это решение отвечает уравнению (динамике) второго порядка

$$y'' + yy' + \frac{1}{9}y^3 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y(x) = 6\frac{\alpha x + \beta}{\alpha x^2 + 2\beta x + 2},$$

где α, β — произвольные постоянные.

Список литературы

[1] Kruglikov B.S., Lychagina O.V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2005. V. 19. P. 13-28.

[2] A.G. Kushner, V.V. Lychagin, V.N. Rubtsov. Contact geometry and nonlinear differential equations // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, **101**. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 496 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РАПОПОРТА–ЛИСА

Е. Н. Кушнер

(Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия)

E-mail address: ekushner@ro.ru

Для эволюционных дифференциальных уравнений типа Рапопорта–Лиса [1, 4] $u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}$ базис алгебры Ли векторных полей, порождающих допустимые точечные преобразования, имеет вид [2]: ∂_t, $t\partial_t$, ∂_x, $t\partial_x$, $x\partial_x$, ∂_u, $u\partial_u$. Соответствующая группа Ли порождена трансляциями и растяжениями вдоль осей координат t, x, u, а также одним обобщенным растяжением вдоль оси x.

Введем пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами u, a, b и пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами a, b и определим тривиальное расслоение $\pi_{RL} : \mathbb{R}^3 \ni (u, a, b) \mapsto (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Допустимые преобразования, ограниченные на расслоение π_{RL}, образуют пятимерную группу Ли, которую обозначим через G_{RL}. Соответствующая алгебра Ли $\mathcal{G}_{RL}$ порождена векторными полями ∂_u, $u\partial_u$, ∂_a, $a\partial_a$, $b\partial_b$.

Пусть $J^k(\pi_{RL})$ — пространство k-джетов сечений расслоения RL и $u, a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k$ — канонические координаты на этом пространстве.

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса порождена двумя базовыми инвариантами второго порядка* $J_{2,1} = \dfrac{a_2 b_0}{a_1 b_1}$ *и* $J_{2,2} = \dfrac{b_0 b_2}{b_1^2}$ *и одним инвариантным дифференцированием* $\nabla = \dfrac{b_0}{b_1}\dfrac{d}{du}$. *Эта алгебра разделяет регулярные орбиты группы Ли* G_{RL}.

Список литературы

[1] Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады акад. наук. 2017. Т. 472, №6. С. 627–630.

[2] Кушнер Е.Н. Инварианты обобщенных уравнений Рапопорта-Лиса // Научный Вестник МГТУ ГА. 2018. Т. 21, №2. С. 96–104.

[3] Kruglikov B., Lychagin V. Global Lie–Tresse theorem // Sel. Math. New S. 2016. 1357.

[4] Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. V. 198. P. 139–148.

ТРИ-ТКАНИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КУБИЧЕСКИМ АБСОЛЮТОМ

В. Б. Лазарева

(Университет «Дубна»–филиал «Угреша», Дзержинский, Россия)

E-mail address: amshelekhov@yandex.ru

Фиксируем в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ кубическую кривую ℓ, которую будем называть абсолютом. Тогда на гладкой поверхности V в $\mathbb{P}^3$ возникают две криволинейные три-ткани следующим образом. Пусть P такая точка поверхности V, касательная плоскость в которой пересекает ℓ в трех различных точках M_i, $i = 1, 2, 3$. При освещении поверхности V из точек M_i на ней возникают 3 линии тени, проходящие через точку P. При малом шевелении точки P в некоторой окрестности этой точки на поверхности V возникает три-ткань, состоящая из линий тени; обозначим ее W. Через $\widetilde{W}$ обозначим три-ткань, состоящую из сопряженных линий. Касательные к линиям ткани $\widetilde{W}$ в точке P пересекают абсолют ℓ в точках M_i. В частности, если ℓ распадается на 3 прямые l_i, то три-ткань $\widetilde{W}$ высекается плоскостями пучков с осями l_i. К три-тканям такого рода относятся ткани, определяемые уравнением $z = f(x, y)$: можно считать, что они высекаются координатными плоскостями на поверхности евклидова пространства, заданной этим уравнением. Три-ткани W и $\widetilde{W}$ называют координатными тканями в пространстве с кубическим абсолютом ℓ.

Случай, когда ℓ представляет собой тройку прямых в плоскости, рассматривала В.И. Бычек [1]; тройку прямых в пространстве — В.Б. Лазарева [2], [3]; кубическую норм-кривую в пространстве — А.А. Уткин [4]–[6], [7]; кубическую кривую в несобственной плоскости — В.К. Драгунов [8]. В каждом из этих случаев методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана получены структурные уравнения координатных три-тканей, найдены их кривизны, и, следовательно, найдено необходимое и достаточное условие регулярности координатных три-тканей. Основные результаты работ перечесленных авторов имеются в монографии [9].

В настоящем докладе рассматриваются координатные три-ткани в случае, если абсолют есть тройка прямых специального расположения в $\mathbb{P}^3$.

Список литературы

[1] Бычек В.М. О координатных три-тканях на подмногообразиях обобщенного пространства Аппеля // МГПИ. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 13.10.1980. 4335-80 ДЕП. 34.

[2] Лазарева В.Б. Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1979. Калининград. Калининградский гос. ун-т. №10. С. 54–79.

[3] Лазарева В.Б. О три-ткани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве // Ткани и квазигруппы. 1982. Калинин. Калининский гос. ун-т. С. 45–55.

[4] Уткин А.А. О три-ткани, определяемой на поверхности норм-кривой // Ткани и квазигруппы. 1986. Калинин. Калининский гос. ун-т. С. 71–77.

[5] Уткин А.А. О существовании координатной три-ткани Дарбу на гладкой поверхности в пространстве N^3 // Ткани и квазигруппы. 1987. Калинин. Калининский гос. ун-т. С. 113–119.

[6] Уткин А.А. О геометрическом условии принадлежности тройки кривых трехмерного пространства одной норм-кривой // Изв. вузов. Матем. 1989. № 5. С. 82–84.

[7] Уткин А.А., Шелехов М.А. К геометрии гладкой поверхности пространства N^3 // Ткани и квазигруппы. 1987. Калинин. Калининский гос. ун-т. С. 120–128.

[8] Драгунов В.К. О координатной три-ткани на поверхности в пространстве кубической метрики // Ткани и квазигруппы. 1982. Калинин. Калининский гос. ун-т. С. 86–93.

[9] Шелехов М.А., Лазарева В.Б., Уткин А.А. Криволинейные три-ткани. Тверской государственный университет. Тверь, 2013.

ОБ ИЗУЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Л. В. Липагина

(Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия)

E-mail address: LLipagina@fa.ru

Применение геометрии к решению прикладных задач является, с одной стороны, роскошной визуализацией этих моделей, а с другой стороны, служит непосредственно методом решения ряда таких задач, как, например, задачи линейного программирования. Конечно, в приложениях к экономическим задачам в основном применяются элементы и методы аналитической геометрии: точечное n-мерное пространство над векторным n-мерным пространством, прямые и плоскости в точечном n-мерном пространстве, кривые второго порядка на плоскости.

Линейная модель амортизации, линейная модель издержек, законы спроса и предложения, нахождение наибольшего и наименьшего значений нелинейных экономических функций на некоторых множествах с помощью теоремы Куна–Таккера, многокритериальные экономические задачи, игры в смешанных стратегиях [1], эффективное множество портфелей [2] допускают геометрическую интерпретацию. Более того, некоторые из перечисленных задач могут быть решены методами аналитической геометрии.

В связи с вышеизложенным включение в программу изучения математики студентами экономических специальностей темы «Элементы аналитической геометрии» является крайне необходимым условием полноценного изучения основных инструментов построения и исследования экономических моделей.

Для построения графических иллюстраций и их анализа будущие экономисты должны знать: с помощью каких элементов определить и как записать уравнение прямой на плоскости, в пространстве размерности не менее трех; с помощью каких элементов определить и как записать уравнение k-мерной плоскости в точечном n-мерном пространстве; что эффективное множество портфелей задается ветвью гиперболы. Заметим, что знания элементов аналитической геометрии позволяют создавать добротные визуализации экономических моделей с помощью компьютерных пакетов и анализировать графические компьютерные интерпретации [3], полученные в рамках современного анализа данных.

Список литературы

[1] Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / Под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. М.: КНОРУС, 2017. 400 с.

[2] Математические методы в экономике и финансах: учебник / Под ред. В.М. Гончаренко и В.Ю. Попова. М.: КНОРУС, 2016. 602 с.

[3] В.И. Соловьев. Анализ данных в экономике: теория вероятностей, прикладная статистика, обработка и визуализация данных в Microsoft Excel: учебник. М.: КНОРУС, 2019. 498 с.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИКТ (МЭШ) НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Е. В. Лукьянова

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: lukyanovalv@list.ru

В настоящее время практически всех участников образовательного процесса убеждают в том, что можно и нужно непрерывно использовать современные информационные технологии, в том числе МЭШ (интернет-платформа "Московская Электронная Школа"). Для того чтобы разобраться так ли это на самом деле, полезно попытаться ответить на ряд вопросов, сопутствующих новейшим технологиям:

1. Здоровьесберегающие ИКТ (МЭШ) или нет?

2. Повышают ИКТ (МЭШ) качество образования или нет?

3. Способствуют ИКТ (МЭШ) формированию УУД или нет?

На перечисленные вопросы практически невозможно дать однозначный ответ. Попытка ответить на каждый из поставленных вопросов приводит к необходимости проведения серьезных исследований в области психологии, педагогики и методики преподавания отдельных предметов.

Целесообразность и разумность использования ИКТ (МЭШ) в образовательном процессе напрямую связаны с выполнением следующих условий использования указанных технологий:

1. Дозированное использование ИКТ (МЭШ).

2. Реальное увеличение наглядности при использовании ИКТ (МЭШ).

3. Сочетание традиционных технологий обучения с инновационными.

4. Направленная работа на формирование и развитие способности обучающихся к рефлексии.

При обучении геометрии, например по учебнику Л.С. Атанасяна и др., использовать ИКТ (в том числе, МЭШ) с выполнением указанных условий, можно при изучении практически каждой темы.

Отметим, что при обучении геометрии полезно с помощью ИКТ (МЭШ) не только демонстрировать учащимся чертежи, но и представлять в виде схем сам процесс решения задачи или доказательства утверждений. Например, для демонстрации процесса доказательства можно использовать дедуктивные схемы, представленные в [1]. Кроме того, для формирования у учащихся способности к рефлексии, ИКТ (МЭШ) открывает широкие возможности к использованию дедуктивных задач, предложенных в [2].

Список литературы

[1] Тимофеева И.Л., Лукьянова Е.В. Дедуктивные схемы доказательств в обучении геометрии учащихся средней школы // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и ВУЗе: Сборник материалов по теории и методике обучения математике. Вып. 13. М.: МПГУ, 2008. С. 82–86.

[2] Тимофеева И.Л., Лукьянова Е.В. Дедуктивные задачи как средство обучения доказательству учащихся средней школы // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и ВУЗе: Сборник материалов по теории и методике обучения математике. Вып. 13. М.: МПГУ, 2008. С. 77–81.

ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ СОПРЯЖЕННЫХ ПОРЯДКОВ И ЗАДАЧА КОШИ

А. А. Макаров

(Харьковский национальний университет им. В. Н. Каразина, Харьков, Украина)

E-mail address: natvasmak@ukr.net

Задача Коши для дифференциальных уравнений в частных производных рассматривается, как правило, в изотропных пространствах, то есть когда по разным пространственным переменным рост решения одинаковый. В кандидатской диссертации Г.П. Сердюка [1] были получены анизотропные классы единственности для решений задачи Коши. Для полинома $P(is) = \sum\limits_{|k|\leq n} a_k s_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{k_n}$, где мультииндекс $k = (k_1, \ldots, k_n)$ и $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, было введено понятие гиперповерхности сопряженных порядков. *Гиперповерхностью сопряженных порядков* называется множество

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^n_+ \,:\, \max_{k\,:\,a_k\neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} \leqslant 1 \right\}.$$

В предлагаемой работе получены анизотропные классы корректности для задачи Коши. Введем пространство

$$W_B^\infty = \Bigg\{ \varphi(x) \in C_B^\infty(\mathbb{R}^n) :\ \forall\, m \exists C_m > 0,\ \exists a_k > 0$$
$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqslant C_m \exp \sum_{k=1}^{n} a_k |x_k|^{b_k} \Bigg\}.$$

Здесь $b_k > 1$, а $B = (b_1, \ldots b_n)$.

Теорема 1. *Пусть полином $Q(\tau, s) = \tau - P(is)$ экспоненциально корректный, т. е. $|P(is)| \leq C(\nu)$ при $|Im\, s| < \nu$ для всех $\nu > 0$. Если $\alpha \in S$ ($\alpha_i > 1$ при $i \leq r$, а при $i > r$ $\alpha_i = 1$), то задача Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

корректна в пространстве W_B^∞, где $b_k = \alpha'_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha_k - 1}$, а при $k > r$ b_k — любое число, большее 1.

Пример 1.

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^{2p}u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^{2p}} + c\frac{\partial^{m+n}u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^m\,\partial x_2^n} + b\frac{\partial^{2p}u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^{2q}}$$

$$u(x_1,x_2,0) = \varphi(x_1,x_2).$$

Здесь гиперповерхность $S:\ \alpha_1 \geqslant 2p,\ \alpha_2 \geqslant 2p,\ \dfrac{m}{\alpha_1} + \dfrac{n}{\alpha_2} \leqslant 1.$
Если $m \leqslant p,\ n \leqslant q$, *то можно взять* $\alpha_1 = 2p,\ \ \alpha_2 = 2q$.
Если $(-1)^p a < 0$ *и* $(-1)^q b < 0$, *то при достаточно малых* $|c|$ *данная задача Коши корректна в пространстве* W_B^∞ *с* $b_1 = (2p)'$, $b_2 = (2q)'$.

Список литературы

[1] Сердюк Г.П. О единственности решений линейных дифференциальных уравнений: Дисс. … кандидата физ.-мат. наук. Харьков, 1983.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕНЗОРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

А. Н. Макоха

(Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь, Россия)

E-mail address: anmakoha@yandex.ru

Т. Е. Тышляр

(ООО "Компьютер Премиум", Ставрополь, Россия)

E-mail address: t_e_t@inbox.ru

Тензорные вычисления имеют широкую область применения. Они являются необходимым инструментом в различных естественнонаучных направлениях, таких как геометрия, физика, механика, квантовая химия, кристаллофизика и многих других.

Выполнение операций над тензорами, особенно в многомерных пространствах, подразумевает большие объемы вычислений, что делает актуальным вопрос об их распараллеливании.

Одной из важнейших парадигм при разработке параллельных вычислительных алгоритмов для компьютеров является оценка получаемого ускорения процесса вычислений (уменьшения времени выполнения вычислений). На практике используются следующие подходы к автоматизации тензорных вычислений:

– разработка программных комплексов с использованием языков высокого

уровня;
– использование специализированных математических пакетов (Maple, MATLAB и др.);
– моделирование операций над тензорами на нейронных сетях.

Как одну из возможностей для распараллеливания тензорных операций нами были построены модели нейронных сетей, реализующих операции сложения и умножения тензоров, свертки тензора, операций симметрирования и альтернирования, вычисления ковариантной производной тензора. В последнем случае за основу было положено вычисление частной производной от функции многих переменных.

Для построения геометрической конструкции линейных комплексов плоскостей, ассоциированных с тривекторами восьмого ранга (кососимметрических тензоров третьей валентности) необходимо исследовать свойства многообразий особых точек этих тривекторов, найденных аналитически в работе [1]. Сделать это «вручную» затруднительно в силу большого объема вычислений. Для автоматизации необходимых вычислений нами были разработаны модели нейронных сетей для определения особых точек 1-го и 2-го рода и точек общего положения проективного семимерного пространства P_7 над полем комплексных чисел.

Для обучения таких сетей необходимо иметь в распоряжении достаточно большой набор обучающих примеров. Для этой цели мы разработали программу в среде Lazarus, которая позволяет генерировать заданное количество точек пространства P_7 для каждого из 13 типов линейных комплексов плоскостей, соответствующих 13 типам тривекторов восьмого ранга.

Список литературы

[1] Макоха А.Н. Особые точки тривекторов восьмого ранга в P_7 // Геометрия погружённых многообразий. 1972. С. 69–97.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА БРУННА–МИНКОВСКОГО

Ф. М. Малышев

(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: malyshevfm@mi-ras.ru

Предлагается новое элементарное конструктивное доказательство классической теоремы Брунна–Минковского [1], имеющей много обобщений и приложений в различных областях.

Теорема 1. *Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, содержатся выпуклые многогранники P_0, P_1 одинакового n-мерного объёма $v > 0$, и пусть P — сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L, параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n-мерный объём P будет не меньше v, причём равен v только в случае, когда P_1 получается из P_0 параллельным переносом.*

Теорема 1 доказывалась многими авторами (см. [2]). Существующие доказательства обычно используют деление объёмов P_0, P_1 параллельными гиперплоскостями и симметризацию Штейнера. Б.Н. Делоне считал эту теорему "*хотя, быть может, и трудно доказуемой, но самой по себе довольно очевидной*". Теорема 1 относится к основам теории выпуклых многогранников, поэтому вполне естественным является желание получить её элементарное наглядное геометрическое доказательство, максимально выпукло высвечивающее суть вопроса и доступное, если не школьникам старших классов, то, по меньшей мере, студентам младших курсов.

В докладе предлагаемое доказательство сводится к случаю, когда многогранник P_0 является симплексом. Симметризация Штейнера не используется. Условие для случая равенства возникает достаточно органично. Обычно случай равенства выделялся в отдельную особую и порой наиболее трудную (для доказательства) часть теоремы. Для $n = 2$ и $n = 3$ доказательство теоремы 1, доступное школьникам, осуществляется путём построения семейства многогранников $P_1(s)$, $s \in [0,\, 1]$, $P_1(0) = P_1$, постоянного n-мерного объёма, для которых объём $V_n(P(s))$ соответствующих многогранников $P(s)$ в гиперплоскости L строго монотонно убывает и многогранник $P_1(1)$ получается из P_0 параллельным сдвигом.

При заданных многограннике P_1 и симплексе P_0 однозначно задаваемый ими многогранник P в формулировке теоремы 1 обозначим как $P(P_1)$. В общем случае для $n \geqslant 2$ элементарными средствами доказывается ослабленный вариант теоремы 1, утверждающий, что для всех выпуклых многогранников P_1, не получающихся из P_0 параллельным сдвигом, справедливо строгое неравенство

$$V_n(P(P_1)) > \inf_Q V_n(P(Q)),$$

где нижняя грань берётся по всем выпуклым многогранникам Q с $V_n(Q) = V_n(P_0)$. Теорема 1 непосредственно следует из данного неравенства и первоначальной теоремы Брунна, утверждавшей справедливость нестрого неравенства $V_n(P(P_1)) \geqslant V_n(P_0)$ для всех выпуклых многогранников P_1 с $V_n(P_1) = V_n(P_0)$. Предлагаемое в докладе доказательство завершается не элементарной, но наиболее простой его частью о достижимости $\inf_Q V_n(P(Q))$ для непрерывной функции $V_n(P(Q))$ на множестве замкнутых выпуклых областей Q в $\mathbb{R}^n$ объёма $V_n(Q) = V_n(P_0)$ и $V_n(P(Q)) \leqslant 2V_n(P_0)$, которое компактно в метрике Хаусдорфа.

Список литературы

[1] Brunn H. Uber Ovale und Eiflachen. Inag. Diss., Munchen, 1887.

[2] Бураго Д.М., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980. 288 с.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ КВАЗИПАРАЛЛЕЛОГРАММА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

М. С. Маскина, Т. А. Жильников

(Академия ФСИН, Рязань, Россия)

E-mail address:mariaya_maskina@mail.ru, quadrus02@mail.ru

В классической литературе в качестве основных четырехугольников плоскости Лобачевского упоминаются гиперболический параллелограмм и гиперболический ромб [1], [2], [3], [4]. Ранее было доказано существование частных случаев гиперболического параллелограмма: гиперболического прямоугольника и гиперболического квадрата [5].

Авторами продолжено исследование частных случаев четырехугольников плоскости Лобачевского, имеющих характеристические свойства параллелограмма евклидовой плоскости. Квазипараллелограммом I рода будем называть четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и равны. Квазиромбом I рода будем называть квазипараллелограмм I рода, диагонали которого перпендикулярны, квазипрямоугольником I рода – квазипараллелограмм I рода, диагонали которого равны. Квазиквадратом I рода будем называть квазиромб I рода, диагонали которого равны.

Доказательство существования этих четырехугольников проведено либо построением, либо координатным методом на модели плоскости Лобачевского в круге евклидовой плоскости [1]. Выбор единичного радиуса окружности (называемой абсолютом) не нарушает общности рассуждений. При выводе метрических формул используются только вещественные координаты действительных точек и прямых евклидовой плоскости, а расстояние между точками A и B плоскости Лобачевского определяются через метрику

$$\delta\,(A;\ B) = 0,5r|\ln(AB;\ UV)|,$$

где r — радиус кривизны пространства, U и V — точки пересечения прямой AB с абсолютом, $(AB,\ UV)$ — сложное отношение четырех точек одной прямой [1].

Список литературы

[1] Атанасян Л.С., Базылева В.Т. Геометрия. В 2-х ч. Ч. II. М.: Просвещение, 1987.

[2] Атанасян Л.С. Геометрия Лобачевского: книга для учащихся. М.: Просвещение, 2001.

[3] Каган В.Ф. Основания геометрии. Ч. I. М-Л.: ГИТТЛ, 1949. 492 с.

[4] Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений в 3 томах. Т.3. М-Л.: ГИТТЛ, 1951.

[5] Маскина М.С., Купцов М.И. Частные случаи гиперболического параллелограмма плоскости Лобачевского // Геометрические методы в теории управлений и математической физике: тезисы докладов Междунар. конф. Рязань: РГУ им. С.А. Есенина, 2018. С. 53–54.

СВОЙСТВА ЦИФР ПОЛИАДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В. Ю. Матвеев

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: salomaa@mail.ru

В докладе сообщается о статистических свойствах цифр частичных сумм рядов, представляющих некоторые полиадические и почти полиадические числа.

К ГЕОМЕТРИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Г. Матиева, Ч. Х. Абдуллаева, Т. М. Папиева

(Ошский государственный университет, Кыргызско-Узбекский университет, Ош, Кыргызстан)

E-mail address: gulbadan_57@mail.ru, cholponabdulla@mail.ru, tpapka73@mail.ru

Рассматривается p-мерное распределение Δ_p в области Ω евклидова пространства E_n. Заданием распределения Δ_p инвариатнтным образом определяется $(n-p)$-мерное рапределение $\overline{\Delta}_{n-p}$, ортогонально дополнительное к Δ_p.

$\overrightarrow{M}_p$, $\overrightarrow{\overline{M}}_{n-p}$ — векторы средних кривизн распределений [1] Δ_p, $\overline{\Delta}_{n-p}$, соответственно и $\overrightarrow{M}_p \in \overline{\Delta}_{n-p}(X)$, $\overrightarrow{\overline{M}}_{n-p} \in \Delta_p(X)$, $X \in \Omega \subset E_n$.

Когда точка X смещается в области $\Omega \subset E_n$, точка M, определенная радиус-вектором $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_p + \overrightarrow{\overline{M}}_{n-p}$ опишет свою область $\overline{\Omega} \subset E_n$. Получается частичное отображение $f\colon \Omega \to \overline{\Omega}$ такое, что $f(X) = M$.

Найдены необходимые и достаточные условия существования неподвижной прямой частичного отображения $f\colon \Omega \to \overline{\Omega}$.

Список литературы

[1] Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n // Проблемы геометрии. 1975. Москва: ВИНИТИ. Т. 7. С. 215–229.

ГЕНЕЗИС ПОНЯТИЯ «РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ» В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЕ

Р. А. Мельников

(Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия)

E-mail address: roman_elets_08@mail.ru

Задача о нахождении расстояния между двумя скрещивающимися прямыми является одной из труднейших в школьном курсе геометрии. Время от времени она появляется в содержании контрольно-измерительных материалов профильного ЕГЭ по математике.

Анализ школьных учебников и учебно-методических пособий показал, что большинство авторов ограничиваются лишь определением этого понятия. И только немногие сопровождают изложение материала, посвященного расстоянию между скрещивающимися прямыми, перечислением его свойств. При этом следует выделить две тенденции.

Во-первых, как правило, это понятие вводится как общий перпендикуляр. Это обстоятельство роднит большинство имеющихся в отечественной литературе учебников и пособий.

Во-вторых, поясняется, между какими геометрическими объектами следует искать этот общий перпендикуляр. В этом месте происходит своеобразная дивергенция точек зрения у разных авторов и авторских коллективов, написавших, как учебные пособия, которыми пользовались ранее, так и современные учебники.

Некоторые из них (В. М. Клопский, З. А. Скопец, М. И. Ягодовский; А. Ю. Калинин и Д. А. Терешин; И. М. Смирнова и В. А. Смирнов; В. А. Гусев и др.) стоят на позициях, что это собственно общий перпендикуляр между двумя прямыми. Для них характерно определение типа: «*отрезок, соединяющий две точки, принадлежащие им, и перпендикулярный обеим прямым, называется общим перпендикуляром*». Длина общего перпендикуляра называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.

Другие авторы (А. В. Погорелов; А. Д. Александров и др.; Е. В. Потоскуев и Л. И. Звавич) склоняются к тому, что это расстояние следует искать между параллельными плоскостями, каждая из которых содержит по одной из скрещивающихся прямых.

Имеются и другие точки зрения. Например, И. Ф. Шарыгин интерпретирует это расстояние как, «*расстояние от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость*» [2].

В учебнике под редакцией Л. С. Атанасяна мы находим ещё одно определение, отличное от предыдущих: «*расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой*» [1]. Такой подход, на наш взгляд, позволяет свести задачу о нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми к задаче о поиске расстояния от точки (удачно выбранной на одной из скрещивающихся прямых) до плоскости (содержащей вторую скрещивающуюся прямую). При этом открываются перспективы для использования формулы, хорошо известной из курса аналитической геометрии (то есть появляется возможность применения координатного метода).

Список литературы

[1] Атанасян Л.С. Геометрия: учебник для 10–11 классов средней школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев. М.: Просвещение, 1992. 207 с.

[2] Шарыгин И.Ф. Геометрия 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учебных заведений. М.: Дрофа, 1999. 208 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Й. Микеш, И. Гинтерлейтнер, Н. И. Гусева

(Университет Палацкого, Оломоуц; Технический университет, Брно, Чехия; Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: josef.mikes@upol.cz, hinterleitner.i@fce.vutbr.cz, ngus12@mail.ru

Как известно, диффеоморфизм называют геодезическим отображением, если при нем все геодезические одного пространства переходят в геодезические второго пространства [2, 5, 7].

Вопросам геодезических отображений поверхностей последнее время было посвящено несколько работ, например, [3, 4, 8, 9, 10].

Геодезические отображения замкнутых поверхностей изучал В.Т. Фоменко [1], который, в частности, доказал теорему: *Пусть замкнутая C^2 поверхность F^2, гомеоморфная сфере S^2, допускает геодезическое отображение на поверхность F^2 и имеет более чем пять конформных точек (т.е. в этих точках метрики пропорциональны). Тогда геодезическое отображение является гомотетичным, т.е. метрики пропорциональны с постоянным коэффициентом.*

Геодезические отображения тесно связаны с вопросом о квадратичном интеграле геодезический. Из результата сформулированного Микешем и Худой в работе [6] вытекает, что в выше указанной теореме достаточно существование трех конформных точек, причем можно опустить условие гомеоморфности сфере.

Доказываем, что для проективной определенности поверхностей, гомеоморфных сфере, достаточно существование двух конформных точек. Данные точки не должны быть «полюсами», т.е. они в любом направлении не соединяются геодезическими. Эти условия можно далее ослабить.

Список литературы

[1] Фоменко В.Т. Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений // ДАН. 2006. Т. 407, № 4. С. 453–456.

[2] Петров А.З. Новые методы в теории относительности. М.: Наука, 1965.

[3] Hinterleitner I. On global geodesic mappings of ellipsoids // AIP Conf. Proc. 2012. V. 1460. P. 180–184.

[4] Hinterleitner I. Geodesic mappings on compact Riemannian manifolds with conditions on sectional curvature // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. 2013. V. 94. P. 125–130.

[5] Mikeš J. et al. Differential geometry of special mappings. Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.

[6] Mikeš J., Chudá H. First quadric integral of geodesics with certain initial conditions // Proc. 6th Conf. Appl. Math. APLIMAT, 2007. P. 85–88.

[7] Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. Geodesic mappings and some generalizations. Olomouc: Palacky Univ. Press, 2009.

[8] Mikeš J. Global geodesic mappings and their generalizations for compact Riemannian spaces // Silesian Univ. Math. Publ. (Opava). 1993. No. 1. P. 143–149.

[9] Mikeš J., Berezovski V., Stepanova E., Chudá H. Geodesic mappings and their generalizations // J. Math. Sci. (New York). 2016. V. 217, No. 5. P. 607–623.

[10] Rýparová L., Mikeš J. On global geodesic mappings of quadrics of revolution // Proc. of 16th Conf. Appl. Math. APLIMAT, 2017. P. 1342–1348.

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

Й. Микеш, И. Гинтерлейтнер, Н. И. Гусева, С. Формелла

(Университет Палацкого, Оломоуц; Технический университет, Брно, Чехия;
Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия;
Технологический университет, Штетин, Польша)

E-mail address: `Josef.Mikes@upol.cz, Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz, ngus12.mail.ru, Stanislaw.Formella@zut.edu.pl`

Геодезические отображения пространств постоянной кривизны, которые являются пространствами Эйнштейна, начал изучать Бельтрами в 19-м веке, а пространств Эйнштейна–Петров [4] в 1961 г., см. [10]. В 1978 г. Микеш доказал, что пространства Эйнштейна допускают нетривиальные геодезические отображения (НГО) только на пространства Эйнштейна [2]. На основании этих результатов было установлено, что 4-мерные пространства

Эйнштейна непостоянной кривизны не допускают НГО [3]. Затем этими вопросами занимался Формелла, в частности, им с Микешем найдены метрики всех эйнштейновых пространств, допускающих НГО [6]. В виду аналитичности метрик пространств Эйнштейна (Каждан и ДеТурк [5] в 1981 г., см. монографию Бессе), выше приведенные результаты верны «в целом», см. [7].

В 20-ые годы 20-го века Бринкманн исследовал конформные отображения пространств Эйнштейна [10]. В [8] найдены основные уравнения конформных отображений на пространства Эйнштейна в форме линейных уравнений в частных производных типа Коши, см. [1].

Выше изложенные вопросы детально изложены в монографии [2]. Нами получены новые результаты «в целом» для геодезических и конформных отображениях пространств Эйнштейна.

Список литературы

[1] Евтушик Л.Е., Гинтерлейтнер И., Гусева Н.И., Микеш Й. Конформные отображения на пространства Эйнштейна // Изв. вузов. Матем. 2016. №10. С. 8–13.

[2] Микеш Й. О геодезических отображениях пространств Эйнштейна // Матем. заметки. 1980. Т. 28, №6. С. 935–938.

[3] Микеш Й., Киосак В. О геодезических отображениях четырех мерных эйнштейновых пространств // Одесск. ун-т. Деп. в ВИНИТИ, 9.4.82. № 1678-82, 19 с.

[4] Петров А.З. О геодезическом отображении пространств Эйнштейна // Изв. вузов. Матем. 1961. №2. С. 130–136.

[5] DeTurck D.M, Kazdan J.L. Some regularity theorems in Riemannian geometry // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 1981. V. 14, No. 3. P. 249–260.

[6] Formella S., Mikeš J. Geodesic mappings of Einstein spaces // Szczecińske roczniky naukove, Ann. Sci. Stetinenses. 1994. V. 9, No. 1. P. 31–40.

[7] Hinterleitner I., Mikeš J. Geodesic mappings and Einstein spaces. Geometric methods in physics // Trends Math. 2013. V. 19. P. 331–335.

[8] Mikeš J., Gavril'chenko M.L., Gladysheva E.I. Conformal mappings onto Einstein spaces // Mosc. Univ. Math. Bull. 1994. V. 49, No. 3. P. 10–14.

[9] Mikeš J. et al. Differential geometry of special mappings. Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.

[10] Petrov A.Z. Einstein spaces. Pergamon Press, 1969.

ГЕОМЕТРИЯ НОРМАЛЬНО ПЛОСКИХ ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Мирзоян

(Национальный Политехнический Университет Армении, Ереван, Армения)

E-mail address: vmirzoyan@mail.ru

Риманово многообразие M называется полусимметрическим, если его тензор кривизны R удовлетворяет условию $R(X,Y)R = 0$, где X, Y — произвольные векторные поля на M, а $R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$ — операторы кривизны. Полусимметрические многообразия были классифицированы З. Сабо в [1], а полные полусимметрические гиперповерхности в евклидовых пространствах в [1]. Более сложный класс полусимметрических подмногообразий был геометрически описан в [3]–[4]. Настоящая работа продолжает исследование нормально плоских полусимметрических подмногообразий произвольной коразмерности в евклидовых пространствах. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *В евклидовом пространстве E_n нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M $(\dim M \geqslant 3)$ с нулевым индексом дефектности является подмногообразием ненулевой постоянной секционной кривизны или локально представляет собой прямое произведение таких подмногообразий и имеет параллельный тензор Риччи. Если в E_n нормально плоское полусимметрическое подмногообразие M $(\dim M \geqslant 3)$ является риччи-плоским, то оно локально евклидово.*

Следствие 1. *В E_n нормально плоское полусимметрическое эйнштейново подмногообразие M $(\dim M \geqslant 3)$ с ненулевой эйнштейновой константой является подмногообразием постоянной ненулевой секционной кривизны.*

Список литературы

[1] Szabo Z. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$. I. The local version // J. Differential Geom. 1982. V. 17. P. 531–582.

[2] Szabo Z. Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$ // Acta Sci. Math. 1984. V. 47. P. 321–348.

[3] Мирзоян В. Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах // Изв. РАН. Сер. Матем. 2011. Т. 75. С. 47–78.

[4] Мирзоян В. Нормально плоские полусимметрические подмногообразия в евклидовых пространствах // Докл. НАН Армении. 2018. Т. 118. С. 203–213.

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

А. С. Мищенко

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: asmish-prof@yandex.ru

Дается описание внешних дериваций групповой алгебры конечно представимой дискретной группы в терминах комплекса Кэли группоида присоединенного действия группы. Это описание является гладкой версией проблемы Джонсона для дериваций. Показано, что алгебра внешних дериваций изоморфна группе одномерных когомологий с компактными носителями комплекса Кэли группоида.

С другой стороны алгебра внешних дериваций изоморфна группе одномерным когомологий Хохшильда групповой алгебры. Таким образом вся группа когомологий Хохшильда может быть описана в терминах когомологий классифицирующего пространства группоида присоединенного действия группы при подходящем условии финитности когомологий.

Список литературы

[1] Mishchenko A.S. Derivations of Group Algebras and Hochschild cohomology // arxiv.org/abs/1811.02439 [math.AT]

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ, ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ И ЛИНИЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н. И. Москаленко

(Белгородский университет кооперации, экономики и права, Белгород, Росссия)

E-mail address: docent.moskalenko@yandex.ru

Под производственной функцией понимается взаимозависимость между одним или несколькими вводимыми факторами производства (ресурсами) и производимыми товарами или услугами (выпуском продукции).

Такая зависимость может быть определена аналитически по статистическим данным деятельности предприятий или по прогнозируемым данным. Графиком производственной функции двух аргументов в трехмерном пространстве является двумерная поверхность.

Для экономического анализа выделяют различные семейства кривых на этой поверхности. Например, изокванты показывают, как изменяется сочетание ресурсов необходимых для получения некоторых фиксированных объемов продукции, а также линии выпуска продукции с одним из постоянных ресурсов.

Предлагаем также использовать для экономического анализа производственных поверхностей асимптотические, геодезические линии и линии кривизны.

Прямая имеет нулевую кривизну, если она принадлежит производственной поверхности, то она будет асимптотической линией этой производственной поверхности. Вдоль этих прямых выпуск продукции будет пропорционален. Таким образом, поиск асимптотических линий производственной поверхности приведет к нахождению линий (прямых), с пропорциональным выпуском продукции.

Кривая, которая соединяет кратчайшим расстоянием две точки поверхности, называется геодезической. Геодезическая линия на производственной поверхности указывает переход от точек выпуска продукции по кратчайшему пути.

Вся производственная поверхность покрыта ортогональной сетью из линий кривизны. Определение линий кривизны дают направления наибольшего и наименьшего выпуска продукции в точке производственной поверхности. В омбилической точке любая линия будет линией кривизны. В таких точках во всех направлениях производственной поверхности выпуск продукции будет одинаков.

О СВОЙСТВАХ q-ИЧНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Х. Муньос Васкес

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: m.v.ankhel@yandex.ru

Была поставлена задача оценить возможное количество периодов и длины начальной непериодической части в алгебраическом числе в зависимости от меры его иррациональности β.

В результате получили что, разложение дробной части алгебраического числа α не может начинаться с непериодической части длины γ, и оканчиваться периодической частью с k периодами, если будет выполнено неравенство $\beta < \dfrac{k+\gamma}{1+\gamma}$, вне зависимости от системы счисления.

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕТРА-СТРУКТУРА В ПРОСТРАНСТВЕ РАССЛОЕНИЯ А-РЕПЕРОВ ПОЧТИ ЭРМИТОВА МНОГООБРАЗИЯ

А. В. Никифорова

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: `anik7@bk.ru`

Пусть на гладком многообразии M фиксирована почти эрмитова структура (J, g), где J — антиинволютивный эндоморфизм, g — риманова метрика, согласованная с ним. Задание почти эрмитовой структуры равносильно заданию расслоения реперов $(BM, M, \pi, U(n))$ со структурной группой $U(n)$ (см., например, [1]). Такие реперы называются А-реперами. Рассмотрим связность $\bar{\nabla}$ в этом расслоении. Она называется почти эрмитовой связностью и характеризуется тем, что $\bar{\nabla}J = \bar{\nabla}g = 0$. Она, вообще говоря, имеет ненулевое кручение (тензор Нейенхейса), которое с точностью до постоянного множителя совпадает со структурным тензором почти эрмитовой структуры.

Напомним, что метрической тетра-структурой называется пара (f, h), где f – эндоморфизм, $f^4 = id$, h – риманова метрика, $h(fX, fY) = h(X, Y)$. Задание тетра-структуры f на гладком многообразии M равносильно разложению комплексификации модуля векторных полей на M в прямую сумму четырех собственных распределений эндоморфизма f: $D_f^{\sqrt{-1}}$, $D_f^{-\sqrt{-1}}$, D_f^1, D_f^{-1}, отвечающих соответственно собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, 1, -1. Из них первые два комплексно сопряжены, а два другие — вещественные [2].

Мы рассмотрели главное расслоение А-реперов над многообразием с почти эрмитовой структурой и почти эрмитовой связностью в этом расслоении. Так как группа $U(n)$ компактна, то согласно [3] на тотальном пространстве расслоения А-реперов BM задаются тетра-структуры первого и второго рода по формулам

$$f(X) = (J \circ \pi_* X)^\sharp \pm \Lambda \circ \theta(X); \;\; h(X, Y) = g(\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + B(\theta X, \theta Y), \quad (1)$$

где θ — форма связности $\bar{\nabla}$, B — расширение по линейности евклидовой структуры алгебры Ли $\mathfrak{u}(n)$ группы $U(n)$ на модуль $C^\infty(BM)\otimes\mathfrak{u}(n)$, знак плюс соответствует первому роду, а минус — второму роду.

Теорема 1. *Сужение тетра-структуры f (1) на распределение $(D_J^{\sqrt{-1}})^\sharp\oplus(D_J^{-\sqrt{-1}})^\sharp$ является почти комплексной структурой, а ее сужение на вертикальное распределение расслоения $(BM, M, \pi, U(n))$ является структурой почти произведения для тетра-структуры первого рода и является почти комплексной структурой для тетра-структуры второго рода. Здесь через $(D_J^{\sqrt{-1}})^\sharp$ обозначен горизонтальный лифт собственного распределения эндоморфизма J, отвечающего собственному значению $\sqrt{-1}$; аналогично $(D_J^{-\sqrt{-1}})^\sharp$ — горизонтальный лифт собственного распределения эндоморфизма J, отвечающего собственному значению $-\sqrt{-1}$.*

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Издание второе, дополненное. Одесса: Печатный Дом, 2013. 458 с.

[2] Sinha B.B., Sharma R. A quartic structure $F^4 = 1$ // Math. Stud. 1980(1984). V. 48, No. 2–4. P. 153–160.

[3] Докалюк С.Н. Геометрия многообразий Ниренберга: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2003.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЭЙЛЕРА С ЧЛЕНАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ВРЕМЕНИ ТЕЧЕНИЯ

В. М. Овсянников

(Московская государственная академия водного транспорта — филиал Государственный университет морского и речного флота им. С. О. Макарова Ноябрьский институт нефти и газа — филиал Тюменского индустриального университета, Россия)

E-mail address: `OvsyannikovVM@yandex.ru`

Уравнение неразрывности $\operatorname{div} V = 0$, где V — вектор скорости, выражает закон сохранения и является основой гидрогазодинамики. Оно было выведено геометрически в 1752 г. Леонардом Эйлером [1], а затем в 1830-е годы с использованием формулы Гаусса–Остроградского. В 1954 г. К. Трусделл [2] опубликовал краткий пересказ на английский язык с латыни вывод Эйлера, в котором оказалось, что 6 деформаций контрольной фигуры растяжения и сдвига контрольной фигуры вдоль трех осей координат приводят к возникновению 15 слагаемых уравнения неразрывности

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z + (\triangle t)[\partial(u, v)/\partial(x, y) + \partial(v, w)/\partial(y, z) + \\ + \partial(w, u)/\partial(z, x)] + (\triangle t)^2 \partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

На следующем этапе вывода Эйлер предельными переходами, устремляя $\triangle t \to 0$, избавился от членов второго и третьего порядков малости. С позиций Лайтхилла, в 1952–1954 гг. предложившего вывод волнового уравнения неразрывности методом акустической аналогии, содержащем взятие производной по времени от уравнения неразрывности, дополнительные члены могут попасть в неоднородную часть волнового уравнения и привести к генерации в потоке звуковых волн и автоколебаний. В несжимаемой жидкости образование волн невозможно. Поэтому уравнение (1) было в 2006 г. переписано для сжимаемого газа в виде

$$\partial \rho/\partial t + \partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y + \partial(\rho w)/\partial z + \rho(\triangle t)[\partial(u, v)/\partial(x, y) + \\ + \partial(v, w)/\partial(y, z) + \partial(w, u)/\partial(z, x)] + \rho(\triangle t)^2 \partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) = 0,$$

и дало неоднородное волновое уравнение

$$c_0^{-2} \partial^2 p/\partial t^2 - \partial^2 p/\partial x^2 - \partial^2 p/\partial y^2 - \partial^2 p/\partial z^2 = -\rho_0 J,$$

где $J = [\partial(u, v)/\partial(x, y) + \partial(v, w)/\partial(y, z) + \partial(w, u)/\partial(z, x)]$ — сумма якобианов второго порядка вектора скорости, ρ_0 — средняя плотность, c_0 — скорость звука.

Для обоснованного и уверенного использования уравнения неразрывности Эйлера с членами второго порядка малости по времени движения необходимо найти члены второго порядка малости в выводе уравнения неразрывности, проводящемся с использованием теоремы Гаусса–Остроградского. Обратим внимание, что построения Эйлера, дающие члены второго порядка малости, проведены геометрически без выполнения предельных переходов устремления к нулю ни интервалов времени $\triangle t$, ни размеров $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$. Поэтому в теореме Гаусса–Остроградского можно увидеть члены второго порядка малости, содержащие время движения жидкой частицы, если заменить интегралы интегральными суммами и разобрать кинематику перемещения жидких частиц, пересекающих границу контрольной фигуры из окружающего пространства. Заменив математическое понятие потока произведением скорости на площадь поверхности (или длину границы в плоском двухмерном течении) контрольной фигуры и не используя направляющих косинусов, мы получаем, что часть жидких частиц пересечет по секущей дважды границу контрольной фигуры за интервал времени $\triangle t$, выйдет за пределы контрольной фигуры и не будет учтен в балансе вещества.

Примеры расчета показывают, что члены высокого порядка малости, отражающие локальное несохранение, совпадают с дополнительными членами, вычисленными Эйлером. Примеры охватывают потенциальные течения и течения с деформациями сдвига. Таким образом, и вывод Эйлера уравнения неразрывности и вывод с использованием теоремы Гаусса–Остроградского дает уравнение неразрывности, содержащее члены высокого порядка малости по времени течения и дают волновое уравнение, генерирующее звук и автоколебания.

Список литературы

[1] Euler L. Principia motusfluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. T.6 (1756–1757). P. 271–311 — Opera omnia, ser. II. V. 13. P. 1–369.

[2] Leonhardi Euleri. Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Volumen prius / Edidit C.A. Truesdell. Lausannae. 1954.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПУЧКА СВЯЗНОСТЕЙ 1-ГО ТИПА, ПОРОЖДЕННОГО КОМПОЗИЦИОННЫМ ОСНАЩЕНИЕМ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

О. М. Омельян

(Балтийский Федеральный Университет им. И. Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: olga_omelyan2002@mail.ru

Продолжим исследование распределения 1-го рода NS_n m-мерных плоскостей P_m [1]. С распределением NS_n ассоциируется главное расслоение $G(NS_n)$ с четырьмя главными фактор-расслоениями. В расслоении $G(NS_n)$ задается ассоциированная связность

$$\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^a_{bc}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma^i_{ab}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}.$$

Ранее [2] произведено композиционное оснащение распределения NS_n, т.е. к каждой плоскости P^*_m распределения присоединена плоскость Картана $C_{n-m-1} : P^*_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$ и нормаль 2-го рода Нордена $N_{m-1} : A \oplus N_{m-1} = P^*_m$. Эти плоскости задаются совокупностями точек B_a, B_i, где выражения для дифференциалов этих точек имеют вид:

$$dB_a = (\dots)^b_a B_b + (t^i_{aj}\omega^i + t^i_{ab}\omega^b)B_i + ((t_{ai} - \lambda_j t^j_{ai})\omega^i + (t_{ab} - \lambda_i t^i_{ab})\omega^b)A, \quad (1)$$

$$dB_i = (\dots)^j_i B_j + (\dots)^a_i B_a + (t_{ij}\omega^j + t_{ia}\omega^a)A.$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Связность* $\overset{0}{\Gamma}$ *и ее подсвязности характеризуются следующими параллельными перенесениями:* 1) *нормаль 2-го рода* N_{m-1} *переносится параллельно* ($\overset{0}{\nabla} \lambda_i|_\rho = 0$) *в индуцированной центропроективной связности* $\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK}, \overset{0}{\Gamma}_{iJ}\}$ *тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости Бортолотти* $P_{n-1} = [B_i, B_a]$;

2) *плоскость Картана переносится параллельно* ($\overset{0}{\nabla} \lambda^i_a|_\rho = 0$) *в индуцированной аффинно-групповой связности* $\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bI}, \overset{0}{\Gamma}{}^i_{aJ}\}$ *тогда и только тогда, когда она смещается в нормали* 1*-го рода* $N_{n-m} = [A, B_a]$;

3) *плоскость* C_{n-m-1} *переносится параллельно* ($\overset{0}{\nabla} \lambda^i_a|_\rho = 0, \overset{0}{\nabla} \lambda_a|_\rho = 0$) *в индуцированной связности* $\overset{0}{\Gamma}$ *тогда и только тогда, когда она неподвижна, т. е. параллельное перенесение связанно вырожденное*

Теорема 2. *Плоскость Картана* C_{n-m-1} *переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается в нормали* 1*-го рода Нордена* P_{n-m}*, причем перенесение* ($\overset{1}{\nabla} \lambda^i_a|_\rho = 0$) *осуществляется в пучке групповых подсвязностей* $\{\Gamma_0, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aJ}\}$*, если композиционное оснащение b-специальное. Нормаль* 2*-го рода Нордена* N_{m-1} *переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей* $\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK}, \overset{1}{\Gamma}_{iJ}\}$ *тогда и только тогда, когда она смещается:* а) *в гиперплоскости Бортолотти* P_{n-1}*, если композиционное оснащение a-специальное* ($\overset{1}{\nabla} \lambda_i|_\rho = 0$); б) *произвольно в случае a-неспециального композиционного оснащения.*

Список литературы

[1] Омельян О.М. О совпадении групповых связностей, индуцированных внутренним композиционным оснащением распределения // Матем. заметки. 2917. Т. 102, № 6. С. 896–907.

[2] Омельян О.М. Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей // Тр. межд. конф. по геометрии и анализу. – Пенза (2003), С. 63–69.

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н. Г. Павлова

(Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: natasharussia@mail.ru

А. О. Ремизов

(Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия)

E-mail address: alexey-remizov@yandex.ru

Для каждого ортогонального преобразования евклидова пространства существует ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет блочно-диагональный вид с элементами ± 1 и блоками второго порядка — поворотами плоскости. Известно также обобщение этой теоремы для лоренцевых преобразований псевдоевклидовых пространств сигнатуры $(1, n-1)$. Кроме инвариантных подпространств, возникающих в евклидовом случае, лоренцево преобразование может иметь инвариантую плоскость с лоренцевым поворотом или трехмерное циклическое подпространство с собственным числом ± 1 и изотропным собственным вектором [1, 2]. Мы расскажем об аналогах этих теорем для изоморфизмов (изометрий) псевдоевклидовых пространств сигнатуры $(2, n-2)$ и $(3, n-3)$ [3, 4].

Оказывается, что кроме упомянутых двух типов инвариантных пространств ортогональных преобразований и двух типов, присущих лоренцевым преобразованиям (поворот лоренцевой плоскости и 3-мерное цикдическое подпространство с изотропным собственным вектором и собственным значением ± 1), существуют еще 5 новых типов неразложимых инвариантых подпространств для $p = 2$ и, вдобавок ко всем ним, еще 2 новых типа для $p = 3$. Скажем для примера, что среди новых типов встречаются $(2p+1)$-мерные циклические подпространства с изотропным собственным вектором и собственным значением ± 1, 6-мерные циклические подпространства с парой комплексно сопряженных собственных значений кратности 3, а также прямые суммы двух изотропных плоскостей с вещественными взаимно обратными собственными значениями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00849).

Список литературы

[1] Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия–2, Итоги науки и техники. Серия. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1988. Т. 29. С. 5–146.

[2] Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. М.: Физматлит, 2009.

[3] Павлова Н.Г., Ремизов А.О. Об изоморфизмах псевдоевклидовых пространств // Математическое образование. 2018. № 2(86). С. 15–39.

[4] Pavlova N.G., Remizov A.O. On isomorphisms of pseudo-Euclidean spaces with signature $(p, n-p)$ for $p = 2, 3$ // Linear Algebra and Its Applications. 2018. V. 541. P. 60–80.

СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГОМЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

В. И. Паньженский, О. П. Сурина

(Педагогический институт им. В. Г. Белинского Пензенского государственного университета, Пенза, Россия)

E-mail address: kaf-geom@yandex.ru, o.surina2013@yandex.ru

Многомерная группа Гейзенберга является нильпотентной $m = 2n+1$-мерной группой Ли $(n+2)\times(n+2)$-матриц следующего вида:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ \theta^t & E_n & x^t \\ 0 & \theta & 1 \end{pmatrix},$$

где $x^t = (x^1, \ldots, x^n)^t$, $y = (x^{n+1}, \ldots, x^{2n})$, $\theta = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $z = x^m \in \mathbb{R}$, E_n — единичная $n \times n$-матрица, $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел.

На этой группе имеется левоинвариантные контактная дифференциальная 1-форма η и полная риманова метрика g

$$\eta = dx^m - x^{n+1}dx^1 - \ ... - x^{2n}dx^n,$$

$$ds^2 = {dx^1}^2 + \ ... + {dx^{2n}}^2 + \left(dx^m - x^{n+1}dx^1 - \ ... - x^{2n}dx^n\right)^2,$$

которые определяют на G сасакиеву структуру.

Существует единственная контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением, инвариантная относительно группы автоморфизмов сасакиевой структуры. Эта связность определяется следующей формулой [1]*:*

$$g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z),$$

где ∇ – связность Леви-Чивита метрики g.

Данная связность является контактной метрической связностью для любой k-контактной метрической структуры и, следовательно, для любой сасакиевой структуры.

Вполне неголономное контактное распределение $\mathfrak{L} = ker\eta$ $2n$-мерных площадок вместе с ограничением метрики g на это распределение определяет на группе Гейзенберга субриманову структуру. Горизонтальная (допустимая) кривая γ: $x^i = x^i(s)$ (s — естественный параметр) называется субримановой геодезической, если она является геодезической относительно усеченной связности $\overline{\nabla}$: $\overline{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, где $\overline{\nabla}$ — ортогональная проекция связности $\widetilde{\nabla}$ на распределение $\mathfrak{L}$, $\dot{\gamma} \in \mathfrak{L}$. Установлено, что *субримановыми геодезическими являются параболы, ортогональные проекции которых на соответствующие контактные плоскости являются прямыми линиями. Кроме таких парабол геодезическими являются также некоторые прямые, лежащие в контактных плоскостях.*

Список литературы

[1] Паньженский В.И., Климова Т.Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Известия вузов. Математика. 2018. № 11. С. 51–59.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЧТИ ЭРМИТОВОЙ СТРУКТУРЫ ТОТАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ГЛАВНОГО T^1-РАССЛОЕНИЯ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ КОНФОРМНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ БАЗЫ РАССЛОЕНИЯ

И. Петров

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: vander94@yandex.ru

На базе главного T^1-расслоения, т. е. такого главного расслоения, где структурной группой является одномерный тор, зафиксируем почти контактную метрическую структуру, т. е. четверку тензорных полей (η, ξ, Φ, g), удовлетворяющих некоторым условиям, где η — 1-форма, ξ — векторное поле, Φ — структурный эндоморфизм, а g — риманова метрика. Зафиксировав связность в главном расслоении и обозначив ее форму связности через ω, можно построить почти эрмитову структуру на тотальном пространстве этого расслоения, т. е. пару тензорных полей (J, h), где J — антиинволютивный эндоморфизм, а h — риманова метрика, согласованная с ним. Конформное преобразование почти контактной метрической структуры с помощью функции f на базе индуцирует преобразование на тотальном пространстве почти эрмитовой структуры в другую почти эрмитову структуру, которую мы назовем *преобразованной*. Мы изучили связь между этими двумя почти эрмитовыми структурами.

Теорема 1. *Зависимость римановых метрик первоначальной и преобразованной почти эрмитовых структур тотального пространства главного T^1-расслоения можно выразить следующим образом:*

$$\tilde{h}(X, Y) = (e^{2f} \circ \pi)h(X, Y) - (e^{2f} \circ \pi - 1)\omega(X)\omega(Y).$$

Теорема 2. *Зависимость антиинволютивных эндоморфизмов первоначальной и преобразованной почти эрмитовых структур тотального пространства главного T^1-расслоения можно выразить следующим образом:*

$$\tilde{J}(X) = J(X) + (e^{f} \circ \pi - 1)h(X, \xi)\nu - (e^{-f} \circ \pi - 1)h(X, \nu)\xi, \quad \text{где } \nu = \lambda(1).$$

Теорема 3. *Структурный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1-расслоения является инвариантным при индуцированном преобразовании тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет равенству:*

$$df = df(\xi)\eta.$$

Следовательно, классы эрмитовых G_1 и G_2 структур на тотальном пространстве являются инвариантными при индуцированном преобразовании тогда и только тогда, когда ф-ция f удовлетворяет равенству:

$$df = df(\xi)\eta.$$

Теорема 4. *Виртуальный тензор почти эрмитовой структуры тотального пространства главного T^1-расслоения является инвариантным при индуцированном преобразовании тогда и только тогда, когда функция f является константой.*

Список литературы

[1] Игнаточкина Л.А. Обобщение преобразований, индуцированных на T^1-расслоениях конформными преобразованиями их базы // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 5. С. 45–62.

[2] Савинов А.В. Каноническое тороидальное расслоение над нечетномерной базой // Вестник СамГУ. 2003. Т. 2, № 28. С. 57–79.

О МНОГОМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ТРИ-ТКАНЯХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Л. М. Пиджакова

(Тверской государственный технический университет, Тверь, Россия)

E-mail address: `lpidjhacova@mail.ru`

В работе [1] рассматриваются решения вида $z = f\left(\alpha(x) + \beta(y)\right)$ некоторых уравнений в частных производных. В частности, найдены гармонические функции такого строения. На плоскости (XOY) указанные функции определяют, как известно [2], [3], регулярные три-ткани.

Целью данной работы является обобщение полученных результатов для плюригармонических функций вида

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n). \tag{1}$$

С одной стороны, функции (1) определяют в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ переменных (x_i, y_i) $(2n{+}1)$-ткани, образованные $2r$ слоениями $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и слоением $u = \text{const}$. Уравнения $x_i = \text{const}$ и $y_i = \text{const}$ определяют гиперплоскости в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, а уравнение $u = \text{const}$ — гиперповерхность. Указанные $(2n{+}1)$-ткани называются регулярными, если функция (1) имеет следующее строение

$$u = f\left(\varphi_1(x_1) + \ldots + \varphi_1(x_n) + \psi_1(y_1) + \ldots + \psi_n(y_n)\right). \tag{2}$$

С другой стороны, уравнение (1) определяет в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ три-ткань $W(r, r, 2r-1)$ со слоениями различной размерности: два r-параметрических слоения $x_i = \text{const}$, $y_i = \text{const}$ и однопараметрическое слоение размерности $2r - 1$ – $u = \text{const}$. И в этом случае ткань будет регулярной, если функция (1) имеет вид

$$u = f\left(\varphi(x_i) + \psi(y_i)\right). \tag{3}$$

Функция вида (1) называется плюригармонической, если выполняются следующие условия [4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_i}.$$

Теорема 1. *$(2n+1)$-ткани, определяемые плюригармоническими функциями вида (2) являются регулярными тогда и только тогда, когда эти функции имеют вид*

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i^2 - y_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i y_i + k, \quad a_i, b_i, c_i, k \in \mathbf{R}.$$

Теорема 2. *Криволинейные три-ткани, определяемые плюригармоническими функциями вида (3) являются регулярными тогда и только тогда, когда эти функции имеют вид*

$$\begin{aligned} u =& c_1 \ln \left(b + \frac{r}{p} \cos \left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) + \frac{s}{p} \sin \left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right) + \right. \\ & \left. + \frac{u}{p} \coth \left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) + \frac{v}{p} \sinh \left(p \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) \right) + c_2 \end{aligned}$$

или

$$u = c_1 \ln \left(b + a_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right)^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + b_0 \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right)^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) + c_2.$$

Список литературы

[1] Шелехов А.М. О "шестиугольных" решениях некоторых уравнений в частных производных. Proceedings of the International Geometry Center. 2017. V. 10, No. 2. P. 47–55.

[2] Бляшке В. Введение в геометрию тканей. М.: Физматгиз, 1956. 144 с.

[3] Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. Криволинейные три-ткани. Тверь, 2013. 237 с.

[4] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1985. 464 с.

ИНФОРМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ

А. А. Рылов

(Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия)

E-mail address: alexander_rylov@mail.ru

Исследуются геометрические структуры на гладких многообразиях, которые позиционируются в рамках информационной геометрии [1] Амари–Ченцова.

Важным примером является статистическая структура [2], т. е. риманова метрика g вместе с тензорным полем K типа $(2, 1)$, удовлетворяющим двум условиям:

$$(1)\ K_X Y = K_Y X; \quad (2)\ g(K_X Y, Z) = g(Y, K_X Z).$$

При этом, X, Y, Z — векторные поля на многообразии и оператор K_X, для которого $K_X Y = K(X, Y)$, является дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Гладкое многообразие, снабженное статистической структурой, называют статистическим многообразием [3]. На таком многообразии инвариантно определяется однопараметрическое семейство α-связностей Амари–Ченцова $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$, где D — связность Леви–Чивита метрики g, α — параметр.

Дается обзор основных направлений исследования геометрии статистических структур; отмечены результаты для статистических моделей, снабженных сопряженно симметрической [4] структурой, а также имеющих α-связности постоянной кривизны (см., например, [5]).

Приведены более общие, чем статистические, информационно-геометрические структуры, имеющие приложения в современных разделах теории информации.

Список литературы

[1] Amari S., Nagaoka H. Methods of information geometry. AMS, Oxford Univ. Press, 2000. 206 p.

[2] Рылов А.А. Связности, совместимые с метрикой, и статистические многообразия // Изв. вузов. Математика. 1992. №12. С. 46–56.

[3] Lauritzen S. Statistical manifolds // Differential geometry in statistical inference. Hayward, Calif. 1987. P. 163–216.

[4] Noguchi M. Geometry of statistical manifolds // Diff. Geom. Appl. 1992. V. 2. P. 197–222.

[5] Рылов А.А. Связности постоянной кривизны на статистической модели Парето // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. 2012. №30. С. 155–163.

ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКИЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ ПРОЕКТИВНО ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

А. Сабыканов, Й. Микеш, П. Пешка

(Киргизский национальный университет, Бишкек, Киргизия;
Palacký University, Olomouc, Czechia)

E-mail address: almazbek.asanovich@mail.ru, josef.mikes@upol.cz, patrik.peska@upol.cz

Как известно, П.А. Широков (см. [1]) начал изучение пространств, которые характеризуются условиями $\nabla R = 0$ и $R \circ R = 0$ (являющиеся условиями интегрируемости $\nabla R = 0$). Э. Картан и Н.С. Синюков эти пространства изучали с других точек зрения и назвали, соответственно, *симметрическими* и *полусимметрическими*, см. [2, 3].

Пространства с абсолютно рекуррентным тензором кривизны $\nabla R = \varphi \circ R$ начал изучать Г.С. Рузе и назвал их *рекуррентными*, см. [2, 3]. Эти пространства играют важную роль в теории относительности, они описывают пространства с гравитационными волнами.

Симметрические и рекуррентные (с градиентным полем φ) пространства являются полусимметрическими. Геометрия симметрических, рекуррентных и полусимметрических пространств имеет большое значение в дифференциальной геометрии и имеет большое значение в теоретической физике, в частности, теории относительности.

Напомним, что пространство аффинной связносим является проективно евклидовым, если его геодезические линии отображаются на прямые евклидова пространства.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пространство A_n с симметрической аффинной связностью является полусимметрическим проективно евклидовым пространством тогда и только тогда, когда компоненты его тензора кривизны R имеют следующий вид*

$$R^h_{ijk} = \delta^h_k \psi_{ij} - \delta^h_j \psi_{ik},$$

где $\psi_{ij} = \varkappa(\Phi)\,\varphi_i\varphi_j$, $\varphi_{i,j} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\varkappa'}{\varkappa}\right)\varphi_i\varphi_j$, $\varphi_i = \partial_i\Phi$, $\varkappa \in C^1$, *символом "," обозначаем ковариантную производную.*

Теорема 2. *Пространство* A_n *с аффинной связностью*

$$\Gamma^h_{ij} = s(x^1)\cdot(\delta^h_i\delta^1_j + \delta^h_j\delta^1_i)$$

является проективно евклидовым полусимметрическим рекурентным пространством, где функция $s(x^1) \in C^1$.

В случае, когда выполняются уравнения $(\ln|s' - s^2|)' = 4s$, *пространство* A_n *является симметричным.*

В любом проективно евклидовом полусимметрическом рекурентном пространстве существует система координат, в которой связность имеет указанную выше форму.

Список литературы

[1] Широков П.А. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд. Казанск. ун-та, 1966.

[2] Mikeš J., et al., Differential geometry of special mappings. Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015.

[3] Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

КИЛЛИНГОВЫ f-СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

А. Самсонов

(ООО "ЦРПО АрасКорп", Минск, Беларусь)

E-mail address: Andrey.S.Samsonov@gmail.com

Будем рассматривать класс **Kill f** (Killing f-structures) [1], который является одним из классов *обобщенной эрмитовой геометрии* (см., например, [2]). Определяющее свойство для Киллинговых f-структур имеет вид: $\nabla_X(f)X = 0$, где f — *метрическая* f*-структура* на (псевдо)римановом многообразии (M, g), ∇ — связность Леви–Чивита метрики g на M, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Мотивацией для получения следующих новых теорем является работа [3], где канонические базовые f-структуры на однородных Ф-пространствах порядка $k = 4, 5$ исследованы относительно класса **Kill f** в случае *естественно редуктивной* метрики. Итак, анализируя определяющее выражение $\nabla_{fX}(f)fX = 0$, на однородных Ф-пространствах порядка $k = 4, 5, 6$ для случая "диагональных" метрик (см. [4] для ссылок и вспомогательных утверждений), получены следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $M = G/H$ *— однородное* Ф*-пространство порядка* $k = 4$ *с одной из "диагональных" метрик. Каноническая базовая* f*-структура* f_1 *принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}$ *или* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $M = G/H$ *— однородное* Ф*-пространство порядка* $k = 5$ *с одной из "диагональных" метрик. Каноническая базовая* f*-структура* f_1 *принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются оба условия:*

1) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}$ *или* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] = 0$. 2) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$.

Каноническая базовая f*-структура* f_2 *принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются оба условия:*

3) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{4}$ *или* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] = 0$. 4) $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2$.

Теорема 3. *Пусть* $M = G/H$ *— однородное* Ф*-пространство порядка* $k = 6$ *с одной из "диагональных" метрик. Каноническая базовая* f*-структура* f_1 *принадлежит классу* **Kill f** *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются все следующие условия:*

1) $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$ *или* $[\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_1] = 0$. 2) $\lambda_2 = \lambda_3$ *или* $[\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_2] = 0$.

3) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{4}$ *или* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_3$. 4) $\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ *или* $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_1$.

Также получена теорема, аналогичная теореме 3, но относительно второй канонической базовой f-структуры f_2 на однородных Ф-пространствах порядка $k = 6$.

Список литературы

[1] Грицанс А.С. О геометрии киллинговых f-многообразий // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, №4. С. 149–150.

[2] Кириченко В.Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры // Известия АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, №6. С. 1208–1223.

[3] Балащенко В.В. Естественно редуктивные киллинговы f-многообразия // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, №3. С. 151–152.

[4] Самсонов А.С. Приближенно келеровы и эрмитовы f-структуры на однородных Ф-пространствах порядка k в случае специальных метрик // Сиб. мат. журнал. 2011. Т. 52, №6. С. 1373–1388.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВЕДУЩИХ ИДЕЙ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Е. В. Силаев, Г. М. Силаева

(Victoria Park Collegiate Institute, Toronto, Ontario, Канада)

E-mail address: eugeneforce@hotmail.com

В данной работе авторы рассматривают одну из важнейших составляющих поиска решения задач, а именно — выдвижение ведущих идей, реализиция которых в итоге позволяет осуществить непосредственное решение задачи. В основе приведенной ниже классификации ведущих идей, которую авторы использовали в свое работе в университетах и школах канадской провинции Онтарио, лежит принцип обусловленности идей предшествующим опытом.

1. Стандартные идеи, т.е. идеи, полностью обусловленные предшествующим опытом:

а) Идея непосредственной реализации метода решения. К ним, например, относится идея подстановки числовых данных в общую формулу.

б) Идея переноса метода решения в похожую ситуацию.

2. Нестандартные идеи, т. е. идеи, первичное использование которых не обусловлено предшествующим опытом:

а) Условно-нестандартные идеи. Идеи этого вида характеризуются тем, что при целенаправленном обучении переходят в разряд стандартных идей. К таким идеям, например, относится идея выполнения некоторого дополнительного построения при решении геометрических задач.

б) Оригинальные идеи, т.е. идеи, эффективные для решения отдельных задач, либо основанные на использовании методов, не применявшихся ранее при решении подобных задач.

Приведенная классификация ведущих идей, помогает учителю, с одной стороны, моделировать мыслительную деятельность учащихся, а с другой, — дает возможность обучать учащихся тому, как находить методы решения задач.

О МНОГОГРАННИКАХ С СИММЕТРИЧНЫМИ РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ И ПРАВИЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

В. Субботин

(Южно-Российский Государственный политехнический университет (НПИ), Новочеркасск, Россия)

E-mail address: geometry@mail.ru

В работе рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники в E^3 с двумя симметричными n-ромбическими вершинами U, V, расположенными на некоторой оси вращения многогранника. Ромбической вершиной многогранника называется вершина V, звезда $St(V)$ которой состоит из равных ромбов. Если количество ромбов в $St(V)$ равно n, то вершина называется n-ромбической. Если n-ромбическая вершина расположена на оси вращения порядка n, то она называется симметричной.

Если звёзды вершин U, V не имеют общих точек, то в этом случае говорим, что вершины отделены друг от друга, или изолированы. Поясом называется связное множество граней $F_1, F_2, \ldots F_n$ такое, что любые две грани $F_i, Fi+1$ и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества не имеют общих рёбер.

Пусть дан многогранник M с двумя изолированными симметричными n-ромбическими ($n \geqslant 3$) вершинами U, V, которые либо расположены на зеркально-поворотной оси вращения порядка $2n$ многогранника, либо звёзды этих вершин симметричны относительно плоскости, перпендикулярной оси UV.

Тогда M называется RR-многогранником, если вершины U, V отделены друг от друга одним поясом правильных граней одного типа; при этом других граней, кроме граней пояса и ромбов звёзд вершин U, V, нет.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Три следующих многогранника исчерпывают класс RR:*

a) *удлинённый ромбический додекаэдр с двумя* 4*-ромбическими вершинами и поясом правильных* 6*-угольников;*

b) 24*-гранник с двумя* 4*-ромбическими вершинами, отделёнными поясом правильных треугольников;*

c) 20*-гранник с двумя* 5*-ромбическими вершинами, отделёнными поясом квадратов.*

Ранее автором было доказано существование двух многогранников этого класса [1].

Список литературы

[1] Субботин В. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Т. 476. С. 153–164.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НАД АЛГЕБРАМИ

А. Я. Султанов

(Пензенский государственный университет, Пенза, Россия)

E-mail address: sultanovaya@rambler.ru

Изучаются свойства тензорных полей кручения и кривизны вещественных реализаций линейных связностей, заданных на гладком многообразии M над алгеброй $\mathbb{A}$. На основании этих свойств дается оценка сверху размерностей вещественных алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований вещественных реализаций $\mathbb{A}$-гладких линейных связностей на M.

Алгебра $\mathbb{A}$ является линейной алгеброй над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел размерности $m \geqslant 2$. Предполагается, что алгебра $\mathbb{A}$ коммутативна, ассоциативна и обладает единицей. Гладкое многообразие M размерности n над алгеброй $\mathbb{A}$ определяется аналогично как $\mathbb{R}$-гладкое многообразие, $\mathbb{A}$-линейная связность ∇ на многообразии M задается так же, как и $\mathbb{R}$-линейная связность на гладком вещественном многообразии. $\mathbb{A}$-гладкое многообразие M размерности n допускает структуру вещественного гладкого многообразия размерности mn. Для линейной связности ∇ существует единственная $\mathbb{R}$-гладкая линейная связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ на $M^{\mathbb{R}}$, называемая вещественной реализацией линейной связности ∇ [1]. Тензорные поля кручения и кривизны линейной связности $\nabla^{\mathbb{R}}$ обозначим через $T^{\mathbb{R}}$ и $R^{\mathbb{R}}$ соответственно. Имеют место следующие утверждения:

1. *Связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ является полусимметрической по А.П. Нордену* [2] *тогда и только тогда, когда $T^{\mathbb{R}} = 0$.*

2. *Связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ без кручения является локально проективно-плоской тогда и только тогда, когда она локально-плоская. Иначе говоря, следующие условия логически равносильны:*

(а) $W^{\mathbb{R}} = 0$;

(б) $R^{\mathbb{R}} = 0$.

Здесь $W^{\mathbb{R}}$ — тензорное поле Г. Вейля связности $\nabla^{\mathbb{R}}$. Условие (a) равносильно условию, что $M^{\mathbb{R}}$ с $\nabla^{\mathbb{R}}$ локально проективно-плоское, так как вещественная размерность mn, в силу приведенных выше ограничений, не меньше, чем 4.

На основании свойства 1 и результата И.П. Егорова заключаем, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $M^{\mathbb{R}}$ со связностью $\nabla^{\mathbb{R}}$ не превосходит величины $(mn)^2 - 2mn + 6$ при условии $T^{\mathbb{R}} \neq 0$.

Из свойства (2) и известного результата И.П. Егорова получаем, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в пространстве $M^{\mathbb{R}}$ со связностью $\nabla^{\mathbb{R}}$ не превосходит $(mn)^2 - 2mn + 5$ при условии $R^{\mathbb{R}} \neq 0$ [3].

Список литературы

[1] Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казанского университета, 1984. 264 с.

[2] Норден А.Г. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 431 с.

[3] Егоров И.П. Движения в пространствах аффинной связности: Дис. … доктора физ.-мат. наук. Москва, 1955.

О СОДЕРЖАНИИ КУРСА ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

О. Ю. Тесля

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: tesoksana@yandex.ru

При составлении программы курса элементарной геометрии для студентов математического факультета педагогического вуза следует учитывать ряд важных моментов.

В настоящее время в основном курсе геометрии педвуза в достаточной мере представлены следующие разделы, имеющие прямое отношение к школьному курсу: основания геометрии, построения на плоскости с помощью циркуля и линейки, методы изображения плоских и пространственных фигур (в том числе, задачи построения сечений), аналитическая геометрия (позволяющая применять векторно-координатный метод решения задач).

Поэтому включать в курс элементарной геометрии подобные вопросы еще раз нет необходимости. Напротив, изучение геометрических преобразований в основном курсе не сопровождается должным числом примеров их применения при решении задач элементарной геометрии, а, между тем, метод геометрических преобразований дает весьма эффектные подходы к решению задач.

Будущему учителю математики необходимо расширять знания в области элементарной геометрии замечательными теоремами, дающими ключ к решению многих задач (теоремы Чевы, Менелая, Ван-Обеля, Птолемея, Гаусса и т. д.), конфигурациями (Наполеона, Эйлера, Симсона, Морли, Дезарга). Имеет смысл сопровождать изучение этих вопросов применением систем динамической геометрии, что позволитпоказать: элементарная геометрия продолжает развиваться и пополняться новыми интересными фактами. В курсе элементарной геометрии уместнопродемонстрировать применение метода аналогии при решении задач планиметрии и стереометрии (например, при изучении некоторых свойств тетраэдров). Составляющей курса элементарной геометрии должен стать практикум по решению задач, нацеленный на прочное усвоение теоретических знаний.

Список литературы

[1] Мордкович, А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: Диссертация ... доктора пед. наук. М., 1986.

О ПРОБЛЕМАХ СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЛОГИЧЕСКИХ НОРМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЯЗЫКА

И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: iltimofeeva@mail.ru, iriskaser@mail.ru

Одной из основных логических компетенций будущего учителя математики является способность "пользоваться математическим языком в соответствии с логическими нормами этого языка" [1]. В связи с этим являются *актуальными* следующие проблемы:

1. Выделение групп логических норм.

2. Точные формулировки логических норм.

3. Характеристики логических норм.

Под логическими нормами математического языка мы понимаем нормы логического оперирования с математическими предложениями (в частности, теоремами) и определениями.

Приведем выделенные нами три основные *группы* норм логического оперирования с математическими предложениями и определениями [2]: нормы логического *конструирования* (формулирования); нормы логического *преобразования*; нормы логической *символизации* (использования логических символов).

Внутри каждой из этих групп осуществлена систематизация логических норм по объекту предписания.

Под характеристикой логической нормы понимаем указание характера предписания этой нормы, в связи с чем выделены обязывающие, запрещающие, разрешающие и рекомендующие нормы. Наиболее важный этап работы состоял в создании по возможности полного перечня логических норм и точного описания конкретных норм.

Результаты проведенной нами работы в указанном направлении частично представлены в статьях [2], [3], [4].

Список литературы

[1] Тимофеева И.Л. Логические компетенции студентов — будущих учителей математики: монография. М.: "Прометей", 2017. 64 с.

[2] Тимофеева И.Л. О логических нормах конструирования математических определений // Математика. Образование. Информатизация: сб. тезисов XXIII Международной конф. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 88.

[3] Тимофеева И.Л., Сергеева И.Е. Систематизация логических норм конструирования математических определений // Материалы Международной научной конференции "Математическое образование: современное состояние и перспективы", посв. 100-летию со дня рождения А.А. Столяра, 20-21 февраля 2019 г. Республика Беларусь. Могилев: Изд-во МГУ им. А.А. Кулешова, 2019 (в печати).

[4] Тимофеева И.Л., Сергеева И.Е. О нормах логической символизации математических предложений // Сборник трудов IX Международной научной конференции "Математика. Образование. Культура", 24-26 апреля 2019 г. Россия. г. Тольятти: ТГУ, 2019 (в печати).

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К ПОВЫШЕНИЮ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ В ОБЛАСТИ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

Т. А. Тимошенко, М. А. Кислякова

(Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск, Россия)

E-mail address: stepta49@gmail.com, rabota2486@yandex.ru

Доклад посвящен обсуждению проблемы формирования готовности студентов по направлению "педагогическое образование (профиль математика и информатика)" к обучению геометрии. В докладе предлагается комплекс мер по повышению качества обучения будущих учителей математики основам методики обучения геометрии, приведена система подготовки студентов педагогических профилей к преподаванию учебного предмета "Геометрия" в школе.

Как показывают результаты экзаменов, тестирование студентов-первокурсников и опросы учителей, учебный предмет "Геометрия" является одним из самых сложных учебных предметов в школе. Преградой на пути к реализации педагогического потенциала геометрии в развитии интеллектуального потенциала учащихся, служат такие причины, как: недостаточное количество времени на формирование геометрических понятий и умений, низкая мотивация учащихся к изучению геометрии, познавательные барьеры в усвоении геометрических понятий и умений и др.

Анализ научно-методической литературы показал, что низкий процент выполнения заданий по геометрии вызван существенными проблемами в преподавании геометрии, среди которых, как отмечают специалисты, формальный характер уроков, уклон в вычислительные задачи, перекос в сторону алгоритмизации геометрических задач и т.д.

Нами предлагается комплексная система подготовки студентов к обучению геометрии в школе, включающая в себя следующие направления:

- фундаментальную и методологическую подготовку студентов в области геометрии с целью формирования у них взгляда на геометрию как науку;
- изучение основных геометрических методов с целью подготовки будущих учителей применять их к решению задач элементарной геометрии;
- изучение психологических основ обучения геометрии с целью формирования методической культуры будущих учителей учитывать особен-

ности развития ментального опыта учащегося при изучении геометрии;

- освоение общей методики обучения геометрии с целью вооружения будущих учителей формами, методами и средствами обучения геометрии;
- организация педагогической практики и внеучебной деятельности по геометрии с целью формирования первичного практического опыта будущих учителей геометрии;
- осуществление педагогической поддержки молодых учителей геометрии, как пропедевтика профессиональных трудностей.

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С ОДНОЗНАЧНЫМ УМНОЖЕНИЕМ

А. Г. Тисовский, А. В. Царев

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: ag.tisovsky@gmail.com, an-tsarev@yandex.ru

Напомним, что умножением на абелевой группе $(A, +)$ называется такое отображение $\mu\colon A \times A \to A$, что

$$\mu(a+b, c) = \mu(a, c) + \mu(b, c) \quad \text{и} \quad \mu(a, b+c) = \mu(a, b) + \mu(a, c).$$

При этом $(A, +\mu)$ — кольцо, не обязательно ассоциативное.

Определение 1. Абелеву группу $(A, +)$ будем называть *группой с однозначным сложением*, если на группе A можно задать единственную (с точностью до изоморфизма) структуру кольца с единицей.

Если в данном определении опустить условие наличия единицы, то, как нетрудно видеть, мы получим определение нильгруппы, т. е. группы, на которой возможно задать только нулевое умножение.

Примерами групп с однозначным умножением являются хорошо известные в теории абелевых групп E-группы.

Теорема 1. *Если A — группа без кручения ранга 2 с однозначным умножением, то либо A — E-группа, либо $A \doteq B \oplus C$, где $\mathrm{type}(B)$ — идемпотентный тип, $\mathrm{type}(C)$ — неидемпотентный тип и $\mathrm{type}(B) < \mathrm{type}(C)$. Верно и обратное.*

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С КОНЕЧНЫМИ ПРИМАРНЫМИ ФАКТОРАМИ

А. А. Фомин, А. В. Царев

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: alexander.fomin@mail.ru, an-tsarev@yandex.ru

Абелева группа A называется π-ограниченной для некоторого множества простых чисел π, если в любой факторгруппе A/B группы A все p-примарные компоненты $t_p(A/B)$, где $p \in \pi$, конечны. Класс π-ограниченных абелевых групп был введен Е. В. Соколовым [1] при изучении $\mathcal{F}_\pi$-отделимости и π'-изолированности подгрупп в общей теории групп. Описание периодических π-ограниченных групп тривиально. Е.В. Соколовым было показано, что описание смешанных π-ограниченных групп сводится к периодическому случаю и к случаю без кручения. Нами подробно рассмотрен класс π-ограниченных абелевых групп без кручения. Показано, что этот класс совпадает с классом π-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга.

Кроме того, рассмотрены абелевы группы, все факторгруппы которых не содержат подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ для всех $p \in \pi$, где π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Понятно, что этот класс групп содержит все π-ограниченные группы (а в случае абелевых групп без кручения эти классы совпадают). Нами доказано [2], что произвольная абелева группа A не имеет делимых периодических факторгрупп тогда и только тогда, когда группы $t(A)$ и $A/t(A)$ не имеют делимых периодических факторгрупп.

Также нами построена конструкция, дающая при каждом бесконечном множестве простых чисел π пример нерасщепляемой смешанной π-ограниченной абелевой группы ранга без кручения 1.

Список литературы

[1] Соколов Е.В. Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, №6. С. 1381–1390.

[2] Фомин А.А., Царев А.А. Абелевы группы с конечными примарными факторами // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, №2.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

М. Чешкова

(Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия)

E-mail address: cma41@yandex.ru

В евклидовом пространстве E^n рассмотрим гладкую замкнутую кривую γ, заданную 4π-периодической вектор-функции $\rho = \rho(u)$.

Так как $\rho(u) = \rho(u + 4\pi)$, то функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$, есть 2π-периодическая, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u + 2\pi))$ есть 2π-антипериодическая функции.

Рассмотрим поверхность $\mathbf{P}$:

$$r(u, v) = (1 + \cos(v))s(u) + \sin(v)l(u),\ u \in [-\pi, \pi],\ v \in [-\pi, \pi].$$

Теорема 1. *Поверхность* $\mathbf{P}$ *определяет модель проективной плоскости.*

Построим некоторые модели проективной плоскости в E^3: скрещенный колпак [1, с. 304] и Римскую поверхность [1, с. 305] .

Рассмотрим тор

$$R(u, v) = (5 + \cos(v))e(u) + \sin(v)k,\ \ e(u) = (\cos(u), \sin(u), 0),\ \ k = (0, 0, 1).$$

Зададим линию $\rho(u) = R(u, u/2) = (5 + \cos(u/2))e(u) + \sin(u/2)k$. Назовем ее обмоткой тора первого типа.

Рассмотрим также обмотку тора $\rho(u) = (5 + \cos(u))e(u/2) + \sin(u)k$. Назовем ее обмоткой тора второго типа.

Теорема 2. *Если кривая* $\rho = \rho(u)$ *есть обмотка тора первого типа, то поверхность* $\mathbf{P}$ *есть скрещенный колпак. Если кривая* $\rho = \rho(u)$ *есть обмотка тора второго типа, то поверхность* $\mathbf{P}$ *есть Римская поверхность.*

Список литературы

[1] Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М. Аналитические поверхности. М., 2006.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТОЧЕК НЕКОТОРОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В. Г. Чирский

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: vgchirskii@yandex.ru

В докладе сообщается о развитии теории трансцендентных чисел в полиадической области, представляющей собой бесконечномерное метрическое пространство — прямое произведение полей p-адических чисел.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ В ГЛОБАЛЬНЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ТОЧКАХ

В. Г. Чирский, Е. Ю. Юденкова

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail: vgchirskii@yandex.ru, YudenkovaEY@gmail.com

В работе доказывается теорема с бесконечной линейной независимости значений обобщенных гипергеометрических рядов с иррациональными алгебраическими параметрами в глобально-трансцендентной точке.

О ЛОГИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

А. Ф. Шабаева

(Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия)

E-mail address: alshabaeva@yandex.ru

При изучении курса "Оснований геометрии" со студентами педагогических специальностей на математических факультетах университетов рассматривается вопрос о логическом построении школьного курса геометрии.

В настоящее время в Федеральном перечне учебников, рекомендованных для применения при изучении геометрии в средней общеобразовательной школе, имеется множество различных учебных пособий разных авторов. Курс школьной планиметрии по учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др. и по учебнику А.В. Погорелова построен аксиоматически с умеренным уровнем строгости, учитывающим возрастные особенности учащихся в усвоении геометрических понятий [1], [2]. В учебнике геометрии для 7–9 классов И.Ф. Шарыгина изложение материала наглядно-эмпирическое, новые сведения излагаются по мере возникновения потребности в них при решении задач [3]. Здесь уменьшена роль формально — логических рассуждений, больше внимания уделено методам решения задач. Аксиоматика не выдвигается на первый план. Автор считает, что "*. . . для нормального усвоения "аксиоматических основ" нужен очень высокий уровень логической подготовки, который не имеют ученики*". Различие методик обучения геометрии в 7–9 классах по разным учебным пособиям проявляется особенно ярко, если проводить в них решение одних и тех же задач, доказательство одних и тех же теорем.

Список литературы

[1] Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. — 20-е изд. М.: Просвещение, 2010. 384 с.

[2] Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. — 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 240 с.

[3] Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Дрофа, 2012. 462 с.

КООРДИНАТНАЯ И СИНТЕТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ШКОЛЕ

Г. Б. Шабат

(Московский педагогический государственный университет,
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия)

E-mail: george.shabat@gmail.com

Мы будем говорить о геометрии на проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ над *алгебраически замкнутым* полем $\Bbbk$, поскольку это позволит избежать некоторых оговорок, необходимых при рассмотрении вещественной евклидовой плоскости; при желании можно считать, что $\Bbbk = \mathbb{C}$.

Дискуссии между сторонниками синтетических и аналитических методов в проективной геометрии было в XIX веке довольно бурными — см. [1]. Отчасти они продолжаются и в наше время в связи с проблемами *преподавания* геометрии: распространено мнение, что использование координат не развивает геометрическую интуицию учащихся.

Однако, как будет показано в докладе, соответствующие два вида алгебраических структур ближе, чем принято считать. Аналитическим методы реализуются коммутативным кольцом однородных координат, синтетические — булевой решёткой, в которой две основные операции соответствуют (в общем положении) проведению прямой через две точки и сопоставлению двум прямым точки их пересечения.

Теорема 1. *Классы подмножеств плоскости, определяемые в терминах обеих структур, совпадают.*

Неочевидная часть теоремы заключается в том, что любые *плоские алгебраические кривые* можно определить в терминах конфигураций точек и прямых. Для *коник* это следует из теоремы Паскаля, а для кубик — из недавнего препринта Will Traves и David Wehlau *Ten Points on a Cubic.*

По мнению автора, при модернизации принципов преподавания геометрии следует учитывать единство её синтетического и аналитического аспектов, которому посвящён доклад.

Список литературы

[1] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.–Л.: ГОНТИ, 1937.

О ПЛОСКОСТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПРОСТРАНСТВА КАРТАНА И АКИВИСА

Ю. И. Шевченко, Е. В. Скрыдлова

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: IUShevchenko@kantiana.ru, ESkrydlova@kantiana.ru

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ [1] имеет структурные уравнения

$$d\omega^{I'}_{J'} = \omega^{K'}_{J'} \wedge \omega^{I'}_{K'} + R^{I'}_{J'KL}\omega^K_0 \wedge \omega^L_0, \;\; R^{I'}_{J'(KL)} = 0 \;\; (I', ... = \overline{0,n};\; I, .. = \overline{1,n}),$$

причем условие $\omega_{I'}^{I'} = 0$ не будем использовать. Эти уравнения позволяют найти дифференциальные уравнения для компонент тензора кривизны-кручения $R^{I'}_{J'KL}$:

$$\nabla R^{I'}_{J'KL} = R^{I'}_{J'KL;M}\omega_0^M.$$

Компоненты тензора $R^{I'}_{J'KL}$ и их ковариантные производные $R^{I'}_{J'KL;M}$ относительно проективной связности удовлетворяют аналогу тождеств Бианки

$$R^{I'}_{J'\{KL;M\}} + 2R^{I'}_{J'N\{K}R^N_{|0|LM\}} = 0.$$

Тензор $R^{I'}_{J'KL}$ содержит 3 подтензора: R^I_{0KL} — тензор кручения, $\{R^0_{0KL}, R^I_{0KL}\}$ — расширенный тензор кручения, $\{R^I_{JKL}, R^I_{0KL}\}$ — тензор аффинной кривизны-кручения.

Плоскостное пространство проективной связности $P_{n,(m+1)(n-m)}$ определим структурными уравнениями

$$d\omega^{I'}_{J'} = \omega^{K'}_{J'} \wedge \omega^{I'}_{K'} + R^{I'\alpha\beta}_{J'ij}\omega^i_\alpha \wedge \omega^j_\beta,\ \ R^{I'}_{J'}(^{\alpha\beta}_{ij}) = 0\ \ (\alpha, ... = \overline{0,m};\ i, .. = \overline{m+1,n}).$$

Выделим 2 частных случая: $m = 0$ — точечное пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$; $m = 1$ — линейчатое пространство проективной связности Акивиса $P_{n,2(n-1)}$ [2]. Структурные уравнения пространства $P_{n,(m+1)(n-m)}$ дают возможность получить дифференциальные уравнения

$$\nabla R^{I'\alpha\beta}_{J'ij} = R^{I'\alpha\beta}_{J'ij}{}^{;\gamma}_{;k}\,\omega^k_\gamma.$$

Компоненты тензора $R^{I'\alpha\beta}_{J'ij}$, который назовем тензором кривизны-кручения пространства $P_{n,(m+1)(n-m)}$, и их ковариантные производные $R^{I'\alpha\beta}_{J'ij}{}^{;\gamma}_{;k}$ подчиняются аналогу тождеств Бианки

$$R^{I'}_{J'}\{^{\alpha\beta;\gamma}_{ij;k}\} + 2R^{I'\delta}_{J'l}\{^{\alpha}_{i}R^{|l|\beta\gamma}_{|\delta|jk}\} = 0.$$

Тензор $R^{I'\alpha\beta}_{J'ij}$ имеет 3 подтензора: $R_0 = \{R^{k\alpha\beta}_{\gamma ij}\}$; $\{R^{\gamma\alpha\beta}_{\delta ij}, R_0\}$; $\{R^{l\alpha\beta}_{kij}, R_0\}$.

Список литературы

[1] Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань. Из-во Казан. ун-та, 1962. 210 с.

[2] Акивис М.А. Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности // Сиб. мат. ж. 1974. Т. 15, №1. С. 3–15.

О СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

А. Ястребов, Л. Кошелева

(Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского, Ярославль, Россия)

E-mail address: a.yastrebov@yspu.org

Простое наблюдение состоит в том, что две родственные равно авторитетные тщательно разработанные математические теории могут иметь разную педагогическую значимость. Например, геометрию Евклида изучают как школьники в течение одиннадцати лет, так и студенты широкого спектра специальностей, в то время как изучение геометрии Лобачевского является прерогативой только будущих учителей и профессиональных математиков. В последние десятилетие «отставание» геометрии Лобачевского усилилось благодаря изобретению интерактивных математических сред (ИМС), благодаря которым удалось разработать эффективные методики вовлечения школьников и студентов в творческую деятельность в области геометрии [1].

Доклад посвящен устранению этой «несправедливости». На базе ИМС GeoGebra авторами разработана система из 13 компьютерных инструментов, с помощью которой можно легко проводить различные построения на модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского и, как следствие, можно организовать более глубокое, чем обычно, изучение этой геометрии. Кратко опишем педагогические возможности этой системы инструментов.

Прежде всего, она способствует формированию «неевклидовой интуиции» студента или школьника, изучающего геометрию Лобачевского. Уже простейшая фигура — отрезок — дает пищу для размышлений. Например, два отрезка могут «выглядеть» одинаково, однако их длины, измеренные инструментом **Расстояние**, иногда совпадают, а иногда отличаются друг от друга. Обратно, два отрезка равной длины иногда выглядят одинаково, а иногда по-разному. Студенту приходится самостоятельно искать причины, в силу которых реализуется тот или иной феномен. Подобные парадоксы возникают при использовании инструментов **Середина отрезка, Биссектриса, Перпендикуляр. . .**

Кроме того, система инструментов позволяет легко строить геометрические фигуры, характерные для геометрии Лобачевского: центрально-симметричные точки; две различные прямые, проходящие через одну точку параллельно данной прямой; заградительную прямую угла и многое другое. Измерение углов инструментом **Угол** позволяет легко вычислить как каждый угол, так и дефект треугольника, не прибегая при этом к изощренным вычислительным средствам.

Наконец, система инструментов позволяет студенту самостоятельно поставить эксперименты, выявляющие яркие отличия геометрии Лобачевского от геометрии Евклида, например, «непрямизну» эквидистанты или феномен угла параллельности. Получено несколько инструментов «второго порядка», которые позволяют легко строить эквидистанты, окружности с разными центрами разных радиусов и т. п.

Таким образом, авторская система инструментов достаточно детализирована, что позволяет приступить к созданию на ее основе методики изучения геометрии Лобачевского.

Список литературы

[1] Шабанова М.В., Овчинникова Р.П., Ястребов А.В. и др. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография. М.: Изд. дом Академии Естествознания, 2016. 300 с.

Научное издание

Классическая и современная геометрия

Материалы Международной конференции,
посвященной 100-летию В.Т. Базылева
(Москва, 22–25 апреля 2019 г.)

Под общей редакцией А.В. Царева

Авторы несут ответственность за достоверность приведенных фактических материалов, корректность цитирования и правильность указания источников

Сдано в набор 05.03.2019. Подписано к печати 17.03.2019. Формат 60×90/16.
Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 8. Тираж 150 экз.
Заказ 1808, с. (сп.) 1129

Управление издательской деятельности и
инновационного проектирования МПГУ

119571, Москва, пр-т Вернадского, д. 88, оф. 446.
тел.: (499) 730-38-61, e-mail: izdat@mpgu.su