

М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Учебное пособие

Казань
Казанский государственный университет
имени В.И. Ульянова-Ленина
2007

УДК 519.3
ББК 22.172
К 277

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Казанского государственного университета

Научный редактор

доктор физико-математических наук, профессор Р.З. Даутов

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Р.Г. Зарипов,
доктор физико-математических наук, профессор И.Н. Сидоров

Карчевский М.М.

К 277 Математические модели механики сплошной среды: Учебное пособие/М.М. Карчевский, Р.Р. Шагидуллин. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2007. — 212 с.

ISBN 5-981180-355-X

Излагаются основные способы построения математических моделей механики сплошной среды.

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики, а также на научных сотрудников, чьи интересы лежат в указанной области.

УДК 519.3
ББК 22.172

ISBN 5-981180-355-X

© Карчевский М.М.,
Шагидуллин Р.Р., 2007

Оглавление

Предисловие	5
ГЛАВА 1. Вспомогательные сведения из анализа и алгебры	7
§ 1. Алгебра	7
Линейные пространства. Базисы	7
Тензоры	8
Евклидовы пространства. Основной и взаимный базисы	11
Теорема Рисса	13
*Тензорное произведение векторов. Различные виды компонент тензоров	13
Специальные тензоры и их свойства	15
Изотропные тензорные функции	22
§ 2. Анализ	25
Дифференцирование функций вещественного аргумента	25
Градиенты	27
Координатные представления дифференциальных операций	29
Сингулярные поверхности. Теорема Максвелла	32
Формулы Остроградского — Гаусса	34
Формула Стокса	36
*Криволинейные координаты	36
*Формулы преобразования компонент векторов и тензоров при замене координат	38
*Дифференциальные операции в криволинейных координатах	39
ГЛАВА 2. Основные понятия механики сплошной среды	47
§ 1. Кинематика сплошной среды	47
Система отсчета	47
Деформация тела и ее характеристики	47
Тензор скоростей деформаций	53
Плотность массы. Уравнение неразрывности	58
Однородные деформации	60
Пространственное описание движения. Интегральное уравнение баланса массы	61
§ 2. Уравнения движения сплошной среды. Тензор напряжений	63
Силы в механике сплошной среды. Основные законы движения	63
Тензор напряжений. Дифференциальные уравнения движения	64
Характеристики напряженного состояния	70
§ 3. Уравнение энергии	74
§ 4. Определяющие соотношения	77
Принцип локальности	78
Принцип независимости от системы отсчета	78
Упругое тело. Вязкая жидкость	82
Линейно-вязкая жидкость	82
Идеальная жидкость	83
Уравнения Навье — Стокса	84
Изотропное упругое тело	86
§ 5. Термодинамика однородных процессов	87

Аксиома диссипации. Энтропия. Однородные процессы.	87
Циклы. Коэффициент полезного действия	90
Циклы Карно	92
Классические уравнения состояния. Термодинамические потенциалы	95
Среда без трения.	100
Термодинамический газ и его свойства.	102
§ 6. Уравнения неизотермического течения вязкой жидкости	105
ГЛАВА 3. Гидромеханика	108
§ 1. Течения идеальной жидкости	108
Основные уравнения	108
Законы вихревого течения	109
Безвихревые течения несжимаемой жидкости	114
Эффекты сжимаемости идеальной жидкости	119
Звуковые волны как поверхности слабого разрыва	125
Поверхности сильного разрыва. Ударные волны	128
§ 2. Уравнения Навье — Стокса	134
Нестационарная задача. Исследование единственности решения.	134
Стационарная задача. Исследование единственности решения	140
Стационарные вискозиметрические течения	142
Пример решения нестационарной задачи	146
Уравнения пограничного слоя	149
ГЛАВА 4. Теория упругости	153
§ 1. Основные граничные задачи линейной теории упругости	153
Определяющие соотношения линейной теории упругости	153
Уравнения движения линейной теории упругости	157
Потенциальная энергия деформации упругого тела	157
Нестационарные задачи. Исследование единственности решений	160
Стационарные задачи. Единственность решений	161
§ 2. Вариационные принципы линейной теории упругости	162
Вариационный принцип Лагранжа	162
Вариационный принцип Кастильяно	164
§ 3. Задача о равновесии цилиндра под действием внутреннего давления	166
§ 4. Стержни и пластины	171
Кручение стержня	171
Элементарная теория изгиба стержней	178
Изгиб пластин	183
Ответы и решения	193
Обозначения	205
Предметный указатель	207
Литература	210

Предисловие

Книга является расширенным изложением курсов лекций, читавшихся авторами для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, специализирующихся в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

Цель книги — познакомить читателя с методами построения общих математических моделей механики сплошной среды, а также, хотя бы бегло, — с такими классическими разделами этой науки, как гидромеханика и теория упругости.

Особенностью данного пособия является то, что изложение материала приближено к аксиоматическому изложению механики сплошной среды [24].

Формализация любой теории после ее определенного развития есть необходимый этап, проясняющий логическую структуру теории.

Собственно, формализация — это «экономная» организация данной области знаний с помощью нескольких основополагающих принципов. Для студентов математических специальностей в условиях ограниченного числа часов, отведенных на предмет, такой способ изложения представляется целесообразным.

В отечественной учебной литературе по механике сплошной среды книги с такой направленностью, насколько нам известно, отсутствуют.

Общие постулаты и теоремы механики сплошной среды сопровождаются упражнениями (зачастую могущими служить темами семинарских занятий). Эти упражнения, на наш взгляд, во многих случаях помогают прояснить «физическую» сущность излагаемых теоретических положений.

Книга рассчитана на студентов старших курсов физико-математических факультетов. Она будет полезна также и аспирантам соответствующих специальностей. По-видимому, она будет интересна и специалистам, в первую очередь, способом изложения материала.

Предполагается, что читатель знаком с общими университетскими курсами естественнонаучного цикла. Тем не менее, авторы сочли необходимым поместить главу, содержащую обзор необходимых сведений из анализа и алгебры. Подготовленный читатель может пропустить эту главу, обращаясь к ней за справками по мере необходи-

мости. Звездочками помечены те пункты первой главы, которые не используются в книге при построении основных математических моделей механики сплошной среды. Этот материал, однако, оказывается весьма полезным при решении конкретных задач.

Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета. Авторы приносят им свою искреннюю благодарность.

Рукопись книги была внимательно прочитана Р.З. Даутовым. Авторы с благодарностью учли его замечания.

ГЛАВА 1
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ
АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ

§ 1. Алгебра

1. Линейные пространства. Базисы. Пусть V — конечномерное (n -мерное) линейное пространство над полем вещественных чисел. Любые n линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots, e_n образуют базис этого пространства, т. е. для любого вектора $u \in V$ можно построить разложение

$$u = u^j e_j.$$

Здесь и всюду в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам, стоящим на разных уровнях, от 1 до n , а именно,

$$u = u^j e_j = \sum_{j=1}^n u^j e_j.$$

Числа u^j однозначно определяются вектором u и называются его координатами или компонентами в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Будем использовать обозначение: $[u] = (u^1, u^2, \dots, u^n)^T$, $[u]$ — вектор столбец компонент вектора u .

Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ — какой-либо другой базис пространства V , и A_k^j — компоненты вектора \bar{e}_k относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n :

$$\bar{e}_p = A_p^q e_q, \quad (1)$$

а \bar{A}_p^q — компоненты вектора e_p относительно базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$:

$$e_p = \bar{A}_p^q \bar{e}_q, \quad (2)$$

то компоненты \bar{u}^j , $j = 1, \dots, n$, вектора u в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ вычисляются по формулам:

$$\bar{u}^j = \bar{A}_m^j u^m, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

или $[\bar{u}] = [\bar{A}][u]$, где $[\bar{A}] = (\bar{A}_m^j)_{j,m=1}^n$, j — номер строки, k — номер столбца. Обратное, $[u] = [A][\bar{u}]$, или

$$u^p = A_q^p \bar{u}^q, \quad p = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Формулы (3), (4) называют формулами перехода от одного базиса к другому. Они позволяют вычислить компоненты произвольного вектора в одном базисе по его компонентам в другом базисе, если известны коэффициенты в соотношениях (1), (2) для векторов этих базисов.

Упражнение 1.1.* Показать, что матрицы $[A]$, $[\bar{A}]$ взаимно обратны.¹⁾

$$[A][\bar{A}] = [E], \quad [E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Тензоры. Пусть V и W — конечномерные линейные пространства (вообще говоря, разных размерностей). отображение L пространства V в пространство W называется линейным, если

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv$$

для любых $u, v \in V$ и любых чисел α, β . Линейные отображения будем называть также линейными операторами. Линейный оператор, отображающий пространство V в себя, называют *тензором*.

Простейшие примеры тензоров.

1) Нулевой тензор. Переводит любой вектор в нулевой вектор пространства. Обозначается буквой O :

$$Ou = 0 \quad \forall u \in V.$$

2) Единичный тензор. Оставляет любой вектор без изменения. Обозначается буквой E :

$$Eu = u \quad \forall u \in V.$$

Произведением тензоров L, M называется тензор LM , определяемый как результат последовательного применения тензоров L, M :

$$LMu = L(Mu) \quad \forall u \in V.$$

Вообще говоря, $LM \neq ML$. Если $LM = ML$, то говорят, что тензоры L, M коммутируют, или являются перестановочными.

Обычным образом определяются степени тензора:

$$L^0 = E, \quad L^1 = L, \quad L^m = \underbrace{LL \dots L}_{m \text{ раз}}.$$

¹⁾Для упражнений, помеченных звездочкой, в конце книги приведены решения или подробные указания.

Нетрудно проверить, что

$$L^m L^n = L^{m+n}, \quad (\alpha L)^m = \alpha^m L^m, \quad (L^m)^n = L^{mn}$$

для любых целых неотрицательных m, n и любого скаляра α .

Тензор L называют обратимым, если существует тензор L^{-1} (называемый обратным к L) такой, что $L^{-1}L = LL^{-1} = E$. Ясно, что $E^{-1} = E$, $(-E)^{-1} = -E$. Очевидно также, что тензор O не имеет обратного.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис пространства V . Тогда

$$Le_k = L_k^j e_j, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где числа L_k^j однозначно определяются тензором L . Они называются компонентами тензора L относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n , а матрица $[L] = (L_k^j)_{j,k=1}^n$ — матрицей тензора L относительно указанного базиса.

Если u — вектор с компонентами u^1, u^2, \dots, u^n относительно того же базиса, то $(Lu)^k = L_j^k u^j$. Таким образом, вектор-столбец компонент $((Lu)^1, \dots, (Lu)^n)^T = [Lu]$ можно трактовать как результат умножения матрицы $[L]$ на вектор-столбец $(u^1, u^2, \dots, u^n)^T$ компонент вектора u , т. е. $[Lu] = [L][u]$.

Отметим следующие формулы:

$$[\alpha L] = \alpha [L]$$

для любого тензора L и любого скаляра α ,

$$[LM] = [L][M].$$

В любом базисе

$$[O] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad [E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad [L^{-1}] = [L]^{-1}.$$

Если базисы e_1, e_2, \dots, e_n и $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ связаны соотношениями (1), (2), то компоненты L_k^j и \bar{L}_p^q тензора L относительно этих базисов связаны равенствами:

$$[\bar{L}] = [A]^{-1}[L][A], \quad [L] = [A][\bar{L}][A]^{-1}.$$

Таким образом, матрицы одного и того же тензора относительно разных базисов подобны.

Вектор u называется собственным вектором тензора L , если $u \neq 0$ и существует число λ такое, что $Lu = \lambda u$. Число λ называется собственным числом тензора L , соответствующим собственному вектору u . Если выбран некоторый базис в пространстве V , то собственные числа тензора L можно вычислить как вещественные корни характеристического уравнения:

$$\det[L - \lambda E] = 0, \quad (5)$$

или:

$$\lambda^n - I_1 \lambda^{n-1} + \dots \pm I_n = 0.$$

Коэффициенты I_1, I_2, \dots, I_n характеристического уравнения не зависят от выбора базиса и определяются лишь тензором L . Поэтому I_1, I_2, \dots, I_n называют *инвариантами* тензора. Среди них особо отметим

$$I_1 = \text{tr}[L] = \sum_{i=1}^n L_i^i, \quad (6)$$

называемый следом тензора L (tr — от английского *trace* — след), и

$$I_n = \det[L],$$

определитель тензора.

Напомним, что тензор L^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\det(L) \neq 0$.

По теореме Виетта числа I_1, \dots, I_n — симметрические функции корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения (5), называемых характеристическими числами тензора, в частности:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n, \\ I_n &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

Полезно отметить выражение I_2 через компоненты тензора L при $n = 3$:

$$I_2 = (L_1^1 L_2^2 - L_2^1 L_1^2) + (L_2^2 L_3^3 - L_3^2 L_2^3) + (L_3^3 L_1^1 - L_1^3 L_3^1).$$

Упражнение 1.2. Показать, что

$$\begin{aligned} (AB)^{-1} &= B^{-1} A^{-1}, \\ (A^m)^{-1} &= (A^{-1})^m, \quad m — \text{целое неотрицательное число,} \\ &\text{тензор } O \text{ не имеет обратного.} \end{aligned}$$

3. Евклидовы пространства. Основной и взаимный базисы. Будем говорить, что на вещественном пространстве V введено скалярное произведение, если каждой паре векторов $u, v \in V$ поставлено в соответствие вещественное число $u \cdot v$, называемое *скалярным произведением*. При этом должны быть выполнены условия (аксиомы скалярного произведения):

1. $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in V$,
2. $u \cdot u \geq 0 \quad \forall u \in V$, причем равенство $u \cdot u = 0$ эквивалентно тому, что $u = 0$.
3. $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w \quad \forall u, v, w \in V$ и для любых скаляров α, β .

Величина $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ называется длиной или нормой (иногда, модулем) вектора u .

Справедливы следующие неравенства. Неравенство Коши:

$$|u \cdot v| \leq |u||v|.$$

Неравенство треугольника:

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

Равенства в этих неравенствах достигаются лишь, когда векторы u, v коллинеарны (линейно зависимы).

Конечномерное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым* пространством.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис евклидова пространства V . Ясно, что однозначно определяется вектор $e^1 \in V$ такой, что

$$e^1 \cdot e_2 = e^1 \cdot e_3 = \dots = e^1 \cdot e_n = 0, \quad e^1 \cdot e_1 = 1.$$

Вообще, однозначно определяются векторы e^1, e^2, \dots, e^n при помощи соотношений

$$e^j \cdot e_i = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что векторы e^1, e^2, \dots, e^n образуют базис в пространстве V . Этот базис называют *взаимным* по отношению к основному базису e_1, e_2, \dots, e_n .

Коэффициенты u^k разложения вектора u по основному базису называют контравариантными компонентами, а коэффициенты u_k разложения по взаимному базису, $u = u_k e^k$, называются ковариантными компонентами вектора u . Нетрудно убедиться, что

$$u^k = u \cdot e^k, \quad u_k = u \cdot e_k. \quad (7)$$

Для того, чтобы основной и взаимный базисы совпадали, необходимо и достаточно, чтобы исходный базис был ортонормированным, т. е. $e_i \cdot e_j = \delta_i^j$. В этом случае контравариантные и ковариантные компоненты любого вектора $u \in V$ совпадают.

Приведем выражения для скалярного произведения через компоненты векторов: $u \cdot v = u^j v_j = u_j v^j$.

Далее будем использовать следующие обозначения:

$$g_{ks} = e_k \cdot e_s, \quad g^{ks} = e^k \cdot e^s, \quad g_s^k = e^k \cdot e_s = \delta_s^k.$$

Числа g_{ks}, g^{ks}, g_s^k называются ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами метрики относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n . Это название оправдывается следующими выражениями для квадрата длины вектора u через его компоненты:

$$u \cdot u = u^k e_k \cdot u^l e_l = u^k u^l g_{kl} = u_k u_l g^{kl} = u_k u^l g_l^k.$$

С помощью компонент метрики легко получить связь между ковариантными и контравариантными компонентами одного и того же вектора u :

$$u^k = g^{kl} u_l, \quad u_l = g_{kl} u^k. \quad (8)$$

Докажем соотношения (8). Имеем $u^k = u \cdot e^k$, $u = u_l e^l$, следовательно, $u^k = g^{kl} u_l$. Совершенно аналогично устанавливается второе соотношение (8).

Эти формулы часто называют формулами поднятия (опускания) индексов компонент вектора.

Полезно отметить также следующие формулы:

$$e_k = g_{km} e^m, \quad e^k = g^{km} e_m, \quad g_{jk} g^{kl} = \delta_j^l. \quad (9)$$

Упражнения.

1.3. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис в евклидовом пространстве. Показать, что вектор e^j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, определяется системой равенств

$$e^j \cdot e_i = \delta_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

однозначно.

1.4. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис в евклидовом пространстве V . Векторы e^1, e^2, \dots, e^n определяются равенствами

$$e^j \cdot e_i = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Показать, что e^1, e^2, \dots, e^n — базис в пространстве V .

1.5. Пусть V — трехмерное евклидово пространство, e_1, e_2, e_3 — базис в V . Показать, что векторы e^1, e^2, e^3 взаимного базиса можно определить равенствами:

$$e^1 = \frac{1}{Q} e_2 \times e_3, \quad e^2 = \frac{1}{Q} e_3 \times e_1, \quad e^3 = \frac{1}{Q} e_1 \times e_2,$$

где $a \times b$ векторное произведение векторов a, b в трехмерном евклидовом пространстве¹⁾, Q — объем параллелепипеда, построенного на векторах e_1, e_2, e_3 .

1.6. Доказать справедливость равенств:

$$e_k = g_{km}e^m, \quad e^k = g^{km}e_m.$$

1.7. Показать, что матрицы $(g_{km})_{k,m=1}^n$ и $(g^{km})_{k,m=1}^n$ взаимно обратны.

4. Теорема Рисса. В этом пункте укажем общий вид линейного функционала на евклидовом пространстве.

Теорема 1 (теорема Рисса). Пусть g — произвольная линейная функция (функционал), действующая из пространства V в \mathbb{R} , где \mathbb{R} — множество всех вещественных чисел. Существует и притом только один вектор $f \in V$ такой, что

$$g(u) = f \cdot u \quad \forall u \in V. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор f определяется тождеством (10) однозначно. В самом деле, если и для $f_1 \in V$

$$g(u) = f_1 \cdot u \quad \forall u \in V,$$

то $(f - f_1) \cdot u = 0 \quad \forall u \in V$. Полагая здесь $u = f - f_1$, получим, что $f = f_1$. Докажем теперь существование вектора f , определяемого условием (10). Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис в V . Тогда в силу линейности функционала g имеем $g(u) = g(u^k e_k) = u^k g_k$, где $g_k = g(e_k)$. Таким образом, если f — вектор из V с ковариантными компонентами относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n , равными g_1, \dots, g_n , то $g(u) = f \cdot u \quad \forall u \in V$. $\square^2)$

*** 5. Тензорное произведение векторов. Различные виды компонент тензоров.** Каждой паре векторов $a, b \in V$ можно поставить в соответствие тензор, обозначаемый через $a \otimes b$ и определяемый равенством:

$$a \otimes b u = (u \cdot b)a \quad \forall u \in V.$$

Тензор $a \otimes b$ называется *тензорным произведением* или *диадой* векторов a, b .

Вообще говоря, $a \otimes b \neq b \otimes a$. Покажем, что элементы матрицы тензора $a \otimes b$ относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n определяются по контравариантным компонентам вектора a и ковариантным компонентам вектора b соотношениями: $(a \otimes b)_j^i = a^i b_j$. Действительно, по определению имеем:

$$(a \otimes b)e_k = (e_k \cdot b)a = (e_k \cdot b_j e^j)a^i e_i = b_k a^i e_i = a^i b_k e_i.$$

¹⁾При определении векторного произведения важна ориентация векторов базиса e_1, e_2, e_3 ; всюду в этой книге базис трехмерного пространства считается левым.

²⁾Значком " \square " отмечаем конец доказательства.

Это значит, что $(a \otimes b)_k^i = a^i b_k$.

Основному и взаимному базисам ставят в соответствие диады:

$$e_j \otimes e_k, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$e^j \otimes e^k, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$e_j \otimes e^k, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$e^j \otimes e_k, \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Каждая из совокупностей (11)–(14) образует базис в линейном пространстве тензоров над пространством V . Иными словами, для любого тензора L можно однозначно указать совокупности чисел $L^{jk}, L_{jk}, L_{\cdot k}^j, L_k^{\cdot j}$, $j, k = 1, \dots, n$, таких, что:

$$L = L^{jk} e_j \otimes e_k = L_{jk} e^j \otimes e^k = L_{\cdot k}^j e_j \otimes e^k = L_k^{\cdot j} e^k \otimes e_j. \quad (15)$$

Числа L^{jk} называют *контравариантными*, L_{jk} — *ковариантными*, $L_{\cdot k}^j, L_k^{\cdot j}$ — *смешанными компонентами* тензора L . Нетрудно проверить справедливость следующих формул:

$$L^{jk} = L e^k \cdot e^j, \quad L_{jk} = L e_k \cdot e_j, \quad L_{\cdot k}^j = L e_k \cdot e^j, \quad L_k^{\cdot j} = L e^j \cdot e_k, \quad (16)$$

$j, k = 1, \dots, n$.

Заметим, что смешанные компоненты $L_{\cdot k}^j$ совпадают с определенными ранее элементами матрицы тензора относительно базиса e_1, \dots, e_n , а $L_k^{\cdot j}$ — с элементами матрицы тензора относительно базиса e^1, \dots, e^n .

Введенные выше компоненты метрики g_{ks}, g^{ks}, g_k^s являются соответствующими компонентами единичного тензора E . Поэтому иногда единичный тензор называют метрическим.

Используя равенства (9), легко получить следующие формулы:

$$L^{kl} = g^{kp} g^{lq} L_{pq}, \quad (17)$$

$$L^{kl} = g^{kp} L_{p \cdot}^{\cdot l} = g^{pl} L_{\cdot p}^k. \quad (18)$$

Эти формулы часто называют формулами поднятия (опускания) индексов (жонглирования индексами) тензора.

Упражнения.

1.8. Показать, что оператор $A : V \rightarrow V$, определенный равенством:

$$Au = (u \cdot b)a \quad \forall u \in V,$$

где a, b — заданные фиксированные векторы пространства V , есть тензор.

1.9.* Пусть e^1, e^2, \dots, e^n и e_1, e_2, \dots, e_n — основной и взаимный базисы в евклидовом пространстве V . Показать, что каждая из совокупностей

$$e_j \otimes e_k, e_j \otimes e^k, e^j \otimes e_k, e^j \otimes e^k, j, k = 1, 2, \dots, n,$$

образует базис в пространстве тензоров над V и справедливы формулы (15), (16).

1.10. Доказать справедливость формул (17), (18).

6. Специальные тензоры и их свойства. Тензор L^T называется *транспонированным* (*сопряженным*) по отношению к тензору L , если

$$Lu \cdot v = u \cdot L^T v \quad \forall u, v \in V.$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (\alpha L)^T &= \alpha L^T, \quad \alpha - \text{число}, & (L + M)^T &= L^T + M^T, \\ (LM)^T &= M^T L^T, & (L^T)^T &= L, & (L^T)^{-1} &= (L^{-1})^T, \\ (a \otimes b)^T &= b \otimes a. \end{aligned} \tag{19}$$

Из формул (15), (19) вытекает, что

$$(L^T)^{j \cdot} = (L)^{\cdot j}, \quad (L^T)^{jk} = L^{kj}, \quad (L^T)_{jk} = L_{kj}.$$

Это означает, что матрицы ковариантных (контравариантных) компонент L^T транспонированы по отношению к соответствующим матрицам компонент тензора L . Для смешанных компонент аналогичное справедливо, если базис e_1, e_2, \dots, e_n ортонормирован.

Тензор L называется *симметричным*, если $L^T = L$, тензор L называется *антисимметричным* (*кососимметричным*), если $L^T = -L$. Каждый тензор L есть сумма симметричного и кососимметричного тензоров: $L = S + W$, где

$$S = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad W = \frac{1}{2}(L - L^T).$$

Тензор Q называется *ортогональным*, если

$$Qu \cdot Qv = u \cdot v \quad \forall u, v \in V.$$

Эквивалентное определение: $Q^{-1} = Q^T$.

Нетрудно видеть, что если тензор Q ортогонален, то $\det Q = \pm 1$. Если $\det Q = 1$, то тензор Q называют *собственно ортогональным*, или *поворотом*.

Скалярное произведение $L \cdot M$ тензоров L, M определяется равенством:

$$L \cdot M = \text{tr}(LM^T).$$

Нетрудно проверить, что

$$L \cdot M = L_j^{\cdot k} M_k^{\cdot j}.$$

Относительно введенного скалярного произведения линейное пространство тензоров есть n^2 -мерное евклидово пространство. Норма в этом пространстве определяется равенством:

$$|L| = \sqrt{L \cdot L} = \sqrt{L_j^{\cdot k} L_k^{\cdot j}}.$$

Симметричный тензор S называется *неотрицательным*, если

$$Su \cdot u \geq 0 \quad \forall u \in V.$$

Если при этом из равенства $Su \cdot u = 0$ вытекает, что $u = 0$, то тензор S называется *положительно определенным*.

Упражнение 1.11. Доказать, что для любого тензора L тензор $S = L^T L$ симметричен и неотрицателен. Если $\det(L) \neq 0$, то тензор $L^T L$ положительно определен.

Теорема 2. Если тензор L симметричен, то существует ортонормированный базис e_1, \dots, e_n пространства V , состоящий из собственных векторов тензора L : $Le_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что все характеристические числа тензора L вещественны. Действительно, если λ — характеристическое число тензора L , то существует ненулевой вектор-столбец $x = (x^1, \dots, x^n)^T$ с комплексными, вообще говоря, компонентами такой, что

$$[L]x = \lambda x, \tag{20}$$

где $[L]$ — матрица (вещественная и симметричная) тензора L в некотором ортонормированном базисе i_1, \dots, i_n . Умножая k -тое уравнение системы (20) на \bar{x}^k ¹⁾ и суммируя почленно получившиеся равенства, можем написать:

$$\lambda \sum_{k=1}^n |x^k|^2 = \sum_{k,l=1}^n L_l^k x^l \bar{x}^k.$$

Применяя операцию комплексного сопряжения к обеим частям последнего равенства и используя симметрию и вещественность матрицы $[L]$, получаем:

$$\bar{\lambda} \sum_{k=1}^n |x^k|^2 = \sum_{k,l=1}^n L_l^k \bar{x}^l x^k = \sum_{k,l=1}^n L_l^k x^l \bar{x}^k = \lambda \sum_{k=1}^n |x^k|^2,$$

¹⁾Как обычно, \bar{a} — число, комплексно сопряженное a .

откуда следует, что λ — вещественное число.

Понятно, что тогда и вектор x , решение системы (20), может быть выбран вещественным. Полагая $e = x^k i_k$, $e_1 = e/|e|$, $\lambda_1 = \lambda$, на основании (20) можем написать:

$$Le_1 = \lambda_1 e_1,$$

т. е. e_1 — нормированный собственный вектор тензора L , λ_1 — соответствующее ему собственное число.

Пусть, далее, $V_{n-1} = \{u \in V : e_1 \cdot u = 0\}$ — подпространство векторов, ортогональных e_1 . Если $u \in V_{n-1}$, то

$$Lu \cdot e_1 = u \cdot Le_1 = \lambda_1 u \cdot e_1 = 0,$$

т. е. $Lu \in V_{n-1}$. Иными словами, подпространство V_{n-1} инвариантно относительно тензора L . Поэтому, повторяя предыдущие рассуждения, получим, что существует нормированный вектор $e_2 \in V_{n-1}$ такой, что $Le_2 = \lambda_2 e_2$. Понятно, что $e_1 \cdot e_2 = 0$. Продолжая этот процесс, т. е. полагая $V_{n-2} = \{u \in V : e_1 \cdot u = 0, e_2 \cdot u = 0\}$ и т. д., построим n ортонормированных собственных векторов тензора L . \square

Лемма 1. Пусть тензоры L, M симметричны и перестановочны. Тогда существует вектор $e \neq 0$ такой, что

$$Le = \lambda e, \quad Me = \mu e.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 симметричный тензор L имеет собственное число. Обозначим его через λ . Через V_λ обозначим множество всех векторов $x \in V$ (включая нулевой), удовлетворяющих уравнению $Lx = \lambda x$. Ясно, что V_λ есть подпространство пространства V . Подпространство V_λ инвариантно относительно тензора M . Действительно, если $x \in V_\lambda$, то $MLx = \lambda Mx$, и, поскольку $ML = LM$, то $LMx = \lambda Mx$, а это означает, что $Mx \in V_\lambda$. Используя симметрию тензора M , на основании теоремы 2 отсюда получаем, что существуют, вектор $e \in V_\lambda$, $e \neq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ такие, что $Me = \mu e$. Кроме того, по определению V_λ имеем: $Le = \lambda e$. \square

Теорема 3. Пусть тензоры L, M симметричны и перестановочны. Тогда существует ортонормированный базис e_1, e_2, \dots, e_n пространства V такой, что

$$Le_k = \lambda_k e_k, \quad Me_k = \mu_k e_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Упражнение 1.12. Провести доказательство теоремы 3.

Теорема 4. Пусть S — симметричный неотрицательный тензор. Тогда существует единственный симметричный неотрицательный тензор T такой, что $T^2 = S$.

Тензор T называют *корнем квадратным* из тензора S и обозначают через $S^{1/2}$ или через \sqrt{S} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку тензор S симметричен, существует ортонормированный базис его собственных векторов:

$$Se_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Из равенства (21), очевидно, вытекает, что $\lambda_i = Se_i \cdot e_i$, т. е. все собственные числа тензора S неотрицательны. Определим тензор T действием его на векторы базиса:

$$Te_i = \sqrt{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Очевидно, что тензор T симметричен, неотрицателен, $T^2 = S$, т. е. $T = S^{1/2}$. Осталось доказать, единственность корня квадратного. С этой целью установим предварительно, что существует полином P_m , степени $m \leq n - 1$, такой, что $T = P_m(S)$. Действительно, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $r \leq n$, — различные собственные числа тензора S . Ясно, что найдется (и притом только один) полином P_{r-1} , степени $r - 1$, такой, что $P_{r-1}(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, r$ ¹⁾. Действуя тензором $P_{r-1}(S)$ на векторы базиса e_i , получим:

$$P_{r-1}(S)e_i = P(\lambda_i)e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

т. е. $P_{r-1}(S) = T$. Пусть теперь U — произвольный симметричный неотрицательный тензор такой, что $U^2 = S$. Тогда

$$TU = P_{r-1}(S)U = P_{r-1}(U^2)U = UP_{r-1}(U^2) = UT,$$

т. е. тензоры T и U перестановочны. По теореме 3 у них существует общий ортонормированный базис собственных векторов (обозначим его вновь через e_1, \dots, e_n):

$$Te_i = \mu_i e_i, \quad Ue_i = \tilde{\mu}_i e_i, \quad \mu_i, \tilde{\mu}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$T^2 e_i = \mu_i^2 e_i, \quad U^2 e_i = \tilde{\mu}_i^2 e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

¹⁾Полином P_{r-1} можно записать в явном виде, используя, например, интерполяционную формулу Лагранжа.

но $T^2=U^2$, поэтому $\tilde{\mu}_i^2 = \mu_i^2$, откуда вытекает, что $\tilde{\mu}_i = \mu_i, i = 1, \dots, n$. Таким образом, $U = T$. \square

Теорема 5 (теорема Коши). Для любого обратимого тензора L однозначно определяются ортогональный тензор Q , симметричные положительно определенные тензоры S и T такие, что

$$L = QS = TQ. \quad (22)$$

Равенство (22) называют *полярным* разложением тензора L . Заметим, что разложение (22) справедливо и для любого необратимого тензора L . Но в этом случае тензор Q не определяется однозначно, а тензоры S, T лишь неотрицательны.

Лемма 2. Пусть тензор L невырожден, x_1, x_2, \dots, x_n — ортонормированный базис собственных векторов симметричного и положительно определенного тензора¹⁾ $L^T L$, т. е.

$$L^T L x_k = \lambda_k x_k, \quad x_k \cdot x_l = \delta_k^l, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Тогда векторы

$$y_k = \rho_k^{-1} L x_k, \quad \rho_k = \sqrt{\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (23)$$

образуют ортонормированный базис собственных векторов тензора LL^T , причем

$$LL^T y_k = \lambda_k y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\begin{aligned} y_k \cdot y_l &= \rho_k^{-1} \rho_l^{-1} L x_k \cdot L x_l = \rho_k^{-1} \rho_l^{-1} L^T L x_k \cdot x_l = \\ &= \lambda_k \rho_k^{-1} \rho_l^{-1} x_k \cdot x_l = \delta_{kl}, \end{aligned}$$

т. е. векторы $y_k, k = 1, \dots, n$, ортонормированы. Далее,

$$LL^T y_k = \rho_k^{-1} LL^T L x_k = \rho_k^{-1} L(L^T L x_k) = \rho_k^{-1} L \lambda_k x_k = \lambda_k y_k. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Числа ρ_k принято называть *сингулярными числами* тензора L , базисы x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_n — *сингулярными базисами* тензора L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОШИ. Определим тензор T действием его на базисные векторы y_k :

$$T y_k = \rho_k y_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (24)$$

¹⁾См. упражнение 1.11.

Тензор T , очевидно, симметричен и положительно определен. Определим тензор Q равенствами:

$$Qx_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Тензор Q ортогонален. Действительно, для произвольного вектора $u = u^k x_k \in V$

$$Qu \cdot Qu = u^k y_k \cdot u^k y_k = \sum_{k=1}^n u^k u^k = u \cdot u.$$

Далее, вследствие равенств (23)–(25) имеем:

$$Lx_k = TQx_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

т. е. $L = TQ$. Определим теперь положительно определенный тензор S равенствами:

$$Sx_k = \rho_k x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$Lx_k = QSx_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

следовательно, $L = QS$. Докажем, наконец, что равенствами (22) тензоры Q, S, T определяются однозначно. Имеем $L^T = SQ^T$, значит $L^T L = S^2$, т. е. симметричный положительно определенный тензор S однозначно определяется равенством $S = \sqrt{L^T L}$. Аналогично, равенство $T = \sqrt{LL^T}$ однозначно определяет тензор T . Но тогда и тензор $Q = LS^{-1} = T^{-1}L$ определен однозначно. \square

Упражнения.

1.13. Доказать, что для любого тензора $L : V \rightarrow V$ сопряженный тензор L^T существует и определяется однозначно.

1.14. Пусть $L = S + W$, где $S = S^T$, $W = -W^T$. Показать, что тензоры S, W однозначно определяются тензором L .

1.15. Доказать, что

$$(a \otimes b)^T = (b \otimes a).$$

1.16. Доказать, что *ядро* тензора¹⁾

$$A = a \wedge b = (a \otimes b) - (b \otimes a),$$

т. е. множество векторов u , удовлетворяющих уравнению $Au = 0$, — одномерное подпространство, натянутое на вектор c , ортогональный плоскости векторов a, b .

¹⁾Кососимметричный тензор $a \wedge b = (a \otimes b) - (b \otimes a)$ называют *внешним произведением* векторов a, b .

ЗАМЕЧАНИЕ. Ядро кососимметричного тензора часто называют его осью.

1.17. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n — базис евклидова пространства V . Показать, что:

1) множество всех симметричных тензоров над пространством V — линейное пространство размерности $n(n+1)/2$, базис этого пространства образуют тензоры

$$e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

2) множество всех кососимметричных тензоров — линейное пространство размерности $n(n-1)/2$, базис этого пространства образуют тензоры

$$e_i \wedge e_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i < j.$$

1.18.* Пусть Q — ортогональный тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Показать, что существует ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 , в котором матрица тензора Q имеет вид

$$[Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (26)$$

или

$$[Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\det Q = 1$, то с точностью до переобозначения координатных осей возможны лишь два случая:

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad [Q] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

причем вторая матрица получается из первой при $\varphi = \pi$. Таким образом, ортогональный тензор с определителем, равным единице, есть преобразование поворота трехмерного евклидова пространства вокруг некоторой оси. Если $\det Q = -1$, то

$$[Q] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В этом случае поворот на угол φ сочетается с отражением (инверсией) относительно плоскости, ортогональной вектору e_1 .

1.19.* Пусть L — кососимметричный тензор в трехмерном евклидовом пространстве. Показать, что существует ортонормированный базис, в котором матрица тензора L имеет вид

$$[L] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix}.$$

1.20. Показать, что

$$\operatorname{tr}(u \otimes v) = u \cdot v \quad \forall u, v \in V.$$

1.21. Показать, что для произведения тензоров $L \cdot M = \operatorname{tr}(LM^T)$ выполнены все аксиомы скалярного произведения.

1.22. Показать, что для любых тензоров $L, M : V \rightarrow V$

$$L \cdot M = L_j^k M_k^j.$$

1.23.* Пусть T — симметричный тензор, L — кососимметричный тензор. Показать, что $\text{tr}(TL) = 0$.

1.24. Пусть $e \in V$, $|e| = 1$. Определим тензор Q равенствами:

$$Qe = -e, \quad Qf = f, \quad \text{если } f \cdot e = 0. \quad (28)$$

Показать, что Q — ортогональный тензор¹⁾.

1.25. Показать, что тензор Q , определенный соотношениями (28), можно записать в виде: $Q = E - 2e \otimes e$.

7. Изотропные тензорные функции. Введем в рассмотрение линейное пространство $\mathcal{L}(V \rightarrow V)$ всех тензоров, действующих в пространстве V .

Тензорную функцию f , т. е. функцию, отображающую пространство $\mathcal{L}(V \rightarrow V)$ в себя, назовем *изотропной*, если

$$f(QDQ^T) = Qf(D)Q^T$$

для любого $D \in \mathcal{L}(V \rightarrow V)$ и любого ортогонального тензора Q .

Функцию f назовем *симметричной*, если тензор $T = f(D)$ симметричен для любого симметричного тензора D .

Теорема 6. Симметричная тензорная функция f изотропна тогда и только тогда, когда для любого симметричного тензора A имеет место представление:

$$f(A) = \varphi_0 E + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2 + \dots + \varphi_{n-1} A^{n-1}, \quad (29)$$

где n — размерность пространства V , а φ_i — изотропные скалярные функции²⁾ A , т. е.

$$\varphi_i(QAQ^T) = \varphi_i(A), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (30)$$

для любого ортогонального тензора Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия (29), (30) выполнены, то, очевидно, $f(QAQ^T) = Qf(A)Q^T$ для любого ортогонального тензора Q , то есть функция f изотропна.

Докажем обратное утверждение. Пусть A — симметричный тензор, e — его нормированный собственный вектор, λ — соответствующее собственное число. Положим $D = f(A)$ и покажем, что e — собственный вектор тензора D . С этой целью введем в рассмотрение ортогональный тензор Q , определенный условиями $Qe = -e$, $Qh = h$, если $h \cdot e = 0$. Пусть u — произвольный вектор из V . По теореме

¹⁾Тензор Q называют тензором отражения от плоскости, ортогональной вектору e .

²⁾ $\varphi_i = \varphi_i(A)$ — числа при заданном A .

об ортогональном разложении евклидова пространства $u = \mu e + h$, где $h \cdot e = 0$, $\mu = u \cdot e$. Нетрудно проверить, что $Q^T e = -e$, $Q^T h = h$, следовательно,

$$\begin{aligned} QAQ^T u &= QAQ^T(\mu e + h) = QA(-\mu e + h) = \\ &= Q(-A\mu e + Ah) = -\lambda\mu Qe + QA h = \lambda\mu e + QA h, \end{aligned}$$

но $Ah \cdot e = h \cdot Ae = \lambda h \cdot e = 0$, поэтому $QA h = Ah$, и

$$QAQ^T u = \lambda\mu e + Ah = A(\mu e + h) = Au.$$

В силу произвольности u это означает, что $Q^T A Q = A$. Тогда по определению тензора D имеем $QDQ^T = Qf(A)Q^T$, откуда в силу изотропности f вытекает, что $QDQ^T = f(A) = D$. Подействуем на вектор e тензором D :

$$De = QDQ^T e = -QDe. \quad (31)$$

Равенство (31) означает, что вектор De преобразуется тензором Q в противоположный. Это, очевидно, возможно лишь в случае, когда векторы De и e параллельны: $De = de$. Поскольку e — произвольный собственный вектор тензора A , отсюда вытекает, что у тензоров A и D существует общая полная ортонормированная система собственных векторов e_1, e_2, \dots, e_n :

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad De_k = d_k e_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть e_1, e_2 — собственные векторы тензора A , соответствующие одному и тому же собственному числу λ :

$$Ae_1 = \lambda e_1, \quad Ae_2 = \lambda e_2, \quad e_1 \cdot e_2 = 0.$$

Тогда и собственные числа тензора D , отвечающие собственным векторам e_1, e_2 , также совпадают:

$$De_1 = d e_1, \quad De_2 = d e_2.$$

Для доказательства этого утверждения введем в рассмотрение ортогональный тензор Q , определяемый равенствами:

$$Qe_1 = e_2, \quad Qe_2 = e_1, \quad Qe_3 = e_3, \dots, \quad Qe_n = e_n.$$

Покажем, что $QAQ^T = A$. Разлагая произвольный вектор $u \in V$ по базису e_1, e_2, \dots, e_n ортонормированных собственных векторов тензора A , получим: $Au = c_1 \lambda e_1 + c_2 \lambda e_2 + c_3 \lambda_3 e_3 + \dots + c_n \lambda_n e_n$,

$$\begin{aligned} QAQ^T u &= Q(c_1 \lambda e_2 + c_2 \lambda e_1 + c_3 \lambda_3 e_3 + \dots + c_n \lambda_n e_n) = \\ &= c_1 \lambda e_1 + c_2 \lambda e_2 + c_3 \lambda_3 e_3 + \dots + c_n \lambda_n e_n = Au. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $QAQ^T = A$, а значит и

$$QDQ^T = D. \quad (32)$$

Пусть теперь $e = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, где β_1, β_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно. В силу (32) имеем $QDe = DQe$, или

$$Q(d_1\beta_1 e_1 + d_2\beta_2 e_2) = D(\beta_1 e_2 + \beta_2 e_1),$$

поэтому

$$d_1\beta_1 e_2 + d_2\beta_2 e_1 = \beta_1 d_2 e_2 + \beta_2 d_1 e_1,$$

откуда вытекает, что $d_1\beta_1 = \beta_1 d_2$, $d_2\beta_2 = \beta_2 d_1$, следовательно, $d_1 = d_2$. Таким образом, установлено, что различных собственных чисел у тензора A не меньше, чем у тензора D . Пусть их количество равно m , $m \leq n$. Ясно, что если удастся установить разрешимость системы уравнений

$$d_k = \varphi_0 + \varphi_1 \lambda_k + \varphi_2 \lambda_k^2 + \dots + \varphi_{m-1} \lambda_k^{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (33)$$

относительно $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$, то тем самым представление (29) будет доказано. Заметим, что если $m < n$, то $\varphi_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$ можно положить равными нулю. Разрешимость системы (33) вытекает из того, что ее определитель есть определитель Вандермонда, и он отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ различны. При этом нужно учесть, что φ_i , $i = 0, \dots, m-1$, будут функциями собственных чисел тензора A , и поскольку собственные числа тензоров QAQ^T и A при любом ортогональном тензоре Q совпадают, то условие (30) выполнено. \square

Отметим особо случай $n = 3$ как наиболее интересный для приложений. В этом случае представление симметричной изотропной тензорной функции имеет вид

$$f(A) = \varphi_0 E + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2,$$

где $\varphi_i = \varphi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $i = 0, 1, 2$. Очевидно, можно считать, что $\varphi_i = \varphi_i(I_1, I_2, I_3)$, $i = 0, 1, 2$, где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора A . По теореме Гамильтона — Кэли любой тензор A удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т. е.

$$A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 = 0,$$

откуда

$$A^2 = I_1 A - I_2 + I_3 A^{-1},$$

если тензор A^{-1} существует, и, следовательно, для обратимого тензора A справедливо представление:

$$f(A) = \psi_0 E + \psi_1 A + \psi_2 A^{-1},$$

где ψ_0, ψ_1, ψ_2 — некоторые функции инвариантов тензора A .

§ 2. Анализ

1. Дифференцирование функций вещественного аргумента. Будем рассматривать векторные функции вещественного аргумента, т. е. функции, отображающие вещественную ось \mathbb{R} в пространство V . Функция $u : \mathbb{R} \rightarrow V$ называется дифференцируемой в точке $t \in \mathbb{R}$, если существует вектор $g(t) \in V$ такой, что

$$u(t + s) = u(t) + sg(t) + o(s), \quad (1)$$

причем

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} |o(s)| = 0.$$

Вектор $g(t)$ называют производной функции u в точке t . Отметим, что соотношение (1) можно переписать в виде:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (u(t + s) - u(t)) = g(t).$$

Производную функции u в точке t будем обозначать через $du(t)/dt$ или $\dot{u}(t)$. Таким образом,

$$\dot{u}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (u(t + s) - u(t)).$$

Аналогично можно рассматривать тензорные функции вещественного аргумента, т. е. функции со значениями в пространстве тензоров $\mathcal{L}(V \rightarrow V)$. Производная тензорной функции вещественного аргумента определяется равенством:

$$\dot{L}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (L(t + s) - L(t)).$$

Ясно, что если $u^k(t)$ — компоненты функции $u(t)$ в некотором фиксированном базисе (базисе, не зависящем от t), то компонентами вектора $\dot{u}(t)$ будут $\dot{u}^k(t)$. Аналогичное справедливо и для любых компонент тензорной функции.

Отметим некоторые формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}(u \otimes v) = \dot{u} \otimes v + u \otimes \dot{v}, \quad \frac{d}{dt}(LM) = \dot{L}M + L\dot{M}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(L^T) = (\dot{L})^T, \quad \frac{d}{dt}(L^m) = \sum_{k=1}^m L^{k-1} \dot{L} L^{m-k}, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(L^{-1}) = -L^{-1} \dot{L} L^{-1}. \quad (4)$$

Упражнение 2.1. Доказать справедливость формул (2)–(4).

Теорема 1. Пусть тензорные функции L и P скалярного аргумента t связаны дифференциальным уравнением $\dot{L} = PL$. Положим $\Delta(t) = \det(L(t))$. Тогда¹⁾

$$\dot{\Delta} = \Delta \operatorname{tr} P. \quad (5)$$

При доказательстве этой теоремы будет использована

Лемма 3. Для любого тензора A

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические числа тензора L . Нетрудно видеть, что тогда $1 + \varepsilon \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$ — характеристические числа тензора $E + \varepsilon A$, следовательно,

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2). \quad \square$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По определению производной тензорной функции скалярного аргумента

$$L(t + \tau) = L(t) + \tau \dot{L}(t) + o(\tau),$$

следовательно,

$$L(t + \tau) = L(t) + \tau P(t)L(t) + o(\tau),$$

откуда

$$\Delta(t + \tau) = \det(L(t) + \tau P(t)L(t) + o(\tau)).$$

Определитель — полиномиальная функция своих элементов, поэтому

$$\Delta(t + \tau) = \det(L(t) + \tau P(t)L(t)) + o(\tau),$$

и, следовательно,

$$\Delta(t + \tau) = \Delta(t) \det(E + \tau P(t)) + o(\tau).$$

Отсюда по лемме 3 получаем:

$$\Delta(t + \tau) = \Delta(t) + \tau \Delta(t) \operatorname{tr} P(t) + o(\tau),$$

что равносильно (5). \square

¹⁾Равенство (5) эквивалентно известному в теории обыкновенных дифференциальных уравнений тождеству Якоби: $\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} P(s) ds\right)$.

2. Градиенты. Пусть $f : V \rightarrow W$ — функция, отображающая n -мерное евклидово пространство V в m -мерное евклидово пространство W . Будем говорить, что функция f дифференцируема в точке $x \in V$, если существует линейный оператор $\nabla f(x)$, отображающий V в W , такой, что для любого $u \in V$

$$f(x + u) = f(x) + \nabla f(x)u + o(u),$$

причем

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|o(u)|}{|u|} = 0.$$

Линейный оператор $\nabla f(x)$ называют *градиентом* функции f в точке x . Градиент f часто обозначают через $f'(x)$.

Важно отметить, что если $\nabla f(x)$ существует, то его можно вычислить при помощи равенства:

$$\nabla f(x)u = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \equiv \dot{f}(x + tu)|_{t=0} \quad \forall u \in V. \quad (6)$$

При фиксированном $u \in V$ элемент $\nabla f(x)u \in W$ называется *производной* функции f по направлению u в точке x .

Упражнения.

2.2. Доказать формулу (6).

2.3. Доказать, что

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x + \alpha(y - x))(y - x) d\alpha. \quad (7)$$

Наиболее часто понятие градиента будет использоваться нами в следующих двух случаях.

1. Пусть n — произвольное целое число, большее единицы, а $m = 1$. В этом случае f — скалярная (вещественная) функция векторного аргумента (функционал), $\nabla f(x)$ — линейная вещественная функция (линейный функционал). По теореме Рисса существует, и притом только один, вектор $y \in V$ такой, что

$$\nabla f(x)u = y \cdot u \quad \forall u \in V.$$

Вектор y также обычно обозначают через $\nabla f(x)$ и называют градиентом функции f в точке $x \in V$. Таким образом, если f дифференцируема в точке x , то

$$f(x + u) = f(x) + \nabla f(x) \cdot u + o(u) \quad \forall u \in V.$$

2. Пусть $n = m$ — произвольное целое число, большее единицы, $V = W$. Если функция $f : V \rightarrow V$ (векторное поле) дифференцируема, то $\nabla f(x)$ — тензор, действующий в пространстве V .

Приведем некоторые формулы вычисления градиентов различных произведений:

$$\nabla(f(x)g(x)) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x), \quad (8)$$

где f, g — скалярные функции векторного аргумента;

$$\nabla(f \cdot g) = (\nabla f)^T g + (\nabla g)^T f, \quad (9)$$

где f, g — векторные функции векторного аргумента;

$$\nabla(fg) = g \otimes \nabla f + f \nabla g, \quad (10)$$

где f — скалярная, g — векторная функции векторного аргумента.

Упражнение 2.4. Доказать справедливость формул (8)–(10).

На основе операции вычисления градиента вводятся более сложные дифференциальные операции.

1. Пусть $f : V \rightarrow V$. Операция *дивергенции* (пишется $\operatorname{div} f$) определяется равенством:

$$\operatorname{div} f = \operatorname{tr} \nabla f. \quad (11)$$

2. Пусть L — тензорная функция векторного аргумента (тензорное поле), т. е. $L(x) \in \mathcal{L}(V \rightarrow V)$ при каждом $x \in V$. Дивергенцией функции L в точке x называется вектор $\operatorname{div} L(x)$, определяемый соотношением:

$$\operatorname{div} L(x) \cdot a = \operatorname{div}(L^T(x)a) \quad \forall a \in V. \quad (12)$$

Подчеркнем, что a не зависит от x .

3. Если f — скалярная функция векторного аргумента, то *оператор Лапласа* Δf определяется равенством:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

4. Аналогично определяется оператор Лапласа векторной функции векторного аргумента:

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Отметим следующие формулы вычисления дивергенции произведений:

$$\operatorname{div}(fg) = g \cdot \nabla f + f \operatorname{div} g, \quad (13)$$

где f — скалярная, g — векторная функции векторного аргумента;

$$\operatorname{div}(f \otimes g) = (\nabla f)g + (\operatorname{div} g)f, \quad (14)$$

где f, g — векторные функции векторного аргумента;

$$\operatorname{div}(Lg) = (\operatorname{div} L^T) \cdot g + \operatorname{tr}(L\nabla g), \quad (15)$$

где L — тензорная, g — векторная функции векторного аргумента.

Упражнения.

2.5. Доказать справедливость формул (13)–(15).

2.6. Пусть f_1, f_2 — векторные функции векторного аргумента, $f(x) = f_1(f_2(x))$ — композиция (произведение) функций f_1, f_2 . Доказать, что

$$f'(x) = f'_1(f_2(x))f'_2(x).$$

2.7. Пусть $f : V \rightarrow V$ — обратимое дифференцируемое отображение, f^{-1} — отображение обратное к f . Показать, что

$$(f^{-1})'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

2.8. Пусть f — скалярная функция векторного аргумента. Доказать, что

$$\operatorname{div}(fE) = \nabla f.$$

3. Координатные представления основных дифференциальных операций В этом пункте будут указаны формулы для вычисления основных дифференциальных операций.

1. Градиент скалярной функции векторного аргумента. Пусть в евклидовом пространстве V выбран базис e_1, e_2, \dots, e_n . Определяя скалярную функцию $f(x)$, $x \in V$, будем считать ее функцией компонент вектора x относительно указанного базиса и писать $f(x) = f(x^k e_k) = f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Частная производная функции f по переменной x^k , или производная f по направлению вектора e_k в точке x есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^1, x^2, \dots, x^k + t, \dots, x^n) - f(x^1, x^2, \dots, x^k, \dots, x^n)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_k) - f(x)}{t} = \nabla f(x) \cdot e_k. \end{aligned} \quad (16)$$

В последнем равенстве использована формула (6). Из (16) и (7), с. 11, вытекает, что числа $\partial f(x)/\partial x^k$, $k = 1, 2, \dots, n$, есть ковариантные компоненты вектора $\nabla f(x)$, т. е.

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^n (\partial f(x)/\partial x^k) e^k. \quad (17)$$

Таким образом, вычисление градиента функции $f(x^1, \dots, x^n)$ сводится к вычислению ее частных производных.

2. Градиент векторной функции векторного аргумента. Функцию $f : V \rightarrow V$ будем считать представленной в виде $f = f^k(x^1, \dots, x^n) e_k$, где $f^k(x^1, \dots, x^n)$ — заданные функции аргументов x^1, \dots, x^n . Используя формулы (6), (16), можем написать:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) e_k &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t e_k) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^l(x + t e_k) - f^l(x)}{t} e_l = \\ &= (\partial f^l(x^1, x^2, \dots, x^n) / \partial x^k) e_l. \end{aligned}$$

Это означает, что матрица тензора $\nabla f(x)$ относительно базиса e_1, \dots, e_n есть матрица Якоби системы функций $f^1(x), \dots, f^n(x)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \frac{\partial f^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

3. Дивергенция векторной функции векторного аргумента. Из (11) получаем:

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^k(x)}{\partial x^k}. \quad (18)$$

4. Дивергенция тензорной функции векторного аргумента. Будем считать, что тензорная функция L задана ее контравариантными компонентами: $L(x) = L^{km}(x) e_k \otimes e_m$, где $L^{km}(x) = L^{km}(x^1, \dots, x^n)$. По определению (см. (12)) имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} L(x) \cdot a &= \operatorname{div}(L^T(x) a) = \operatorname{div}(L^{km}(x) (e_m \otimes e_k) a) = \\ &= \operatorname{div}(L^{km}(x) (a \cdot e_k) e_m), \end{aligned}$$

где a — произвольный вектор из V . Вследствие (18)

$$\operatorname{div}(L^{km}(x) (a \cdot e_k) e_m) = \frac{\partial L^{km}(x)}{\partial x^m} (a \cdot e_k) = \frac{\partial L^{km}(x)}{\partial x^m} e_k \cdot a,$$

т. е.

$$\operatorname{div} L(x) = \frac{\partial L^{km}(x)}{\partial x^m} e_k. \quad (19)$$

Иными словами, числа $\partial L^{km}(x)/\partial x^m$, $k = 1, \dots, n$, — контравариантные компоненты вектора $\operatorname{div} L(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем формулами, полученными в настоящем пункте, чаще всего будем пользоваться в том случае, когда базис e_1, \dots, e_n ортонормирован. Они дают тогда выражения декартовых компонент соответствующих дифференциальных операций. Большинство из них хорошо известны читателю из стандартного курса математического анализа.

Упражнения.

2.9. Пусть u — дифференцируемая векторная функция, заданная на трехмерном евклидовом пространстве V . Спином векторного поля u называется тензор

$$W = \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T).$$

Вектор ω называется *ротором* (*вихрем*) векторного поля u , если

$$2Wa = \omega \times a \quad \forall a \in V_3.$$

Показать, что:

- 1) вектор ω — коллинеарен оси тензора W ;
- 2) $|\omega| = \sqrt{2}|W| = \sqrt{-2 \operatorname{tr}(W^2)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно, используют обозначение: $\omega = \operatorname{rot} u$.

2.10. Показать, что в декартовых координатах ротор векторного поля $u = (u_1, u_2, u_3)$ вычисляется по формуле:

$$\omega = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right). \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (20) часто записывают в символическом виде:

$$\omega = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix},$$

где i_1, i_2, i_3 — базис декартовой системы координат.

2.11. Доказать справедливость следующих формул:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \nabla \operatorname{div} u - \Delta u, \quad (21)$$

$$u \times \operatorname{rot} u = \frac{1}{2} \nabla(u \cdot u) - (\nabla u)u, \quad (22)$$

$$\operatorname{rot}(u \times v) = (\operatorname{div} v)u + (\nabla v)u - (\operatorname{div} u)v - (\nabla u)v, \quad (23)$$

$$\nabla(u \cdot v) = (\nabla u)v + (\nabla v)u + u \times \operatorname{rot} v + v \times \operatorname{rot} u. \quad (24)$$

Здесь u, v — трехмерные векторные функции векторного аргумента.

4. Сингулярные поверхности. Теорема Максвелла. Напомним некоторые определения. Пусть Ω — область в евклидовом пространстве V с гладкой границей Γ . Непрерывное дифференцируемое отображение x единичного отрезка $0 \leq \tau \leq 1$ в пространство V называют путем. Образ пути есть некоторая кривая. Будем обозначать ее через l . Будем говорить, что путь проходит через точку $x^0 \in V$, если $x_0 = x(\tau_0)$ для некоторого $\tau_0 \in (0, 1)$. Говорят, что путь принадлежит Γ , если $l \subset \Gamma$. Непрерывную функцию f , определенную на Γ , будем называть дифференцируемой в точке $x^0 \in \Gamma$ вдоль пути, принадлежащего Γ и проходящего через x^0 , если существует предел¹⁾

$$f'(x^0) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{f(x(\tau_0 + \Delta\tau)) - f(x(\tau_0))}{\Delta\tau}.$$

Функцию f , определенную на Ω , назовем гладкой, если она непрерывна и непрерывно дифференцируема на Ω , для любой точки $x_0 \in \Gamma$ существуют предельные значения $f^+(x_0), \nabla f^+(x_0)$:

$$f^+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} f(x), \quad \nabla f^+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} \nabla f(x).$$

Лемма 4 (Адамар). Если функция f — гладкая скалярная функция на Ω , то для любой точки $x \in \Gamma$ и для любого пути, проходящего через x и принадлежащего Γ ,

$$f'(x) = \nabla f^+(x) \cdot x'. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем двумерного пространства V . Общий случай рассматривается аналогично. Пусть $x(\tau_0) = x, x(\tau_0 + \Delta\tau) = x^1 \in \Gamma$ — точки пути. Если $\Delta\tau$ достаточно мало, то, очевидно, существует путь, принадлежащий $\bar{\Omega}$, соединяющий точки x, x^1 и состоящий из двух взаимно ортогональных звеньев (в n -мерном пространстве звеньев будет n). При соответствующем выборе декартовой системы координат можем написать²⁾:

$$\begin{aligned} \frac{f(x^1) - f(x)}{\Delta\tau} &= \frac{f(x^1) - f(x_1^1 - \Delta x_1, x_2^1)}{\Delta x_1} \frac{\Delta x_1}{\Delta\tau} + \\ &+ \frac{f(x_1^1 - \Delta x_1, x_2^1) - f(x)}{\Delta x_2} \frac{\Delta x_2}{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

¹⁾Функция f может быть скалярной, векторной или тензорной.

²⁾Сделайте рисунок!

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим (25). \square

Упражнение 2.12. Показать, что если f — гладкая векторная функция, то утверждение леммы Адамара сохраняется, но равенство (25) принимает вид:

$$f'(x) = \nabla f^+(x)x'. \quad (26)$$

Пусть теперь S — гладкая поверхность, разделяющая область Ω на две части. Ориентируем S нормалью ν и обозначим через Ω_+ , Ω_- соответствующие подобласти области Ω .

Пусть, далее, f — функция, гладкая в Ω_+ и в Ω_- . Говорят, что S есть *сингулярная поверхность* функции f , если в каждой точке $x \in S$ существуют пределы $f^+(x)$, $f^-(x)$, $\nabla f^+(x)$ и $\nabla f^-(x)$ при подходе к S из Ω_+ и Ω_- соответственно, но, вообще говоря, $f^+(x) \neq f^-(x)$, $\nabla f^+(x) \neq \nabla f^-(x)$. Поверхность S называют *поверхностью слабого разрыва* функции f , если $f^+(x) = f^-(x)$ для любой точки $x \in S$. Как обычно, полагаем $[g(x)]_S = g^+(x) - g^-(x)$, $x \in S$.

Теорема 2 (Максвелл). Пусть f — скалярная функция, непрерывная в Ω , S — поверхность слабого разрыва функции f . Тогда существует определенная на S скалярная функция α такая, что

$$[\nabla f(x)]_S = \alpha(x)\nu(x), \quad x \in S. \quad (27)$$

Иными словами, скачок градиента непрерывной функции параллелен нормали к ее сингулярной поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой точки $x \in S$ и для любого пути, проходящего через x по S , в соответствии с леммой Адамара и в силу непрерывности функции f имеем:

$$f'(x) = \nabla f^+(x) \cdot x', \quad f'(x) = \nabla f^-(x) \cdot x'.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим $[\nabla f(x)]_S \cdot x' = 0$. Таким образом, в силу произвольности пути на S вектор $[\nabla f(x)]_S$ оказывается ортогональным любому вектору, лежащему в плоскости, касательной к S в точке x , следовательно, вектор $[\nabla f(x)]_S$ параллелен $\nu(x)$. \square

Упражнение 2.13. Доказать, что если f — векторная функция, непрерывная в Ω , а S — сингулярная поверхность функции f , то существует определенная на S векторная функция δ такая, что

$$[\nabla f(x)]_S = \delta(x) \otimes \nu(x), \quad x \in S. \quad (28)$$

5. Формулы Остроградского — Гаусса. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве V с кусочно гладкой границей Γ . Для любой непрерывной и непрерывно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$ векторной функции f справедлива формула Остроградского — Гаусса:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f dx = \int_{\Gamma} f \cdot \nu dx. \quad (29)$$

Как обычно, ν обозначает единичный вектор внешней нормали к Γ .

Исходя из формулы (29) можно получить аналогичную формулу для тензорных функций векторного аргумента. Пусть L — непрерывно дифференцируемая на $\bar{\Omega}$ тензорная функция. Для любого постоянного на Ω вектора a в соответствии с определением дивергенции тензорной функции и с использованием формулы (29) получаем:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} L \cdot a dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(L^T a) dx = \int_{\Gamma} L^T a \cdot \nu dx = \int_{\Gamma} L \nu \cdot a dx,$$

откуда в силу произвольности вектора a вытекает, что

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} L dx = \int_{\Gamma} L \nu dx. \quad (30)$$

Это есть формула Остроградского — Гаусса для тензоров.

Лемма 5. Для любого непрерывно дифференцируемого тензорного поля $S(x)$ и для любой точки $x_0 \in V$ справедливо равенство¹⁾:

$$\int_{\Gamma} (x - x_0) \wedge S \nu dx = \int_{\Omega} ((x - x_0) \wedge \operatorname{div} S + S^T - S) dx. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим тензор, стоящий в правой части равенства (31), через A , тензор, стоящий в левой части равенства (31), обозначим через B . Если мы покажем, что

$$Aa \cdot b = Ba \cdot b \quad \forall a, b \in V, \quad (32)$$

то справедливость равенства (31) будет установлена. Рассмотрим выражение $I = (x - x_0) \wedge \operatorname{div} Sa \cdot b$. По определению внешнего произведения и дивергенции тензорного поля имеем:

$$I = (\operatorname{div} S \cdot a)((x - x_0) \cdot b) - ((x - x_0) \cdot a)(\operatorname{div} S \cdot b),$$

¹⁾Определение операции « \wedge » (внешнего произведения векторов) см. на с. 20, упражнение 1.16.

т. е.

$$I = ((x - x_0) \cdot b) \operatorname{div}(S^T a) - ((x - x_0) \cdot a) \operatorname{div}(S^T b).$$

Положим $I_1 = \operatorname{div}(((x - x_0) \cdot b)S^T a)$. По формуле вычисления дивергенции произведения скалярной и векторной функций

$$I_1 = S^T a \cdot \nabla((x - x_0) \cdot b) + ((x - x_0) \cdot b) \operatorname{div} S^T a.$$

Вычисляя градиент скалярного произведения векторных функций и учитывая, что $\nabla(x - x_0) = E$, $\nabla b = 0$, получим:

$$\begin{aligned} I_1 &= S^T a \cdot (\nabla(x - x_0))^T b + (\nabla b)^T (x - x_0) + ((x - x_0) \cdot b) \operatorname{div} S^T a = \\ &= S^T a \cdot b + ((x - x_0) \cdot b) \operatorname{div} S^T a. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично,

$$I_2 = \operatorname{div}(((x - x_0) \cdot a)S^T b) = S^T b \cdot a + ((x - x_0) \cdot a) \operatorname{div} S^T b, \quad (34)$$

и, следовательно,

$$I = \operatorname{div}(((x - x_0) \cdot b)S^T a - ((x - x_0) \cdot a)S^T b) - S^T a \cdot b + S^T b \cdot a.$$

Последнее равенство показывает, что

$$Aa \cdot b = \int_{\Omega} \operatorname{div}(((x - x_0) \cdot b)S^T a - ((x - x_0) \cdot a)S^T b) dx.$$

Применяя формулу Остроградского — Гаусса, получим:

$$\begin{aligned} Aa \cdot b &= \int_{\Gamma} (((x - x_0) \cdot b)S^T a - ((x - x_0) \cdot a)S^T b) \cdot \nu dx = \\ &= \int_{\Gamma} (((x - x_0) \cdot b)(S^T a \cdot \nu) - ((x - x_0) \cdot a)(S^T b \cdot \nu)) dx = \\ &= \int_{\Gamma} (((x - x_0) \cdot b)(a \cdot S\nu) - ((x - x_0) \cdot a)(b \cdot S\nu)) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, записывая выражение $Ba \cdot b$ по определению внешнего произведения векторов, будем иметь:

$$Ba \cdot b = \int_{\Gamma} ((a \cdot S\nu)((x - x_0) \cdot b) - (b \cdot S\nu)((x - x_0) \cdot a)) dx,$$

т. е. равенство (31) доказано. \square

Упражнения.

2.14. Пусть f, g — векторные функции векторного аргумента. Доказать, что

$$\int_{\Omega} (\nabla f) g dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} g) f dx + \int_{\Gamma} (g \cdot \nu) f dx \quad (35)$$

2.15. Пусть f — векторная функция векторного аргумента. Доказать, что

$$(\nabla f) a = \operatorname{div}(f \otimes a) \quad \forall a \in V.$$

2.16. Пусть f — скалярная функция векторного аргумента. Доказать, что

$$\int_{\Omega} \nabla f dx = \int_{\partial\Omega} f \nu dx. \quad (36)$$

2.17. Пусть f — векторная функция векторного аргумента. Доказать, что

$$\int_{\Omega} \nabla f dx = \int_{\partial\Omega} f \otimes \nu dx.$$

6. Формула Стокса. Пусть S — незамкнутая гладкая поверхность в трехмерном евклидовом пространстве V , ν — единичная нормаль, определяющая ориентацию этой поверхности, Γ — граница S , τ — единичный вектор касательной к Γ . Направление τ выбирается так, чтобы при выбранной ориентации S контур Γ проходился против часовой стрелки¹⁾. Пусть, далее, u — дифференцируемая на V векторная функция. Тогда справедливо равенство

$$\int_S \operatorname{rot} u \cdot \nu dx = \int_{\Gamma} u \cdot \tau dx, \quad (37)$$

называемое формулой Стокса.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все формулы, приведенные в пунктах 5, 6, вытекают из формулы:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} f \nu_i dx, \quad i = 1, \dots, n, \quad (38)$$

где f — дифференцируемая на $\bar{\Omega}$ функция, x_1, \dots, x_n — декартовы координаты точки x , ν_1, \dots, ν_n — декартовы координаты нормали.

*** 7. Криволинейные координаты.** Приведенных выше вспомогательных сведений из алгебры и анализа достаточно для построения основных математических моделей механики сплошной среды. Однако при решении конкретных задач часто бывает удобно вводить специальные, криволинейные системы координат. Изложению соответствующих вопросов посвящены этот и последующие пункты настоящего параграфа.

¹⁾Это согласуется с принятой ориентацией базиса трехмерного пространства.

Будем говорить, что в некоторой области $\Omega \subset V$, возможно, совпадающей с V , введены координаты, если на этом множестве задано взаимно однозначное дифференцируемое отображение в n -мерное арифметическое пространство строк $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$:

$$\xi(x) = (\xi^1(x), \xi^2(x), \dots, \xi^n(x)), \quad x \in \Omega. \quad (39)$$

Число $\xi^k(x)$ называют k -той координатой точки $x \in \Omega$.

Примеры.

1. Пусть $\xi^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, выбраны как компоненты вектора $x \in V$ в некотором ортонормированном базисе i_1, i_2, \dots, i_n . В этом случае говорят, что на V введены декартовы координаты.

2. Пусть $n = 2$. Введем в пространстве V декартовы координаты, выбрав произвольно ортонормированные векторы i_1, i_2 . При этом $x = x^1 i_1 + x^2 i_2$. Затем определим для любого $x \in V$, $x \neq 0$, числа $\xi^1(x), \xi^2(x)$ соотношениями:

$$\xi^1(x) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad \text{ctg } \xi^2(x) = x^1/x^2.$$

Обычно $\xi^1(x)$ обозначают через r , а $\xi^2(x)$ — через θ . Это — полярные координаты точки x на плоскости.

Если на области Ω введены координаты, то с каждой точкой x из Ω можно связать две системы векторов e^1, e^2, \dots, e^n и e_1, e_2, \dots, e_n , определяемых следующими соотношениями:

$$e^k(x) = \nabla \xi^k(x), \quad e_k(x) = \frac{\partial x(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)}{\partial \xi^k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поясним, что $\nabla \xi^k(x)$, градиент скалярной функции векторного аргумента, — вектор пространства V ; $e_k(x)$, производная векторной функции скалярного аргумента ξ^k , также есть вектор пространства V .

Покажем, что векторы e^1, e^2, \dots, e^n линейно независимы. Будем считать функции $\xi^k(x)$ функциями декартовых компонент x^1, x^2, \dots, x^n вектора x . Тогда декартовы компоненты $e_j^k(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, вектора $e^k(x)$ вычисляются, как мы знаем, по формулам:

$$e_j^k(x) = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, матрица, составленная из декартовых компонент векторов e^1, e^2, \dots, e^n есть матрица Якоби системы функций $\xi^1(x), \xi^2(x), \dots, \xi^n(x)$. Эта матрица невырождена, так как преобразование

$\xi = \xi(x)$ по предположению взаимно однозначно. Отсюда, как известно, вытекает линейная независимость системы векторов e^1, e^2, \dots, e^n .

Покажем, что векторы e_1, e_2, \dots, e_n образуют базис, взаимный с базисом e^1, e^2, \dots, e^n . С этой целью вычислим скалярные произведения $e^k \cdot e_j$, $k, j = 1, 2, \dots, n$. Используем представления для декартовых компонент векторов e^k, e_j :

$$e^k(x) = \left(\frac{\partial \xi^k}{\partial x^1}, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (40)$$

$$e_j(x) = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^j}, \frac{\partial x^2}{\partial \xi^j}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial \xi^j} \right), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (41)$$

Тогда

$$e^k \cdot e_j = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} = \delta_j^k, \quad k, j = 1, 2, \dots, n,$$

поскольку матрицы Якоби прямого и обратного преобразований взаимно обратны.

Обратим внимание на то, что по определению вектор $e^k(x)$ — нормаль в точке x к координатной поверхности $\xi^k = \text{const}$, проходящей через точку x ; $e_k(x)$ — вектор касательной к координатной линии, т. е. к линии, получающейся при пересечении координатных поверхностей

$$\xi^1 = c_1, \xi^2 = c_2, \dots, \xi^{k-1} = c_{k-1}, \xi^{k+1} = c_{k+1}, \dots, \xi^n = c_n,$$

проходящих через точку x .

Базис e_1, e_2, \dots, e_n обычно называют естественным.

Система координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ называется ортогональной, если базис e_1, e_2, \dots, e_n , а следовательно, и базис e^1, e^2, \dots, e^n ортогональны (вообще говоря, эти базисы не нормированы). Наиболее распространены следующие криволинейные ортогональные системы координат: полярная ($n = 2$), цилиндрическая и сферическая ($n = 3$).

*** 8. Формулы преобразования компонент векторов и тензоров при замене координат.** Пусть наряду с координатами $\xi^1 = \xi^1(x), \xi^2 = \xi^2(x), \dots, \xi^n = \xi^n(x)$ в области $\Omega \subset V$ введены координаты $\eta^1 = \eta^1(x), \eta^2 = \eta^2(x), \dots, \eta^n = \eta^n(x)$. Будем считать, что известны функциональные зависимости, позволяющие вычислять координаты любой точки $x \in \Omega$ в системе $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ по известным координатам в системе $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$, и наоборот:

$$\begin{aligned} \xi^k(x) &= \xi^k(\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \eta^j(x) &= \eta^j(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n), \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Функции $\xi^k = \xi^k(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, $\eta^k = \eta^k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, предполагаются дифференцируемыми, задаваемые им преобразования — обратимыми.

Пусть $e_{1\xi}, e_{2\xi}, \dots, e_{n\xi}$ — естественный базис системы координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ в точке $x \in \Omega$, а $e_{1\eta}, e_{2\eta}, \dots, e_{n\eta}$ — естественный базис системы координат $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n$ в той же точке.

Для того, чтобы вычислить компоненты вектора (или тензора) в одном базисе через известные компоненты в другом базисе достаточно определить элементы матрицы перехода от базиса $e_{1\xi}, e_{2\xi}, \dots, e_{n\xi}$ к базису $e_{1\eta}, e_{2\eta}, \dots, e_{n\eta}$. Используя определение естественного базиса и формулу дифференцирования сложной функции получаем:

$$\begin{aligned} e_{m\xi} &= \frac{\partial x(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)}{\partial \xi^m} = \\ &= \frac{\partial x(\eta^1(\xi^1, \dots, \xi^n), \eta^2(\xi^1, \dots, \xi^n), \dots, \eta^n(\xi^1, \dots, \xi^n))}{\partial \xi^m} = \\ &= \frac{\partial x}{\partial \eta^k} \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^m} = e_{k\eta} \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^m}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, элементы матрицы перехода от базиса $e_{1\xi}, e_{2\xi}, \dots, e_{n\xi}$ к базису $e_{1\eta}, e_{2\eta}, \dots, e_{n\eta}$ имеют вид:

$$A_m^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial \xi^m}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n.$$

Эта матрица есть матрица Якоби системы функций

$$\eta^i = \eta^i(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

*** 9. Дифференциальные операции в криволинейных координатах.** В этом пункте будут указаны формулы для вычисления основных дифференциальных операций в криволинейных системах координат.

1. Пусть $f(x)$ — скалярная функция векторного аргумента. Будем считать, что в пространстве V введены координаты $\xi^k = \xi^k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Вектор $\nabla f(x)$ — градиент функции f в каждой точке x можно представить в виде разложений как по векторам естественного, так и взаимного базисов. Получим соответствующие выражения, считая что функция f задана как функция координат $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ точки x , т. е. $f(x) = f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$.

Частная производная $\partial f(x)/\partial \xi^k$ — это производная по направлению вектора $e_{k\xi}$, поэтому, (см. (17), с. 30) $\partial f(x)/\partial \xi^k$ $k = 1, \dots, n$, есть компоненты разложения вектора $\nabla f(x)$ по взаимному базису:

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial \xi^k} e^k. \quad (43)$$

Переход к компонентам $(\nabla f(x))^l$ выполняется по формулам (8), с. 12:

$$(\nabla f(x))^l = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi^k} g^{kl}(x). \quad (44)$$

ПРИМЕР. Пусть $n = 2$, $(\xi^1, \xi^2) = (r, \theta)$ — полярная система координат. В этом случае $g^{rr} = 1$, $g^{r\theta} = 0$, $g^{\theta,\theta} = 1/r^2$ (см. ниже упражнение 2.18) и, следовательно,

$$\begin{aligned} (\nabla f(x))_r &= \frac{\partial f}{\partial r}, & (\nabla f(x))_\theta &= \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ (\nabla f(x))^r &= \frac{\partial f}{\partial r}, & (\nabla f(x))^\theta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

2. Пусть $f(x)$ — векторная функция аргумента $x \in V$. Тогда тензор $\nabla f(x)$ в каждой точке $x \in V$ может иметь четыре типа компонент, соответствующих естественному и взаимному базисам криволинейной системы координат. Укажем способы их вычисления, считая заданными компоненты вектора f как относительно естественного e_1, e_2, \dots, e_n , так и взаимного e^1, e^2, \dots, e^n базисов в виде функций криволинейных координат. Введем следующие обозначения для компонент тензора $\nabla f(x)$, опуская при этом для краткости аргумент x :

$$\begin{aligned} f^k_{,m} &= e^k \cdot (\nabla f) e_m, & f_{k,m} &= e_k \cdot (\nabla f) e_m, & f_k{}^{,m} &= e_k \cdot (\nabla f) e^m, \\ f^{k,m} &= e^k \cdot (\nabla f) e^m, & k, m &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Используя правило вычисления градиента от произведения скалярной и векторной функций, можно написать:

$$\nabla f = \nabla(f^p e_p) = e_p \otimes \nabla(f^p) + f^p \nabla e_p.$$

Таким образом, например, компоненту $f^k_{,m}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} f^k_{,m} &= e^k \cdot (e_p \otimes \nabla(f^p) + f^p \nabla e_p) e_m = \\ &= e^k \cdot (\nabla(f^p) \cdot e_m) e_p + e^k \cdot (f^p \nabla e_p) e_m. \end{aligned} \quad (45)$$

Представляя $\nabla(f^p)$ в виде разложения по векторам взаимного базиса (см. (43)):

$$\nabla(f^p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^p}{\partial \xi^i} e^i,$$

получим:

$$e^k \cdot (\nabla(f^p) \cdot e_m) e_p = \frac{\partial f^k}{\partial \xi^m}.$$

Займемся теперь преобразованием второго слагаемого в правой части равенства (45). Запишем его в виде:

$$e^k \cdot (f^p \nabla e_p) e_m = f^p (e^k \cdot (\nabla e_p) e_m).$$

Величины

$$\Gamma_{pm}^k = e^k \cdot (\nabla e_p) e_m \quad (46)$$

принято называть *символами Кристоффеля*¹⁾. Эти величины — характеристики системы координат.

Непосредственно из определения градиента вытекает, что

$$(\nabla e_p) e_m = \frac{\partial e_p}{\partial \xi^m}, \quad (47)$$

следовательно,

$$(\nabla e_p) e_m = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^p \partial \xi^m},$$

т. е.

$$\Gamma_{pm}^k = e^k \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^p \partial \xi^m}.$$

Эта формула показывает, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам.

Если считать, что Γ_{pm}^k найдены, то для $f^k_{,m}$ имеем выражение:

$$f^k_{,m} = \frac{\partial f^k}{\partial \xi^m} + f^p \Gamma_{pm}^k.$$

В формулу (46) для символов Кристоффеля входят градиенты базисных векторов e_p . Это зачастую оказывается неудобным при использовании конкретных систем координат.

Укажем некоторые полезные в приложениях способы вычисления символов Кристоффеля.

¹⁾Они представляют собой смешанные компоненты градиента базисного вектора e_p .

1) Из (46), (47) получаем:

$$\Gamma_{pm}^k = \frac{\partial e_p}{\partial \xi^m} \cdot e^k.$$

Откуда вытекает, что

$$\frac{\partial e_p}{\partial \xi^m} = \Gamma_{pm}^l e_l. \quad (48)$$

Таким образом, можно сформулировать следующее правило. Для вычисления символов Кристоффеля нужно найти производные векторов базиса по координатам. Компоненты этих производных при разложении по естественному базису и будут символами Кристоффеля. Во многих случаях этот способ довольно быстро приводит к цели.

2) Получим формулы, выражающие величины Γ_{ps}^k через компоненты метрического тензора. Вычислим производную по ξ^k от компоненты метрики $g_{ij} = e_i \cdot e_j$:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial e_i}{\partial \xi^k} \cdot e_j + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial \xi^k}.$$

Отсюда, используя соотношения (48), будем иметь:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \Gamma_{ik}^l e_l \cdot e_j + e_i \cdot \Gamma_{jk}^l e_l,$$

или:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi}. \quad (49)$$

Аналогично (49) можно получить еще два равенства:

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial \xi^i} = \Gamma_{ki}^m g_{mj} + \Gamma_{ji}^m g_{mk}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^m g_{mk} + \Gamma_{kj}^m g_{mi}. \quad (51)$$

Складывая почленно (50), (51), затем вычитая (49), получим с учетом симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам, что

$$2\Gamma_{ij}^m g_{mk} = \frac{\partial g_{kj}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k}.$$

Умножим последнее равенство на $g^{kl}/2$ и просуммируем полученные соотношения по k . В результате, используя соотношения $g_{mk}g^{kl} = \delta_m^l$, находим:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \xi^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^k} \right). \quad (52)$$

Пример. Пусть $n = 2$, $(\xi^1, \xi^2) = (r, \theta)$ — полярная система координат. Имеем:

$$g^{r\theta} = g_{r\theta} = 0, \quad g^{rr} = 1, \quad g_{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g_{\theta\theta} = r^2,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g^{rr}}{\partial r} &= \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{\partial g^{rr}}{\partial \theta} = \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = \frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial \theta} = \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial g^{\theta\theta}}{\partial r} &= -\frac{2}{r^3}, \quad \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$, $\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2}$, а остальные символы Кристоффеля — нули. Выпишем также выражения для смешанных компонент тензора ∇f , т. е. градиента векторной функции, заданной в полярной системе координат своими компонентами f^r, f^θ в естественном базисе:

$$f^r_{,r} = \frac{\partial f^r}{\partial r}, \quad f^r_{,\theta} = \frac{\partial f^r}{\partial \theta} - r f^\theta, \quad f^\theta_{,r} = \frac{\partial f^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\theta, \quad f^\theta_{,\theta} = \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} f^r.$$

3. Если символы Кристоффеля, а, следовательно, и компоненты тензора ∇f известны, то дивергенция векторной функции может быть выписана в соответствии с формулой (11), с. 28:

$$\operatorname{div} f = f^k_{,k}$$

(здесь подразумевается суммирование по k). Например, в полярных координатах

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r} f^r + \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r f^r) + \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta}.$$

Векторам и тензорам, встречающимся в задачах механики и физики, обычно приписывают физические размерности. Например, вектор скорости имеет размерность длины, деленной на время. Желательно, чтобы все компоненты каждого вектора или тензора имели одну и ту же размерность, совпадающую с размерностью вектора (тензора). В то же время, векторы базиса криволинейной системы координат, вообще говоря, могут иметь разные размерности. Например, в полярной системе координат вектор e_r безразмерен, а вектор e_θ имеет размерность длины. В связи с этим вводят физические компоненты вектора (тензора), как компоненты относительно некоторого нормированного базиса.

Для ортогональной криволинейной системы координат эти компоненты определяются однозначно как компоненты относительно ортонормированного базиса безразмерных векторов:

$$i_k = \frac{1}{|e_k|} e_k = \frac{1}{|e^k|} e^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (53)$$

Соотношения (53) позволяют выполнить переход от компонент в естественном или взаимном базисах к физическим компонентам. Например, физические компоненты тензора ∇f , выраженные через физические компоненты вектора f в полярных координатах, имеют вид:

$$\hat{f}^r_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^r}{\partial r}, \quad \hat{f}^r_{,\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{f}^r}{\partial \theta} - \hat{f}^\theta \right), \quad \hat{f}^\theta_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial r}, \quad \hat{f}^\theta_{,\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial \theta} + f^r \right),$$

где $\hat{f}^r = f^r$, $\hat{f}^\theta = |e_\theta| f^\theta = r f^\theta$ — физические компоненты вектора f в полярной системе координат.

Ясно, что в декартовой системе координат физические компоненты не различаются с исходными.

Упражнения.

2.18. Построить основной и взаимный базисы, компоненты метрического тензора для: 1) полярной, 2) цилиндрической, 2) сферической систем координат.

Ответ:

1) векторы основного базиса:

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta), \quad e_\theta = r(-\sin \theta, \cos \theta),$$

векторы взаимного базиса:

$$e^r = e_r, \quad e^\theta = \frac{1}{r^2} e_\theta,$$

компоненты метрического тензора:

$$g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{r\theta} = 0, \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{r\theta} = 0,$$

связь между декартовыми координатами x_1, x_2 и полярными координатами r, θ определяется формулами $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$;

2) векторы основного и взаимного базисов:

$$e_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = e^r, \quad e_\theta = r(-\sin \theta, \cos \theta, 0) = r^2 e^\theta, \quad e_z = (0, 0, 1) = e^z,$$

компоненты метрического тензора:

$$g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{zz} = 1, \quad g_{rr} = 1, \quad g^{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{zz} = 1, \\ g^{r\theta} = g^{rz} = g^{\theta z} = g_{r\theta} = g_{rz} = g_{\theta z} = 0,$$

связь между цилиндрическими координатами r, θ, z и декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 дается формулами $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$;

3) векторы основного и взаимного базисов:

$$\begin{aligned} e_r &= e^r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad e_\theta = r(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ e_\varphi &= r(-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0), \quad e^\theta = \frac{1}{r}(\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ e^\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta}(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \end{aligned}$$

компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned} g^{rr} &= 1, \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta), \quad g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \\ g^{r\theta} &= g^{r\varphi} = g^{\varphi\theta} = g_{r\theta} = g_{r\varphi} = g_{\theta\varphi} = 0, \end{aligned}$$

связь между сферическими координатами r, θ, φ и декартовыми координатами x_1, x_2, x_3 дается формулами:

$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2.19. Пусть f скалярная функция векторного аргумента, определенная на трехмерном евклидовом пространстве. Вычислить компоненты ∇f в: 1) цилиндрических, 2) сферических координатах.

Ответ:

$$\begin{aligned} 1) (\nabla f)^r &= \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)^\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\nabla f)^z = \frac{\partial f}{\partial z}, \\ 2) (\nabla f)^r &= \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)^\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\nabla f)^\varphi = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

2.20. Показать, что для ортогональной криволинейной системы координат

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2} g^{jj} \frac{\partial g_{jj}}{\partial \xi^i}, \quad \Gamma_{ii}^j = -\frac{1}{2} g^{jj} \frac{\partial g_{ii}}{\partial \xi^j}, \quad \Gamma_{jj}^i = \frac{1}{2} g^{jj} \frac{\partial g_{jj}}{\partial \xi^i},$$

а остальные символы Кристоффеля равны нулю.

2.21. Выписать символы Кристоффеля для: 1) цилиндрической, 2) сферической систем координат.

Ответ:

$$\begin{aligned} 1) \Gamma_{\theta r}^\theta &= 1/r, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \text{остальные} - \text{ нули}, \\ 2) \Gamma_{\theta r}^\theta &= 1/r, \quad \Gamma_{\varphi r}^\varphi = 1/r, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \text{ctg } \theta, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \\ &\text{остальные} - \text{ нули}. \end{aligned}$$

2.22. Выписать выражения для смешанных компонент градиента векторной функции векторного аргумента в: 1) цилиндрической, 2) сферической системах координат.

Ответ:

$$\begin{aligned} 1) f_{,r}^r &= \frac{\partial f^r}{\partial r}, \quad f_{,\theta}^r = \frac{\partial f^r}{\partial \theta} - r f^\theta, \quad f_{,z}^r = \frac{\partial f^r}{\partial z}, \quad f_{,r}^\theta = \frac{\partial f^\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} f^\theta, \quad f_{,\theta}^\theta = \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} f^r, \\ f_{,z}^\theta &= \frac{\partial f^\theta}{\partial z}, \quad f_{,r}^z = \frac{\partial f^z}{\partial r}, \quad f_{,\theta}^z = \frac{\partial f^z}{\partial \theta}, \quad f_{,z}^z = \frac{\partial f^z}{\partial z}; \\ 2) f_{,r}^r &= \frac{\partial f^r}{\partial r}, \quad f_{,\theta}^r = \frac{\partial f^r}{\partial \theta} - r f^\theta, \quad f_{,\varphi}^r = \frac{\partial f^r}{\partial \varphi} - r \sin^2 \theta f^\varphi, \\ f_{,r}^\theta &= \frac{\partial f^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\theta, \quad f_{,\theta}^\theta = \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} f^r, \quad f_{,\varphi}^\theta = \frac{\partial f^\theta}{\partial \varphi} - \sin \theta \cos \theta f^\varphi, \\ f_{,r}^\varphi &= \frac{\partial f^\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} f^\varphi, \quad f_{,\theta}^\varphi = \frac{\partial f^\varphi}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta f^\theta, \quad f_{,\varphi}^\varphi = \frac{\partial f^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} f^r + \text{ctg } \theta f^\theta. \end{aligned}$$

2.23. Выписать выражения для дивергенции векторной функции векторного аргумента в: 1) цилиндрической, 2) сферической системах координат.

Ответ:

$$1) \operatorname{div} f = \frac{\partial f^r}{\partial r} + \frac{1}{r} f^r + \frac{\partial f^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f^z}{\partial z},$$

$$2) \operatorname{div} f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f^r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (f^\theta \sin \theta) + \frac{\partial f^\varphi}{\partial \varphi}.$$

2.24. Выписать выражения для оператора Лапласа скалярной функции векторного аргумента в: 1) цилиндрической, 2) сферической системах координат.

Ответ:

$$1) \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$2) \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

2.25. Получить выражения для физических компонент градиента векторной функции векторного аргумента через ее физические компоненты в: 1) цилиндрической, 2) сферической системах координат.

Ответ:

$$1) \hat{f}^r_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^r}{\partial r}, \quad \hat{f}^r_{,\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{f}^r}{\partial \theta} - \hat{f}^\theta \right), \quad \hat{f}^z_{,z} = \frac{\partial \hat{f}^z}{\partial z},$$

$$\hat{f}^\theta_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial r}, \quad \hat{f}^\theta_{,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \hat{f}^r, \quad \hat{f}^\theta_{,z} = \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial z},$$

$$\hat{f}^z_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^z}{\partial r}, \quad \hat{f}^z_{,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}^z}{\partial \theta}, \quad \hat{f}^z_{,z} = \frac{\partial \hat{f}^z}{\partial z};$$

$$2) \hat{f}^r_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^r}{\partial r}, \quad \hat{f}^r_{,\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{f}^r}{\partial \theta} - \hat{f}^\theta \right), \quad \hat{f}^r_{,\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial \hat{f}^r}{\partial \varphi} - \sin \theta \hat{f}^\varphi \right),$$

$$\hat{f}^\theta_{,r} = \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial r}, \quad \hat{f}^\theta_{,\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial \theta} + \hat{f}^r \right), \quad \hat{f}^\theta_{,\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{f}^\theta}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta \hat{f}^\varphi \right),$$

$$\hat{f}^\varphi_{,r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{f}^\varphi), \quad \hat{f}^\varphi_{,\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{f}^\varphi}{\partial \theta}, \quad \hat{f}^\varphi_{,\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{f}^\varphi}{\partial \varphi} + \hat{f}^r + \operatorname{ctg} \theta \hat{f}^\theta \right).$$

ГЛАВА 2
**ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

§ 1. Кинематика сплошной среды

В этом параграфе изучаются характеристики движения сплошной среды. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются.

1. Система отсчета. Вводится неподвижная декартова система координат x^1, x^2, x^3 . Орты координатных осей: e_1, e_2, e_3 . Таким образом, положение каждой точки в пространстве определяется ее координатами. Важно подчеркнуть, что лишь задание начала координат и ортов e_1, e_2, e_3 позволяет измерять расстояния и углы, определять положение точек в пространстве.

Каждой упорядоченной паре точек x, y пространства, как обычно, ставится в соответствие вектор $x - y$. Обычным образом определяются операции сложения векторов и умножение вектора на вещественное число, а также скалярное произведение векторов. Каждая точка x пространства отождествляется с вектором $x - 0$, где 0 — начало координат. Возникающее таким образом трехмерное евклидово пространство обозначается через V .

Кроме того, считается, что мы имеем возможность измерять время, то есть определять для каждого события начало, конец и длительность его протекания.

Будем говорить, что задание начала координат, ортов e_1, e_2, e_3 и некоторого способа измерения времени определяет *систему отсчета*.

Движение точки $x(t)$ относительно выбранной системы отсчета задано, если известны ее координаты $x^1(t), x^2(t), x^3(t)$ как функции времени t .

2. Деформация тела и ее характеристики. Движение тела $\Omega(t)$ задано, если задано движение каждой его точки.

В процессе движения тело, вообще говоря, меняет форму, т. е. деформируется.

Фиксируем некоторый момент времени t_0 и будем интересоваться характеристиками изменения формы тела $\Omega(t)$ по отношению к той, которую оно имело при $t = t_0$.

Итак, пусть $\Omega(t_0) \subset V$ — область, занимаемая телом в момент времени t_0 , а $\Omega(t) \subset V$ — область, занимаемая телом в момент времени $t > t_0$.

Будем говорить, что $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ — *отсчетная конфигурация* тела, $\Omega = \Omega(t)$ — *актуальная конфигурация* тела.

Пусть задано дифференцируемое взаимнооднозначное отображение χ пространства V в себя такое, что

$$\chi(\Omega_0) = \Omega. \quad (1)$$

Отображение χ называется *деформацией* тела из отсчетной конфигурации в актуальную.

Если Ω_0 и движение тела заданы, то отображение χ определено, но если известны только отсчетная конфигурация Ω_0 и актуальная конфигурация Ω , то существует бесконечное множество деформаций, удовлетворяющих соотношению (1).

Пусть $\xi \in \Omega_0$ — некоторая точка в отсчетной конфигурации, вектор $h \in V$ такой, что $\xi + h \in \Omega_0$. По определению градиента векторного поля

$$\chi(\xi + h) = \chi(\xi) + \nabla\chi(\xi)h + o(h). \quad (2)$$

Это равенство показывает, что в достаточно малой окрестности точки ξ деформация может быть приближенно описана линейным отображением (тензором) $\nabla\chi(\xi)$.

В дальнейшем будем обозначать $\nabla\chi(\xi)$ через $F(\xi)$. Тензор (точнее говоря, тензорное поле) $F(\xi)$ называется *градиентом деформации*. Чаще всего аргумент ξ будем опускать: $F = F(\xi)$.

В соответствии с теоремой о полярном разложении можно написать:

$$F = RU = VR, \quad (3)$$

где R — ортогональный тензор, V, U — симметричные, положительно определенные тензоры (положительная определенность тензоров V и U обеспечивается тем, что отображение χ обратимо, и, следовательно, $\det F \neq 0$). Поскольку тензор R ортогонален, он описывает жесткий поворот. Таким образом, фактически, за изменение формы (деформацию) отвечает лишь тензор U (или V).

Приняты следующие наименования: R — *тензор поворота*, U , V — *правый* и *левый тензоры растяжения* соответственно. Всюду в дальнейшем предполагается, что $\det F > 0$. Это означает, что $\det R = 1$, т. е. при деформации разрешаются только повороты, преобразования инверсии запрещены.

Итак, деформация окрестности точки ξ , определяемая равенством:

$$\chi(\xi + h) = \chi(\xi) + F(\xi)h, \quad (4)$$

в соответствии с разложением (3) может быть описана, либо как результат последовательного растяжения вдоль попарно ортогональных собственных векторов тензора U , а затем поворота, ось и угол которого определяется тензором R , либо как поворот, соответствующий тензору R , а затем растяжение вдоль собственных тензоров тензора V . Коэффициенты растяжения — собственные числа тензоров U , V , или, что все равно, — сингулярные числа тензора F .

Деформация окрестности точки ξ описывается, таким образом, полностью, если известны тензоры U (или V) и R . Однако фактическое их построение по градиенту деформации F может оказаться слишком трудоемким (требуется решение задачи на собственные значения для тензора $F^T F$ или $F F^T$).

Значительно проще вычисляются тензоры

$$C = U^2 = F^T F, \quad B = V^2 = F F^T.$$

Симметричные положительно определенные тензоры C , B называются соответственно *правой* и *левой мерой деформации Коши — Грина*. Зная тензор C , легко вычислить удлинение любого достаточно малого вектора при деформации окрестности точки ξ . В самом деле, в соответствии с (2) имеем приближенное равенство:

$$\chi(\xi + h) - \chi(\xi) = F(\xi)h,$$

откуда

$$|\chi(\xi + h) - \chi(\xi)|^2 = Fh \cdot Fh = F^T Fh \cdot h = Ch \cdot h,$$

следовательно, удлинение вектора h с точностью $o(h)$ есть

$$(Ch \cdot h)^{1/2} - |h|.$$

Под относительным удлинением вектора h понимают величину

$$\frac{(Ch \cdot h)^{1/2} - |h|}{|h|} = \frac{(Ch \cdot h)^{1/2}}{|h|} - 1. \quad (5)$$

Ясно, что если вектор h коллинеарен собственному вектору тензора U , или, что все равно, тензора C , то его относительное удлинение есть $\rho - 1$, где ρ — соответствующее сингулярное число тензора F .

Знание меры деформации C позволяет проследить также за изменением угла между любыми двумя векторами h_1, h_2 при деформации окрестности точки ξ . Именно, образами векторов h_1, h_2 при деформации χ будут соответственно векторы Fh_1, Fh_2 . Косинус угла между ними есть

$$\frac{F^T F h_1 \cdot h_2}{(F^T F h_1 \cdot h_1)^{1/2} (F^T F h_2 \cdot h_2)^{1/2}} = \frac{C h_1 \cdot h_2}{(C h_1 \cdot h_1)^{1/2} (C h_2 \cdot h_2)^{1/2}}. \quad (6)$$

Косинус угла между исходными векторами есть $h_1 \cdot h_2 / |h_1| |h_2|$.

Вычисляя разность квадратов длин вектора h и его образа при деформации χ , получим: $Ch \cdot h - h \cdot h = (C - E)h \cdot h$. Тензор

$$G = \frac{1}{2}(C - E)$$

принято называть *тензором деформаций*.

Довольно часто деформацию оказывается удобным характеризовать *вектором перемещений* $u(\xi)$, полагая $\chi(\xi) = \xi + u(\xi)^1$. В этом случае для мер деформации и тензора деформаций получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} C &= U^2 = F^T F = (E + (\nabla u(\xi))^T)(E + \nabla u(\xi)), \\ C &= E + \nabla u(\xi) + (\nabla u(\xi))^T + (\nabla u(\xi))^T \nabla u(\xi), \\ B &= V^2 = F F^T = (E + \nabla u(\xi))(E + (\nabla u(\xi))^T), \\ B &= E + \nabla u(\xi) + (\nabla u(\xi))^T + \nabla u(\xi) (\nabla u(\xi))^T, \\ G &= \frac{1}{2} (\nabla u(\xi) + (\nabla u(\xi))^T) + (\nabla u(\xi))^T \nabla u(\xi). \end{aligned}$$

Если градиент векторного поля перемещений ∇u достаточно мал, в том смысле, что

$$|\nabla u|^2 \text{ можно пренебречь по сравнению с } |\nabla u|, \quad (7)$$

то различия между тензорами C и B стираются:

$$C = B = E + \nabla u(\xi) + (\nabla u(\xi))^T,$$

а для тензора деформации G получаем следующее выражение:

$$G = \mathcal{E} = \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u(\xi) + (\nabla u(\xi))^T).$$

¹⁾Сделайте рисунок!

Деформации, характеризующиеся условием (7), принято называть бесконечно малыми. Тензор \mathcal{E} , линейно выражающийся через вектор перемещений, называют *тензором бесконечно малых деформаций*.

Приведем выражения компонент тензоров F , C , B , G , \mathcal{E} в декартовых координатах. Обозначим через $\chi_1(\xi)$, $\chi_2(\xi)$, $\chi_3(\xi)$ компоненты вектора $\chi(\xi)$. Компоненты тензора F образуют матрицу

$$[F] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$, $u_3(\xi)$ компоненты вектора $u(\xi)$. Компоненты тензора $\nabla u(\xi)$ образуют матрицу

$$[\nabla u(\xi)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что матрицы тензоров C , B , G , \mathcal{E} имеют соответственно вид:

$$[C] = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \frac{\partial \chi_k}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$[B] = \sum_{k=1}^3 \begin{pmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi_k} & \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \frac{\partial \chi_3}{\partial \xi_k} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$[G] = \frac{1}{2} ([C] - [E]), \quad \text{где} \quad [E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$[\mathcal{E}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\text{где } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Упражнения.

1.1. Выразить относительное удлинение и изменение косинуса угла через тензор деформаций G .

1.2* Показать, что в случае малых деформаций относительное удлинение вектора h есть $Gh \cdot h/h \cdot h$.

1.3. Пусть векторы h_1, h_2 ортогональны. Показать, что в случае малых деформаций косинус угла между образами этих векторов есть $2Gh_1 \cdot h_2$.

1.4. Дать интерпретацию компонент тензора G в декартовых координатах в предположениях малости деформаций.

1.5. Пусть тензор $\mathcal{E}(u(\xi)) = 0$ во всех точках области $\xi \in \Omega_0$. Показать, что тогда вектор смещений u определяется соотношением: $u(\xi) = a + W\xi$, где a — постоянный вектор, W — постоянный кососимметричный тензор.

Указание. Показать, что декартовы компоненты вектора смещений — линейные функции координат.

1.6. Пусть ε_{ik} — компоненты тензора бесконечно малых деформаций в декартовой системе координат, Ω_0 — односвязная область. Показать, что компоненты вектора смещений в любой точке $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_1^2, \xi_1^3) \in \Omega_0$ могут быть вычислены по формулам:

$$u_i(\xi^1) = u_i(\xi^0) + \omega_{ik}(\xi^0)(\xi_k^1 - \xi_k^0) + \int_{\xi^0}^{\xi^1} \left(\varepsilon_{ir} + (\xi_k^1 - \xi_k^0) \left(\frac{\partial \varepsilon_{ir}}{\partial \xi_k} - \frac{\partial \varepsilon_{kr}}{\partial \xi_i} \right) \right) d\xi_r, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

(подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Здесь

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} - \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \right)$$

есть декартовы компоненты спина, соответствующего вектору смещений u , $\xi_0 \in \Omega_0$ — произвольная фиксированная точка, $\int_{\xi_0}^{\xi_1} (\dots) d\xi_r$ — криволинейный интеграл по контуру, соединяющему точки ξ^0, ξ^1 . Формулы (12) называют *формулами Чезаро*.

1.7. Пусть ε_{ik} — компоненты тензора бесконечно малых деформаций в декартовой системе координат. Показать, что выполнены следующие шесть уравнений, называемых *условиями совместности Сен-Венана*:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial \xi_s^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ss}}{\partial \xi_i^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{is}}{\partial \xi_i \partial \xi_s}, \quad i = 1, 2, 3, \quad s \neq i,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial \xi_i \partial \xi_r} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{ir}}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \varepsilon_{kr}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \xi_r} \right), \quad k = 1, 2, 3, \quad i \neq r, \quad i \neq k$$

(суммирования по повторяющимся индексам нет).

1.8. Показать, что условия совместности Сен-Венана необходимы и достаточны для того, чтобы компоненты вектора смещений однозначно определялись по компонентам тензора бесконечно малых деформаций.

Указание. Показать, что условия Сен-Венана необходимы и достаточны для независимости криволинейных интегралов в формулах (12) от пути.

1.9. Дать выражения физических компонент тензора бесконечно малых деформаций через физические компоненты вектора смещений в: 1) цилиндрической, 2) сферической системах координат.

Ответ:

1) цилиндрические координаты:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right);$$

2) сферические координаты:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta u_\varphi,$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} u_\varphi \right), \quad \varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta u_\varphi + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right),$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right).$$

3. Тензор скоростей деформаций. При введении понятия градиента деформации и связанных с ним понятий мер деформации, тензора деформаций мы интересовались характеристиками отображения χ некоторой фиксированной отсчетной конфигурации Ω_0 на конфигурацию $\Omega = \Omega(t)$, принимаемую телом в момент времени t .

Интуитивно ясно, что такие характеристики полезны при изучении движения твердых деформируемых тел. Напротив, при изучении

движения жидкостей существенными являются характеристики скорости изменения формы тела. При этом в качестве отсчетной конфигурации принимают ту, которой обладает тело в рассматриваемый момент времени, и сравнивают с ней формы тела в сколь угодно близкие моменты времени.

Таким образом приходят к понятию *относительной деформации*. Точнее, пусть $\xi \in \Omega_0$, и $\eta = \chi(\xi, \tau)$ — положение точки ξ в момент времени τ . Здесь χ — заданное отображение аргументов ξ, τ такое, что $\chi(\Omega_0, \tau) = \Omega(\tau) \forall \tau$. Пусть $x = \chi(\xi, t)$ — положение той же точки тела в момент времени t . Можно написать, что $\eta = \chi(\chi^{-1}(x, t), \tau)$, где χ^{-1} есть отображение, обратное к χ (при фиксированном t), существование и дифференцируемость которого предполагаются.

Выражение в правой части последнего равенства, фиксируя t как параметр, рассматриваем как функцию аргументов x и τ и обозначаем через $\chi_t(x, \tau)$. Эта функция определяет положение точки ξ в момент времени τ по ее положению в момент времени t . Функция $\chi_t(x, \tau)$ называется *относительной деформацией*.

Подчеркнем, что относительная деформация определяется функцией $\chi(x, \tau)$, задающей движение тела Ω из отсчетной конфигурации Ω_0 , и некоторым фиксированным моментом времени $t \geq t_0$.

Для функции $\chi_t(x, \tau)$ можно определить градиент $\nabla \chi_t(x, \tau)$. Он берется по переменной x , называется градиентом относительной деформации и обозначается через $F_t(\tau)$, или, более подробно, через $F_t(x, \tau) = \nabla \chi_t(x, \tau)$. Очевидно, $F_t(t) = E$.

С тензором $F_t(\tau)$ свяжем тензоры $U_t(\tau)$, $V_t(\tau)$, $R_t(\tau)$, т. е. тензоры относительного правого, левого растяжений и поворота, получающиеся при полярном разложении тензора $F_t(\tau)$.

Положим далее

$$G(t) = \dot{F}_t(t) = \left. \frac{dF_t(u)}{du} \right|_{u=t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_t(t) - F_t(t - \Delta t)}{\Delta t}.$$

Тензор $\dot{F}_t(t)$ характеризует скорость изменения градиента относительной деформации в момент времени t .

Аналогичными соотношениями можно определить тензоры

$$D(t) = \dot{U}_t(t), \quad W(t) = \dot{R}_t(t).$$

Приняты следующие наименования: $D(t)$ — *тензор скоростей растяжения* (в отечественной литературе обычно — *тензор скоростей деформации*), $W(t)$ — *тензор скоростей поворота*, или *спин*.

Получим для тензоров G , D , W другие часто используемые на практике выражения.

До сих пор мы считали, что движение каждой точки тела Ω определено заданием функции $x(t) = \chi(\xi, t)$, причем $x(t_0) = \xi \in \Omega_0$. Функция $x(t)$ предполагается дифференцируемой. Вектор $\dot{x}(t)$ — скорость движения точки $x(t)$ в момент времени t . Будем придерживаться обозначения $\dot{x}(t) = v(x, t)$.

В некоторых задачах (обычно при изучении движения жидкостей) наоборот, исходным является поле скоростей $v(x, t)$, $x \in \Omega(t)$. Зная $v(x, t)$ при необходимости можно найти $x(t)$, решая дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = v(x, t)$ с начальным условием $x(t_0) = \xi$.

Укажем формулы для вычисления тензоров G , D , W через векторное поле $v(x, t)$.

Начнем с тензора G . Получим вспомогательное равенство:

$$F(\xi, \tau) = F_t(x, \tau)F(\xi, t), \quad (13)$$

где $x = \chi(\xi, t)$, $F(\xi, \tau) = \nabla\chi(\xi, \tau)$. По определению $F_t(x, \tau)$ имеем:

$$\chi_t(x + h, \tau) = \chi_t(x, \tau) + F_t(x, \tau)h + o(h) \quad \forall h \in V.$$

С другой стороны, по определению относительной деформации

$$\begin{aligned} \chi_t(x + h, \tau) &= \chi(\chi^{-1}(x + h, \tau), \tau) = \chi(\chi^{-1}(x, \tau) + \nabla\chi^{-1}(x, \tau)h + o(h), \tau) = \\ &= \chi(\chi^{-1}(x, \tau), \tau) + \nabla\chi(\chi^{-1}(x, \tau), \tau)\nabla\chi^{-1}(x, \tau)h + o(h), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\nabla\chi_t(x, \tau) = \nabla\chi(\chi^{-1}(x, \tau), \tau)\nabla\chi^{-1}(x, \tau) = \nabla\chi(\xi, \tau)\nabla\chi^{-1}(x, \tau), \quad (14)$$

но $\nabla\chi^{-1}(x, \tau) = (\nabla\chi(\xi, \tau))^{-1}$. Это значит, что равенство (14) можно записать в виде:

$$F_t(x, \tau) = F(\xi, \tau)F^{-1}(\xi, \tau),$$

или так:

$$F(\xi, \tau) = F_t(x, \tau)F(\xi, \tau),$$

что и требовалось доказать.

Продифференцируем теперь равенство (13) по τ и положим затем $\tau = t$. Получим, используя определение тензора G , что

$$\dot{F}(\xi, t) = GF(\xi, t),$$

или

$$G = \dot{F}(\xi, t)F^{-1}(\xi, t). \quad (15)$$

Далее, имеем по определению:

$$\dot{F}(\xi, t) = \frac{d\nabla\chi(\xi, t)}{dt}.$$

Поскольку $\dot{\chi}(\xi, t)$ — это скорость $v(x, t)$ точки $x(t) = \chi(\xi, t)$, то

$$\frac{d\nabla\chi(\xi, t)}{dt} = \nabla v(\chi(\xi, t), t).$$

Подчеркнем, что в правой части этого равенства градиент берется по переменной ξ . Вычисляя градиент сложной функции, получим:

$$\dot{F}(\xi, t) = \nabla v(x, t)F(\xi, t) \quad (16)$$

(в первом множителе справа градиент вычисляется по переменной x).

Подставляя в (15) полученное выражение для $\dot{F}(\xi, t)$, находим:

$$G = \nabla v(x, t). \quad (17)$$

С другой стороны, можно получить выражение для тензора G , продифференцировав полярное разложение градиента относительной деформации. Имеем $F_t(\tau) = R_t(\tau)U_t(\tau)$, следовательно,

$$\dot{F}_t(\tau) = \dot{R}_t(\tau)U_t(\tau) + R_t(\tau)\dot{U}_t(\tau).$$

Положим в этом равенстве $\tau = t$ и учтем, что $U_t(t) = R_t(t) = E$, так как $F_t(t) = E$. В результате получим: $G = D + W$.

Заметим далее, что тензор D симметричен как производная по t от симметричного тензора (в отличие от $U_t(t)$ тензор D не положительно определен).

Тензор W кососимметричен. Действительно, $R_t(\tau)R_t^T(\tau) = E$. Дифференцируя это равенство по τ и полагая затем $\tau = t$, получим $W + W^T = 0$.

Симметричная и кососимметричная части тензора определяются однозначно, поэтому

$$D = \frac{1}{2}(G + G^T), \quad W = \frac{1}{2}(G - G^T),$$

или

$$D = \frac{1}{2}(\nabla v(x, t) + (\nabla v(x, t))^T), \quad (18)$$

$$W = \frac{1}{2}(\nabla v(x, t) - (\nabla v(x, t))^T). \quad (19)$$

Формулы (17)–(19) чаще всего используют в приложениях для вычисления тензоров G, D, W .

Вектор $\omega(x, t)$, определяемый равенством:

$$2Wa = \omega \times a \quad \forall a \in V,$$

называется вихрем (ротором) векторного поля скоростей $v(x, t)$ и обозначается через $\text{rot } v$. Если $W = 0$, то $\text{rot } v = 0$. В этом случае движение называется безвихревым. *Безвихревое движение* — это движение с нулевым спином.

Как известно из курса математического анализа, для безвихревого векторного поля существует *потенциал*, т. е. скалярная функция $u(x, t)$ такая, что $v(x, t) = \nabla u(x, t)$.

С вихревым движением обычно связывают скалярную величину $|\text{rot } v|$, называемую завихренностью поля скоростей.

Другой важной характеристикой поля скоростей является

$$\text{div } v = \text{tr } G = \text{tr } D. \quad (20)$$

Последнее равенство — следствие кососимметричности тензора W . Физический смысл $\text{div } v$ будет описан в следующем пункте.

В дальнейшем нам потребуется формула Эйлера:

$$\dot{J} = J \text{div } v, \quad (21)$$

где $J = \det F$. Для ее доказательства нужно воспользоваться соотношением (16) и теоремой 1, с. 26, при $L = F$, $P = \nabla v$.

Упражнения.

1.10. Пусть $U_t(t)$, $V_t(t)$ — правый и левый тензоры относительно растяжения соответственно. Показать, что $\dot{U}_t(t) = \dot{V}_t(t)$.

1.11. Показать, что

$$D = \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} + U^{-1}\dot{U})R^T, \quad W = \dot{R}R^T + \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T.$$

Указание. Использовать равенство (16).

1.12. Показать, что ускорение $\dot{v}(x, t)$ можно записать в виде¹⁾:

$$\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v. \quad (22)$$

1.13. Доказать, что

$$\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla(v \cdot v) + 2Wv. \quad (23)$$

Эту форму записи ускорения называют формулой Громека — Ламба.

1.14. Доказать справедливость тождества:

$$\text{rot } \dot{v} = \frac{d}{dt} \text{rot } v - (\nabla v) \text{rot } v + (\text{div } v) \text{rot } v. \quad (24)$$

1.15. Доказать справедливость следующих тождеств (формулы Труделла):

$$\begin{aligned} \text{div } \dot{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div } v + D \cdot D - \frac{1}{2}|\text{rot } v|^2, \\ \text{div } \dot{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{div } v + \text{div}(\text{rot } v \times v) + \frac{1}{2}\Delta|v|^2. \end{aligned}$$

¹⁾Подчеркнем, что $\partial v / \partial t$ — частная производная функции $v(x, t)$ по t .

1.16. Получить выражения для физических компонент тензора скоростей деформации через физические компоненты скорости в: 1) декартовой, 2) цилиндрической системах координат.

1.17. Пусть декартовы компоненты вектора скорости определяются равенствами:

$$v_1 = 0, v_2 = kx_1, v_3 = 0,$$

$k = \text{const}$. Вычислить декартовы компоненты тензоров D, W . Будет ли данное движение вихревым?

1.18. Пусть компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат определяются равенствами: $v_r = 0, v_z = 0, v_\theta = f(r)$, f — заданная функция. При каких условиях на функцию f движение будет безвихревым?

1.19. Выяснить физический смысл компонент тензора скоростей деформации в декартовой системе координат.

Указания. 1) Рассмотреть случай, когда декартовы компоненты вектора скорости таковы: $v_1 = kx_1, v_2 = 0, v_3 = 0, k = \text{const}$. Показать, что k — скорость относительного растяжения. 2) Рассмотреть случай, когда $v_1 = kx_2, v_2 = 0, v_3 = 0, k = \text{const}$. Показать, что k — скорость изменения косинуса угла между первоначально ортогональными векторами, параллельными координатным осям x_1, x_2 .

1.20. Пусть движение тела $\Omega(t)$ таково, что $D(t) = 0$ для всех $t \in [0, T], x \in \Omega(t)$. Показать, что тогда $v(x, t) = c(t) + W(t)x(t)$, где $c(t)$ — непрерывная векторная функция, $W(t)$ — непрерывная кососимметричная тензорная функция.

1.21. Пусть движение тела $\Omega(t)$ таково, что $D(t) = 0$ для всех $t \in [0, T], x \in \Omega(t)$. Показать, что расстояние между любыми двумя точками тела остается неизменным при $t \in [0, T]$.

Указание. Использовать равенство $Wh \cdot h = 0$, справедливое для любого кососимметричного тензора W и любого вектора h .

ЗАМЕЧАНИЕ. Движение тела при $D(t) = 0$ называется жестким.

1.22. Показать, что жесткое движение тела в каждый момент времени можно представить как вращение вокруг мгновенной оси.

Указание. Воспользоваться тем, что в некотором ортонормированном базисе кососимметричный тензор W имеет компоненты: $w_{23} = \delta, w_{32} = -\delta$, остальные — нули.

1.23.* Пусть движение тела Ω является жестким в том смысле, что

$$|x(t) - y(t)| = |\xi - \eta| \quad \forall \xi, \eta \in \Omega_0 \quad (25)$$

и для любых t , где $x(t) = \chi(\xi, t), y(t) = \chi(\eta, t)$. Показать, что тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + W(t)(x(t) - x_0(t)) \quad \forall x(t) \in \Omega(t), \quad (26)$$

где $x_0(t)$ — фиксированная точка из $\Omega(t)$, $W(t)$ — кососимметричный тензор.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно $D(t) = 0$ при выполнении (26), т. е. движение тела является жестким и в смысле определения, данного в упражнении 1.21.

4. Плотность массы. Уравнение неразрывности. Сплошная среда, занимающая область Ω , будучи физическим телом, обладает массой. Предполагается, что:

1) деформация тела не меняет его массы,

2) масса любого тела может быть подсчитана как интеграл от непрерывной скалярной положительной функции векторного аргумента, называемой плотностью массы (чаще — просто плотностью).

Условие 1) выражает закон сохранения массы.

Пусть в отсчетной конфигурации Ω_0 плотность массы задается функцией $\rho(\xi, t_0)$. Пусть далее, как обычно, $\chi(\xi, t)$ — деформация, переводящая конфигурацию Ω_0 в актуальную конфигурацию $\Omega(t)$. Напомним, что мы всегда, считаем, что отображение $\chi(\xi, t)$ при любом фиксированном t обратимо, отображение $\chi(\xi, t)$ и обратное к нему дифференцируемы.

Масса тела в отсчетной конфигурации по определению есть

$$m = \int_{\Omega_0} \rho(\xi, t_0) d\xi.$$

По условию 1) имеем:

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx. \quad (27)$$

Используя хорошо известные формулы математического анализа, выполним в интеграле (27) замену переменных $x = \chi(\xi, t)$. Получим:

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Omega(t)} \rho(x, t) dx = \int_{\Omega_0} \rho(\chi(\xi, t), t) \det \nabla \chi(\xi, t) d\xi = \\ &= \int_{\Omega_0} \rho(\chi(\xi, t), t) J d\xi, \quad J = \det F(\xi, t), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\int_{\Omega_0} \rho(\xi, t_0) d\xi = \int_{\Omega_0} \rho(\chi(\xi, t), t) J d\xi.$$

Такое же равенство имеет место и для любой подобласти области Ω_0 , поэтому

$$\rho(\xi, t_0) = \rho(\chi(\xi, t), t) J. \quad (28)$$

Формула (28) показывает, что задание плотности в отсчетной конфигурации позволяет определить плотность в соответствующей точке актуальной конфигурации (и наоборот).

Уравнение (28) называют *уравнением неразрывности Лагранжа*.

Продифференцируем равенство (28) по t . Получим (для краткости аргументы опускаем):

$$\dot{\rho}J + \rho\dot{J} = 0. \quad (29)$$

Используя формулу Эйлера (21), преобразуем равенство (29) к виду:

$$\dot{\rho}(x(t), t) + \rho(x(t), t) \operatorname{div} v(x, t) = 0. \quad (30)$$

Дифференциальное уравнение (30) называют *уравнением неразрывности Эйлера — Даламбера*.

Равенство:

$$\operatorname{div} v = -\dot{\rho}/\rho = \frac{d}{dt} \ln(1/\rho),$$

вытекающее из (30), показывает, что величина $\operatorname{div} v$ характеризует локальную скорость увеличения *удельного объема* $1/\rho$.

Уравнение (30) часто записывают в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (31)$$

Здесь, как обычно, $\partial/\partial t$ обозначает частную производную функции $\rho(x, t)$ по t .

Тело называется *несжимаемым*, если его плотность не меняется во времени, то есть $\dot{\rho} = 0$. В этом случае уравнение неразрывности принимает вид: $\operatorname{div} v = 0$.

5. Однородные деформации. Остановимся кратко на том случае, когда при любом $t > t_0$ отображение отсчетной конфигурации в актуальную задается аффинной функцией:

$$x(t) = \chi(\xi, t) = x_0(t) + F(t)(\xi - \xi_0), \quad \xi \in \Omega_0. \quad (32)$$

Здесь x_0 — заданная непрерывно дифференцируемая векторная функция времени, F — заданная непрерывно дифференцируемая тензорная функция времени, $\xi_0 \in \Omega_0$ — фиксированная точка. Предполагается, что при любом $t \geq t_0$ тензор $F(t)$ обратим.

Описанный класс деформаций называют *однородными деформациями*.

Упражнение 1.24. Показать, что при однородной деформации любой прямолинейный отрезок из Ω_0 переходит в прямолинейный отрезок.

Понятно, что с одной стороны однородные деформации составляют простейший класс деформаций, с другой стороны, любая деформация локально аппроксимируется однородной (см. (2), с. 48).

Отметим некоторые свойства однородных деформаций.

1. Нетрудно видеть, что $\nabla \chi(\xi, t) = F(t)$, следовательно, $J = J(t)$ (не зависит от ξ) и (см. (28)) $\rho(x, t) = J^{-1}(t)\rho(\xi, t)$. Отсюда, в частности, вытекает, что масса тела в любой момент времени равномерно

распределена, если в начальный момент времени она распределена равномерно.

2. Дифференцируя обе части равенства (32) по t , получим:

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) = \dot{F}(t)(\xi - \xi_0),$$

но $\xi - \xi_0 = F^{-1}(t)(x - x_0)$, следовательно,

$$v(x, t) = v_0(t) + \dot{F}(t)F^{-1}(t)(x - x_0), \quad (33)$$

при этом $\nabla v(x, t) = \dot{F}(t)F^{-1}(t)$, что, конечно, совпадает с (15), с. 55. Таким образом, $\operatorname{div} v = \operatorname{tr} \nabla v(x, t)$ зависит только от t .

6. Пространственное описание движения. Интегральное уравнение баланса массы. Применяемое нами до сих пор описание движения естественно называть отсчетным. Действительно, мы выбирали некоторую конфигурацию тела в качестве отсчетной и следили за изменением конфигурации тела во времени, изменением плотности, скоростями движения точек тела. Аналогично, как будет показано в дальнейшем, можно изучать и другие параметры, характеризующие состояние тела. Такой способ исследования наиболее часто применяется при изучении деформирования твердых тел. В механике его часто называют лагранжевым.

В задачах гидромеханики, где обычно приходится рассматривать течение больших масс жидкости около некоторых фиксированных для наблюдателя тел, например, обтекание самолета, автомобиля потоком воздуха, корабля или подводной лодки потоком воды, удобнее применять так называемый пространственный (или эйлеров) способ описания движения сплошной среды.

С этой целью в евклидовом пространстве V выбирается некоторая фиксированная область B и изучается поведение параметров сплошной среды (плотности, скорости и т. д.) как функций точки $x \in B$ и времени t .

Так, принимая закон сохранения массы, можем написать, что

$$\int_B \rho(x, t_2) dx - \int_B \rho(x, t_1) dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \rho v \cdot \nu dx dt. \quad (34)$$

Здесь Γ — граница области B , ν — внешняя нормаль.

Выражение в левой части равенства (34) есть изменение количества вещества (массы) в области B за промежуток времени от t_1 до t_2 . Выражение в правой части — количество вещества, протекающего через Γ внутрь области B за тот же отрезок времени.

Таким образом, равенство (34) показывает, что все вещество, протекающее внутрь области B через ее границу, идет на увеличение количества вещества, содержащегося в области B . Это дает основание называть равенство (34) интегральным уравнением баланса массы.

Уравнение (34) можно положить в основу вывода дифференциального уравнения неразрывности (31). Для этого, исходя из равенства (34), справедливого и для любой подобласти $b \subset B$, при помощи формулы Остроградского — Гаусса получим:

$$\int_b \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_b \operatorname{div}(\rho v) dx dt = 0.$$

Из этого равенства вследствие произвольности b, t_1, t_2 вытекает, что уравнение (31) выполняется для всех $x \in B$ и t .

Упражнения.

1.25. Показать, что уравнение неразрывности (30) можно записать в виде (31).

1.26. Записать уравнение неразрывности в: 1) декартовых, 2) цилиндрических, 3) сферических координатах.

Ответ:

- 1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3} = 0,$
- 2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0,$
- 3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$

1.27. Пусть $f(x(t), t)$ — дифференцируемая функция, $\rho(x, t)$ — плотность. Показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) \rho dx = \int_{\Omega(t)} \dot{f}(x, t) \rho dx. \quad (35)$$

Указание. Используя замену переменных $x = \chi(\xi, t)$, перейти к интегрированию по области Ω_0 .

1.28.* Пусть $f(x(t), t)$ — дифференцируемая скалярная функция. Показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx &= \int_{\Omega(t)} (\dot{f}(x, t) + f(x, t) \operatorname{div} v) dx = \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)} f(x, t) \dot{x} \cdot \nu dx, \end{aligned} \quad (36)$$

где $\Gamma(t)$ — граница области $\Omega(t)$, ν — внешняя нормаль к $\Gamma(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (36) выражает собой так называемую теорему переноса Рейнольдса.

1.29.* Доказать справедливость следующих формул:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} f(x, t) \cdot \nu dx = \int_{S(t)} (\dot{f}(x, t) + (\operatorname{div} v) f(x, t) - (\nabla f(x, t)) v) \cdot \nu dx, \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{L(t)} f(x, t) \cdot \tau dx = \int_{L(t)} (\dot{f}(x, t) + (\nabla v)^T f(x, t)) \cdot \tau dx. \quad (38)$$

Здесь $f(x, t)$ — векторная функция, $S(t) = \chi(S_0, t)$, $L(t) = \chi(L_0, t)$, S_0 — гладкая поверхность, L_0 — гладкая кривая в отсчетной конфигурации, ν — единичный вектор нормали к $S(t)$, τ — единичный вектор касательной к $L(t)$ ¹⁾.

§ 2. Уравнения движения сплошной среды. Тензор напряжений

1. Силы в механике сплошной среды. Основные законы движения. Пусть $\Omega = \Omega(t)$ — актуальная конфигурация тела Ω_0 . Выделим в Ω произвольную подобласть ω . Границу ω обозначим через γ . Различают два типа сил, действующих на тело ω .

Первый тип — *массовые* силы, например, сила веса. В механике сплошной среды предполагают, что действие массовой силы может быть описано заданием векторного поля $b(x, t)$, называемого плотностью массовой силы, так что равнодействующая массовых сил, приложенных к телу ω , вычисляется как интеграл

$$b(\omega, t) = \int_{\omega} \rho b dx,$$

где $\rho = \rho(x, t)$, как обычно, обозначает плотность.

Второй тип — *поверхностные* силы. Это силы, действующие на ω со стороны оставшейся части тела Ω и распределенные по границе области ω . Понятно, что эти силы зависят от физических свойств тела и от степени его деформированности. Кроме того, в каждой точке γ действие этих сил зависит от ориентации соответствующего малого участка γ , точнее говоря, от ориентации нормали к γ .

В механике сплошной среды принимают, что поверхностные силы также могут быть определены их плотностью. Это означает, что каждой точке $x \in \gamma$ ставится в соответствие вектор $f(x, \nu)$. Второй

¹⁾Равенство (38) называют формулой Кельвина.

аргумент показывает, что вектор $f(x, \nu)$ определяется как положением точки x на γ , так и нормалью ν в точке x . Равнодействующая поверхностных сил, приложенных к γ вычисляется как интеграл:

$$f(\gamma, t) = \int_{\gamma} f(x, \nu) dx.$$

Подобласть ω можно располагать в области Ω произвольным образом. Можно считать поэтому, что в каждой точке $x \in \Omega$ и для каждого единичного вектора ν определен вектор $f(x, \nu)$, который естественно называть *вектором напряжений* сплошной среды в точке x на площадке, ориентированной нормалью ν .

Пусть далее \dot{v} — ускорение точки $x(t) \in \omega(t)$ в момент времени t . Принимают, что

$$\int_{\omega} \rho \dot{v} dx = b(\omega, t) + f(\gamma, t). \quad (1)$$

Уравнение (1) выражает собой *закон сохранения количества движения*.

Напомним понятие момента силы относительно данной точки. Пусть к точке $x \in \Omega$ приложена сила $f(x)$. Моментом этой силы относительно точки $x_0 \in V$ называют тензор

$$M_f = (x - x_0) \wedge f(x).$$

Наряду с (1) принимают, что

$$\int_{\omega} (x - x_0) \wedge \rho \dot{v} dx = \int_{\gamma} (x - x_0) \wedge f(x, \nu) dx + \int_{\omega} (x - x_0) \wedge \rho b dx, \quad (2)$$

где x_0 — произвольная фиксированная точка пространства V . Это уравнение выражает собой *закон сохранения момента количества движения*.

Уравнения (1), (2), фактически, нужно считать постулатами механики сплошной среды.

Иногда применяются модели сплошных сред, в которых взаимодействие $\omega(t)$ с окружающим объемом описывается более сложными, чем (1), (2), уравнениями. Это, например, так называемая моментная теория упругости.

2. Тензор напряжений. Дифференциальные уравнения движения. Уравнения (1), (2) имеют характер уравнений баланса (в математическом плане они аналогичны уравнению (34), с. 61).

На их основе можно получить дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Для этого интегралы по γ нужно выразить через интегралы по ω . При этом естественно опираться на теоремы типа Остроградского — Гаусса. Предварительно придется показать, что подинтегральные выражения в интегралах по γ специфически зависят от нормали.

Соответствующие рассуждения опираются на весьма естественное предположение о массовых и поверхностных силах, а именно, предполагается, что функции b, f непрерывны¹⁾.

Лемма 6 (фундаментальная лемма Коши). Для любой точки $x \in \Omega$ и любого единичного вектора ν выполнено равенство: $f(x, -\nu) = -f(x, \nu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем некоторую точку $x_0 \in \Omega$ и единичный вектор ν . Выберем в качестве области ω цилиндр, высота которого равна $\varepsilon > 0$, а ось параллельна вектору ν , точка x_0 — средняя точка оси цилиндра. Будем считать этот цилиндр достаточно малым, так что $\omega \subset \Omega$. Обозначим через S_+, S_- основания цилиндра, S — сечение цилиндра, ортогональное оси и проходящее через точку x_0 ; Γ — боковая поверхность цилиндра. Запишем применительно к области ω уравнение (1):

$$\int_{\omega} \rho \dot{\nu} dx = \int_{\omega} \rho b dx + \int_{S_-} f(x, \nu) dx + \int_{S_+} f(x, \nu) dx + \int_{\Gamma} f(x, \nu) dx.$$

Перейдем в этом уравнении к пределу, неограниченно уменьшая высоту цилиндра ω и оставляя неизменным S . В результате получим:

$$\int_S f(x, \nu) dx + \int_S f(x, -\nu) dx = 0.$$

Используя теперь произвольность S, x_0 и непрерывность функции f , можем написать, что $f(x, \nu) + f(x, -\nu) = 0 \forall x \in \Omega$. \square

Теорема 1 (теорема Коши). Каждой точке $x \in \Omega$ можно поставить в соответствие тензор $T(x)$ такой, что

$$f(x, \nu) = T(x)\nu \quad \forall \nu \in V, |\nu| = 1. \quad (3)$$

Тензор $T(x)$ называют тензором напряжений Коши.

¹⁾Как видно из дальнейшего изложения, фактически, эти предположения могут быть существенно ослаблены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функция $f(x, \nu)$ вводится лишь для единичных векторов ν . Распространим ее на все пространство V , полагая

$$\tilde{f}(x, u) = \begin{cases} |u|f(x, u/|u|), & u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Так определенная функция $\tilde{f}(x, u)$ однородна по u . В самом деле, если $u = 0$, то равенство

$$\tilde{f}(x, \alpha u) = \alpha \tilde{f}(x, u), \quad (5)$$

очевидно, выполняется при любом α . Если $u \neq 0$, то при $\alpha = 0$ равенство (5) также выполнено. Если $\alpha > 0$, то

$$\tilde{f}(x, \alpha u) = |\alpha u|f(x, \alpha u/|\alpha u|) = \alpha \tilde{f}(x, u).$$

Если $\alpha < 0$, то используя уже установленную однородность функции $\tilde{f}(x, u)$ при $\alpha > 0$ и лемму 6, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, \alpha u) &= \tilde{f}(x, -|\alpha|u) = \tilde{f}(x, |\alpha|(-u)) = |\alpha|\tilde{f}(x, -u) = \\ &= |\alpha||u|f(x, -u/|u|) = -|\alpha||u|f(x, u/|u|) = \alpha \tilde{f}(x, u). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что функция $\tilde{f}(x, u)$ аддитивна по u , т. е.

$$\tilde{f}(x, u_1 + u_2) = \tilde{f}(x, u_1) + \tilde{f}(x, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in V. \quad (6)$$

Будем различать два случая.

1) Векторы u_1, u_2 линейно зависимы. Пусть для определенности $u_1 = \alpha u_2$. Тогда

$$\tilde{f}(x, u_1 + u_2) = \tilde{f}(x, (1 + \alpha)u_2) = (1 + \alpha)\tilde{f}(x, u_2) = \tilde{f}(x, u_1) + \tilde{f}(x, u_2),$$

т. е. равенство (6) выполнено.

2) Векторы u_1, u_2 линейно независимы. Введем в рассмотрение вектор $u_3 = -(u_1 + u_2)$, фиксируем произвольно точку $x_0 \in \Omega$ и построим область ω (см. рис. 1), ограничив ее плоскостями P_1, P_2 , проходящими через точку x_0 ортогонально векторам u_1, u_2 соответственно, плоскостью P_3 , ортогональной u_3 и проходящей через точку $x_0 + \varepsilon u_3$, плоскостями P_4, P_5 , параллельными плоскости векторов u_1, u_2 и удаленными от точки x_0 на расстояние δ . Числа δ, ε будем считать настолько малыми, что $\omega \subset \Omega$. Обозначим через γ_i , часть

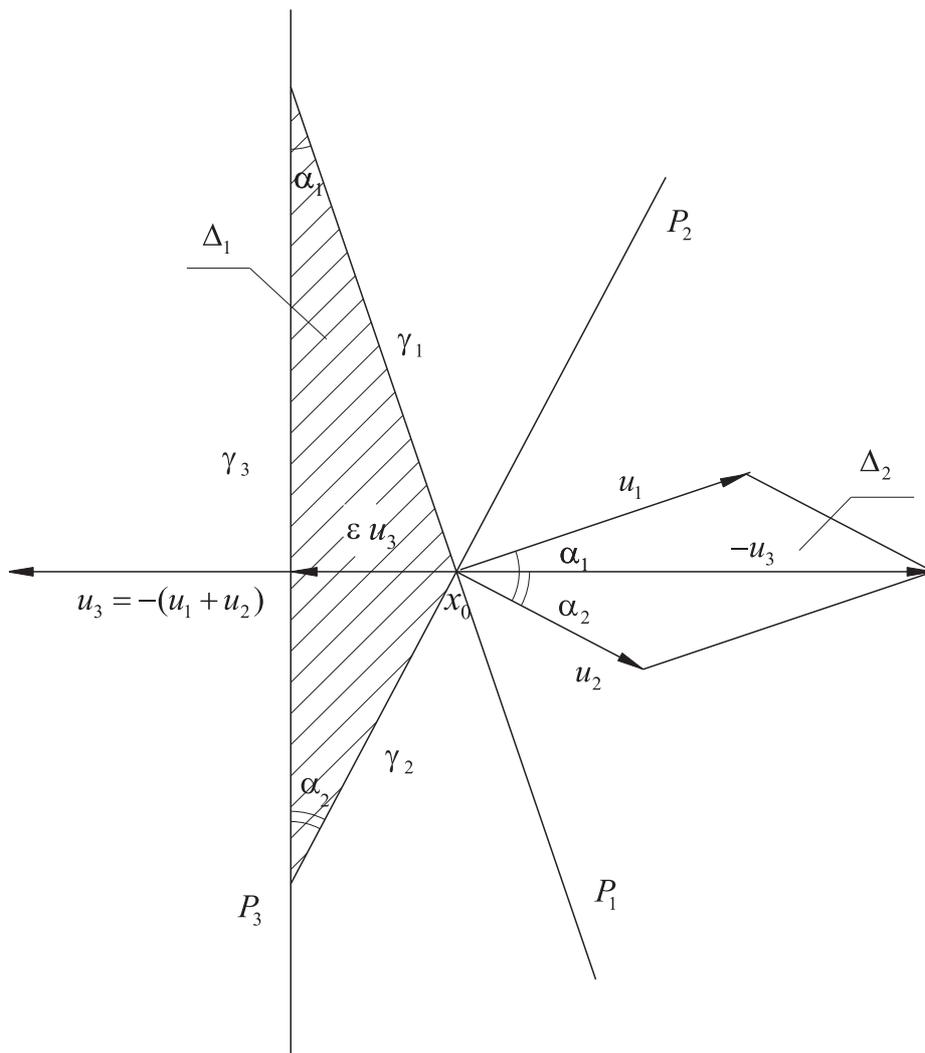


Рис. 1. К доказательству теоремы Коши.

границы области ω , лежащую в плоскости P_i , $i = 1, 2, \dots, 5$. Нетрудно убедиться, что

$$\text{mes}(\gamma_1) = \frac{|u_1|}{|u_3|} \text{mes}(\gamma_3), \quad \text{mes}(\gamma_2) = \frac{|u_2|}{|u_3|} \text{mes}(\gamma_3), \quad (7)$$

$$\text{mes}(\gamma_3) \leq c\varepsilon, \quad c = c(\delta), \quad (8)$$

$$\text{mes}(\omega) = \frac{1}{2}\varepsilon|u_3| \text{mes}(\gamma_3) = 2\delta \text{mes}(\gamma_4) = 2\delta \text{mes}(\gamma_5). \quad (9)$$

Действительно, соотношения (7) вытекают из подобия треугольников Δ_1, Δ_2 (см. рис. 1). Соотношение (8) вытекает из равенства:

$$\text{mes}(\gamma_3) = 2\delta\varepsilon|u_3|(\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \alpha_2).$$

При этом нужно учесть, что углы α_1, α_2 фиксированы при заданных u_1, u_2 . Равенства (9) очевидны. Введем в рассмотрение величину

$$\zeta = \frac{|u_3|}{\text{mes}(\gamma_3)} \int_{\gamma} \tilde{f}(x, \nu) dx$$

и исследуем ее поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу уравнения (1)

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(x, \nu) dx = \int_{\omega} \rho \dot{\nu} dx - \int_{\omega} \rho b dx.$$

Вследствие непрерывности $\rho, \dot{\nu}, b$ отсюда получаем:

$$\left| \int_{\gamma} \tilde{f}(x, \nu) dx \right| \leq c \text{mes}(\omega),$$

где c — постоянная, не зависящая от ω . Таким образом (см. (8), (9)), справедлива оценка: $|\zeta| \leq c|u_3|^2 \varepsilon / 2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим далее, что вследствие непрерывности функции \tilde{f} и соотношений (8), (9) имеем:

$$\frac{|u_3|}{\text{mes}(\gamma_3)} \left| \int_{\gamma_i} \tilde{f}(x, \nu) dx \right| \leq \frac{|u_3|}{\text{mes}(\gamma_3)} c \text{mes}(\gamma_i) = c \frac{\varepsilon |u_3|^2}{4\delta} = c_1 \varepsilon / \delta, \quad i = 4, 5.$$

Таким образом,

$$\zeta = \sum_{i=1}^3 \frac{|u_3|}{\text{mes}(\gamma_3)} \int_{\gamma_i} \tilde{f}(x, u_i / |u_i|) dx + O(\varepsilon / \delta),$$

откуда на основании (7) вытекает, что

$$\zeta = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\text{mes}(\gamma_i)} \int_{\gamma_i} \tilde{f}(x, u_i) dx + O(\varepsilon / \delta).$$

Устремляя ε и δ к нулю так, что $\varepsilon / \delta \rightarrow 0$, вследствие непрерывности функции \tilde{f} получим:

$$\tilde{f}(x_0, u_1) + \tilde{f}(x_0, u_2) + \tilde{f}(x_0, u_3) = 0.$$

По построению $u_3 = -(u_1 + u_2)$, а функция $\tilde{f}(x, u)$, как уже доказано, однородна по u , следовательно, $\tilde{f}(x_0, u_1 + u_2) = \tilde{f}(x_0, u_1) + \tilde{f}(x_0, u_2)$, т. е. функция \tilde{f} аддитивна по второму аргументу. Таким образом, функция $\tilde{f}(x, u)$ однородна и аддитивна и, стало быть, линейна по u , а это означает существование тензора $T(x)$ такого, что

$$\tilde{f}(x, u) = T(x)u \quad \forall u \in V,$$

т. е. для любого единичного вектора ν имеем: $f(x, \nu) = T(x)\nu$. \square

С использованием соотношения (3) дифференциальное уравнение движения выводится совсем просто. Действительно, применяя формулу Остроградского — Гаусса, получим:

$$\int_{\gamma} f(x, \nu) dx = \int_{\gamma} T(x)\nu dx = \int_{\omega} \operatorname{div} T(x) dx,$$

откуда вследствие уравнения (1)

$$\int_{\omega} (\rho\dot{v} - \operatorname{div} T(x) - \rho b) dx = 0,$$

и, поскольку ω — произвольная подобласть области Ω , то

$$\rho\dot{v} = \operatorname{div} T(x) + \rho b \quad \forall x \in \Omega. \quad (10)$$

Уравнение (10) называют *дифференциальным уравнением движения*, или *первым законом движения Коши*.

При решении конкретных задач уравнение (10) приходится записывать более подробно, выбирая ту или иную систему координат. Например, в декартовых координатах уравнение (10) принимает вид:

$$\rho\dot{v}_i = \sigma^{ij}{}_{,j} + \rho b_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где v_i — компоненты скорости, b_i — компоненты вектора массовых сил, σ^{ij} — компоненты тензора напряжений. Символ « ${}_{,j}$ » означает частную производную по декартовой координате x_j .

Отправляясь теперь от уравнения (2), покажем, что

$$T(x) = T^T(x), \quad (11)$$

т. е. тензор напряжений симметричен. Равенство (11) называется *вторым законом движения Коши*.

Поскольку $f(x, \nu) = T(x)\nu$, то применяя лемму 5, с. 34, для преобразования интеграла по γ в уравнении (2), получим:

$$\int_{\omega} (x - x_0) \wedge \rho \ddot{x} dx = \int_{\omega} ((x - x_0) \wedge \operatorname{div} T + T^T - T) dx + \int_{\omega} (x - x_0) \wedge \rho b dx. \quad (12)$$

Вследствие дифференциального уравнения движения (10) из (12), очевидно, вытекает, что

$$\int_{\omega} (T^T - T) dx = 0,$$

откуда в силу произвольности $\omega \subset \Omega$ следует (11). \square

3. Характеристики напряженного состояния. Симметрия тензора напряжений Коши позволяет получить ряд важных утверждений о характере напряжений в точках тела Ω .

Пусть $x \in \Omega$ и Σ — площадка, ориентированная нормалью ν , $f(x, \nu) = T(x)\nu$ — вектор напряжения в точке x . При достаточно малой $\operatorname{mes}(\Sigma)^1$ вектор $\operatorname{mes}(\Sigma)f(x, \nu)$ приближенно равен поверхностной силе, действующей на площадку Σ .

Представим вектор $f(x, \nu)$ в виде $f(x, \nu) = f_{\nu} + f_{\tau}$, где вектор f_{ν} параллелен ν , а $f_{\tau} \cdot \nu = 0$. Вектор f_{ν} называется *нормальным напряжением* на площадке Σ , вектор f_{τ} — *касательным напряжением*.

Важно уметь находить такие ориентации площадки Σ , при которых достигается максимум $|f_{\nu}|$ или максимум $|f_{\tau}|$ и, конечно, сами эти максимумы по заданному тензору $T = T(x)^2$. При этом тензор T может быть определен, например, своими компонентами в некоторой системе координат.

Ясно, что

$$f_{\nu} = |T\nu \cdot \nu|, \quad (13)$$

и, поскольку тензор T симметричен, то

$$\max_{|\nu|=1} |T\nu \cdot \nu| = \max_{i=1,2,3} |\sigma_i|,$$

где σ_i — собственные числа тензора T , причем максимум достигается на собственном векторе тензора T , соответствующем максимальному

¹⁾Через $\operatorname{mes}(\Sigma)$ обозначаем площадь Σ .

²⁾При достижении $|f_{\nu}|$ или $|f_{\tau}|$ некоторых предельных значений в теле могут наступать необратимые изменения, например, разрушение.

по модулю собственному числу. В механике сплошной среды числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ принято называть *главными напряжениями*, а соответствующие им собственные векторы e_1, e_2, e_3 — *главными направлениями* тензора T .

Таким образом, на каждой площадке Σ_i , ориентированной вектором e_i , $i = 1, 2, 3$, касательное напряжение нуль, а максимальное нормальное напряжение в точке x достигается на одной из этих трех площадок.

Найдем теперь максимальное касательное напряжение и ориентацию площадки, на которой оно достигается.

Ясно, что

$$|f_\tau|^2 = |f|^2 - |f_\nu|^2 = T\nu \cdot T\nu - (T\nu \cdot \nu)^2 = \sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 \nu_k^2 - \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k \nu_k^2 \right)^2, \quad (14)$$

где ν_k , $k = 1, 2, 3$, — компоненты нормали ν в базисе e_1, e_2, e_3 .

Элементарными выкладками проверяется, что

$$|f_\tau|^2 = 4(\nu_2^2 \nu_3^2 \tau_1^2 + \nu_1^2 \nu_3^2 \tau_2^2 + \nu_1^2 \nu_2^2 \tau_3^2), \quad (15)$$

где

$$\tau_1 = |\sigma_2 - \sigma_3|/2, \quad \tau_2 = |\sigma_3 - \sigma_1|/2, \quad \tau_3 = |\sigma_1 - \sigma_2|/2.$$

Можно показать (см. ниже упражнение 2.2), что при любом ν , $|\nu| = 1$,

$$|f_\tau|^2 \leq \max_{i=1,2,3} \tau_i^2.$$

Пусть для определенности

$$\max_{i=1,2,3} \tau_i = \tau_1.$$

Полагая $\nu_2 = \nu_3 = 1/\sqrt{2}$, $\nu_1 = 0$, получим $|f_\tau|^2 = \tau_1^2$. Это означает, что максимальное касательное напряжение достигается на одной из площадок, делящих угол между координатными плоскостями координатной системы, построенной на собственных векторах e_1, e_2, e_3 , пополам, и равно $\tau_{\max} = \max_{i=1,2,3} \tau_i$.

Главные напряжения σ_i и главные касательные напряжения, т. е. величины τ_i , $i = 1, 2, 3$, характеризуют напряженное состояние тела в некоторой фиксированной точке достаточно полно, но их фактическое вычисление по компонентам тензора трудоемко, так как требует решения задачи на собственные значения для тензора T . В связи с этим вводятся усредненные в некотором смысле характеристики, легко вычисляемые по компонентам тензора T .

Поместим точку x в центр октаэдра с осями, образованными главными направлениями тензора T . Каждая грань октаэдра равнонаклонена к координатным плоскостям системы e_1, e_2, e_3 (см. рис. 2). Указанный октаэдр предполагается настолько малым, что тензор $T(x)$ в пределах октаэдра можно приближенно считать постоянным. Подсчитаем нормальное и касательное напряжения на пло-

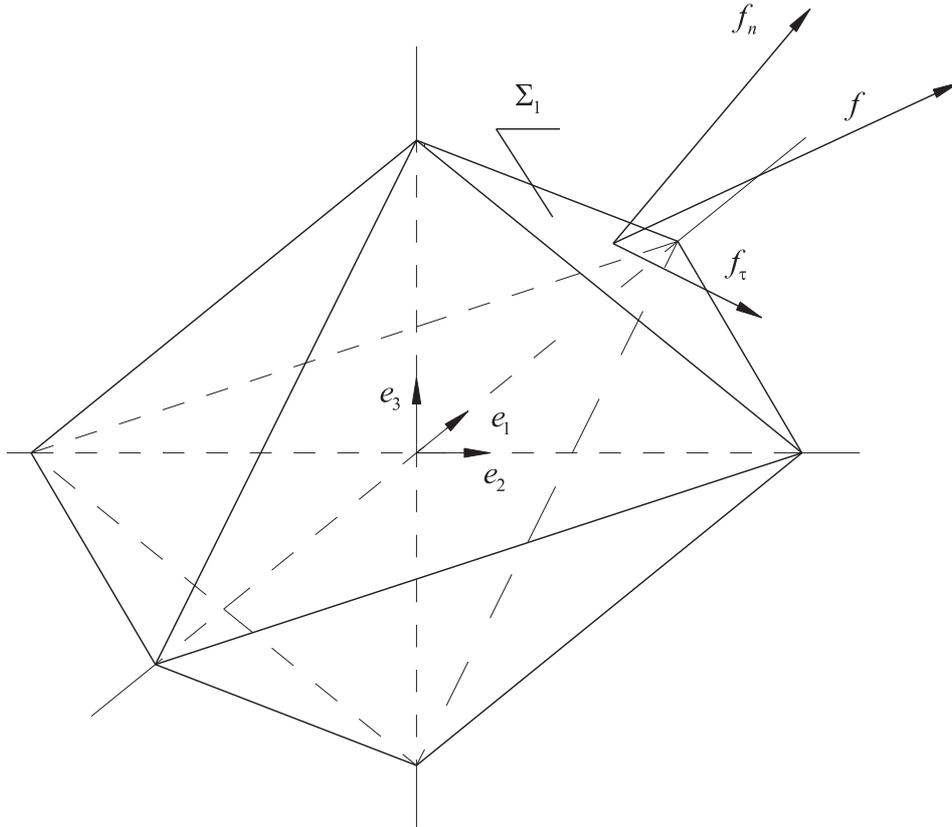


Рис. 2. К определению усредненных характеристик тензора напряжений.

щадке Σ_1 , являющейся гранью октаэдра, лежащей в первом октанте. Нормаль ν к этой площадке имеет координаты $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1/\sqrt{3}$, поэтому в соответствии с (13), (14) имеем:

$$|f_\nu| = \frac{1}{3}|\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3|, \quad |f_\tau| = \frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}.$$

Ясно, что такими же будут значения $|f_\nu|$, $|f_\tau|$ и на остальных гранях октаэдра. Приняты следующие обозначения:

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau = \frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)^{1/2}.$$

Величину σ называют *гидростатическим* или *средним* давлением. Это название оправдывается тем, что она характеризует равномерное давление, с каким действует окружающая среда на выделен-

ный малый объем (октаэдр). Именно так действует идеальная жидкость на выделенный в ней малый объем любой формы. Вообще же на границе октаэдра есть еще касательное напряжение τ , называемое *октаэдрическим*.

Отметим, что величины σ , τ определяются собственными числами тензора T и потому являются его инвариантами. В отличие от главных напряжений и главных касательных напряжений они допускают простые выражения через компоненты тензора. Действительно,

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{tr}(T) \quad (16)$$

и потому $\sigma = \sigma^i_i/3$, где σ^i_j — смешанные компоненты тензора T относительно любого базиса в пространстве V . Заметим далее, что в соответствии с (14)

$$\tau^2 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 - \frac{1}{9} \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_k \right)^2.$$

Используя формулу (16) и учитывая симметрию тензора T , нетрудно подсчитать, что

$$\sum_{k=1}^3 \sigma_k^2 = \sigma_i^j \sigma_j^i,$$

и, таким образом, получаем следующее выражение для октаэдрического напряжения через компоненты тензора T :

$$\tau^2 = \frac{1}{3} \sigma_i^j \sigma_j^i - \frac{1}{9} (\sigma_i^i)^2.$$

Упражнения.

2.1. Дать механическую интерпретацию компонент тензора напряжений в декартовой системе координат.

Указание. Рассмотреть вектор напряжений на площадке, ортогональной координатному вектору.

2.2.* Доказать, что

$$|f_\tau|^2 \leq \max_{i=1,2,3} \tau_i^2.$$

2.3. Показать, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{\tau}{\tau_{\max}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В инженерных расчетах обычно полагают

$$\tau \approx 0.5 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \tau_{\max} \approx 0.878 \tau_{\max}.$$

Получаемая при этом ошибка меньше 7%.

§ 3. Уравнение энергии

Кинетической энергией тела $\omega(t) \subset \Omega(t)$ называют скалярную функцию времени

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho |v|^2 dx.$$

Нетрудно проверить (см. (35), с. 62), что скорость изменения кинетической энергии подсчитывается по формуле:

$$\dot{K}(t) = \int_{\omega} \rho v \cdot \dot{v} dx.$$

Опыт показывает, что воздействие сил на тела может проявляться не только в движении, но и в производстве тепла. Обратное, нагревание тела может привести его в движение. Пример: нагревание газа при сжатии его поршнем и, наоборот, движение поршня под действием расширяющегося при нагревании газа.

Опыт показывает также, что нагревание (или охлаждение) тел может происходить и без каких-либо эффектов, воспринимаемых как движение.

В связи с этим вводится понятие *внутренней энергии* тела — скалярной функции $E(\omega(t)) = E(t)$. Предполагается, что внутренняя энергия тела может быть задана ее массовой плотностью $\varepsilon(x, t)$:

$$E(t) = \int_{\omega} \varepsilon(x, t) \rho dx.$$

Скорость изменения внутренней энергии вычисляется по формуле:

$$\dot{E}(t) = \int_{\omega} \dot{\varepsilon}(x, t) \rho dx. \quad (1)$$

Полной энергией тела называется сумма $E(t) + K(t)$.

Функцию

$$P(t) = \int_{\omega} \rho b \cdot v dx + \int_{\gamma} f(x, \nu) \cdot v dx$$

принято называть *мощностью*. Это есть скорость совершения работы внешними по отношению к телу ω силами.

Скорость изменения полной энергии определяется как скоростью совершения работы внешними по отношению к ω силами, так и скоростью подвода тепла к телу ω от окружающих его тел.

В механике сплошной среды принимают, что тепло в тело ω может поступать как за счет теплопроводности через его границу γ от тела $\Omega \setminus \omega$, так и за счет внешних источников тепла, распределенных в теле ω . При этом предполагается, что плотность источников тепла есть заданная непрерывная функция $s(x, t)$, и скорость подвода тепла за счет внешних источников есть

$$Q_B = \int_{\omega} \rho s dx. \quad (2)$$

Предполагается далее, что скорость подвода тепла внутрь тела ω через его границу γ вычисляется по формуле:

$$Q_C = \int_{\gamma} q(x, \nu) dx. \quad (3)$$

Функция $q(x, \nu)$ — поток тепла через γ — предполагается непрерывной функцией.

Как постулат механики сплошной среды принимается равенство:

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q, \quad (4)$$

где $Q = Q_B + Q_C$, выражающее закон сохранения полной энергии.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы Коши можно доказать, что $q(x, \nu)$ — линейная функция нормали, т. е.

$$q(x, \nu) = h(x) \cdot \nu. \quad (5)$$

Равенство (5) выражает так называемый принцип теплового потока Фурье — Стокса, вектор $h(x)$ называется вектором теплового потока в точке x .

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$\dot{E} = W + Q, \quad (6)$$

где $W = P - \dot{K}$. Вследствие равенства $f(x, \nu) = T\nu$ имеем:

$$W = \int_{\omega} \rho b \cdot v dx + \int_{\gamma} T\nu \cdot v dx - \int_{\omega} \rho \dot{v} \cdot v dx.$$

Величину W естественно называть *скоростью совершения работы* силами, действующими на тело ω (включая и силы инерции). Преобразуем выражение W , используя уравнение движения.

Применяя формулу Остроградского — Гаусса и учитывая симметрию тензора T , можем написать:

$$\int_{\gamma} T\nu \cdot v dx = \int_{\gamma} Tv \cdot \nu dx = \int_{\omega} \operatorname{div}(Tv) dx.$$

Используем теперь формулу вычисления дивергенции произведения:

$$\operatorname{div}(Tv) = \operatorname{div} T \cdot v + \operatorname{tr}(T\nabla v).$$

В результате получим:

$$W = \int_{\omega} ((\rho b + \operatorname{div} T - \rho \dot{v}) \cdot v + \operatorname{tr}(T\nabla v)) dx = \int_{\omega} \operatorname{tr}(T\nabla v) dx.$$

Скалярная функция $w(x, t) = \operatorname{tr}(T\nabla v)$ называется *мощностью напряжений*. Для нее можно получить более удобное выражение. Действительно (см. с. 56), $\nabla v = G = D + (\nabla v - (\nabla v)^T)/2$. В силу симметрии T и кососимметрии тензора $(\nabla v - (\nabla v)^T)/2$ отсюда получаем $w = \operatorname{tr}(T\nabla v) = \operatorname{tr}(TD) = T \cdot D$.

Отметим, что в декартовой системе координат

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

В результате выполненных преобразований равенство (4) принимает вид:

$$\int_{\omega} \rho \dot{\varepsilon} dx = \int_{\gamma} h \cdot \nu dx + \int_{\omega} (\rho s + w) dx.$$

Отсюда, применяя формулу Остроградского — Гаусса, получаем:

$$\int_{\omega} \rho \dot{\varepsilon} dx = \int_{\omega} (\operatorname{div} h + \rho s + w) dx. \quad (7)$$

Вследствие произвольности области $\omega \subset \Omega$ из равенства (7) вытекает дифференциальное уравнение:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \operatorname{div} h + \rho s + w, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Уравнение (8) называют *дифференциальным уравнением энергии*.

Упражнения.

3.1. Показать, что плотность теплового потока $q(x, \nu)$ — линейная функция нормали, т. е. $q(x, \nu) = h(x) \cdot \nu$.

3.2. Получить из уравнения энергии уравнение теплопроводности твердого тела, полагая, что плотность внутренней энергии пропорциональна температуре, а вектор теплового потока подчиняется закону Фурье, т. е. $h(x) = k \nabla u(x, t)$, где k — коэффициент теплопроводности, u — температура.

§ 4. Определяющие соотношения

В предыдущих параграфах были получены следующие основные уравнения механики сплошной среды:

— уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (1)$$

— уравнение движения

$$\rho \dot{v} = \operatorname{div} T + \rho b, \quad (2)$$

— уравнение энергии

$$\rho \dot{\varepsilon} = \operatorname{div} h + \rho s + w. \quad (3)$$

Кроме того, было установлено, что

$$T = T^T. \quad (4)$$

Уравнения (1)–(4) выполнены для всех $x \in \Omega$. При этом заданными можно, вообще говоря, считать, лишь плотность массовых сил b и плотность внешних источников тепла s . Остальные функции — плотность ρ , скорость v , тензор напряжений T , плотность внутренней энергии ε , поток тепла h должны быть определены в процессе решения той или иной конкретной задачи. При этом, очевидно, следует выбрать некоторую систему координат, в которой h, v, T определяются своими компонентами.

Уравнений (1)–(4), по-видимому, недостаточно для определения указанных искомым функций, так как эти уравнения имеют слишком общий характер и не учитывают свойств той или иной конкретной среды.

Вывод о недостаточности этих уравнений для описания движения тела можно получить и из формального сопоставления числа неизвестных функций и числа уравнений в системе (1)–(4). Элементарный подсчет показывает, что уравнений меньше, чем неизвестных.

При рассмотрении конкретных сред эту систему пополняют, присоединяя к ней так называемые определяющие соотношения (уравнения состояния), которые отражают свойства той или иной конкретной среды, налагая дополнительные связи на функции, входящие в систему (1)–(4).

Разнообразие этих связей соответствует разнообразию конкретных сред. Тем не менее, удастся установить некоторые общие закономерности, которым эти связи должны подчиняться.

Мы ограничимся пока изучением лишь тех величин, которые входят в уравнения движения и неразрывности, оставляя в стороне уравнение энергии. Рассматриваются, таким образом, явления, которые могут быть описаны без учета влияния тепловых процессов на движение тела. Класс таких явлений достаточно широк и составляет значительную часть теории деформируемых твердых тел, механики жидкости и газа.

Изучение связей, которые следует наложить на характеристики движения тел — кинематические, с одной стороны, и динамические, с другой стороны, — должно, очевидно, показать, как реагируют те или иные тела на изменение их формы.

1. Принцип локальности. Вообще говоря, следует считать, что тензор напряжений в каждой точке тела $\Omega = \Omega(t)$ зависит от всей истории деформирования тела до момента времени t , но значительная часть сред характеризуется локальностью действия деформации на тензор напряжений как во времени, так и в пространстве. Иными словами, тензор напряжений $T(x, t)$ зависит лишь от положения точки x , скорости ее движения $v(x, t)$, градиента деформации F , градиента скорости $G = \nabla v$, плотности ρ и времени t :

$$T(x, t) = g(F, G, \rho, x, t, \dot{x}, t). \quad (5)$$

Модели механики сплошной среды, построенные на основе соотношения (5), называют моделями первого порядка, так как функция g зависит лишь от самих искомых функций и их первых производных по пространственным переменным и по времени. Иногда применяют и более сложные модели, учитывающие производные высших порядков.

Соотношение (5) может быть существенно упрощено и конкретизировано, причем на основе весьма общих соображений.

2. Принцип независимости от системы отсчета. Вспомним, что мы можем описывать движение тела, лишь введя некоторую систему отсчета. Понятно, что система отсчета может меняться

по нашему желанию (даже в процессе движения изучаемого тела), но свойства тела, описываемые соотношением (5), не должны зависеть от выбора системы отсчета.

Будем предполагать, что изменение системы отсчета не приводит к изменению расстояния между точками тела, длительность одних и тех же событий также не должна меняться с изменением системы отсчета.

Высказанным предположениям относительно допустимых способов изменения системы отсчета можно придать следующую формулировку. Пусть $x(t)$ — положение некоторой точки в исходной системе отсчета в момент времени t , а $x^*(t^*)$ — положение той же точки в тот же момент времени, но относительно измененной системы отсчета. Тогда

$$x^*(t^*) = x_0^*(t) + Q(t)(x(t) - x_0), \quad (6)$$

$$t^* = t + a, \quad (7)$$

где $x_0^*(t)$, $Q(t)$ — заданные функции времени в исходной системе отсчета, значениями которых служат точки и ортогональные тензоры соответственно, x_0 — фиксированная точка.

Соотношение (6) показывает, что новая система отсчета может двигаться относительно старой, причем скорость ее поступательного перемещения определяется функцией $x_0^*(t)$, а поворот осей — функцией $Q(t)$. Начало отсчета времени может быть сдвинуто по отношению к старой системе на величину a . Это показывает соотношение (7).

Проследим, как изменяются объекты, входящие в соотношение (5), при изменении системы отсчета. Все объекты, относящиеся к точке $x^*(t^*)$ в новой системе отсчета, будем помечать верхним индексом «*».

Понятно, что $\rho^*(x^*(t^*)) = \rho(x, t)$, т. е. значение скалярной величины (плотности в некоторой точке) не зависит от того, в какой системе отсчета эта точка рассматривается.

Дифференцируя соотношение (6) по t , получим:

$$\dot{x}^*(t^*) = \dot{x}_0^*(t) + Q(t)\dot{x}(t) + \dot{Q}(t)(x(t) - x_0).$$

Вычислим градиент от левой и правой частей равенства (6). Будем иметь: $\nabla x^*(t^*) = Q(t)\nabla x(t)$, или

$$F^* = QF. \quad (8)$$

Формула (8) показывает, как изменяется градиент деформации при изменении системы отсчета.

Для того, чтобы найти выражение G^* , продифференцируем равенство (8) по t : $\dot{F}^* = Q\dot{F} + \dot{Q}F$. Вспомним теперь, что согласно (15), с. 55, $\dot{F} = GF$, следовательно, $\dot{F}^* = G^*F^*$, и, таким образом,

$$G^*F^* = QGF + \dot{Q}F = QGQ^TF^* + \dot{Q}Q^TF^*. \quad (9)$$

Тензор F считается обратимым, поэтому тензор F^* также обратим, следовательно, из равенства (9) вытекает, что

$$G^* = QGQ^T + \dot{Q}Q^T,$$

или

$$G^* = Q(D + W)Q^T + A,$$

где $A = \dot{Q}Q^T$. Тензор Q ортогонален, то есть $QQ^T = E$, следовательно,

$$\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0, \quad A = \dot{Q}Q^T = -Q\dot{Q}^T = -A^T,$$

т. е. тензор A кососимметричен. Тензор A называют спином новой системы отсчета относительно старой. Тензор $D^* = QDQ^T$ симметричен, тензор QWQ^T кососимметричен, так как тензор W кососимметричен. Разложение тензора на симметричную и кососимметричную части однозначно, поэтому

$$G^* = D^* + W^*, \quad (10)$$

где $D^* = QDQ^T$, $W^* = QWQ^T + A$ — это соответственно тензор скоростей деформации и спин в новой системе отсчета.

Пусть ν — единичный вектор в исходной системе отсчета. В новой системе отсчета ему будет соответствовать единичный вектор

$$\nu^* = Q\nu. \quad (11)$$

Мы учли, что при переходе к новой системе отсчета все векторы «поворачиваются» тензором Q .

Пусть, далее,

$$f = T\nu \quad (12)$$

есть вектор напряжений, соответствующий тензору T ,

$$f^* = T^*\nu^* \quad (13)$$

есть вектор напряжений соответствующий тензору напряжений T^* в новой системе отсчета. Как для любого вектора, имеем

$$f^* = Qf. \quad (14)$$

Используя равенства (11)–(14), получим $T^*Q\nu = QT\nu$, откуда в силу произвольности вектора ν вытекает, что $T^*Q = QT$, т. е.

$$T^* = QTQ^T. \quad (15)$$

Запишем теперь соотношение (5) в новой системе отсчета:

$$T^* = g(F^*, G^*, \rho^*, x^*, t^*, \dot{x}^*, t^*).$$

Подчеркнем, что в соответствии с постулируемой независимостью свойств материала от системы отсчета функция g здесь та же, что и в равенстве (5). Вследствие (15)

$$Qg(F, G, \rho, x, \dot{x}, t)Q^T = g(F^*, G^*, \rho^*, x^*, \dot{x}^*, t^*).$$

Теперь используем для величин, помеченных звездочкой, выражения (6)–(8), (10). Получим:

$$\begin{aligned} g(F, G, \rho, x, \dot{x}, t) = Q^T g(QF, QDQ^T + QWQ^T + A, \rho, x_0^* + \\ + Q(x - x_0), \dot{x}_0^* + Q\dot{x} + \dot{Q}x(x - x_0), t + a)Q. \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) должно выполняться при переходе к любой системе отсчета, т. е. оно должно выполняться при любых Q , x_0^* , x_0 , a . Подчиним выбор этих объектов следующим условиям:

$$\begin{aligned} Q(t) = E, \quad \dot{Q}(t) = -W, \quad x_0^*(t) + Q(x(t) - x_0) = 0, \\ \dot{x}_0^*(t) + Q\dot{x} + \dot{Q}(x(t) - x_0) = 0, \quad t + a = 0. \end{aligned}$$

Тогда $g(F, G, \rho, x, \dot{x}, t) = g(F, D, \rho, 0, 0, 0)$. Последнее равенство означает, что функция g может зависеть только от F, D, ρ .

Полученный результат вполне согласуется с физическими представлениями: напряжения в некоторой точке могут зависеть лишь от характеристик деформации в данной точке, но не от положения этой точки в пространстве, не от скорости ее движения и не от момента времени, в который мы эту точку наблюдаем.

Упражнение 4.1. Движение тела называется жестким, если существует такая система отсчета, что поле скоростей движения точек тела в этой системе отсчета обращается в нуль. Показать, что в любой другой системе отсчета поле скоростей имеет вид:

$$v^*(x, t) = c(t) + W(t)(x(t) - x_0(t)), \quad (17)$$

где $x_0(t)$ — произвольная точка из $\Omega(t)$, $c(t)$ — некоторый вектор, $W(t)$ — некоторый кососимметричный тензор.

3. Упругое тело. Вязкая жидкость. Если функция g зависит лишь от градиента деформации:

$$T = g(F, \rho), \quad (18)$$

то тело называется *упругим*. Зависимость от ρ можно и не указывать, так как плотность в актуальной конфигурации выражается через ее значение в отсчетной конфигурации и градиент деформации (см. (28), с. 59).

Используя изложенные выше соображения о независимости определяющих соотношений от системы отсчета, соотношению (18) можно придать более конкретную форму. Запишем тензор F в виде полярного разложения: $F = RU$. В качестве тензора Q в равенстве (16) выберем R^T . Тогда $T = g(RU) = Rg(R^T RU)R^T$ и так как $R^T R = E$, то

$$T = Rg(U)R^T, \quad (19)$$

причем, поскольку тензор T симметричен, то тензор $g(U)$ тоже должен быть симметричным. Таким образом, уравнение (19) — определяющее соотношение упругого тела, если g — симметричная тензорная функция тензорного аргумента. Отметим, что тензор напряжений T явным образом зависит от тензора поворота R , и для какого-либо конкретного материала требуется установить лишь зависимость T от правого тензора растяжений. Физически результат представляется вполне естественным.

Назовем *вязкой жидкостью* тело, для которого функция g зависит лишь от тензора скоростей деформации и плотности: $T = g(D, \rho)$. Как показано ранее (см. (16)) $g(QDQ^T, \rho) = Qg(D, \rho)Q^T$ для любого ортогонального тензора Q , т. е. g — симметричная изотропная тензорная функция. Но тогда $g(D, \rho) = \varphi_0 E + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2$, где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ есть функции инвариантов тензора D . Таким образом, определяющее соотношение вязкой жидкости имеет вид:

$$T = \varphi_0 E + \varphi_1 D + \varphi_2 D^2.$$

Для конкретной жидкости требуется установить зависимость функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ от инвариантов тензора D .

Если тензор напряжений зависит и от градиента деформации и от тензора скоростей деформации, то тело называют упруго-вязким.

4. Линейно-вязкая жидкость. Вязкая жидкость называется *линейно-вязкой*, если зависимость тензора напряжений T от тензора скоростей деформации D является линейной. В этом случае следует положить $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 2\mu(\rho)$, $\varphi_0 = -p(\rho) + \lambda(\rho) \operatorname{tr} D$, причем

указанные зависимости, очевидно, являются единственно возможными в принятых условиях. Таким образом, определяющее соотношение линейно вязкой жидкости имеет вид:

$$T = (-p + \lambda \operatorname{tr} D)E + 2\mu D,$$

или:

$$T = (-p + \lambda \operatorname{div} v)E + 2\mu D. \quad (20)$$

Уравнения движения жидкости, основанные на соотношении (20) называют уравнениями Навье — Стокса. Коэффициентам p , λ , μ можно придать весьма прозрачный физический смысл. В дальнейшем это будет сделано.

5. Идеальная жидкость. Начнем с простейшего случая, когда $\lambda = \mu = 0$. При этих условиях тензор напряжений не зависит от тензора скоростей деформации:

$$T = -pE. \quad (21)$$

Соотношение (21) показывает, что вектор напряжений на любой площадке нормален к этой площадке, и при любой ориентации площадки имеет одну и ту же длину p , называемую давлением. Жидкость, для которой выполнено условие (21), принято называть *идеальной*.

Запишем уравнения неразрывности и движения применительно к этому случаю:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad (22)$$

$$\rho \dot{v} = -\operatorname{div} pE + \rho b. \quad (23)$$

Используя равенство $\operatorname{div} pE = \nabla p$, приведем уравнение (23) к виду:

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + \rho b. \quad (24)$$

Система уравнений (22), (24) содержит, фактически, четыре уравнения. Незвестных — пять: три компоненты скорости, давление и плотность. Для того, чтобы пополнить эту систему привлекают ту или иную информацию о свойствах жидкости.

Рассмотрим два таких случая.

1) Идеальная несжимаемая жидкость. Условие несжимаемости означает, что $\dot{\rho} = 0$. Систему уравнений идеальной несжимаемой жидкости записывают в виде:

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + \rho b, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \dot{\rho} = 0.$$

Эта система замкнута — число уравнений равно числу неизвестных.

2) Баротропная идеальная жидкость. Жидкость называется *баротропной*, если давление есть заданная функция плотности: $p = p(\rho)$. Функция $p(\rho)$ характеризует свойства конкретной жидкости. Обычно предполагается, что функция $p = p(\rho)$ при всех $\rho > 0$ дифференцируема и имеет обратную. Простейшим примером баротропной жидкости может служить газ, подчиняющийся *уравнению Клайперона* $p = R\rho T$ при заданной постоянной температуре. Здесь $R > 0$ есть газовая постоянная, T — абсолютная температура. Система уравнений баротропной идеальной жидкости имеет, таким образом, вид:

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + \rho b, \quad \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad p = p(\rho).$$

6. Уравнения Навье — Стокса. Вернемся к определяющему соотношению линейно-вязкой жидкости (20). Прежде чем строить полную систему уравнений, основанную на соотношении (20), опишем смысл, входящих в него коэффициентов.

Пусть жидкость покоится, т. е. $v = 0$, или совершает жесткое движение, т. е. $D = 0$. Тогда $T = -pE$. Таким образом, в состоянии покоя в вязкой жидкости не возникает касательных напряжений. Величину $p(\rho)$ по аналогии со случаем идеальной жидкости принято называть давлением.

Пусть теперь $D \neq 0$. Вычислим среднее давление, т. е. величину $\sigma = \operatorname{tr} T/3$, используя равенство (20). Получим:

$$\sigma = -p + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (25)$$

Соотношение (25) характеризует зависимость среднего давления σ от скорости изменения удельного объема $1/\rho$. В связи с этим величину $\lambda' = \lambda + 2\mu/3$ называют *объемным коэффициентом вязкости*.

Анализируя смысл коэффициента μ , рассмотрим специальный случай течения жидкости. Именно, будем считать, что в некоторой декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 компоненты скорости заданы соотношениями: $v_1 = kx_2, v_2 = 0, v_3 = 0$, где $k = \operatorname{const}$. Такое течение естественно называть сдвиговым. Вектор скорости и компоненты тензора скоростей деформации D , очевидно, удовлетворяют в этом случае соотношениям: $\operatorname{div} v = 0, D_{12} = D_{21} = k/2$, остальные компоненты D равны нулю. Соотношение (20) дает: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = k/2$, остальные компоненты тензора напряжений — нули. Это означает, что напряжения сдвига (касательные напряжения), возникающие в линейно вязкой жидкости, пропорциональны скорости сдвига. Коэффициент пропорциональности μ называют коэффициентом *сдвиговой вязкости*. Часто его называют также *динамическим* коэффициентом

вязкости. Коэффициент λ называют вторым коэффициентом вязкости.

Выпишем теперь полную систему уравнений движения линейно-вязкой жидкости. В соответствии с (2), (20) имеем:

$$\rho \dot{v} = \operatorname{div}(-p + \lambda \operatorname{div} v)E + 2 \operatorname{div}(\mu D) + \rho b. \quad (26)$$

Проводя элементарные преобразования, нетрудно получить, что при постоянных λ и μ

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} v + \mu \Delta v + \rho b. \quad (27)$$

Здесь учтены следующие равенства:

$$2 \operatorname{div} D = \operatorname{div}(\nabla v + (\nabla v)^T), \quad \operatorname{div}(\nabla v) = \Delta v, \quad \operatorname{div}(\nabla v)^T = \nabla \operatorname{div} v,$$

где Δ — оператор Лапласа.

Ясно, что уравнение (26) вместе с уравнением неразрывности не образует замкнутой системы. Для ее замыкания делают предположения, аналогичные, применявшимся при построении уравнений идеальной жидкости. Например, если считать жидкость несжимаемой, а динамическую вязкость μ постоянной, то соответствующая полная система уравнений принимает вид:

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + \mu \Delta v + \rho b, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (28)$$

Система (28) называется системой уравнений Навье — Стокса вязкой несжимаемой жидкости.

Приведем подробную запись системы (28) в декартовых координатах. Пусть v_k , $k = 1, 2, 3$, — декартовы компоненты вектора скорости. Вычисляя $\dot{v}_k(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$ как полную производную, получим:

$$\dot{v}_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} x_i = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Применяя теперь полученные ранее формулы для градиента, дивергенции и векторного оператора Лапласа в декартовых координатах, запишем систему уравнений Навье — Стокса в виде:

$$\rho \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \Delta v_k + \rho b_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа в декартовых координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

7. Изотропное упругое тело. Как показано выше, уравнение состояния упругого тела имеет вид $T = Rg(U)R^T$, где $F = RU$ есть полярное разложение градиента деформации. К числу наиболее распространенных на практике упругих тел относятся так называемые изотропные упругие тела. Их характерная особенность — одинаковая реакция независимо от направления деформации.

Опишем свойства изотропии в более точных терминах. Подвергнем отсчетную конфигурацию Ω_0 некоторому ортогональному преобразованию: $\xi_1 = Q\xi$, а затем произвольной деформации χ . При этом актуальная конфигурация будет получена из отсчетной при помощи отображения $\chi(Q\xi)$. Это означает (см. (18)), что тензор напряжений равен

$$T(x) = g(\nabla\chi(Q\xi)), \quad x = \chi(Q\xi).$$

Вычисляя $\nabla\chi(Q\xi)$ как градиент произведения отображений, получим $T(x) = g(F(Q\xi)Q)$. Будем говорить, что конфигурации Ω_0 и $Q\Omega_0$ равноправны, если

$$g(F(Q\xi)Q) = g(F(Q\xi)). \quad (29)$$

В правой части последнего равенства — тензор напряжений в точке x , соответствующий деформации χ отсчетной конфигурации Ω_0 . Упругое тело называется *изотропным*, если равенство (29) выполняется для любого ортогонального тензора Q . Это означает, что

$$g(RUQ) = g(RU)$$

для любого ортогонального тензора Q . В частности, можно положить $Q = R^T$. Тогда

$$g(RUR^T) = g(RU). \quad (30)$$

С другой стороны, соотношение (19) показывает, что

$$g(RU) = Rg(u)R^T,$$

т. е.

$$g(RUR^T) = Rg(u)R^T. \quad (31)$$

Понятно, что равенство (31) должно выполняться для любого ортогонального тензора R , следовательно, g — симметричная изотропная тензорная функция.

Воспользуемся теперь равенством: $RUR^T = V$, где V — левый тензор растяжений, т. е. тензор из полярного разложения $F = VR$. Из (30) следует, что $g(RU) = g(RUR^T) = g(V)$. Последнее означает,

что для изотропного упругого тела тензор напряжений определяется соотношением:

$$T = \varphi_0 E + \varphi_1 V + \varphi_2 V^2, \quad (32)$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — функции инвариантов тензора V . Фактическое использование этого соотношения затруднительно, так как тензор V не допускает простого выражения через градиент деформации. Поэтому чаще применяют выражение для тензора T , содержащее вместо V меру деформации $B = V^2$. Мы не будем заниматься соответствующими преобразованиями, поскольку в дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь случая бесконечно малых деформаций, при которых соотношение (32) допускает линеаризацию и существенно упрощается.

Упражнение 4.2. Показать, что уравнение движения линейно-вязкой жидкости при постоянных λ, μ можно записать в виде:

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} v + \mu \Delta v + \rho b. \quad (33)$$

§ 5. Термодинамика однородных процессов

В термодинамике состояние тела в каждый момент времени определяется наряду с кинематическими величинами (координатами, скоростью, плотностью) температурой (или полем температур). Шкалу измерения температур можно распространить до таких низких значений, которые нельзя наблюдать ни в каком опыте. Иными словами, в любой температурной шкале существует наибольшая нижняя грань. Далее считаем температурную шкалу выбранной и фиксированной, например, совпадающей с температурной шкалой Кельвина, определяемой абсолютным газовым термометром. Абсолютную температуру будем обозначать через θ , $0 < \theta < \infty$.

Температура и скорость подвода тепла играют в термодинамике разные роли. Температура наряду с кинематическими величинами составляет часть описания условий, при которых тело находится в данный момент времени. Скорость подвода тепла определяется по предыстории при помощи определяющих соотношений, вообще говоря, своих для каждого конкретного тела.

Различие между этими двумя величинами становится плодотворным после введения специфической для термодинамики величины, называемой энтропией.

1. Аксиома диссипации. Энтропия. Однородные процессы. Вернемся к закону сохранения полной энергии, выраженному равенством (6), с. 75:

$$\dot{E} = W + Q.$$

Здесь E — внутренняя энергия тела, W — скорость совершения работы силами, действующими на тело, Q — скорость подвода тепла к телу. Опыт показывает, что существует верхняя грань величины Q . Обозначим наименьшую верхнюю грань этого предельного значения через B . Тогда

$$Q \leq B, \quad (1)$$

или, что равносильно,

$$\dot{E} - W \leq B. \quad (2)$$

Величина $B \geq 0$, называемая *тепловой гранью*, вообще говоря, своя для каждого тела и связана с определяющими соотношениями материала тела. Неравенство (1) выражает так называемый *принцип* (или аксиому) *диссипации*.

Иллюстрируя принцип диссипации, в дальнейшем будем рассматривать так называемые *однородные процессы*. Иными словами, мы будем рассматривать такие тела, для которых изменение условий, в каких они находятся, описываются конечным числом параметров. В число этих параметров входит температура $\theta(t)$. Остальные параметры будем обозначать через $r_1(t), r_2(t), \dots, r_k(t), k \geq 1$. Будем полагать далее $s(t) = (\theta(t), r(t)), r(t) = (r_1(t), \dots, r_k(t))$. Набор параметров $s(t)$ определяет *ситуацию*, в которой тело находится в данный момент времени.

В качестве примера однородного процесса можно указать однородную деформацию тела (см п.5 §1) в однородном температурном поле. В этом случае состояние тела полностью определяется девятью компонентами тензора $F(t)$ в некотором базисе и температурой $\theta(t)$.

В дальнейшем мы также часто будем рассматривать процессы, в которых (кроме температуры) состояние тела определяется лишь одним параметром, например, объемом $V(t)$.

Определение 1. Пусть $f(t)$ — некоторая функция времени t , определенная при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. *Предысторией* функции f назовем функцию $f^t(\tau), \tau \in (0, \infty)$, полагая $f^t(\tau) = f(t - \tau)$.

В дальнейшем будем придерживаться принципа *термодинамически допустимого детерминизма*, а именно будем считать, что для однородных процессов значения $W(t), Q(t), E(t), B(t)$ определяются предысторией s^t , т. е.

$$W(t) = \mathcal{W}(s^t), \quad Q(t) = \mathcal{Q}(s^t), \quad E(t) = \mathcal{E}(s^t), \quad B(t) = \mathcal{B}(s^t),$$

причем функции $\mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{B}$ таковы, что при каждом t и для любой предыстории s^t для $W(t), Q(t), E(t), B(t)$ выполнены уравнение баланса энергии и принцип диссипации.

Приведем принцип диссипации к более удобному для дальнейшего использования виду. Введем в рассмотрение новую величину, называемую *энтропией*, при помощи равенства:

$$\dot{H}(t) = B(t)/\theta(t). \quad (3)$$

Понятно, что из (3) значения $H(t)$ находятся точно до произвольного постоянного слагаемого.

После введения энтропии неравенство диссипации принимает вид:

$$\theta\dot{H} \geq Q. \quad (4)$$

Используя уравнение баланса энергии, исключим Q из неравенства (4). Введем в рассмотрение так называемую *свободную энергию*

$$F = E - \theta H. \quad (5)$$

Имеем $\dot{F} = \dot{E} - \dot{\theta}H - \theta\dot{H}$, но $\dot{E} = W + Q$, следовательно,

$$\dot{F} = W + Q - \dot{\theta}H - \theta\dot{H},$$

откуда на основании (4) получаем:

$$\dot{F} - W + \dot{\theta}H \leq 0. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении уравнения баланса энергии неравенства (4), (6) эквивалентны.

Неравенство (6) называют *приведенным принципом диссипации*.

Выполненные преобразования позволяют сформулировать так называемый эффективный принцип термодинамически допустимого детерминизма. Он состоит в том, что

$$W(t) = \mathcal{W}(s^t), \quad F(t) = \mathcal{F}(s^t), \quad H(t) = \mathcal{H}(s^t),$$

и при любом t и для любой предыстории s^t для $W(t)$, $F(t)$, $H(t)$ справедлив приведенный принцип диссипации (6).

В простейших случаях полагают, что

$$\mathcal{W}(s^t) = \mathcal{W}(s(t)), \quad \mathcal{F}(s^t) = \mathcal{F}(s(t)), \quad \mathcal{H}(s^t) = \mathcal{H}(s(t)), \quad (7)$$

т. е. W , F , H зависят только от ситуации, но не от ее предыстории.

2. Циклы. Коэффициент полезного действия *Циклом* называется процесс, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же ситуации: $s(t_2) = s(t_1)$, где $t_2 > t_1$ суть начальный и конечный моменты времени.

Понятие цикла используется, обычно, для моделирования действия тепловых машин.

В этих машинах некоторое тело Ω переводится из одной ситуации в другую путем добавления тепла, а затем путем отвода тепла возвращается в исходную ситуацию. При этом оно может совершать работу над окружающими телами, т. е. превращать в работу часть поглощенного им тепла.

Напомним, что собственной скоростью совершения работы называют величину $W = P - \dot{K}$. Это — скорость, с какой совершается работа над телом Ω . Здесь P — скорость совершения работы внешними по отношению к телу Ω силами, K — кинетическая энергия тела Ω (см. с. 74–75). Поэтому работа, производимая телом Ω за цикл, определяется формулой:

$$U = - \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt,$$

или

$$U = - \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt + [K(t_2) - K(t_1)].$$

Пусть $Q^+(t) = (|Q(t)| + Q(t))/2$ — положительная часть функции $Q(t)$, $Q^-(t) = (|Q(t)| - Q(t))/2$ — отрицательная часть функции $Q(t)$. Ясно, что $Q(t) = Q^+(t) - Q^-(t)$. Пусть далее

$$C^+ = \int_{t_1}^{t_2} Q^+(t) dt, \quad C^- = \int_{t_1}^{t_2} Q^-(t) dt.$$

Понятно, что C^+ — количество тепла, поглощенного телом за цикл, C^- — количество тепла, выделенного телом за цикл.

Интегрируя уравнение баланса энергии, получим:

$$\Delta E \equiv E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt,$$

т. е.

$$\Delta E = -U + C^+ - C^-. \quad (8)$$

Под коэффициентом полезного действия тела Ω (при заданном цикле) естественно понимать величину $e_\Omega = U/C^+$, т. е. отношение работы, произведенной телом Ω , к количеству тепла, поглощенного этим телом. При этом, конечно, предполагается, что $C^+ > 0$.

Теорема 1 (Трусделл). Пусть $C^+ > 0$, $\theta_{\min} = \min_{t_1 \leq t \leq t_2} \theta(t) > 0$, $\theta_{\max} = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \theta(t)$, $\Delta H = H(t_2) - H(t_1)$. Тогда

$$e_\Omega \leq 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} - \frac{\Delta E - \theta_{\min} \Delta H}{C^+}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) имеем:

$$e_\Omega = 1 - \frac{C^-}{C^+} - \frac{\Delta E}{C^+} = 1 - \frac{C^- + \theta_{\min} \Delta H}{C^+} - \frac{\Delta E - \theta_{\min} \Delta H}{C^+}. \quad (10)$$

Вследствие неравенства (4)

$$\Delta H \geq \int_{t_1}^{t_2} (Q/\theta) dt. \quad (11)$$

Запишем далее очевидные неравенства:

$$C^- = \int_{t_1}^{t_2} Q^- dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\theta Q^-}{\theta} dt \geq \theta_{\min} \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^-}{\theta} dt, \quad (12)$$

$$C^+ = \int_{t_1}^{t_2} Q^+ dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\theta Q^+}{\theta} dt \leq \theta_{\max} \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^+}{\theta} dt. \quad (13)$$

Используя (11)–(13), получим:

$$e_\Omega \leq 1 - \frac{\theta_{\min} \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^- + Q}{\theta} dt}{\theta_{\max} \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^+}{\theta} dt} - \frac{\Delta E - \theta_{\min} \Delta H}{C^+}, \quad (14)$$

но $Q^- + Q = Q^+$, поэтому (14) совпадает с (9). \square

Следствие 1. Пусть в рассматриваемом цикле

$$\Delta E - \theta_{\min} \Delta H \geq 0, \quad C^+ > 0. \quad (15)$$

Тогда

$$e_{\Omega} \leq 1 - \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}}. \quad (16)$$

Неравенство (16) — это оценка Карно — Клаузиуса — Кельвина.

Понятно, что если выполнены условия (7), то из определения цикла вытекает, что $\Delta E = 0$, $\Delta H = 0$, т. е. выполнено условие (15) и, следовательно, верна оценка (16).

Оценка (16) показывает, что эффективность тепловых машин зависит от отношения $\theta_{\min}/\theta_{\max}$. По возможности, оно должно быть максимальным.

Естественно попытаться выяснить, при каких условиях может достигаться максимально возможный коэффициент полезного действия, т. е. когда $e_{\Omega} = 1 - \theta_{\min}/\theta_{\max}$.

3. Циклы Карно. Введем сначала следующие определения. Процесс называется *адиабатическим*, если на его протяжении $Q \equiv 0$, процесс называется *изоэнтропическим*, если $H \equiv \text{const}$, и — *изотермическим*, если $\theta \equiv \text{const}$.

Отметим некоторые простейшие свойства указанных процессов.

1) Если процесс является адиабатическим, то $\dot{E} + \dot{K} = P$, т. е. изменение полной энергии совпадает с работой внешних сил.

2) При адиабатическом процессе $\dot{H} \geq 0$, т. е. энтропия в таком процессе не убывает.

3) Если процесс является изотермическим, то

$$H(t_2) - H(t_1) \geq \frac{1}{\theta} \int_{t_1}^{t_2} Q dt.$$

Это неравенство связывает прирост энтропии с количеством тепла, поступающего в тело Ω .

4) Если процесс изоэнтропический, то $Q \leq 0$, т. е. в изоэнтропическом процессе тепло не может быть подведено к телу, хотя может быть отведено от него. При этом, поскольку $\dot{E} \leq W$, то работа, совершенная над телом, не меньше приращения внутренней энергии.

Теорема 2. Пусть в рассматриваемом цикле $\Delta E = 0$, $\Delta H \leq 0$,

$$e_{\Omega} = 1 - \theta_{\min}/\theta_{\max}. \quad (17)$$

Тогда

$$Q^+ \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\max}} \right) = 0, \quad Q^- \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta_{\min}} \right) = 0 \text{ на } [t_1, t_2], \quad (18)$$

$$\Delta H = 0. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (8) и условия $\Delta E = 0$ вытекает, что $e_\Omega = 1 - C^-/C^+$, следовательно, (17) эквивалентно равенству:

$$C^-/C^+ = \theta_{\min}/\theta_{\max}. \quad (20)$$

Вследствие принципа диссипации, поскольку $\Delta H \leq 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta H &\geq \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q}{\theta} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^+}{\theta} dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{Q^-}{\theta} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{Q^+}{\theta} - \frac{Q^+}{\theta_{\max}} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{Q^-}{\theta_{\min}} - \frac{Q^-}{\theta} \right) dt - \frac{C^-}{\theta_{\min}} + \frac{C^+}{\theta_{\max}}, \quad (21) \end{aligned}$$

откуда на основании (20) можем написать, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{Q^+}{\theta} - \frac{Q^+}{\theta_{\max}} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{Q^-}{\theta_{\min}} - \frac{Q^-}{\theta} \right) dt \leq 0.$$

Подынтегральные выражения в этом неравенстве, очевидно, неотрицательны, следовательно, равенства (18) выполнены. Вновь используя (21) и учитывая (18), получаем, что $\Delta H \geq 0$, т. е. и (19) выполнено. \square

Циклы, для которых выполнены условия (18), (19), называют *обратимыми циклами Карно*.

Выполнение условий (18), как нетрудно видеть, означает, что в каждой точке отрезка $[t_1, t_2]$ выполнено одно из следующих условий:

- 1) $Q = 0$,
- 2) $Q^+ = 0$, $\theta = \theta_{\min}$,
- 3) $Q^- = 0$, $\theta = \theta_{\max}$.

Таким образом, обратимый цикл Карно состоит из участков трех различных типов: адиабатические участки, когда тело оказывается теплоизолированным; изотермические участки при минимальной температуре, на этих участках тело отдает тепло; изотермические участки при максимальной температуре, на этих участках тело получает тепло.

Укажем еще одно необходимое условие достижения максимального значения коэффициента полезного действия.

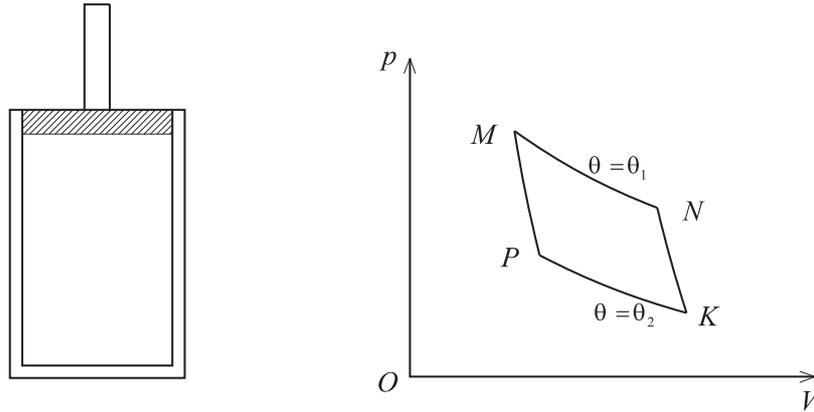


Рис. 3. Цикл Карно.

Теорема 3. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда

$$\Delta H = 0, \quad \theta \dot{H} = Q \text{ на } [t_1, t_2], \quad (22)$$

т. е. тепловая грань достигается в каждой точке отрезка $[t_1, t_2]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство в (22) уже доказано. Используя (21), (18), (20), получим:

$$0 = \Delta H = \int_{t_1}^{t_2} \dot{H} dt = \int_{t_1}^{t_2} (Q/\theta) dt,$$

следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\dot{H} - Q/\theta) dt = 0.$$

На основании принципа диссипации $\theta \dot{H} - Q \geq 0$. Таким образом, $\theta \dot{H} = Q$ всюду на отрезке $[t_1, t_2]$. \square

Простейший пример цикла Карно — это цикл, совершаемый телом, для которого ситуация, кроме температуры, определяется лишь одним параметром — объемом. В качестве такой среды можно рассматривать совершенный газ (см. с. 84), подчиняющийся уравнению Клайперона: $p = (mRT)/V$, m — масса газа ($m/V = \rho$ — плотность газа).

Из произвольной точки $M = (p_0, V_0)$, характеризующей состояние тела, газ бесконечно медленно расширяется при постоянной температуре θ_1 (т. е. по изотерме) до состояния N (см. рис. 3). Затем газ расширяется адиабатически до состояния K с температурой $\theta_2 < \theta_1$

и от состояния K сжимается изотермически до состояния P , из которого возвращается по адиабате в первоначальное состояние M .

Система, совершающая цикл Карно, есть некая модель тепловой машины, осуществляемая, например, следующим образом. Определенный объем газа с температурой θ_1 помещается в цилиндр с неподвижным дном. С противоположной стороны газ уравновешен подвижным поршнем (см. рис. 3). Сначала надо заставить газ расширяться от M до N при $\theta = \theta_1$. Для этого стенки цилиндра и поршень теплоизолируют, а хорошо проводящее тепло дно приводят в соприкосновение с нагревателем — телом большой теплоемкости с постоянной температурой θ_1 . Затем проводят расширение газа, уменьшая вес поршня так, чтобы поршень медленно поднимался, а температура газа успевала сравниться с температурой нагревателя, оставаясь все время равной θ_1 . Как только будет достигнуто состояние N , нагреватель удаляют, изолируют дно цилиндра и, продолжая медленно уменьшать вес поршня, позволяют газу адиабатически расширяться до состояния K . Затем изоляцию дна удаляют и приводят его в контакт с телом бесконечно большой теплоемкости и температурой θ_2 (холодильником). После этого вес поршня медленно увеличивают, заставляя газ сжиматься, но так, чтобы его температура успевала сравниться с температурой холодильника. Таким образом доходят до состояния P . Затем холодильник удаляют, дно изолируют и, продолжая медленно нагружать поршень, подвергают газ адиабатическому сжатию до состояния M .

Понятно, что в точности такой процесс на практике не осуществим, и он может служить лишь идеализированной моделью тепловой машины.

4. Классические уравнения состояния. Линейное трение. Термодинамические потенциалы. Проиллюстрируем ограничения, какие накладывает приведенное неравенство диссипации на определяющие соотношения.

Будем предполагать, что свободная энергия и энтропия являются функциями текущего значения ситуации (но не предыстории):

$$F(t) = \mathcal{F}(s(t)), \quad H = \mathcal{H}(s(t)). \quad (23)$$

Будем считать также, что собственная скорость совершения работы есть квадратичная функция скоростей изменения параметров $r_\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$, т. е.

$$W = - \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha(s) \dot{r}_\alpha - \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta}(s) \dot{r}_\alpha \dot{r}_\beta. \quad (24)$$

Параметры $\omega_\alpha(s)$ называют *термодинамическими давлениями*, а $\omega_{\alpha\beta}(s)$ — *давлениями трения*. Среда, для которых выполнено представление (24), называют средами с линейным трением.

Например, именно такое представление допускает W при однородной деформации некоего объема линейно-вязкой жидкости с равномерно распределенной плотностью. Действительно, для линейно-вязкой жидкости тензор напряжений определяется равенством:

$$T = -pE + \lambda' \operatorname{tr}(D)E + 2\mu\tilde{D}, \quad (25)$$

где $\lambda' = \lambda + (2/3)\mu$ — объемный коэффициент вязкости, $\lambda = \lambda(\rho, \theta)$, $\mu = \mu(\rho, \theta)$ ¹⁾, $\tilde{D} = D - (1/3) \operatorname{tr}(D)E$ — так называемый *девиатор* тензора скоростей деформации D . При однородной деформации жидкости имеем:

$$W = \int_{\Omega(t)} w dx = \int_{\Omega(t)} T \cdot D dx = V(t) T \cdot D,$$

где $V(t) = \operatorname{mes} \Omega(t)$. Элементарные вычисления показывают, что

$$T \cdot D = -p \operatorname{div} v + \lambda' (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\tilde{D}^2),$$

причем вследствие уравнения неразрывности $\operatorname{div} v = -\dot{\rho}/\rho$. При однородном движении $\rho = \rho(t)$, следовательно, $\rho(t) = M/V(t)$, $M = \operatorname{const}$ суть масса тела. Нетрудно подсчитать, что $\operatorname{div} v = \dot{V}/V$, поэтому

$$W = -p\dot{V} + \lambda'\dot{V}^2/V + 2\mu V \operatorname{tr}(\tilde{D}^2). \quad (26)$$

Отметим, что наиболее просто выглядит W в случае идеальной (невязкой) жидкости, когда $\lambda' = 0$, $\mu = 0$:

$$W = -p\dot{V},$$

т. е. W — линейная функция скорости изменения объема.

Вообще, для линейно-вязкой жидкости, учитывая, что

$$\operatorname{tr}(\tilde{D}^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

где λ_i — собственные числа тензора \tilde{D} , можно считать, что W есть квадратичная функция аргументов \dot{V} , λ_1 , λ_2 , λ_3 .

¹⁾Мы предполагаем здесь, что параметры λ , μ зависят не только от плотности, но и от температуры жидкости.

Теорема 4. Пусть F, H, W определены соотношениями (23), (24). Тогда

$$\mathcal{H}(\theta, r) = -\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta}, \quad (27)$$

$$\omega_\alpha(\theta, r) = -\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad (28)$$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta}(\theta, r) t_\alpha t_\beta \leq 0 \quad \forall t_1, \dots, t_k, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \omega_\alpha(\theta, r)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{H}(\theta, r)}{\partial r_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая приведенное неравенство диссипации, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta} + \mathcal{H}(\theta, r) \right) \dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} + \omega_\alpha(\theta, r) \right) \dot{r}_\alpha + \\ + \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta}(\theta, r) \dot{r}_\alpha \dot{r}_\beta \leq 0. \end{aligned} \quad (31)$$

В соответствии с эффективным принципом термодинамически допустимого детерминизма неравенство (31) должно выполняться для любой предыстории s^t , следовательно, $\dot{\theta}, \dot{r}_\alpha, \alpha = 1, \dots, k$, могут принимать любые значения. Полагая, что $\dot{r}_\alpha = 0, \alpha = 1, \dots, k$, а $\dot{\theta} \neq 0$, получим, что выполнено (27) и, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} + \omega_\alpha(\theta, r) \right) t_\alpha + \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta}(\theta, r) t_\alpha t_\beta \leq 0$$

для любых вещественных t_1, \dots, t_k . Заменяя в этом неравенстве t_α на τt_α , где τ — произвольное вещественное число, получим, что

$$\tau \sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} + \omega_\alpha(\theta, r) \right) t_\alpha + \tau^2 \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta}(\theta, r) t_\alpha t_\beta \leq 0. \quad (32)$$

Выражение в правой части последнего неравенства — квадратный трехчлен относительно τ . Он может быть неотрицательным при любом τ , лишь при условии, что его дискриминант неположителен, т. е.,

когда

$$\sum_{\alpha=1}^k \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} + \omega_\alpha(\theta, r) \right) t_\alpha = 0.$$

Вследствие произвольности t_1, \dots, t_k отсюда вытекает справедливость (28). Используя теперь (32), получим (29). Равенство (30) есть очевидное следствие (27), (28). \square

Соотношения (27), (28) можно интерпретировать следующим образом: свободная энергия F есть *термодинамический потенциал* в том смысле, что

$$-(\mathcal{H}(\theta, r), \omega_\alpha(\theta, r)) = \nabla \mathcal{F}(\theta, r).$$

Отметим, что если функция $\mathcal{H}(\theta, r)$ имеет обратную по переменной θ , то внутреннюю энергию E можно считать функцией параметров H, r_1, \dots, r_k , иными словами,

$$E = \mathcal{E}(H, r) = \mathcal{F}(\theta(H, r), r) + \theta(H, r)H.$$

При этом

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial H} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} + \frac{\partial \theta}{\partial H} H + \theta.$$

Вследствие (27) имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial H} = -H \frac{\partial \theta}{\partial H},$$

т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}(H, r)}{\partial H} = \theta(H, r). \quad (33)$$

Аналогично, с использованием (28) получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(H, r)}{\partial r_\alpha} = -\omega_\alpha(H, r), \quad (34)$$

т. е.

$$(\theta(H, r), -\omega_\alpha(H, r)) = \nabla \mathcal{E}(H, r).$$

Таким образом, внутренняя энергия также является термодинамическим потенциалом.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда справедливы следующие представления для тепловой грани и скорости подвода тепла:

$$B = \left(-\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta^2} \dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \omega_\alpha(\theta, r)}{\partial \theta} \dot{r}_\alpha \right) \theta, \quad (35)$$

$$Q = B + \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta} \dot{r}_\alpha \dot{r}_\beta. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $B = \theta \dot{H}$. Используя (27), а затем (28), получим:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta^2} \dot{\theta} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta \partial r_\alpha} \dot{r}_\alpha = \\ &= -\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta^2} \dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \omega_\alpha(\theta, r)}{\partial \theta} \dot{r}_\alpha, \end{aligned}$$

т. е. (35) доказано. Далее, $E = F + \theta H$, следовательно,

$$\dot{E} = \dot{F} + \dot{\theta} H + \theta \dot{H} = \dot{F} + \dot{\theta} H + B,$$

но в силу (27), (28)

$$\dot{F} = \frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial \mathcal{F}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} \dot{r}_\alpha = -H \dot{\theta} - \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha \dot{r}_\alpha,$$

откуда

$$\dot{E} = B - \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha \dot{r}_\alpha.$$

Вследствие уравнения баланса энергии и соотношения (24) можем написать теперь, что

$$Q = \dot{E} - W = B - \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha \dot{r}_\alpha - W = B + \sum_{\alpha, \beta=1}^k \omega_{\alpha\beta} \dot{r}_\alpha \dot{r}_\beta. \quad \square$$

Поскольку в соответствии с принципом диссипации $Q \leq B$, равенство (36) позволяет разбить все тела, описываемые соотношениями (23), (24), на три класса.

I. Матрица $\{\omega_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^k$ тождественно равна нулю. В этом случае $Q \equiv B$.

II. Матрица $-\{\omega_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^k$ положительно определена, т. е. $Q = B$ лишь при условии, что $r_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, \dots, k$, иными словами, когда ситуация не меняется. В противном случае $Q < B$.

III. Матрица $-\{\omega_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^k$ неотрицательна. В этом случае равенство $Q = B$ может выполняться в некоторых процессах.

Вследствие (23) выполнены условия: $\Delta E = 0$, $\Delta H = 0$, поэтому на основании теорем 2, 3 для тел класса II ни в каком цикле Карно не может достигаться максимум коэффициента полезного действия.

Вывод вполне естественен. Трение снижает коэффициент полезного действия.

Отметим, что для линейно-вязкой жидкости (см. с. 96) условие положительной определенности матрицы $-\{\omega_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1}^k$ эквивалентно тому, что

$$\mu > 0 \text{ и } \lambda' = \lambda + (2/3)\mu > 0. \quad (37)$$

Таким образом, для вязкой жидкости в цикле Карно максимальный коэффициент полезного действия не может достигаться, в то время как для идеальной жидкости — может.

ЗАМЕЧАНИЕ. Важно подчеркнуть, что теорема 4 устанавливает связи термодинамических давлений ω_α с потенциалами (свободной или полной энергией), в то время как давления трения $\omega_{\alpha\gamma}$ определяются независимо, но так, чтобы образуемая ими матрица была отрицательно полуопределена.

5. Среда без трения. Рассмотрим более подробно следствия из условий (23), (24) при $\omega_{\alpha\beta} = 0$, $\alpha, \beta = 1, \dots, k$, т. е. для случая отсутствия трения. Напомним, что в этом случае $Q = B = \theta \dot{H}$, следовательно,

$$Q = K_r(s)\dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k L_{r_\alpha}(s)\dot{r}_\alpha, \quad (38)$$

где

$$K_r(s) = \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial \theta}, \quad L_{r_\alpha}(s) = \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial r_\alpha}, \quad (39)$$

т. е. скорость подвода тепла есть линейная функция скорости изменения ситуации. Величина $K_r(s)$ называется теплоемкостью при постоянном r , а $L_{r_\alpha}(s)$ — скрытой теплотой по отношению к r_α .

Можно написать, что $(K_r(s)/\theta, L_{r_1}(s)/\theta, \dots, L_{r_k}(s)/\theta) = \nabla \mathcal{H}(s)$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{K_r(s)}{\theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{L_{r_\alpha}(s)}{\theta} \right), \text{ или } \frac{\partial K_r(s)}{\partial r_\alpha} = \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{L_{r_\alpha}(s)}{\theta} \right).$$

Далее, поскольку $E = F + \theta H$, то, используя (27), получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(s)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{F}(s)}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial \theta} + \mathcal{H}(s) = \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial \theta} = K_r(s),$$

т. е.

$$K_r(s) = \frac{\partial \mathcal{E}(s)}{\partial \theta}. \quad (40)$$

Кроме того, вследствие (39), (30) и (28)

$$L_{r_\alpha}(s) = \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial r_\alpha} = \theta \frac{\partial \omega_\alpha(s)}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}(s)}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial \mathcal{F}(s)}{\partial r_\alpha} + \theta \frac{\partial \mathcal{H}(s)}{\partial r_\alpha} = -\omega_\alpha(s) + \theta \frac{\partial \omega_\alpha(s)}{\partial \theta}.$$

Таким образом, имеем две формулы:

$$L_{r_\alpha}(s) = \omega_\alpha(s) + \frac{\partial \mathcal{E}(s)}{\partial r_\alpha}, \quad L_{r_\alpha}(s) = \theta \frac{\partial \omega_\alpha(s)}{\partial \theta}, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (41)$$

Если функции $\omega_\alpha(\theta, r_1, \dots, r_k)$ обратимы относительно параметров r_1, \dots, r_k , то можно считать, что

$$Q = K_\omega(\theta, \omega) \dot{\theta} + \sum_{\alpha=1}^k L_{\omega_\alpha}(\theta, \omega) \dot{\omega}_\alpha, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k). \quad (42)$$

Величину $K_\omega(\theta, \omega)$ называют теплоемкостью при постоянном ω , а $L_{\omega_\alpha}(\theta, \omega)$ — скрытой теплотой по отношению к ω_α .

Из очевидного равенства

$$\dot{\omega}_\alpha(\theta, r) = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \theta} + \sum_{\beta=1}^k \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial r_\beta} \dot{r}_\beta$$

непосредственно вытекают следующие формулы:

$$K_\omega - K_r = - \sum_{\alpha=1}^k L_{\omega_\alpha} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \theta}, \quad L_{r_\alpha} = \sum_{\beta=1}^k L_{\omega_\beta} \frac{\partial \omega_\beta}{\partial r_\alpha}. \quad (43)$$

Теорема 6 (Клаузиус). Для того, чтобы внутренняя энергия являлась функцией только температуры необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\omega_\alpha = L_{r_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (41) равенства (44) эквивалентны условиям:

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\theta, r)}{\partial r_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

а это и означает, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta)$. \square

Теорема 7. Для того, чтобы внутренняя энергия являлась функцией только температуры необходимо и достаточно справедливости следующих представлений:

$$\omega_\alpha(\theta, r) = f_\alpha(r)\theta, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$\mathcal{E}(\theta, r) = \frac{\partial(\vartheta\mathcal{F}(\theta, r))}{\partial\vartheta}, \quad (46)$$

где $\vartheta = 1/\theta$. Для этого заметим, что $\vartheta\mathcal{E} = \vartheta\mathcal{F} + \mathcal{H}$, следовательно,

$$\mathcal{E} + \vartheta\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\vartheta\mathcal{F}) + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vartheta}, \quad (47)$$

но

$$\vartheta\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{\theta^3}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta}, \quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vartheta} = -\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta},$$

т. е. (46) эквивалентно равенству:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta} = \theta\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}.$$

Используя (27) и (5), получим:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\theta} = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\theta} + H + \theta\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} = \theta\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta},$$

следовательно, равенство (46) доказано. На основании (28) можно написать:

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\vartheta\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial r_\alpha} \right) = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\vartheta\omega_\alpha).$$

Таким образом, для того, чтобы внутренняя энергия зависела только от θ необходимо и достаточно, чтобы функции $\vartheta\omega_\alpha$ зависели только от r , иными словами, должны быть выполнены представления:

$$\omega_\alpha = f_\alpha(r)\theta, \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad \square \quad (48)$$

6. Термодинамический газ и его свойства. Рассмотрим подробнее простейший случай, когда единственным параметром, определяющим ситуацию (кроме температуры θ), является V — объем тела. Соответствующее термодинамическое давление ω есть давление газа. Таковую среду принято называть *термодинамическим газом*. Совершенным газом называют термодинамический газ, для которого выполняется уравнение состояния Клайперона:

$$pV = R\theta, \quad (49)$$

где $R = \text{const}$. Это соотношение часто записывают так: $p = \sigma\rho\theta$, где $\sigma = R/M$, $M = \text{const}$ — масса тела, σ — газовая постоянная.

Теорема 8. Если над термодинамическим газом совершается адиабатический процесс, то

$$\dot{p} = \gamma \frac{\partial p}{\partial V} \dot{V}, \quad (50)$$

где $\gamma = K_p/K_V$ — отношение теплоемкостей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (43) имеем $L_V = L_p \partial p / \partial V$. Полагая в $Q = 0$ формулах (38), (42), получим: $K_V \dot{\theta} = -L_V \dot{V}$, $K_p \dot{\theta} = -L_p \dot{p}$, т. е. $\gamma = K_p/K_V = \dot{p}/(\dot{V}/(\partial p/\partial V))$. \square

Теорема 9. Для совершенного термодинамического газа

$$E = \mathcal{E}(\theta), \quad K_V = \mathcal{E}'(\theta), \quad L_V = p, \quad K_p - K_V = R. \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рассматриваемого случая

$$p = (R/V)\theta, \quad (52)$$

т. е. выполнено соотношение (48), поэтому $E = \mathcal{E}(\theta)$. Равенство (40) в рассматриваемом случае записывается в виде: $K_V = \mathcal{E}'(\theta)$. Соотношение $L_V = p$ следует из (41), так как $\partial \mathcal{E} / \partial V = 0$. Для доказательства формулы $K_p - K_V = R$ воспользуемся (43). Получим:

$$K_p - K_V = -\frac{\partial p}{\partial \theta} L_p, \quad L_V = L_p \frac{\partial p}{\partial V},$$

т. е.

$$K_p - K_V = -\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) p \bigg/ \frac{\partial p}{\partial V},$$

откуда, используя (52), приходим к требуемому равенству. \square

Теорема 10. В адиабатическом процессе для совершенного термодинамического газа

$$\frac{\dot{p}}{p} + \gamma \frac{\dot{V}}{V} = 0, \quad \frac{\dot{\theta}}{\theta} = (1 - \gamma) \frac{\dot{V}}{V}, \quad (53)$$

причем $\gamma = K_p/K_V$ зависит только от θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (50) и учитывая, что вследствие (52) $\partial p / \partial V = -p/V$, получаем первое равенство (53). Далее, из (52) следует, что $\dot{\theta} = (\dot{p}V + p\dot{V})/R$, или $\dot{\theta}/\theta = \dot{p}/p + \dot{V}/V$, откуда вследствие первого равенства (53) вытекает второе равенство (53). То, что γ зависит только от θ , непосредственно вытекает из теоремы 9. Действительно, из (51) следует, что $\gamma = 1 + R/K_V = 1 + R/\mathcal{E}'(\theta)$. \square

Следствие 2. В адиабатическом процессе для совершенного термодинамического газа объем связан с температурой следующим соотношением:

$$\frac{V}{V_0} = \exp \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\xi}{\xi(1-\gamma(\xi))}, \quad (54)$$

где V_0, θ_0 — постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (54) сразу вытекает из того, что второе равенство (53) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{V}{\theta(1-\gamma(\theta))}. \quad \square$$

При постоянных теплоемкостях K_V, K_p из (54), (52) непосредственно вытекает закон адиабатического изменения Пуассона:

$$V\theta^{1/(\gamma-1)} = \text{const}, \quad p\theta^{-\gamma/(\gamma-1)} = \text{const}, \quad pV^\gamma = \text{const}. \quad (55)$$

Отметим также, что при постоянных теплоемкостях

$$\mathcal{E} = K_V\theta, \quad K_V = \text{const}, \quad (56)$$

т. е. внутренняя энергия пропорциональна температуре. При этом, конечно, полагают, что $\mathcal{E}(0) = 0$.

Теорема 11. Для совершенного термодинамического газа

$$\mathcal{H}(V, \theta) = R \ln \frac{V}{V_0} + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{K_V(\xi)}{\xi} d\xi,$$

где $V_0, \theta_0 = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (30), (52) вытекает, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial V} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{R}{V}.$$

Далее, из (39) получаем, что $\partial \mathcal{H} / \partial \theta = K_V / \theta$, причем $K_V = K_V(\theta)$ по теореме 9, следовательно,

$$\mathcal{H}(V, \theta) = \int_{V_0}^V \frac{R}{\xi} d\xi + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{K_V(\xi)}{\xi} d\xi. \quad \square \quad (57)$$

Для совершенного термодинамического газа при постоянных теплоемкостях

$$\mathcal{H}(V, \theta) = K_V \ln(pV^\gamma) + \text{const.}$$

Действительно, вычисляя интегралы в (57), получим:

$$\mathcal{H}(V, \theta) = R \ln V + K_V \ln \theta + \text{const},$$

но $\theta = pV/R$, $R + K_V = K_p$, $\gamma = K_p/K_V$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(V, \theta) &= (R + K_V) \ln V + K_V \ln p + \text{const} = \\ &= K_V(\ln p + \gamma \ln V) + \text{const} = K_V \ln(pV^\gamma) + \text{const}. \end{aligned}$$

§ 6. Уравнения неизотермического течения вязкой жидкости

Выпишем систему уравнений механики сплошной среды, считая тело линейно-вязкой жидкостью (см. с. 82, 84, 96):

$$\rho \dot{v} = \text{div } T + \rho b, \quad (1)$$

$$T = -pE + \lambda' \text{div } vE + 2\mu \tilde{D}, \quad (2)$$

$$\dot{\rho} + \rho \text{div } v = 0, \quad (3)$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = \text{div } h + w + \rho s, \quad w = T \cdot D, \quad (4)$$

$$w = -p \text{div } v + \lambda' (\text{div } v)^2 + 2\mu \text{tr}(\tilde{D}^2). \quad (5)$$

Полагают, что $\lambda' = \lambda'(\rho, \theta)$, $\mu = \mu(\rho, \theta)$, $p = p(\rho, \theta)$, $\theta = \theta(x, t)$ — температура в точке x в момент времени t . Напомним, что в этой системе известными считаются плотность массовых сил $b = b(x, t)$ и $s = s(x, t)$, т. е. плотность внешних источников тепла, распределенных в теле. Предполагаются также известными зависимости коэффициентов объемной и сдвиговой вязкости, т. е. λ' и μ от ρ и θ (обычно, они определяются экспериментально). Все остальные функции должны быть найдены в результате решения системы уравнений (1)–(5).

Нетрудно видеть, что эта система не является полной (неизвестных функций — десять, уравнений — пять) и, следовательно, нужны дополнительные, определяющие, соотношения.

Начнем с соотношения, связывающего вектор теплового потока h с температурой. Обычно полагают выполненным *закон теплопроводности Фурье*, т. е. вектор h считают линейной функцией градиента температуры:

$$h = K \nabla \theta, \quad (6)$$

где $K = K(p, \theta)$ — тензор теплопроводности. При этом предполагается выполненным условие симметрии и положительной определенности тензора $K(p, \theta)$. Это условие означает, как нетрудно убедиться, что тепло не может перетекать в направлении возрастания температуры (см. ниже упражнение 6.1).

В простейшем случае изотропной среды

$$h = k\nabla\theta, \quad (7)$$

где $k = k(p, \theta)$ — положительная скалярная функция, называемая коэффициентом теплопроводности.

Использование закона Фурье снижает число неизвестных функций до семи. В качестве двух соотношений, замыкающих систему уравнений (1)–(5), используются *термическое уравнение состояния*:

$$p = p(\rho, \theta), \quad (8)$$

связывающее давление, плотность и температуру в каждой точке сплошной среды, и *калорическое уравнение состояния*:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, \theta), \quad (9)$$

выражающее плотность внутренней энергии через плотность и температуру.

Конкретный вид соотношений (8), (9) определяется свойствами рассматриваемого тела, но, в то же время, они должны подчиняться общим закономерностям, отражающим постулаты термодинамики.

ЗАМЕЧАНИЕ. В простейших ситуациях зависимости давления и внутренней энергии от плотности и температуры задаются аналитическими выражениями, но для более сложных сред, обычно, используют соответствующие таблицы.

Как и раньше, обозначаем через M , V , E , H , F массу, объем, внутреннюю энергию, энтропию, свободную энергию тела соответственно. И пусть $\vartheta = V/M = 1/\rho$, $\varepsilon = E/M$, $\eta = H/M$, $\psi = F/M$, т. е. ϑ есть удельный объем, ρ — плотность, η — энтропия на единицу массы (в дальнейшем называемая просто энтропией), ψ — свободная энергия на единицу массы (или просто — свободная энергия).

Постулируется возможность распространения соотношений, полученных для однородных процессов, на соответствующие плотности полей, описывающих произвольные движения. В частности, по аналогии с соотношениями (27), (29), с. 97, (33), (34), с. 98, считают, что

$$\eta = -\frac{\partial\psi(\theta, \vartheta)}{\partial\theta}, \quad p = -\frac{\partial\psi(\theta, \vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad (10)$$

$$\theta = \frac{\partial\varepsilon(\vartheta, \eta)}{\partial\eta}, \quad p = -\frac{\partial\varepsilon(\vartheta, \eta)}{\partial\vartheta}. \quad (11)$$

В этом случае уравнение энергии можно записать так:

$$\rho\theta\dot{\eta} = \operatorname{div} h + w + \rho s.$$

Калорическое уравнение состояния должно быть задано в виде:

$$\eta = \eta(\rho, \theta).$$

Наиболее просто система (1)–(5) выглядит в случае, когда среду можно считать термодинамическим совершенным газом при постоянных теплоемкостях. В этих предположениях

$$p = \sigma\rho\theta, \quad \varepsilon = c_v\theta, \quad \sigma, c_v = \text{const},$$

и, например, уравнение энергии с учетом (6) принимает вид:

$$\rho c_v \dot{\theta} = \operatorname{div}(K\nabla\theta) + w + \rho s. \quad (12)$$

Упражнения.

6.1.* Пусть x — произвольная точка актуальной конфигурации тела Ω , ν — единичный вектор. Пусть $\partial\theta(x, t)/\partial\nu' > 0$, где ν' — произвольный единичный вектор, составляющий острый угол с вектором ν . Показать, что если выполнен закон Фурье (6), причем тензор K симметричен и положительно определен, то поток тепла $q(x, \nu)$ (см. (3), с. 75, (5), с. 75) положителен.

6.2.* Показать, что для идеальной жидкости ($\lambda', \mu = 0$) при отсутствии источников тепла и нулевой теплопроводности ($s, h = 0$) уравнение энергии можно представить в виде:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H v) = 0, \quad (13)$$

где $e = \rho(\varepsilon + |v|^2/2)$, $H = \varepsilon + |v|^2/2 + p/\rho$.

ГЛАВА 3 ГИДРОМЕХАНИКА

§ 1. Течения идеальной жидкости

1. Основные уравнения. Течения идеальной жидкости описываются уравнением неразрывности:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

и уравнением движения (уравнение Эйлера):

$$\rho \dot{v} = -\nabla p + \rho b, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Кроме того, привлекается уравнение энергии:

$$\rho \dot{\varepsilon} = \operatorname{div} h + \rho s + T \cdot D, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

при тех или иных предположениях термодинамического характера.

Упражнения.

1.1.* Показать, что уравнение (2) можно записать в так называемой *форме Громека – Ламба*:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v \cdot v) + 2Wv + \frac{1}{\rho} \nabla p = b, \quad (4)$$

где $W = (\nabla v - (\nabla v)^T)/2$.

1.2.* Показать, что уравнение (2) можно записать в *дивергентной* форме:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} (m \otimes m) + pE \right) = \rho b. \quad (5)$$

Здесь $m = \rho v$.

С полем скоростей в области течения жидкости обычно связывают два семейства линий.

Линией тока называют линию, в каждой точке которой касательная параллельна скорости.

Вихревой линией называют линию, в каждой точке которой касательная параллельна вихрю, т. е. $\operatorname{rot} v$, иными словами, касательная является осью тензора W .

Особенно просто уравнение (2) записывается в том случае, когда выполнены следующие условия:

1) жидкость баротропна, (см. с. 84), т. е. $p = p(\rho)$, и эта зависимость обратима: $\rho = \rho(p)$;

2) массовые силы потенциальны, иначе говоря, существует скалярная функция $\varphi = \varphi(x, t)$, $x \in \Omega(t)$, такая, что $b(x, t) = \nabla\varphi(x, t)$ (градиент берется по x);

3) движение жидкости является установившимся, т. е. $\partial v / \partial t \equiv 0$.

При выполнении этих условий уравнение (4) принимает вид:

$$\nabla\tilde{\varphi} + 2Wv = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}|v|^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} - \varphi.$$

Пусть τ — вектор касательной к линии тока, т. е. $\tau = \lambda v$. Тогда $Wv \cdot \tau = \lambda Wv \cdot v = 0$, так как тензор W кососимметричен. Из уравнения (6) при этом получаем, что $\nabla\tilde{\varphi} \cdot \tau = \partial\tilde{\varphi}/\partial\tau = 0$, т. е. функция $\tilde{\varphi}$ постоянна вдоль линии тока¹⁾.

Точно так же, если τ — вектор касательной к вихревой линии, то $W\tau = 0$, и из уравнения (6) вновь получаем, что $\partial\tilde{\varphi}/\partial\tau = 0$, т. е. функция $\tilde{\varphi}$ остается постоянной и вдоль вихревой линии.

Если течение является безвихревым в некоторой области, т. е. в некоторой области $W \equiv 0$, то, как следует из уравнения (6), функция $\tilde{\varphi}$ сохраняет постоянное значение во всей этой области.

Как правило, некоторые участки границы области течения совпадают с границами твердых тел. Принимают естественное предположение о том, что на этих участках границы нормальные составляющие скорости движения жидкости и твердого тела совпадают. Это означает, что жидкость не может проникать внутрь твердого тела.

Решение задач о течении идеальной жидкости существенно упрощается при отсутствии завихренности, т. е., когда $W = 0$. Поэтому представляется естественным познакомиться с законами образования и распространения вихревых зон.

2. Законы вихревого течения. Непосредственным следствием уравнения неразрывности является формула Бельтрами:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\text{rot } v}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} ((\nabla v) \text{rot } v + \text{rot } \dot{v}). \quad (7)$$

Действительно, на основании формулы (24), с. 57, можем написать, что:

$$\frac{1}{\rho} \text{rot } \dot{v} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \text{rot } v - \frac{1}{\rho} (\nabla v) \text{rot } v + \frac{1}{\rho} (\text{div } v) \text{rot } v.$$

¹⁾Этот факт обычно называют теоремой Бернулли.

Выражая теперь $\operatorname{div} v$ из уравнения неразрывности (1), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \dot{v} &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \operatorname{rot} v - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \operatorname{rot} v - \frac{1}{\rho} (\nabla v) \operatorname{rot} v = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} (\nabla v) \operatorname{rot} v, \end{aligned}$$

а это совпадает с (7).

Важно подчеркнуть, что формула Бельтрами справедлива для любой сплошной среды.

В дальнейшем на протяжении этого пункта будем предполагать жидкость баротропной, массовые силы потенциальными.

При этих предположениях удастся легко проследить за изменением $\operatorname{rot} v(x)$ при движении точки $x(t)$, а именно, оказывается, что¹⁾

$$\operatorname{rot} v(x, t) = \frac{\rho(x, t)}{\rho(\xi, t_0)} F(\xi, t) \operatorname{rot} v(\xi, t_0). \quad (8)$$

Здесь, как и прежде, $F(\xi, t) = \nabla \chi(\xi, t)$ — градиент отображения, переводящего отсчетную конфигурацию $\Omega(t_0)$ в актуальную конфигурацию $\Omega(t)$, $x = x(t) = \chi(\xi, t)$.

Докажем равенство (8). Заметим, прежде всего, что при сделанных нами предположениях уравнение движения (2) принимает вид:

$$\dot{v} = -\frac{\nabla p}{\rho(p)} + \nabla \varphi = \nabla \tilde{\varphi}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \int \frac{dp}{\rho(p)}, \quad (10)$$

следовательно, $\operatorname{rot} \dot{v} = 0$. Поэтому из равенства (7) вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right) = (\nabla v) \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} v,$$

откуда, используя формулу (15), с. 55, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right) = \dot{F} F^{-1} \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} v.$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right) = \frac{d}{dt} \left(F F^{-1} \frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right) = \dot{F} F^{-1} \frac{\operatorname{rot} v}{\rho} + F \frac{d}{dt} \left(F^{-1} \frac{\operatorname{rot} v}{\rho} \right),$$

¹⁾ В левой части равенства ротор вычисляется по переменной x , а в правой — по ξ .

следовательно, $F \frac{d}{dt} \left(F^{-1} \frac{\text{rot } v}{\rho} \right) = 0$, но это означает, что $F^{-1} \frac{\text{rot } v}{\rho}$ от времени не зависит. Равенство (8) есть более подробная запись этого факта. При этом надо учесть, что $F(\xi, t_0) = E$.

Из формулы (8) непосредственно вытекает

Теорема 1 (Лагранж — Коши). Если частица или тело (объем жидкости) в некоторый момент времени находятся в безвихревом движении, то и в любой другой момент времени они находятся в безвихревом движении.

Весьма наглядными и полезными характеристиками вихревого движения являются вихревые линии и *вихревые трубки*.

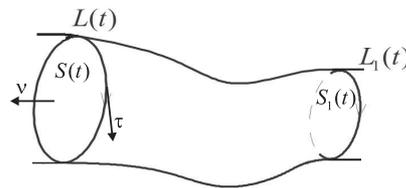


Рис. 1. Вихревая трубка.

Покажем, что при движении тела $\Omega(t)$ всякая вихревая линия переходит в вихревую линию (иными словами, вихревые линии сохраняются). Пусть $\xi = \xi(\alpha)$, $\alpha \in (a, b)$, где α — вещественный параметр, есть уравнение, определяющее вихревую линию в отсчетной конфигурации, т. е.

$$\frac{d\xi(\alpha)}{d\alpha} = \lambda(\alpha) \text{rot } v(\xi(\alpha)), \quad \alpha \in (a, b),$$

где $\lambda = \lambda(\alpha)$ — скалярная функция. Пусть, далее, $x(\alpha) = \chi(\xi(\alpha), t)$, $\alpha \in (a, b)$, — образ этой кривой в актуальной конфигурации. Применение формулы сложного дифференцирования дает:

$$\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \nabla \chi(\xi(\alpha), t) \frac{d\xi(\alpha)}{d\alpha} = F \lambda(\alpha) \text{rot } v(\xi(\alpha)).$$

Используя (8), отсюда получим:

$$\frac{dx(\alpha)}{d\alpha} = \lambda(\alpha) \frac{\rho(\xi(\alpha))}{\rho(x(\alpha))} \text{rot } v(x(\alpha)),$$

т. е. уравнение $x = x(\alpha)$, $\alpha \in (a, b)$, определяет вихревую линию в актуальной конфигурации.

Пусть $L(t)$ — замкнутый контур в $\Omega(t)$, не являющийся вихревой линией. Пусть через каждую точку этого контура проходит вихревая линия. Совокупность таких вихревых линий образует поверхность, называемую вихревой трубкой (см. рис. 1).

Обозначим через $S(t)$ поверхность, натянутую на $L(t)$, т. е. сечение вихревой трубки (см. рис. 1). *Интенсивностью* вихревой трубки называется величина

$$\Gamma = \int_{S(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx.$$

По формуле Стокса имеем:

$$\Gamma = \int_{L(t)} v \cdot \tau \, dx.$$

Направления векторов ν, τ соответствующим образом согласованы (см. с. 36). Интеграл

$$\int_{L(t)} v \cdot \tau \, dx$$

называют циркуляцией скорости.

Свойства вихревых трубок описываются теоремами Гельмгольца, к изложению которых мы и переходим.

Понятно, что одна и та же вихревая трубка может быть задана при помощи различных замкнутых контуров, расположенных на ее поверхности.

Теорема 2 (первая теорема Гельмгольца). Интенсивность вихревой трубки однозначно определяется вихревой трубкой, т. е. не зависит от выбора контура $L(t)$, ее определяющего.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим еще один контур $L_1(t)$, расположенный на вихревой трубке. Обозначим через $S(t)$ — сечение вихревой трубки, проходящее через $L(t)$, через $S_1(t)$ — сечение, проходящее через $L_1(t)$, через $S_\gamma(t)$ — боковую поверхность трубки, ограниченную $L(t)$ и $L_1(t)$, через $B(t)$ — область, ограниченную $S(t)$, $S_1(t)$, $S_\gamma(t)$. Очевидно, что

$$\int_{B(t)} \operatorname{div} \operatorname{rot} v \, dx = 0,$$

поскольку $\operatorname{div} \operatorname{rot} v \equiv 0$. С другой стороны, по формуле Остроградского — Гаусса

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(t)} \operatorname{div} \operatorname{rot} v \, dx = \\ &= \int_{S_1(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx + \int_{S_2(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx + \int_{S_\gamma(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx. \end{aligned}$$

Здесь ν — нормаль, внешняя к $B(t)$. По определению вихревой линии $\operatorname{rot} v \cdot \nu = 0$ на $S_\gamma(t)$, следовательно, согласуя направления нормалей на $S_1(t)$, $S_2(t)$, получим:

$$\int_{S_1(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx = \int_{S_2(t)} \operatorname{rot} v \cdot \nu \, dx. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 никаких предположений о свойствах сплошной среды не использует.

Теорема 3 (вторая теорема Гельмгольца). При движении $\Omega(t)$ вихревая трубка сохраняется.

Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из доказанного выше утверждения о сохранении вихревых линий.

Теорема 4 (третья теорема Гельмгольца). При движении тела $\Omega(t)$ интенсивность вихревой трубки сохраняется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить, что циркуляция скорости по любому замкнутому контуру сохраняется. Используя формулу Кельвина (38), с. 63, получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{L(t)} v \cdot \tau \, dx = \int_{L(t)} \dot{v} \cdot \tau \, dx + \int_{L(t)} (\nabla v)^T v \cdot \tau \, dx.$$

Вследствие формулы (9), с. 28, имеем: $2(\nabla v)^T v = \nabla(v \cdot v)$, поэтому по формуле Стокса¹⁾

$$\int_{L(t)} (\nabla v)^T v \cdot \tau \, dx = 0,$$

¹⁾Напомним, что $\operatorname{rot} \nabla u = 0$ для любой функции u .

т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_{L(t)} v \cdot \tau dx = \int_{L(t)} \dot{v} \cdot \tau dx.$$

Осталось учесть, что из (9) следует равенство:

$$\int_{L(t)} \dot{v} \cdot \tau dx = 0.$$

Таким образом, циркуляция скорости по $L(t)$ не зависит от t . \square

Отметим важный вывод из теоремы 4. Вихревая трубка не может ни заканчиваться, ни начинаться внутри $\Omega(t)$. В противном случае $|\text{rot } v|$ должен неограниченно возрастать в некоторой внутренней точке $\Omega(t)$, что для гладкого поля скоростей невозможно. Таким образом, вихревые трубки, либо дотягиваются до границы области течения, либо образуют замкнутые тороидальные поверхности.

Величина циркуляции скорости может использоваться для диагностики наличия вихревых трубок в области течения. Так, если циркуляция по некоторому контуру оказывается отличной от нуля, то это, очевидно, означает, что данный контур охватывает одну или несколько вихревых трубок. Правда, если циркуляция равна нулю, то это не означает отсутствия внутри контура вихревых трубок, так как их интенсивности не обязаны совпадать по знаку и могут компенсироваться.

3. Безвихревые течения несжимаемой жидкости. Исследование безвихревых течений идеальной несжимаемой жидкости сводится к хорошо изученным задачам теории уравнений с частными производными. Действительно, по предположению в этом случае $\text{rot } v = 0$ во всей области течения, следовательно, существует скалярная функция φ , потенциал скоростей, такая, что

$$v = -\nabla\varphi \quad x \in \Omega. \quad (11)$$

Вследствие несжимаемости $\text{div } v = 0$, поэтому

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in \Omega. \quad (12)$$

Таким образом, решение задач о безвихревых течениях идеальной несжимаемой жидкости сводится, в основном, к решению задач теории гармонических функций.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Течение в ограниченном сосуде с неподвижными стенками. Пусть B — ограниченная область в трехмерном пространстве, занимаемая жидкостью, Γ — граница области B . Жидкость не может протекать через Γ , поэтому $v \cdot \nu = \nabla\varphi \cdot \nu = \partial\varphi/\partial\nu = 0$ при $x \in \Gamma$. Функция φ , следовательно, есть решение однородной задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in B, \quad \partial\varphi/\partial\nu = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Хорошо известно, что единственно возможное решение этой задачи есть $\varphi = \text{const}$, т. е. $v \equiv 0$. Таким образом, жидкость при указанных условиях может только покоиться.

2. Равномерное поступательное движение тела в пространстве, заполненном однородной идеальной несжимаемой ($\rho = \text{const}$) жидкостью. Пусть скорость движения тела есть V . Свяжем с телом B декартову систему координат, совместив ось x_1 с направлением скорости.

Если не учитывать влияния движения тела на жидкость, то скорость ее в каждой точке в выбранной нами системе координат есть $-Ve_1$, где e_1 — орт оси x_1 .

Возмущение скорости движения жидкости обозначим через \tilde{v} , так что истинная скорость движения жидкости есть

$$v = -Ve_1 + \tilde{v}. \quad (13)$$

Условие непротекания жидкости через границу тела означает, что

$$v \cdot \nu = -Ve_1 \cdot \nu + \tilde{v} \cdot \nu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (14)$$

или $\tilde{v} \cdot \nu = Ve_1 \cdot \nu$.

Нетрудно видеть, что $\text{rot } \tilde{v} = \text{rot } v = 0$, $\text{div } \tilde{v} = \text{div } v = 0$. Таким образом, существует потенциал $\tilde{\varphi}$ скорости \tilde{v} , и для отыскания функции $\tilde{\varphi}$ получаем так называемую внешнюю задачу Неймана:

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0, \quad x \in B_e, \quad (15)$$

$$\partial\tilde{\varphi}/\partial\nu = Ve_1 \cdot \nu, \quad x \in \Gamma. \quad (16)$$

Здесь B_e — дополнение \bar{B} до всего пространства.

Естественно считать, что движение тела не вызывает возмущений на достаточном удалении от него, т. е. функция $\tilde{\varphi}$ равномерно стремится к нулю на бесконечности. Как известно, при этом предположении задача (15), (16) имеет единственное решение.

Зная $v = -Ve_1 + \tilde{v}$, распределение давления можно найти, привлекая уравнение Эйлера. При этом будем считать, что движение

жидкости является установившимся, т. е. $\partial v / \partial t = 0$, массовые силы отсутствуют, т. е. $b = 0$. Записывая ускорение \dot{v} в форме Громека — Ламба (см. (23), с. 57) и учитывая, что движение является безвихревым, т. е. $W = 0$, как следствие уравнения Эйлера (2) получим:

$$-\nabla p = \frac{\rho}{2} \nabla(v \cdot v),$$

т. е.

$$p(x) = -\frac{\rho}{2} |v|^2 + \text{const}, \quad x \in B_e. \quad (17)$$

Явные формулы для $\tilde{\varphi}$, а, следовательно, для v и p можно получить лишь для тел простейшей формы.

Например, в случае, когда B есть шар, задача (15), (16) легко решается методом разделения переменных в сферической системе координат. Решение, представленное в декартовых координатах, имеет вид:

$$\tilde{\varphi}(x) = -V \frac{a^3}{2|x|^3} x_1, \quad (18)$$

где a — радиус шара; начало координат расположено в центре шара.

Упражнение 1.3.* Получить формулу (18).

Теорема 5. Равнодействующая сил, приложенных к телу произвольной формы, равна нулю, т. е.

$$F = \int_{\Gamma} p \nu dx = 0. \quad (19)$$

Иными словами, тело при установившемся движении в идеальной несжимаемой жидкости не испытывает сопротивления¹⁾.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (22), с. 57, и учитывая, что движение является установившимся, массовые силы отсутствуют, запишем уравнение Эйлера в виде:

$$\rho(\nabla v)v + \nabla p = 0, \quad x \in B_e. \quad (20)$$

Пусть D_R — шар радиуса R с центром в начале координат, включающий в себя область B , S_R — граница шара. Положим $B_R = D_R \setminus \bar{B}$. Поскольку $\rho = \text{const}$, $\text{div } v = 0$, то интегрируя обе части уравнения (20) по B_R и применяя формулы (35), (36), с. 36, получим:

$$\rho \int_{\Gamma} (v \cdot \nu) v dx + \rho \int_{S_R} (v \cdot \nu) v dx + \int_{\Gamma} p \nu dx + \int_{S_R} p \nu dx = 0. \quad (21)$$

¹⁾Этот результат представляет собой так называемый парадокс Даламбера, показывающий ограниченность модели идеальной жидкости при описании обтекания твердых тел.

Причем вследствие условия (14) первое слагаемое левой части равенства (21) обращается в нуль. Таким образом,

$$F = -\rho \int_{S_R} (v \cdot \nu) v dx - \int_{S_R} p \nu dx. \quad (22)$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что

$$\int_{S_R} (v \cdot \nu) v dx \rightarrow 0, \quad \int_{S_R} p \nu dx \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Заметим, что вследствие (13)

$$\int_{S_R} (v \cdot \nu) v dx = -V \int_{S_R} (v \cdot \nu) dx e_1 + \int_{S_R} (v \cdot \nu) \tilde{v} dx = \int_{S_R} (v \cdot \nu) \tilde{v} dx,$$

так как по формуле Остроградского — Гаусса

$$\int_{S_R} (v \cdot \nu) dx = \int_{B_R} \operatorname{div} v dx - \int_{\Gamma} v \cdot \nu dx = 0.$$

Далее, в силу (17)

$$\int_{S_R} p \nu dx = -\frac{\rho}{2} \int_{S_R} |v|^2 \nu dx.$$

Значение постоянного слагаемого в формуле (17) здесь не существенно, так как интеграл от единичной нормали по любой замкнутой поверхности равен нулю (докажите!).

Таким образом, доказательство равенства (19) сведено к исследованию интегралов

$$I_1 = \int_{S_R} (v \cdot \nu) \tilde{v} dx, \quad I_2 = \int_{S_R} |v|^2 \nu dx.$$

Нетрудно видеть, что

$$|I_1| \leq \int_{S_R} (|\tilde{v}| + V) |\tilde{v}| dx = \int_{S_R} |\tilde{v}|^2 dx + V \int_{S_R} |\tilde{v}| dx,$$

а

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{S_R} |v|^2 \nu dx = \int_{S_R} (-V e_1 + \tilde{v}) \cdot (-V e_1 + \tilde{v}) \nu dx = \\
&= V^2 \int_{S_R} \nu dx - 2V \int_{S_R} \tilde{v} \cdot e_1 \nu dx + \int_{S_R} \tilde{v} \cdot \tilde{v} \nu dx = \\
&= -2V \int_{S_R} \tilde{v} \cdot e_1 \nu dx + \int_{S_R} \tilde{v} \cdot \tilde{v} \nu dx,
\end{aligned}$$

т. е.

$$|I_2| \leq 2V \int_{S_R} |\tilde{v}| dx + \int_{S_R} |\tilde{v}|^2 dx.$$

Вспомним, что $\tilde{v} = \nabla \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi}$ — решение задачи (15), (16). Таким образом, осталось доказать, что

$$\int_{S_R} |\nabla \tilde{\varphi}| dx \rightarrow 0, \quad \int_{S_R} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Пусть $R_0 \in (0, R)$ выбрано так, что $B \subset D_{R_0}$. Интегрируя обе части уравнения (15) по области B_{R_0} и используя затем формулу Остроградского — Гаусса, получим:

$$V \int_{\Gamma} e_1 \cdot \nu dx + \int_{S_{R_0}} \partial \tilde{\varphi} / \partial \nu dx = 0.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\int_{\Gamma} e_1 \cdot \nu dx = 0,$$

следовательно, и

$$\int_{S_{R_0}} \partial \tilde{\varphi} / \partial \nu dx = 0.$$

Поэтому функцию $\tilde{\varphi}(x)$ при $|x| > R_0$ можно трактовать как решение внешней задачи Неймана:

$$\Delta \tilde{\varphi} = 0, \quad |x| > R_0, \quad (24)$$

$$\partial \tilde{\varphi} / \partial \nu = u^+, \quad |x| = R_0, \quad (25)$$

где функция u^+ удовлетворяет условию:

$$\int_{S_{R_0}} u^+ dx = 0. \quad (26)$$

Записывая решение задачи (24), (25) в виде разложения по сферическим функциям (см., например, [6, с. 425]), получим вследствие (26):

$$\tilde{\varphi}(x) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{R_0}{l+1} \left(\frac{R_0}{|x|} \right)^{l+1} Y_l(\theta, \varphi), \quad (27)$$

где θ, φ — координаты на единичной сфере. Подчеркнем, что разложение начинается с члена порядка $1/|x|^2$ именно вследствие выполнения условия (26). Имея разложение (27), мы можем применить известные результаты о поведении гармонических функций на бесконечности (см., например, [16, с. 256]), в соответствии с которыми

$$|\nabla \tilde{\varphi}(x)| \leq \frac{c}{|x|^3}, \quad (28)$$

где $c = \text{const}$.

Теперь ясно, что

$$\int_{S_R} |\nabla \tilde{\varphi}| dx \leq c 4\pi R^2 \frac{1}{R^3} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Тем более

$$\int_{S_R} |\nabla \tilde{\varphi}|^2 dx \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty,$$

и соотношения (23) доказаны. \square

4. Эффекты сжимаемости идеальной жидкости. Если жидкость сжимаема, то зависимость p от ρ в термическом уравнении состояния

$$p = p(\rho, \theta) \quad (29)$$

существенна.

Величина $\sqrt{\partial p / \partial \rho}$ имеет размерность скорости. Покажем, что это есть скорость распространения возмущений по жидкости.

Рассмотрим с этой целью находящуюся в однородном состоянии и покоящуюся идеальную жидкость, т. е. будем считать, что

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v_0 = 0, & \quad \rho(x, 0) = \rho_0 = \text{const}, \\ p(x, 0) = p_0 = \text{const}, & \quad \theta(x, 0) = \theta_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

Подвергнем эту среду малому возмущению, т. е. будем считать, что в любой момент времени $t > 0$:

$$v(x, t) = v_0 + \tilde{v}(x, t), \quad \rho(x, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t), \quad p(x, t) = p_0 + \tilde{p}(x, t).$$

Здесь возмущения, т. е. функции \tilde{v} , $\tilde{\rho}$, \tilde{p} , предполагаются настолько малыми, что их квадратами, а также квадратами их производных можно пренебречь. Будем считать также, что течение является изотермическим, т. е. $\theta(x, t) = \theta_0 = \text{const}$.

Основываясь на этих предположениях, получим уравнения для функций \tilde{v} , $\tilde{\rho}$, \tilde{p} .

Прежде всего заметим, что вследствие (29)

$$\begin{aligned} \tilde{p} = p - p_0 &= \frac{\partial p(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho}(\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho^2}(\rho - \rho_0)^2 + \dots = \\ &= \frac{\partial p(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho} \tilde{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(\rho_0, \theta_0)}{\partial \rho^2} \tilde{\rho}^2 + \dots, \end{aligned}$$

и, поскольку мы условились пренебрегать квадратами возмущений, то $\tilde{p} = (\partial p(\rho_0, \theta_0)/\partial \rho) \tilde{\rho}$. Величину $\partial p(\rho_0, \theta_0)/\partial \rho$, которую естественно считать положительной (плотность газа растет с ростом давления), обозначим через a_0^2 , $a_0 = \text{const}$. Таким образом,

$$\tilde{p} = a_0^2 \tilde{\rho}. \quad (30)$$

Используя введенные обозначения, уравнение неразрывности запишем в виде:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \tilde{\rho})}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \nabla(\rho_0 + \tilde{\rho}) + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \text{div} \tilde{v} = 0,$$

откуда с принятой точностью

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \tilde{v} = 0. \quad (31)$$

Аналогично упростим уравнения Эйлера. Первоначально можем написать:

$$(\rho_0 + \tilde{\rho}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (\nabla \tilde{v}) \tilde{v} + \nabla \tilde{p} = 0.$$

Отбрасывая пренебрежимо малые величины и используя (30), будем иметь:

$$\rho_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + a_0^2 \nabla \tilde{\rho} = 0. \quad (32)$$

Положим $u = \tilde{\rho}/\rho_0$ (эту величину — относительное возмущение плотности газа — принято называть *конденсацией*). Тогда из (31), (32) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{v} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + a_0^2 \nabla u = 0. \quad (34)$$

Уравнения (33), (34) образуют так называемую *систему уравнений акустики*.

Из этой системы можно исключить \tilde{v} . Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (34), а затем используем (33). Получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta u, \quad x \in V, \quad t > 0, \quad (35)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (35) называют *волновым* уравнением. Заметим, что функция \tilde{p} также удовлетворяет уравнению (35), поскольку отличается от u лишь постоянным множителем.

Будем считать известными предельные значения конденсации и возмущения скорости при $t \rightarrow +0$ и введем следующие обозначения:

$$u_0(x) = \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t), \quad u_1(x) = \lim_{t \rightarrow +0} (-\operatorname{div} \tilde{v}(x, t)), \quad x \in V.$$

Таким образом, к уравнению (35) присоединяются начальные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in V. \quad (36)$$

Решение задачи Коши (35), (36) можно выписать в явном виде, используя хорошо известную формулу Пуассона:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, a_0 t)} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S(x, a_0 t)} u_0(\xi) d\xi \right]. \quad (37)$$

Здесь интегрирование ведется по поверхности сферы $S(x, a_0 t)$ радиуса $a_0 t$ с центром в точке x .

Рассмотрим случай, когда начальные возмущения локализованы в некоторой ограниченной области $\omega \subset V$, т. е. $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 0$ при $x \notin \bar{\omega}$.

Элементарный анализ формулы (37) показывает, что в этом случае область возмущенного течения ограничена двумя поверхностями

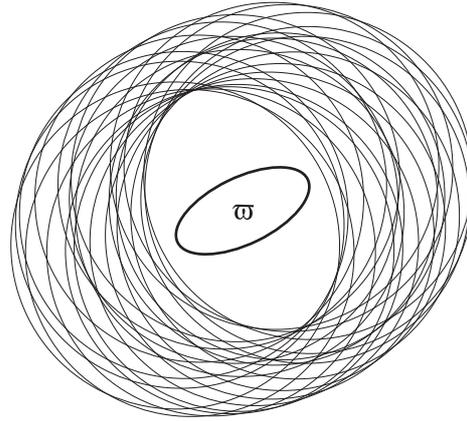


Рис. 2. Звуковая волна.

(передним и задним фронтами волны), которые движутся с нормальной скоростью, равной a_0 (см. рис. 2)¹⁾.

Если функции u_0, u_1 непрерывны и лишь кусочно непрерывно дифференцируемы на V , то указанные поверхности являются поверхностями слабого разрыва для функции u , а, стало быть, и для \tilde{p} .

В следующем пункте с аналогичных позиций изучается существенно более общая ситуация.

Выполненные построения показывают, что величину $a = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ естественно называть *скоростью звука*.

Исследуем влияние этой величины на течение жидкости, предполагая жидкость баротропной, течение установившимся и безвихревым. Предположим также, что массовые силы отсутствуют. Эти условия означают, что давление есть известная, обратимая функция плотности: $p = p(\rho)$; $\partial v / \partial t = 0$, $W = 0$, $b = 0$ во всей области течения. Кроме того, будем считать, что

$$\frac{\partial^2 p(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} > 0, \quad (38)$$

где $\vartheta = 1/\rho$ — удельный объем. Это условие выполнено, например, для совершенного газа.

Из уравнения (4) (см. также (9), (10)) при указанных предположениях получаем:

$$\frac{q^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const}, \quad (39)$$

где $q = |v|$. Уравнение (39) определяет q как функцию ρ . Дифферен-

¹⁾Передний фронт волны — это передняя огибающая семейства сфер радиуса $a_0 t$ с центрами, принадлежащими ω ; задний фронт — задняя огибающая того же семейства сфер.

цируя равенство (39) по ρ , будем иметь:

$$\frac{dq}{d\rho} = -\frac{a^2}{\rho q} < 0. \quad (40)$$

Это означает, что функция $q = q(\rho)$ имеет обратную.

Таким образом, из трех параметров, q, p, ρ , характеризующих некоторую выделенную частицу сплошной среды, независимым является лишь один (любой, по выбору).

Величину

$$a = \sqrt{\partial p / \partial \rho}, \quad (41)$$

меняющуюся в процессе движения частицы, называют местной скоростью звука. *Числом Маха* называется величина

$$M = M(q) = q/a(q). \quad (42)$$

Теорема 6. Существует не более одного значения $q = q^*$, при котором $M = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала справедливость равенства:

$$\frac{dM}{dq} = \frac{1 + (A - 1)M^2}{a}, \quad (43)$$

где

$$A = \frac{1}{a} \frac{d}{d\rho}(\rho a). \quad (44)$$

Из (42) сразу получаем:

$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{a} - \frac{q}{a^2} \frac{da}{d\rho} \frac{d\rho}{dq}.$$

Вследствие (40) имеем:

$$\frac{d\rho}{dq} = -\frac{\rho q}{a^2},$$

поэтому

$$\frac{dM}{dq} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{\rho q^2}{a^3} \frac{da}{d\rho} \right) = \frac{1}{a} \left(1 + M^2 \frac{\rho}{a} \frac{da}{d\rho} \right) = \frac{1}{a} (1 + M^2(A - 1)).$$

Заметим теперь, что

$$A > 0. \quad (45)$$

В самом деле, используя определение (41) и проводя несложные выкладки, получаем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} \left(a + \rho \frac{da}{d\rho} \right) = \frac{1}{a} \left(a + \rho \frac{d}{d\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right) = \frac{1}{a} \left(a + \frac{\rho}{2a} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(a + \frac{\rho}{2a} \frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{dp}{d\vartheta} \left(-\frac{1}{\rho^2} \right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{a} \left(a + \frac{\rho}{2a} \left[\frac{d^2 p}{d(\vartheta)^2} \frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^3} \frac{dp}{d\vartheta} \right] \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2a^2 \rho^3} \frac{d^2 p}{d\vartheta^2} + \frac{1}{a^2 \rho^2} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{d\vartheta} = \frac{1}{2a^2 \rho^3} \frac{d^2 p}{d\vartheta^2}, \end{aligned}$$

что вследствие (38) эквивалентно (45).

Если мы установим, что

$$\frac{dM}{dq} > 0 \text{ при } M \leq 1, \quad (46)$$

то утверждение теоремы, очевидно, будет доказано.

Свойство (46) непосредственно вытекает из (43). Действительно, если $A - 1 \geq 0$, то $\frac{dM}{dq} > 0$, потому что в правой части (43) оба слагаемых положительны, если $A - 1 < 0$, то

$$\frac{dM}{dq} > \frac{1}{a} [1 + A - 1] = \frac{A}{a} > 0. \quad \square$$

Течение в данной точке называется *дозвуковым*, если $q < q^*$. Течение называется *сверхзвуковым*, если $q > q^*$.

Сверхзвуковые течения во многом качественно отличаются от дозвуковых течений. Так, легко доказывается равенство:

$$\frac{d}{dq}(\rho q) = \rho(1 - M^2). \quad (47)$$

Ясно, что $Q = \rho q$ — поток массы жидкости за единицу времени мимо фиксированного наблюдателя. Из (47) следует, что Q в дозвуковом течении ($M < 1$) возрастает с ростом q , а в сверхзвуковом убывает с ростом q . В этом факте сжимаемость газа проявляет себя особенно ярко.

Можно также доказать, что

$$\frac{d\rho}{dM^2} = -\frac{\rho}{2(1 + (a - 1)M^2)} \quad (48)$$

и вывести отсюда разложение:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{M^2}{2} + \frac{2a_0 - 1}{8} M^4 + \dots \right). \quad (49)$$

Равенство (49) показывает, что в дозвуковом течении, при малых M , плотность ρ незначительно отличается от ρ_0 (плотности в некоторый момент времени $t = t_0$), и жидкость, следовательно, можно считать несжимаемой.

Упражнения.

1.4. Доказать формулу (47).

1.5. Доказать формулы (48), (49).

5. Звуковые волны как поверхности слабого разрыва.

Предварительно установим ряд вспомогательных соотношений, конкретизирующих теорему Максвелла (см. с. 32).

Пусть S поверхность в четырехмерном евклидовом пространстве V_4 точек (x, t) , $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$ — время, задаваемая уравнением:

$$\varphi(x, t) = 0. \quad (50)$$

Функция φ предполагается дифференцируемой.

Через $S(t)$ обозначим поверхность в трехмерном пространстве V , задаваемую уравнением (50) при некотором фиксированном t .

Понятно, что положение точек поверхности $S(t)$ в пространстве V зависит от времени, т. е. тождественно по t выполняется уравнение:

$$\varphi(x(t), t) = 0.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по t , получим:

$$\nabla_x \varphi(x(t), t) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial \varphi(x(t), t)}{\partial t} = 0. \quad (51)$$

Нижний индекс x подчеркивает, что градиент функции φ вычисляется по переменной x . Как известно из курса анализа, вектор $\nabla_x \varphi(x(t), t)$ направлен по нормали к поверхности $S(t)$. Положим

$$\nu = \frac{1}{|\nabla_x \varphi(x(t), t)|} \nabla_x \varphi(x(t), t). \quad (52)$$

Вектор ν — единичный вектор нормали к поверхности $S(t)$. Пусть далее $j = \dot{x}(t)$, т. е. j — скорость движения точки $x(t)$. Тогда уравнение (51) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{|\nabla_x \varphi(x(t), t)|} \frac{\partial \varphi(x(t), t)}{\partial t} = -j_\nu, \quad (53)$$

где $j_\nu = j \cdot \nu$ — нормальная составляющая скорости точки $x(t) \in S(t)$.

Пусть $f(x, t)$ — скалярная функция, для которой поверхность S есть поверхность слабого разрыва. Ради простоты записей будем считать функцию определенной при всех $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$.

В соответствии с теоремой Максвелла можем написать:

$$[\nabla f(x, t)] = \alpha(x, t)\tilde{\nu}(x, t) \quad \forall (x, t) \in S. \quad (54)$$

Здесь α — скалярная функция, определенная на S , $\tilde{\nu}$ — единичная нормаль к поверхности S . Подчеркнем, что градиент функции f вычисляется по всем переменным.

Запишем равенство (54) более подробно. Заметим, что

$$\begin{aligned} \nabla f(x, t) &= \nabla_x f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e_t, \\ \tilde{\nu} &= \beta(x, t) \left(\nabla_x \varphi(x, t) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} e_t \right), \end{aligned}$$

где e_t — орт оси t , $\beta(x, t) > 0$ — нормирующий множитель. Поэтому, используя (53), получаем следующие формулы для вычисления скачков градиента и частной производной по времени на поверхности слабого разрыва скалярной функции $f(x, t)$:

$$[\nabla_x f(x, t)] = \tilde{\alpha}(x, t)\nu, \quad [\partial f(x, t)/\partial t] = -\tilde{\alpha}(x, t)j_\nu, \quad x \in S(t). \quad (55)$$

В дальнейшем нижний индекс в обозначении градиента по x , как правило, будем опускать.

Упражнение 1.6. Пусть $f(x, t)$ — векторная функция аргументов $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$ со значениями в пространстве V , S — поверхность слабого разрыва функции f . Доказать справедливость следующих формул:

$$[\nabla f(x, t)] = \delta(x, t) \otimes \nu, \quad [\partial f(x, t)/\partial t] = -j_\nu \delta(x, t), \quad x \in S(t), \quad (56)$$

$$[\operatorname{div} f(x, t)] = \delta(x, t) \cdot \nu, \quad x \in S(t). \quad (57)$$

Здесь $\delta(x, t)$ — некоторая векторная функция, определенная на $S(t)$.

Приступим теперь к исследованию скорости распространения звуковых волн в идеальной жидкости, понимая под *звуковой волной* поверхность S слабого разрыва функции $p(x, t)$.

Ограничимся изэнтропическими течениями (см. с. 107), т. е. будем полагать, что $\dot{\eta} = 0$, или, более подробно, что

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \nabla \eta(x, t) \cdot v(x, t) = 0. \quad (58)$$

Термическое уравнение состояния будем считать заданным в виде:

$$p = p(\rho, \eta). \quad (59)$$

Дифференцируя обе части последнего уравнения, получим:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho + \frac{\partial p}{\partial \eta} \nabla \eta. \quad (60)$$

Откуда вследствие (55) будем иметь:

$$[\nabla p] = \alpha(x, t)\nu, \quad x \in S(t), \quad (61)$$

причем, очевидно, функция α отлична от нуля.

Естественно, будем полагать, что вне точек $S(t)$ выполнены уравнение движения:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\nabla v)v + \nabla p = \rho b, \quad (62)$$

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot v + \rho \operatorname{div} v = 0, \quad (63)$$

а также уравнения (58), (60).

Будем считать, что поверхность S является, самое большее, поверхностью слабого разрыва и для функций v , ρ , η , b .

Как следствие сделанных предположений получаем соотношения для скачков:

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] + \rho[\nabla v]v + [\nabla p] = 0, \quad x \in S(t), \quad (64)$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \right] + [\nabla \rho] \cdot v + \rho[\operatorname{div} v] = 0, \quad x \in S(t), \quad (65)$$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right] + [\nabla \eta(x, t)] \cdot v(x, t) = 0, \quad x \in S(t). \quad (66)$$

$$[\nabla p] = \frac{\partial p}{\partial \rho} [\nabla \rho] + \frac{\partial p}{\partial \eta} [\nabla \eta], \quad x \in S(t). \quad (67)$$

Используя формулы (56), (55) и вспоминая определение тензорного произведения векторов, запишем уравнение (64) в виде:

$$\rho s \delta + \alpha \nu = 0, \quad x \in S(t). \quad (68)$$

Здесь δ — некоторая векторная функция, определенная на S , α — скалярная функция, $s = v_\nu - j_\nu$ — нормальная составляющая скорости движения частицы сплошной среды относительно поверхности $S(t)$.

Аналогично, из уравнений (65)–(67) получим:

$$\beta s + \rho \delta \cdot \nu = 0, \quad x \in S(t), \quad (69)$$

$$\gamma s = 0, \quad x \in S(t), \quad (70)$$

$$\alpha \nu = a^2 \beta \nu + d \gamma \nu, \quad x \in S(t), \quad (71)$$

где $a^2 = \partial p / \partial \rho$, $d = \partial p / \partial \eta$, а β , γ — некоторые скалярные функции, определенные на $S(t)$.

Соотношения (68)–(71) позволяют вычислить s , т. е. скорость движения звуковой волны относительно частиц жидкости. В самом деле, по предположению $\alpha \neq 0$. Из (68) вытекает, что тогда и $s \neq 0$, следовательно, в силу (70) получаем, что $\gamma = 0$, и на основании (71)

$$\alpha = a^2 \beta. \quad (72)$$

Умножая (68) скалярно на ν , получим $\alpha = -\rho s \delta \cdot \nu$, откуда вследствие (69) имеем $\alpha = \beta s^2$. Сравнивая последнее равенство с (72), находим: $s^2 = a^2$. Таким образом, $s = \pm a$.

6. Поверхности сильного разрыва. Ударные волны. В этом пункте будут получены специальные соотношения, которым должны удовлетворять параметры течения идеальной жидкости на сингулярных поверхностях, допускающих их разрывы. Такие поверхности называют поверхностями сильного разрыва. В области, содержащей поверхности сильного разрыва, дифференциальные уравнения гидродинамики нельзя понимать в их обычном смысле, так как входящие в эти уравнения функции уже не являются даже кусочно непрерывно дифференцируемыми. Естественным является переход к обобщенным решениям. При этом оказывается удобным привести сначала уравнения динамики идеальной жидкости к так называемой канонической форме. Под *канонической*, или *дивергентной*, формой будем понимать систему уравнений вида

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \operatorname{div} \Phi_k(w) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (73)$$

Здесь $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ — вектор неизвестных, $w_k = w_k(x, t)$, $\Phi_k(w) = (\Phi_1^k(w), \Phi_2^k(w), \Phi_3^k(w))$, $\Phi_i^k(w)$ — заданные функции w .

Уравнения (73) выражают некоторые законы сохранения. Действительно, интегрируя (73) по некоторой области $B \subset V$ и по t от t_1

до t_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \int_B w_k(x, t_2) dx - \int_B w_k(x, t_1) dx &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_B \operatorname{div} \Phi_k dx = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} \Phi_k \cdot \nu_k dx, \end{aligned} \quad (74)$$

$k = 1, \dots, N$. Это соотношение показывает, что изменение количества величины w_k в области B равно притоку в эту область через ее границу Γ величины Φ_k .

Приведем к дивергентной форме систему уравнений динамики идеальной жидкости. При этом будем считать, что массовые силы и внешние источники тепла отсутствуют, жидкость нетеплопроводна.

Начнем с уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \quad (75)$$

Это уравнение имеет дивергентный вид и подсказывает, что в качестве неизвестных функций следует принять: $w_1 = \rho$, $w_2 = m_1$, $w_3 = m_2$, $w_4 = m_3$, где $m_i = \rho v_i$, v_i — компоненты скорости.

Естественно в такой ситуации записывать уравнение Эйлера в форме (5), с. 108:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} (m \otimes m) + pE \right) = 0, \quad (76)$$

а уравнение энергии — в форме (13), с. 107:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho H v) = 0. \quad (77)$$

Здесь

$$e = \rho(\varepsilon + |v|^2/2), \quad H = \varepsilon + |v|^2/2 + p/\rho. \quad (78)$$

Уравнения (75)–(77) образуют систему уравнений динамики идеальной жидкости, записанную в дивергентной форме (73), причем $N = 5$, $w = (\rho, m, e)$.

Сформулируем теперь понятие обобщенного решения системы уравнений вида (73).

Пусть B — произвольная ограниченная область четырехмерного евклидова пространства $V_4 = V \times \mathbb{R}$, Γ — граница B .

Проинтегрируем обе части k -того уравнения системы (73) по области B . Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_{\Gamma} (w_k \tilde{\nu}_t + \Phi_k(w) \cdot \tilde{\nu}_x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (79)$$

Здесь $\tilde{\nu}$ — единичная внешняя нормаль к Γ , $\tilde{\nu}_t$, $\tilde{\nu}_x$ — ее соответствующие проекции.

Будем говорить, что w — обобщенное решение системы уравнений (73), если w удовлетворяет интегральным тождествам (79) для любой области $B \subset V_4$.

Это определение требует от w существенно меньшей гладкости, чем при классическом понимании решения. Функция w не обязана быть даже непрерывной. Достаточно лишь, чтобы существовали интегралы, участвующие в (79).

Важно иметь в виду, что если обобщенное решение обладает достаточной гладкостью, то выполняя в (79) обратные преобразования с помощью формулы интегрирования по частям и используя произвол в выборе B , нетрудно убедиться, что обобщенное решение удовлетворяет системе уравнений (73) в классическом смысле.

Понятие обобщенного решения поможет нам исследовать гидродинамические характеристики в тех случаях, когда они допускают разрывы на некоторых поверхностях.

Применительно к системе уравнений (75)–(77) интегральные тождества, определяющие обобщенное решение, принимают вид:

$$\int_{\Gamma} (\rho \tilde{\nu}_t + m \cdot \tilde{\nu}_x) dx = 0, \quad (80)$$

$$\int_{\Gamma} (\tilde{\nu}_t m + ((m \otimes m)/\rho + pE) \tilde{\nu}_x) dx = 0, \quad (81)$$

$$\int_{\Gamma} (e \tilde{\nu}_t + \rho H v \cdot \tilde{\nu}_x) dx = 0. \quad (82)$$

Пусть теперь $S \subset V_4$ — поверхность сильного разрыва. Будем считать, что она ориентирована единичной нормалью $\tilde{\nu}$.

Предполагается, что при подходе к поверхности S все функции, входящие в уравнения (75)–(77), имеют конечные пределы, помечаемые соответственно значком «+» или «-». Скачок функции g на поверхности S , как обычно, обозначаем через $[g]$, т. е. $[g] = g^+ - g^-$.

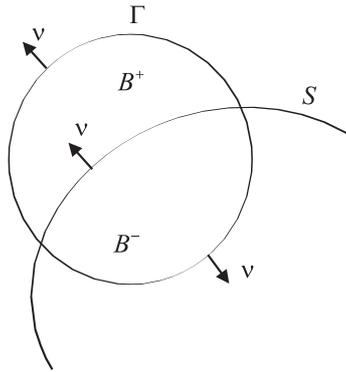


Рис. 3. Поверхность сильного разрыва.

Пусть $B \subset V_4$ — некоторая область, рассекаемая поверхностью S на две части. Обозначим их через B^+ и B^- (см. рис. 3).

Выберем в тождестве (80) в качестве поверхности интегрирования границу области B^+ , а затем — границу области B^- и сложим почленно соответствующие равенства. Получим:

$$\int_{\Gamma} (\rho \tilde{v}_t + m \cdot \tilde{v}_x) dx + \int_{S \cap B} ([\rho] \tilde{v}_t + [m] \cdot \tilde{v}_x) dx = 0, \quad (83)$$

где Γ — поверхность области B . Вследствие принятого определения обобщенного решения первое слагаемое в правой части (83) равно нулю. Область B — произвольная область, рассекаемая поверхностью S , следовательно, из (83) вытекает, что

$$[\rho] \tilde{v}_t + [m] \cdot \tilde{v}_x = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (84)$$

Поделим обе части равенства (84) на $|\tilde{v}_x|$ и учтем формулы (52), (53), с. 125. Получим:

$$-j_\nu (\rho^+ - \rho^-) + \rho^+ v_\nu^+ - \rho^- v_\nu^- = 0,$$

где $v_\nu^+ = v^+ \cdot \nu$, $v_\nu^- = v^- \cdot \nu$, или:

$$\rho^+ (-j_\nu + v_\nu^+) = \rho^- (-j_\nu + v_\nu^-), \quad x \in S(t). \quad (85)$$

Равенство (85) допускает простую физическую интерпретацию. Действительно, $-j_\nu + v_\nu^+$ и $-j_\nu + v_\nu^-$ есть предельные значения нормальной составляющей скорости частицы жидкости относительно поверхности $S(t)$ с положительной или отрицательной стороны поверхности соответственно. Таким образом, равенство (85) выражает интуитивно очевидный факт: поток массы

$$Q = \rho^+ (-j_\nu + v_\nu^+) = \rho^- (-j_\nu + v_\nu^-) \quad (86)$$

через поверхность $S(t)$ не зависит от того, с какой стороны поверхности его подсчитывать.

Проводя аналогичные рассуждения применительно к интегральному тождеству (81), получим:

$$Q(v^+ - v^-) = (p^- - p^+)\nu. \quad (87)$$

Умножая равенство (87) скалярно на ν , можем написать:

$$Q(v_\nu^+ - v_\nu^-) = p^- - p^+. \quad (88)$$

Будем различать два случая.

1) $Q = 0$. В этом случае из (86) вытекает, что $v_\nu^+ = v_\nu^- = j_\nu$, т. е. частицы жидкости не пересекают поверхности $S(t)$, и ее естественно называть поверхностью скольжения. Как показывает (88), при этом и скачок давления на $S(t)$ оказывается нулевым.

2) $Q \neq 0$. В этом случае из (87) вытекает, что вектор $v^+ - v^-$ параллелен нормали ν , т. е. касательная составляющая скорости непрерывна при переходе через поверхность $S(t)$. Если при этом оказывается, что $[p] \neq 0$, то тогда, очевидно, и $[v_\nu] \neq 0$ (см. (88)). Поверхность $S(t)$ называется в этом случае ударной волной.

Из равенства (88) можно исключить v_ν^+ , v_ν^- , записывая их при помощи (86) в виде:

$$v_\nu^+ = Q/\rho^+ + j_\nu, \quad v_\nu^- = Q/\rho^- + j_\nu. \quad (89)$$

В результате, после элементарных преобразований получим:

$$Q = \sqrt{(p^+ - p^-)/(\vartheta^- - \vartheta^+)}, \quad (90)$$

где $\vartheta = 1/\rho$ — удельный объем.

Используя, наконец, интегральное тождество (82), приходим к соотношению:

$$Q \left(\frac{e^+}{\rho^+} - \frac{e^-}{\rho^-} \right) = p^- v_\nu^- - p^+ v_\nu^+. \quad (91)$$

С помощью этого равенства вычислим скачок плотности внутренней энергии на ударной волне, а именно покажем, что:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}(p^+ + p^-)[\vartheta]. \quad (92)$$

Для этого, прежде всего, используя (78) и (89), перепишем (91) в виде:

$$Q \left(\varepsilon^+ + \frac{|v^+|^2}{2} - \varepsilon^- - \frac{|v^-|^2}{2} \right) = p^- \frac{Q}{\rho^-} - p^+ \frac{Q}{\rho^+} + j_\nu(p^- - p^+). \quad (93)$$

Затем выразим $p^- - p^+$ из (88). Тогда (93) можно представить так:

$$\left[\varepsilon + \frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] = j_\nu [v_\nu]. \quad (94)$$

Займемся теперь вычислением выражения $|v^+|^2 - |v^-|^2$. Положим, как и раньше, $s_+ = v_\nu^+ - j_\nu$, $s_- = v_\nu^- - j_\nu$. Тогда

$$s_+^2 - s_-^2 = (v_\nu^+ - v_\nu^-)(v_\nu^+ + v_\nu^- - 2j_\nu).$$

Из (88), (89) имеем: $v_\nu^+ - v_\nu^- = (p^- - p^+)/Q$, $v_\nu^+ + v_\nu^- - 2j_\nu = Q(\vartheta^+ - \vartheta^-)$, т. е.

$$s_+^2 - s_-^2 = (p^- - p^+)(\vartheta^+ + \vartheta^-). \quad (95)$$

С другой стороны,

$$s_+^2 - s_-^2 = (v_\nu^+)^2 - (v_\nu^-)^2 - 2j_\nu v_\nu^+ + 2j_\nu v_\nu^-. \quad (96)$$

Ясно, что $|v^+|^2 = |v_\nu^+|^2 + |v_\tau^+|^2$, $|v^-|^2 = |v_\nu^-|^2 + |v_\tau^-|^2$, где v_τ^+ , v_τ^- есть касательные составляющие v_+ , v_- соответственно. Как было показано выше, на ударной волне касательная составляющая скорости непрерывна. Поэтому (96) можно переписать в виде:

$$s_+^2 - s_-^2 = |v^+|^2 - |v^-|^2 - 2j_\nu(v_\nu^+ - v_\nu^-). \quad (97)$$

Сравнивая (95) и (97), найдем:

$$\frac{|v^+|^2 - |v^-|^2}{2} = j_\nu(v_\nu^+ - v_\nu^-) + \frac{1}{2}(p^- - p^+)(\vartheta^+ - \vartheta^-). \quad (98)$$

Подставляя это выражение для скачка модуля скорости в (94) и выполняя элементарные преобразования, получим:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2}(p^- - p^+)(\vartheta^+ + \vartheta^-) + p^+ \vartheta^+ - p^- \vartheta^-,$$

что эквивалентно (92).

Равенства (90), (92) называют *соотношениями Гюгоннио* на ударной волне.

Упражнения.

1.7. Доказать формулы (87), (91).

1.8. Показать, что для *энthalпии* $i = \varepsilon + p/\rho$ скачок на ударной волне определяется формулой: $[i] = [p](\vartheta^+ + \vartheta^-)/2$.

1.9. Пусть $\Omega(t)$ — актуальная конфигурация тела, $S(t) \subset \Omega(t)$ — поверхность сильного разрыва скалярной функции $f(x(t), t)$. Показать, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \operatorname{div} v \right) dx + \int_{S(t)} [fs] dx$$

(s — нормальная составляющая скорости движения частиц сплошной среды относительно поверхности $S(t)$).

1.10. Показать, что для установившегося движения верно следующее соотношение на ударной волне: $[|v|^2/2 + i] = 0$.

§ 2. Уравнения Навье — Стокса

1. Нестационарная задача. Исследование единственности решения В этом параграфе рассматриваются задачи об изотермическом течении линейно-вязкой несжимаемой жидкости. Как показано в §4 гл. 2, соответствующая полная система уравнений есть система уравнений Навье — Стокса (28), с. 85. Неизвестными в этой системе являются три компоненты скорости и давление. Плотность ρ и динамическая вязкость μ будут предполагаться далее заданными положительными постоянными.

Обычно приходится изучать движение жидкостей вблизи тел, ограниченных твердыми поверхностями (задачи обтекания), или движение жидкостей внутри некоторых каналов, полостей, с твердыми стенками, например, течение жидкостей по трубам.

Рассматривая течение вязких жидкостей, как правило, считают выполненными так называемые *условия прилипания*, т. е. принимают, что скорость движения жидкости в точках поверхностей, ограничивающих область течения, совпадает со скоростью движения этих поверхностей. Кроме того, считается заданным распределение скорости в области течения в начальный момент времени.

Таким образом, довольно типичной является следующая граничная задача для системы уравнений Навье — Стокса.

Задана ограниченная область Ω трехмерного евклидова пространства V , Γ — граница области Ω . Требуется найти функции v , p такие, что:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\nabla v)v = -\nabla p + \mu \Delta v + \rho b, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = v_0, \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

$$v(x, t) = g, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0. \quad (4)$$

Здесь $b = b(x, t)$, $v_0 = v_0(x)$, $g = g(x, t)$ — заданные функции.

Напомним, что выражение в левой части уравнения (1) — подробная запись $\rho \dot{v}$.

Мы покажем далее, что скорость течения v определяется данными задачи единственным образом. Что касается давления, то оно, как видно из уравнения (1), определяется тогда в каждый момент времени лишь с точностью до постоянного по пространственным переменным слагаемого. Это представляется вполне естественным, так как на движение несжимаемой жидкости оказывает влияние не само давление, а его перепады.

При доказательстве единственности скорости течения нам будет удобно относить область Ω к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 . Компоненты скорости будем обозначать через v_1, v_2, v_3 .

Получим ряд вспомогательных результатов.

Как обычно, для $q > 1$ положим

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

В этом равенстве функция u может быть скалярной, векторной или тензорной функцией векторного аргумента x .

Напомним неравенство Юнга:

$$\alpha\beta \leq (\varepsilon\alpha)^{q/q} + \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^{q'/q},$$

справедливое при любых $\alpha, \beta \geq 0, \varepsilon > 0, q > 1, q' = q/(q-1)$, а также неравенство Коши — Буняковского:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)},$$

и неравенство Фридрикса:

$$\int_{\Omega} u^2 dx \leq c_{\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

справедливое для любой дифференцируемой функции, равной нулю на Γ . Здесь постоянная c_{Ω} зависит лишь от области Ω .

Лемма 7. Для любой функции u , дифференцируемой в двумерной ограниченной области Ω и равной нулю на ее границе,

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию u нулем вне области Ω и сохраним для продолженной функции прежнее обозначение. Вследствие очевидного равенства

$$u^2(x) = 2 \int_{-\infty}^{x_1} u(\xi, x_2) \frac{\partial u(\xi, x_2)}{\partial \xi} d\xi$$

имеем: $u^2(x) \leq 2u_1(x_2)$, где

$$u_1(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(\xi, x_2) \frac{\partial u(\xi, x_2)}{\partial \xi} \right| d\xi.$$

Точно так же $u^2(x) \leq 2u_2(x_1)$, где

$$u_2(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x_1, \xi) \frac{\partial u(x_1, \xi)}{\partial \xi} \right| d\xi,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^4(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^4(x) dx_1 dx_2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_2) u_2(x_1) dx_1 dx_2 = \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x_2) dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x_1) dx_1 = \\ &= 4 \int_{\Omega} \left| u(x_1, x_2) \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right| dx \int_{\Omega} \left| u(x_1, x_2) \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right| dx. \end{aligned}$$

Оценивая теперь интегралы в правой части последнего равенства при помощи неравенства Коши — Буняковского, а затем применяя неравенство Юнга при $\varepsilon = 1$, $p = p' = 2$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^4 dx &\leq 4 \int_{\Omega} u^2 dx \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2 \int_{\Omega} u^2 dx \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает (5). \square

Лемма 8. Для любой функции u , дифференцируемой в трехмерной ограниченной области Ω и равной нулю на Γ ,

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1/4} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{3/4}. \quad (6)$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, будем считать, что функция u продолжена нулем вне области Ω .

Используя (5), получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^4(x) dx_1 dx_2 dx_3 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx_1 dx_2 \right) \times \\ &\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx_1 dx_2 \right) dx_3 \leq \\ &\leq 2 \sup_{x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx_1 dx_2 \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (7) \end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned} u^2(x) &= 2 \int_{-\infty}^{x_3} u(x_1, x_2, \xi) \frac{\partial u(x_1, x_2, \xi)}{\partial \xi} d\xi \leq \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, x_2, \xi)| \left| \frac{\partial u(x_1, x_2, \xi)}{\partial \xi} \right| d\xi, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{x_3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x) dx_1 dx_2 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u| \left| \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right| dx_1 dx_2 dx_3 \leq \\ &\leq 2 \|u\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Используя это неравенство, получим на основании (7):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^4 dx &\leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L_2(\Omega)} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает (6). \square

Для векторных функций u, v, w , определенных на Ω , положим

$$B(u, v, w) = \int_{\Omega} ((\nabla u)v) \cdot w dx.$$

Форма $B(\cdot, \cdot, \cdot)$ линейна по каждому аргументу.

Лемма 9. Пусть функции u, v дифференцируемы в области Ω , обращаются в нуль на Γ , $\operatorname{div} u = 0$ в Ω . Тогда $B(v, u, v) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем подробнее выражение $B(v, u, v)$, используя представление градиента векторной функции в декартовых координатах. Затем выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} B(v, u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j v_i dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} u_j dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i^2 \operatorname{div} u dx = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1. Вектор функция v однозначно определяется данными задачи (1)–(4)¹.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(v^{(1)}, p^{(1)})$, $(v^{(2)}, p^{(2)})$ — два различных решения задачи (1)–(4), $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $p = p^{(1)} - p^{(2)}$. Тогда, очевидно,

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\nabla v^{(1)})v^{(1)} - \rho(\nabla v^{(2)})v^{(2)} = -\nabla p + \mu \Delta v, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0. \quad (11)$$

Умножим обе части уравнения (8) скалярно на v и проинтегрируем по области Ω . Заметим, что вследствие формулы интегрирования по частям и уравнения (9) справедливо равенство:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot v dx = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} v dx = 0.$$

Далее, при помощи формулы интегрирования по частям получаем:

$$\int_{\Omega} \Delta v \cdot v dx = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx.$$

¹Существование решения задачи (1)–(4) при этом не гарантируется.

Используем, наконец, очевидное равенство:

$$\int_{\Omega} \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} dx = \rho \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} |v|^2 dx.$$

В результате будем иметь¹⁾:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 = B(v^{(2)}, v^{(2)}, v) - B(v^{(1)}, v^{(1)}, v). \quad (12)$$

Используя лемму 9, а также линейность формы B по каждому аргументу, получим: $B(v^{(1)}, v^{(1)}, v) = B(v + v^{(2)}, v^{(1)}, v) = B(v^{(2)}, v^{(1)}, v)$, следовательно,

$$\begin{aligned} B(v^{(2)}, v^{(2)}, v) - B(v^{(1)}, v^{(1)}, v) &= B(v^{(2)}, v^{(2)}, v) - B(v^{(2)}, v^{(1)}, v) = \\ &= -B(v^{(2)}, v, v). \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, оценим $|B(v^{(2)}, v, v)|$:

$$|B(v^{(2)}, v, v)| \leq \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2\Omega} \|v\|_{L_4\Omega}^2,$$

откуда вследствие неравенства (6) получим:

$$|B(v^{(2)}, v, v)| \leq 2 \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2}. \quad (13)$$

Оценим правую часть неравенства (13) при помощи неравенства Юнга, полагая $\alpha = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2}$, $\beta = \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}$, $q = 4/3$, $q' = 4$:

$$|B(v^{(2)}, v, v)| \leq \frac{3}{2} \varepsilon^{4/3} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon^4} \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^4 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Таким образом, при произвольном положительном ε выполнено неравенство:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{3}{2} \varepsilon^{4/3} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon^4} \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^4 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Выбирая ε так, чтобы $3\varepsilon^{4/3}/2 = \nu$, получим, что при любом $t > 0$ выполнено неравенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^4 \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (14)$$

¹⁾ Величина $\nu = \mu/\rho$ — называется *кинематической вязкостью* жидкости.

где $c = \text{const}$. Положим

$$h(t) = c \int_0^t \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^4 ds$$

и воспользуемся очевидным равенством:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 e^{-h(t)} \right) = e^{-h(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 - c \|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^4 \right).$$

Вследствие (14) отсюда получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 e^{-h(t)} \right) \leq 0 \quad \forall t > 0.$$

Таким образом, при $t > 0$ неотрицательная функция $\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 e^{-h(t)}$ не возрастает, а при $t = 0$ вследствие начального условия (10) она равна нулю, значит она равна нулю при всех $t \geq 0$. Отсюда вытекает, что $v \equiv 0$. \square

Важно подчеркнуть, что доказанная здесь теорема единственности справедлива лишь для классических решений. Однако система уравнений Навье — Стокса может допускать и негладкие обобщенные, или так называемые турбулентные решения, для которых теорема единственности не верна. Известны примеры задач с неединственными решениями (см., например, [23]).

2. Стационарная задача. Исследование единственности решения. Если функции b , g не зависят от времени, то естественно попытаться найти соответствующее распределение скорости и давления, не зависящее от времени. Таким образом приходят к краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье — Стокса:

$$-\mu \Delta v + \rho(\nabla v)v = -\nabla p + \rho b, \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$\text{div } v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$v(x) = g, \quad x \in \Gamma. \quad (17)$$

При исследовании единственности решения этой задачи мы ограничимся случаем однородного граничного условия, т. е. будем полагать, что $g = 0$.

Теорема 2. Пусть выполнено условие:

$$2c_\Omega^{3/4} \|b\|_{L_2(\Omega)} \leq \nu^2. \quad (18)$$

Тогда скорость v определяется исходными данными задачи (15)–(17) единственным образом¹⁾.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(v^{(1)}, p^{(1)})$, $(v^{(2)}, p^{(2)})$ — два различных решения задачи (15)–(17), $v = v^{(1)} - v^{(2)}$, $p = p^{(1)} - p^{(2)}$. Тогда

$$-\mu\Delta v + \rho(\nabla v^{(1)})v^{(1)} - \rho(\nabla v^{(2)})v^{(2)} = -\nabla p, \quad x \in \Omega, \quad (19)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (21)$$

Умножим обе части уравнения (19) скалярно на v и проинтегрируем по области Ω . Выполняя далее преобразования, аналогичные, применявшимся при доказательстве теоремы 1, получим:

$$\nu\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} = -B(v^{(2)}, v, v),$$

откуда, используя оценку (13), а затем неравенство Фридрихса, будем иметь:

$$\begin{aligned} \nu\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq 2\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \leq \\ &\leq 2c_\Omega^{1/4}\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Умножим теперь уравнение (15), записанное для $v^{(2)}$, скалярно на $v^{(2)}$. Получим:

$$\nu\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + B(v^{(2)}, v^{(2)}, v^{(2)}) = \int_{\Omega} b \cdot v^{(2)} dx. \quad (23)$$

Вследствие леммы 9 второе слагаемое в левой части (23) обращается в нуль. Правую часть (23) оценим при помощи неравенства Коши — Буняковского, а затем — неравенства Фридрихса. В результате можем написать, что

$$\nu\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_\Omega^{1/2}\|b\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)},$$

т. е. $\|\nabla v^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq (c_\Omega^{1/2}/\nu)\|b\|_{L_2(\Omega)}$. Используя эту оценку, получим из (22):

$$\left(1 - \frac{2c_\Omega^{3/4}\|b\|_{L_2(\Omega)}}{\nu^2}\right)\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 0. \quad \square$$

Таким образом, решение стационарной задачи (15)–(17) единственно, если массовые силы достаточно малы, либо вязкость жидкости достаточно велика. Известны примеры, показывающие что при нарушении этих условий задача может иметь множество различных решений.

¹⁾См. сноску на с. 138.

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что постоянная C_Ω в неравенстве Фридрихса стремится к нулю, когда $\text{mes}(\Omega) \rightarrow 0$, следовательно, скорость в задаче (15)–(17) определяется однозначно, если область Ω достаточно мала.

3. Стационарные вискозаметрические течения. В этом параграфе рассматриваются простейшие граничные задачи для системы уравнений Навье — Стокса (15)–(17), допускающие решение в явном (аналитическом) виде. Эти решения могут быть положены в основу экспериментального определения сдвиговой вязкости конкретных жидкостей, что объясняет название — вискозаметрические¹⁾ течения.

Во всех рассматриваемых ниже примерах массовые силы отсутствуют.

1. Течение жидкости по цилиндрической трубе. Рассматривается цилиндр с образующими, параллельными оси x_1 декартовой системы координат; Ω , сечение цилиндра плоскостью, ортогональной его оси, есть ограниченная область, Γ — граница области Ω . Будем считать, что жидкость движется внутри цилиндра (трубы), параллельно его оси, так что $v_1 = u(x_2, x_3)$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

При сделанных предположениях, как нетрудно убедиться, уравнение неразрывности (16) выполняется тождественно, а уравнения (15) принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu \Delta u, \quad (25)$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ — двумерный оператор Лапласа.

Из уравнений (24) следует, что $p = p(x_1)$. Таким образом, левая часть уравнения (25) зависит только от x_1 , а правая только от x_2, x_3 . Значит обе они постоянны, т. е.

$$\frac{dp}{dx_1} = \mathcal{P} = \text{const}, \quad (26)$$

$$\Delta u = \mathcal{P}/\mu, \quad x = (x_2, x_3) \in \Omega, \quad (27)$$

следовательно, $p = \mathcal{P}x_1 + \text{const}$. Постоянную \mathcal{P} естественно называть перепадом давления (на единицу длины).

Считая стенки трубы неподвижными, мы должны принять, что

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (28)$$

¹⁾viscosus — вязкий (латынь).

Таким образом, при заданном перепаде давления отыскание распределения скорости движения жидкости по сечению трубы сводится к решению уравнения Пуассона (27) при однородном граничном условии Дирихле (28).

Если $\mathcal{P} < 0$, то функция u положительна в области Ω . Действительно, в противном случае она должна принимать минимальное значение в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, и, следовательно, должно выполняться неравенство:

$$\Delta u(x^0) = \frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_3^2} \geq 0,$$

противоречащее уравнению (27).

Доказанное утверждение означает, что жидкость течет в сторону уменьшения давления. Физически это, конечно, естественно.

Для простейших очертаний сечения трубы решение задачи (27), (28) может быть выписано в явном виде. Например, если Ω — круг, то, переходя к полярным координатам, получим, что функцию $u = u(r)$, где r — расстояние от центра круга, можно найти как ограниченное при $r = 0$ решение задачи:

$$(ru')' = r\mathcal{P}/\mu, \quad u(R) = 0,$$

где R — радиус круга. Непосредственным интегрированием получаем:

$$u(r) = \frac{\mathcal{P}}{4\mu}(r^2 - R^2).$$

Объемный расход Q , т. е. объем жидкости, протекающей через сечение цилиндра в единицу времени, вычисляется по формуле:

$$Q = 2\pi \int_0^R ru(r)dr = \pi \frac{\mathcal{P}R^4}{8\mu}. \quad (29)$$

Полученная формула выражает так называемый *закон Пуазейля*. Она показывает, в частности, что расход жидкости очень быстро убывает с уменьшением диаметра трубы.

2. Течение жидкости между соосными цилиндрами. Рассмотрим два соосных цилиндра с осью, параллельной оси x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 и радиусами R_1, R_2 . Будем считать, что $R_1 < R_2$. Цилиндры равномерно вращаются с угловыми скоростями ω_1, ω_2 соответственно. Требуется описать течение вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей пространство между цилиндрами.

Задачу естественно решать, используя цилиндрическую систему координат r, φ, z ; ось z совмещена с осью цилиндров. Соответствующие компоненты вектора скорости будем обозначать через v_r, v_φ, v_z . Из соображений симметрии естественно принять, что

$$v_r = 0, \quad v_z = 0, \quad v_\varphi = u(r), \quad p = p(r). \quad (30)$$

Запишем уравнения (15)–(17) в цилиндрической системе координат, учитывая предположения (30):

$$p' = \rho u^2(r)/r, \quad (31)$$

$$r^2 u''(r) + r u'(r) - u(r) = 0. \quad (32)$$

Упражнение 2.1.* Получить уравнения (31), (32).

Уравнение (32) есть частный случай уравнения Эйлера:

$$r^2 u''(r) + r u'(r) - k^2 u(r) = 0,$$

имеющего два линейно независимых решения: $u(r) = r^k$ и $u(r) = r^{-k}$. Таким образом, $u(r) = c_1 r + c_2 r^{-1}$ — общее решение уравнения (32). Постоянные c_1, c_2 найдем, используя условия прилипания жидкости к поверхностям цилиндров, т. е. полагая, что

$$u(R_1) = c_1 R_1 + c_2 R_1^{-1} = \omega_1 R_1,$$

$$u(R_2) = c_1 R_2 + c_2 R_2^{-1} = \omega_2 R_2.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$v_\varphi = u(r) = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\omega_1 - \omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}. \quad (33)$$

Зная $u(r)$, распределение давления (естественно, с точностью до постоянного слагаемого) можно найти, интегрируя уравнение (31).

Полезно отметить следующие крайние случаи.

1) Пусть скорости вращения цилиндров совпадают: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Тогда $v_\varphi = \omega r$, т. е. жидкость вращается вместе с цилиндрами как жесткое тело.

2) Положим $\omega_2 = 0$, и устремим R_2 к бесконечности, т. е. удалим внешний цилиндр. Тогда $v_\varphi = \omega_1 R_1^2/r$ (скорость вращения жидкости убывает обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра).

Ненулевыми компонентами тензора скоростей деформации (в цилиндрических координатах) в точках соприкосновения жидкости с внутренним цилиндром будут, как нетрудно подсчитать, лишь

$$d_{r\varphi} = d_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = -\frac{\omega_1 - \omega_2}{R_2^2 - R_1^2} R_2^2. \quad (34)$$

Тензор напряжений линейно-вязкой несжимаемой жидкости, как мы знаем, определяется соотношением:

$$T = -pE + 2\mu D,$$

где D — тензор скоростей деформации, поэтому, как нетрудно подсчитать, вектор напряжений на внутреннем цилиндре есть

$$f = -pi_r + 2\mu d_{r\varphi} i_\varphi.$$

Здесь i_r, i_φ — орты цилиндрической системы координат.

Тензор $f \wedge x$, где $x = R_1 i_r + z i_z$ — радиус-вектор точки, принадлежащей внутреннему цилиндру, имеет вид:

$$f \wedge x = 2\mu R_1 d_{r\varphi} i_\varphi \wedge i_r = 2\mu R_1 d_{r\varphi} e_1 \wedge e_2 - pz i_r \wedge i_z + 2\mu R_1 d_{r\varphi} i_\varphi \wedge i_z,$$

где e_1, e_2 — орты декартовой системы координат.

Таким образом, момент сил (относительно начала координат), приложенных к единице длины внутреннего цилиндра равен

$$M_1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} R_1 f \wedge x d\varphi dz = 4\pi\mu R_1 d_{r\varphi} e_1 \wedge e_2.$$

$$|M_1| = \frac{4\pi\mu(\omega_1 - \omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}. \quad (35)$$

Здесь учтено, что тензор $e_1 \wedge e_2$ постоянен, а

$$\int_0^{2\pi} i_r \wedge i_z d\varphi = \int_0^{2\pi} i_\varphi \wedge i_z d\varphi = 0.$$

Точно так же подсчитывается момент сил, приложенных к наружному цилиндру: $M_2 = -M_1$.

Сделаем важное замечание по поводу решений задач, рассмотренных в настоящем пункте. Как показано в теореме 2, единственность решения стационарной системы уравнений Навье — Стокса может быть обеспечена лишь при достаточно малых скоростях течения жидкости или при достаточно большой вязкости. Теоретические исследования и экспериментальные данные показывают (см., например, [23]), что в противном случае могут реализоваться и другие решения, описывающие более сложные течения вязкой жидкости. Тем не менее, при достаточно медленных движениях жидкостей можно использовать соотношения, полученные в настоящем пункте, и они могут быть

положены в основу экспериментального определения вязкостей конкретных жидкостей. Так, например, измеряя в эксперименте зависимость расхода жидкости от перепада давления при течении по трубе, можно по наклону соответствующей прямой на основании формулы (29) определить величину μ . При помощи формулы (35) можно определить вязкость жидкости, устанавливая экспериментально зависимость угловой скорости от вращающего момента, приложенного к цилиндру.

Упражнения.

2.2.* Определить течение вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями. Расстояние между плоскостями равно $2h = \text{const}$. Скорость движения одной плоскости относительно другой равна $V = \text{const}$. Перепад давления в направлении движения плоскости равен \mathcal{P} .

2.3.* Определить движение вязкой жидкости по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Ускорение свободного падения равно $g = \text{const}$, атмосферное давление равно $p_0 = \text{const}$.

4. Пример решения нестационарной задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство $x_3 > 0$ и контактирует с твердой стенкой, совпадающей с плоскостью $x_3 = 0$. В момент времени $t = 0$ стенка мгновенно приобретает скорость $V = \text{const}$, направленную вдоль оси x_1 , и продолжает при всех $t > 0$ двигаться с этой скоростью, увлекая за собой вязкую жидкость.

Построим решение задачи, считая что давление при таком течении остается постоянным, а компоненты вектора скорости удовлетворяют условиям:

$$v_1 = u(x_3, t), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0. \quad (36)$$

Уравнение неразрывности при этом удовлетворяется тождественно. Из уравнений движения остается лишь одно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x_3 > 0, \quad t > 0, \quad (37)$$

где $\nu = \mu/\rho$. Остальные выполняются тождественно.

Скорость жидкости должна удовлетворять начальному условию:

$$u(x_3, 0) = 0, \quad x_3 > 0, \quad (38)$$

(в начальный момент жидкость покоится) и условию прилипания:

$$u(0, t) = V, \quad t > 0. \quad (39)$$

Краевая задача (37)–(39) есть задача Коши для полуограниченного отрезка для уравнения теплопроводности и может быть решена

методом преобразования Фурье. Однако, поскольку $V = \text{const}$, можно использовать более простой метод, так называемый метод подобия, или метод автомодельной переменной, позволяющий свести рассматриваемую задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Выполним в уравнении (37) линейную замену переменных:

$$\tau = t/T, \quad y = x_3/L,$$

где L, T — некоторые постоянные. Очевидно, в новых переменных уравнение (37) примет вид:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} = \frac{\nu T}{L^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}, \quad (40)$$

где $\tilde{u}(y, \tau) = u(Ly, Tt)$. Уравнения (37) и (40) совпадут, если положить $T = L^2$. Иными словами, если функция $u(x_3, t)$ — решение уравнения (37), то при любой вещественной постоянной L функция $\tilde{u}(x_3, t) = u(Lx_3, L^2t)$ есть решение того же уравнения. Таким образом, уравнение теплопроводности (37) инвариантно относительно замены переменных

$$\tau = t/L^2, \quad y = x_3/L, \quad (41)$$

где L — произвольная ненулевая постоянная. В свою очередь, среди решений уравнения (37) выделим такие, которые также инвариантны относительно замены переменных (41), т. е. функции, удовлетворяющие тождественно для всех $x_3, t, L \neq 0$ условию:

$$u(x_3, t) = u(Lx_3, L^2t).$$

Очевидно, это условие будет выполнено, если положить, что $u(x_3, t)$ зависит лишь от отношения x_3/\sqrt{t} .

Основываясь на высказанных соображениях, решение задачи (37)–(39) будем искать в виде: $u(x, t) = f(\theta)$, где $\theta = x_3/(2\sqrt{\nu t})$. Подставляя u в уравнение (37), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции f :

$$f''(\theta) + 2\theta f'(\theta) = 0.$$

Общее решение этого уравнения, как нетрудно проверить, есть

$$f(\theta) = a + b \int_0^\theta e^{-s^2} ds,$$

где a, b — постоянные, т. е. при любых значениях a, b функция

$$u(x_3, t) = a + b \int_0^{\theta} e^{-s^2} ds$$

есть решение уравнения (37). Постоянные a, b найдем, удовлетворяя условиям (38)–(39). В результате элементарных преобразований, выполненных с учетом формулы Эйлера — Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2,$$

получим:

$$u(x_3, t) = V \operatorname{erfc}(\theta), \quad (42)$$

где

$$\operatorname{erfc}(\theta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-s^2} ds$$

есть так называемая дополнительная функция ошибок (дополнительный интеграл вероятности). Ясно, что $0 < \operatorname{erfc}(\theta) \leq 1$, и $\operatorname{erfc}(\theta)$ монотонно убывает при возрастании θ , асимптотически приближаясь к нулю, $\operatorname{erfc}(0) = 1$. Отсюда вытекают следующие утверждения.

1) При любых положительных x_3 и t справедливы неравенства:

$$0 < u(x_3, t) < V.$$

Это означает, что, благодаря наличию вязкости, движение стенки мгновенно передается всему бесконечному слою жидкости, но в любой точке жидкого слоя скорость остается меньше скорости движения стенки.

2) С увеличением t в любой точке слоя скорость приближается к предельному значению, равному V .

3) При уменьшении вязкости в каждой внутренней точке слоя скорость движения жидкости стремится к нулю. Это отражает тот физически очевидный факт, что идеальная жидкость не может быть увлечена движущейся стенкой.

4) При любом положительном значении t распределение скорости по толщине определяется параметром $\sqrt{\nu t}$ и при малых значениях этого параметра характеризуется ярко выраженным пограничным слоем, в котором скорость резко падает от V практически до нуля.

Заметим, наконец, что вектор скорости $v \equiv 0$ и давление $p = \text{const}$ удовлетворяют, очевидно, уравнениям Эйлера (1), (2), с. 108, движения идеальной жидкости, если считать, что жидкость несжимаема т. е. $\dot{\rho} = 0$, а массовые силы отсутствуют ($b = 0$). Граничное условие $v \cdot \nu = 0$ также выполняется. Поэтому утверждение 4) можно интерпретировать так: если интервал времени, на котором изучается движение жидкости, не слишком велик, то вязкость жидкости имеет смысл учитывать лишь вблизи движущегося твердого тела, т. е. в тонком пограничном слое, вне которого можно применять уравнения движения идеальной жидкости. Предположение о малости толщины пограничного слоя позволяет существенно упростить и сами уравнения Навье — Стокса (см. следующий пункт).

Во многих случаях такой подход к описанию обтекания тела вязкой жидкостью приводит к удовлетворительным результатам.

5. Уравнения пограничного слоя. Как и в предыдущем пункте, будем рассматривать течение вязкой несжимаемой жидкости вблизи твердой стенки, совпадающей с плоскостью $x_3 = 0$ и движущейся с некоторой скоростью V (не обязательно постоянной) в направлении оси x_1 . Течение жидкости будем считать плоскопараллельным, т. е. будем считать, что $v_1 = v_1(x_1, x_3)$, $v_3 = v_3(x_1, x_3)$, $v_2 \equiv 0$, $p = p(x_1, x_3)$. С учетом сделанных предположений выпишем нестационарные уравнения Навье — Стокса и условия прилипания (для упрощения записей будем использовать безындексные обозначения: $x = x_1$, $y = x_3$, $u = v_1$, $v = v_3$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad y > 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad y > 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad y > 0, \quad (45)$$

$$u = V, \quad v = 0, \quad y = 0. \quad (46)$$

Введем некоторый характерный линейный размер L вдоль оси x (его можно считать, например, равным длине отрезка, на котором изучается движение жидкости). Введем, также некоторое характерное значение продольной скорости U_0 , например, это — средняя скорость движения стенки на том интервале времени, на котором изучается течение жидкости. Понятно, что тогда величину $T = L/U_0$

можно считать масштабом измерения времени. Величину $l = \sqrt{\nu T}$, характеризующую, как показано в предыдущем пункте, толщину пограничного слоя, будем считать малой по сравнению с L . Заметим, что $\sqrt{\nu/T} = l/T$. Эту величину, обозначим ее через V_0 , можно считать характерной скоростью течения поперек слоя. Ее естественно полагать малой по сравнению с U_0 .

В основе вывода уравнений пограничного слоя лежат следующие соображения. Ввиду тонкости пограничного слоя движение в нем происходит в основном вдоль обтекаемой поверхности, поэтому поперечная компонента скорости v существенно меньше продольной. Это видно и из уравнения неразрывности (45). Действительно, интегрируя это уравнение по y в пределах пограничного слоя с учетом граничного условия прилипания (46), получим:

$$v = - \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} dy = O(l).$$

Вблизи стенки вдоль направления оси y скорость меняется быстро. В направлении же оси x скорость меняется медленно; заметные изменения ее происходят на расстояниях порядка L . Поэтому производные скорости по y существенно больше производных по x , следовательно, в уравнении (43) производную $\partial^2 u / \partial x^2$ можно отбросить. Далее, сравнивая уравнения (43) и (44), можно заметить, что производная $\partial p / \partial y$ существенно меньше, чем $\partial p / \partial x$. Поэтому уравнение (44) заменяют уравнением $\partial p / \partial y = 0$.

Выводу уравнений пограничного слоя можно придать более формальный (и точный) смысл. Выполним замену переменных (иначе говоря, приведем уравнения Навье — Стокса к безразмерному виду), полагая

$$x = Lx', \quad u = U_0 u', \quad t = Tt', \quad y = ly', \quad v = V_0 v', \quad p = (U_0^2 / \rho) p'. \quad (47)$$

В результате получим:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad y' > 0, \quad (48)$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \quad y' > 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad y' > 0. \quad (50)$$

Здесь $R = U_0 L / \nu$ — безразмерный параметр, называемый *числом Рейнольдса*. Заметим, что $l/L = 1/\sqrt{R}$. Поэтому число Рейнольдса, фактически, определяет толщину пограничного слоя.

Если считать, что все величины, в уравнениях (48)–(50), при увеличении числа Рейнольдса остаются ограниченными¹⁾, то устремляя R к бесконечности, получим:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \quad y' > 0,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0, \quad y' > 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad y' > 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, приведем эти уравнения к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad y > 0, \quad (51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad y > 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad y > 0. \quad (53)$$

Уравнения (51)–(53), называемые *уравнениями пограничного слоя*, или уравнениями Прандтля, можно рассматривать, таким образом, как предельную форму уравнений Навье — Стокса, когда число Рейнольдса R стремится к бесконечности.

Уравнение (52) показывает, что давление не меняется по толщине слоя, поэтому его обычно находят, решая задачу обтекания в рамках модели идеальной жидкости. При известном давлении уравнения (51), (53) образуют полную систему относительно компонент скорости u , v . К этим уравнениям следует присоединить некоторые начальные и граничные условия.

Приведем типичный пример постановки таких условий. Уравнения (51), (53) решаются в области $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$. Полагают, что

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad x > 0, y > 0,$$

¹⁾Это предположение накладывает точные условия на соотношения между компонентами скорости течения в пограничном слое.

где $u_0(x, y)$ — заданная функция, определяющая начальное распределение скорости;

$$u(0, y, t) = u_1(y, t), \quad y > 0, t > 0,$$

где $u_1(y, t)$ — заданная функция, определяющая распределение скорости на входе в пограничный слой;

$$u(x, 0, t) = V(x, t), \quad v(x, 0, t), \quad x > 0, t > 0,$$

т. е. выполнено условие прилипания;

$$u(x, y, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty,$$

иными словами, влияние движения тела на жидкость затухает при удалении от него.

ГЛАВА 4
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

§ 1. Основные граничные задачи линейной теории
упругости

1. Определяющие соотношения линейной теории упругости. Будем считать, что деформация задается вектором смещений, т. е. $\chi(\xi, t) = \xi + u(\xi, t)$. Деформация предполагается бесконечно малой (см. с. 50), т. е. величина $|\nabla u|^2$ пренебрежимо мала по сравнению с $|\nabla u|$. В этом случае

$$U^2 = V^2 = E + \nabla u + (\nabla u)^T = E + 2\mathcal{E}(u), \quad (1)$$

где $\mathcal{E}(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$ — тензор бесконечно малых деформаций. Из (1) нетрудно получить, что

$$U = V = E + \mathcal{E}(u), \quad (2)$$

причем, если $F = RU$ — полярное разложение градиента деформации, то

$$R = E + \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T). \quad (3)$$

Конечно, нужно иметь в виду, что равенства (1)–(3) справедливы лишь с принятой выше точностью. Это обстоятельство нужно учитывать и в проводимых ниже выкладках.

Используя (19), с. 82, и (3), получим:

$$T = \left(E + \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T)\right)g(U)\left(E - \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T)\right). \quad (4)$$

В дальнейшем всегда предполагается, что в отсчетной конфигурации тело находится в ненапряженном состоянии, то есть $g(E) = 0$. Будем считать также, что функция g дифференцируема. Тогда

$$g(E + \mathcal{E}(u)) = g(E) + \nabla g(E)\mathcal{E}(u) = \nabla g(E)\mathcal{E}(u),$$

или

$$g(U) = g(E + \mathcal{E}(u)) = L\mathcal{E}(u). \quad (5)$$

Тензор $g(U)$, как отмечалось выше, симметричен. Поэтому оператор $L = \nabla g(E)$ можно рассматривать как линейный оператор, действующий в пространстве симметричных тензоров. Используя (5), из (4) получим:

$$T = L \mathcal{E}(u). \quad (6)$$

Таким образом, при бесконечно малых деформациях тензор напряжений линейно выражается через тензор бесконечно малых деформаций. Соотношение (6) принято называть обобщенным *законом Гука*, а оператор L — *тензором Гука*.

Упрощения и конкретизация соотношения (6) возможны при дополнительных предположениях о свойствах упругого тела. Будем считать, что тело изотропно. Используя (32), с. 87, и (2), получим:

$$\begin{aligned} T &= \varphi_0 E + \varphi_1 (E + \mathcal{E}(u)) + \varphi_2 (E + 2\mathcal{E}(u)) = \\ &= (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2) E + (\varphi_1 + 2\varphi_2) \mathcal{E}(u), \end{aligned}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — функции инвариантов тензора $\mathcal{E}(u)$. Сохраняя с принятой точностью лишь члены, линейные относительно тензора $\mathcal{E}(u)$, можем написать:

$$T = (-p + \lambda \operatorname{tr} \mathcal{E}(u)) E + 2\mu \mathcal{E}(u),$$

где p, λ, μ — некоторые постоянные. Пусть $\mathcal{E}(u) = 0$, т. е. деформации отсутствуют. Тогда $T = -pE$. В соответствии с принятым выше соглашением об отсутствии напряжений в отсчетной конфигурации мы должны принять, что $p = 0$, следовательно,

$$T = \lambda \operatorname{tr} \mathcal{E}(u) E + 2\mu \mathcal{E}(u). \quad (7)$$

Равенство (7) называют *законом Гука для изотропного линейно-упругого тела*, коэффициенты λ, μ — *параметрами Ламе*. Их значения определяются свойствами материала. В дальнейшем будет выяснен физический смысл этих постоянных. Будут указаны и принципиальные способы их экспериментального определения. Для этого будут рассмотрены специальные случаи деформации или распределения напряжений.

Прежде всего заметим, что $\sigma = \operatorname{tr} T / 3 = (\lambda + 2\mu/3) \operatorname{tr} \mathcal{E}(u)$. Нетрудно проверить (см. ниже упражнение 3.4), что $\operatorname{tr} \mathcal{E}(u)$ можно интерпретировать как приращение единицы объема при деформации, описываемой вектором смещений u ; σ есть гидростатическое (среднее) давление. Поэтому величину

$$K = \lambda + 2\mu/3 \quad (8)$$

называют *модулем объемного сжатия*.

Пусть вектор смещений u в некоторой декартовой системе координат имеет компоненты $u_1 = kx_2$, $u_2 = u_3 = 0$, где $k = \text{const}$. Описываемая этим вектором деформация называется чистым сдвигом. Величина сдвига характеризуется постоянной k . Используя (7), получим, что

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = k\mu, \quad (9)$$

а остальные декартовы компоненты тензора напряжений σ_{ij} равны нулю. Поэтому величину μ называют *модулем сдвига*. Она характеризует величину касательных напряжений, возникающих при сдвиге.

Рассмотрим теперь случай, когда тензор напряжений T в некоторой декартовой системе координат имеет лишь одну ненулевую компоненту, а именно, σ_{11} . Говорят, что в этом случае реализуется одноосное растяжение в направлении x_1 .

В соответствии с (7) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11}, \\ 0 &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22}, \\ 0 &= \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \end{aligned} \quad (10)$$

где ε_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, — компоненты тензора $\mathcal{E}(u)$. Разрешая систему уравнений (10) относительно ε_{ii} , $i = 1, 2, 3$, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E\varepsilon_{11}, \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\nu\varepsilon_{11}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Величина E называется *модулем Юнга* (иногда — модулем Эйлера) или модулем растяжения. Она, как видно из (11), определяет величину осевого напряжения σ_{11} при относительном удлинении ε_{11} в направлении той же оси.

Величина ν называется *коэффициентом Пуассона*. Она характеризует относительное укорочение в направлении осей x_2 , x_3 при растяжении в направлении оси x_1 .

Нетрудно проверить, что

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}.$$

По физическому смыслу имеем: $E > 0$, $K > 0$, $\mu > 0$, следовательно, $\nu \in (-1, 1/2]$. Все известные опыты показывают, что $\nu > 0$, т. е. можно считать выполненными неравенства: $0 < \nu \leq 1/2$, $\lambda > 0$.

Для большинства металлов $\nu \approx 0,3$. Крайнее значение $\nu = 1/2$ соответствует условию $K = \infty$. Такие материалы называют *несжимаемыми*. Это, например, резиноподобные материалы.

Для отыскания всех введенных выше характеристик изотропного упругого материала, т. е. величин λ , μ , K , ν , достаточно знать лишь модуль Юнга и модуль сдвига. Как показывают соотношения (9), (11), их определение можно реализовать на основе следующих экспериментов.

1) Растягивается призматический образец материала (см. рис. 1). Напряжение σ можно рассчитать, зная прилагаемую силу P и пло-

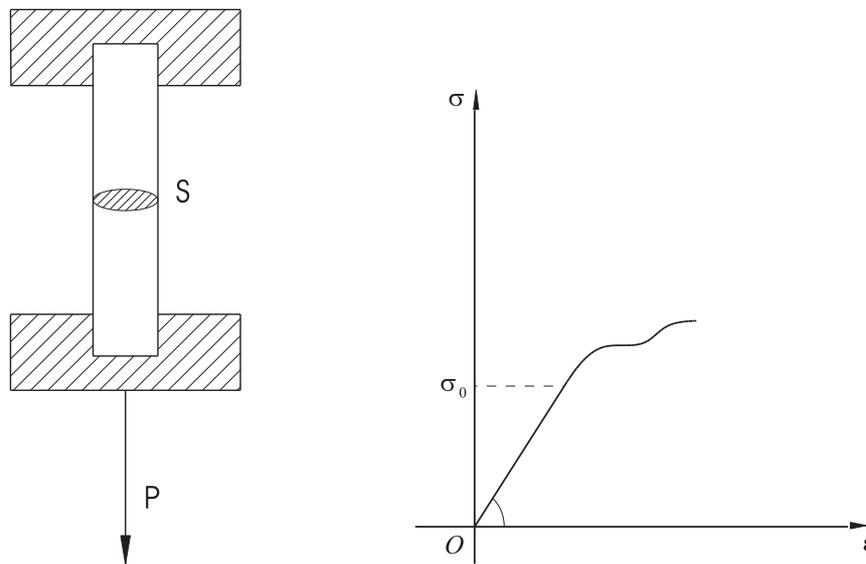


Рис. 1. К определению модуля Юнга.

щадь S поперечного сечения образца. Увеличение силы приводит к увеличению относительного удлинения образца ϵ . Получаемая зависимость изображается графически (см. рис. 1). Для упругого материала эта зависимость линейна. Тангенс угла наклона прямой есть модуль Юнга. При испытании реальных образцов упругие свойства сохраняются до определенного значения $\sigma = \sigma_0$. Затем наблюдаются отклонения от пропорциональной зависимости $\sigma = E\epsilon$, которые можно объяснить проявлением пластических свойств материала.

2) Аналогично, для определения μ нужно организовать эксперимент, в котором реализуется деформация, близкая к чистому сдвигу. На толстую полосу материала воздействуют устройством типа гильотины (см. рис. 2). Зависимость напряжения от сдвига в этом эксперименте имеет вид, аналогичный, изображенному на рис. 1. Тангенс угла наклона есть модуль сдвига исследуемого материала.

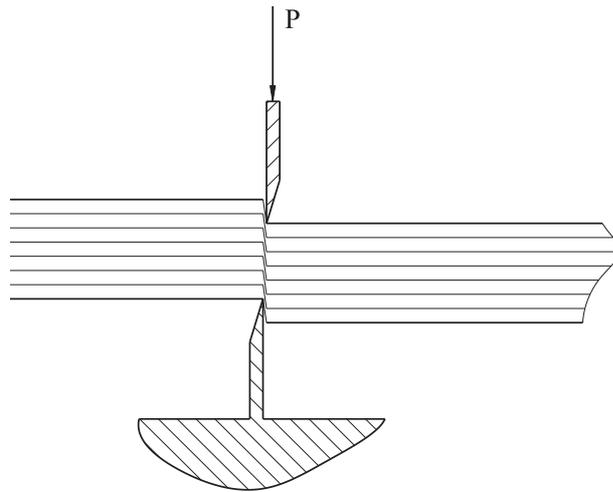


Рис. 2. К определению модуля сдвига.

2. Уравнения движения линейной теории упругости.

Запишем уравнение движения (10), с. 69, используя зависимость (6):

$$\rho \dot{v} = \operatorname{div} L \mathcal{E}(u) + \rho b,$$

где $\dot{v} = \partial^2 u(\xi, t) / \partial t^2$. Таким образом, левая часть — функция времени и переменной ξ . В правой части уравнения дивергенция вычисляется по переменной x . В нелинейной теории упругости в связи с этим обычно делается переход к тензору напряжений, отнесенному к отсчетной конфигурации (тензору Пиолы). В линейной теории упругости различием между положением точки в актуальной и отсчетной конфигурациях пренебрегают, т. е. полагают $\xi = x$ и уравнение движения записывают в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} L \mathcal{E}(u) + \rho b. \quad (12)$$

В соответствии с вышесказанным стирается различие между плотностью в отсчетной и актуальной конфигурациях, т. е. плотность ρ считается заданной.

3. Потенциальная энергия деформации упругого тела.

Обратимся вновь к определяющему соотношению изотропного линейно-упругого тела — закону Гука (7) — и придадим ему несколько иную форму. Именно, введем в рассмотрение линейный оператор L , действующий в пространстве симметричных тензоров:

$$L \mathcal{E} = \lambda \operatorname{tr} \mathcal{E} E + 2\mu \mathcal{E}.$$

Тогда закон Гука (7) принимает следующий вид: $T = L \mathcal{E}$.

Отметим некоторые свойства оператора L .

1) Оператор L симметричен, т. е.

$$LA \cdot B = LB \cdot A$$

для любых симметричных тензоров A, B . В самом деле,

$$LA \cdot B = \lambda \operatorname{tr}(A)E \cdot B + 2\mu A \cdot B.$$

По определению скалярного произведения тензоров имеем:

$$E \cdot B = \operatorname{tr}(EB^T) = \operatorname{tr}(B),$$

т. е.

$$LA \cdot B = \lambda \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B + 2\mu A \cdot B = LB \cdot A.$$

2) Оператор L положительно определен, т. е. $LA \cdot A \geq 0$ для любого симметричного тензора A , и из равенства $LA \cdot A = 0$ вытекает, что $A = 0$. Действительно, $LA \cdot A = \lambda(\operatorname{tr} A)^2 + 2\mu A \cdot A$, и положительная определенность оператора L сразу же вытекает из положительности параметров Ламе λ, μ .

В дальнейшем будем предполагать, что и для любого линейно-упругого тела оператор L , участвующий в обобщенном законе Гука (6), удовлетворяет условиям 1), 2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что при выполнении условия 1) тензор напряжений T есть градиент скалярной функции тензорного аргумента $\theta(\mathcal{E}) = \frac{1}{2}L\mathcal{E} \cdot \mathcal{E}$, т. е.

$$T \cdot A = L\mathcal{E} \cdot A = \left. \frac{d}{dt} \theta(\mathcal{E} + tA) \right|_{t=0}$$

для любого тензора A . Функцию θ называют поэтому упругим потенциалом. Записывая условие 2) в декартовых координатах, получим, что

$$\sum_{ij=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} > 0$$

для любого тензора $\mathcal{E} \neq 0$. Пусть только одна компонента ε_{kl} тензора \mathcal{E} отлична от нуля. Тогда $\sigma_{kl} \varepsilon_{kl} > 0$. Полученное неравенство можно интерпретировать так: при возрастании какой-либо компоненты тензора деформации возрастает и соответствующая компонента тензора напряжений.

Умножим уравнение движения (12) скалярно на \dot{u} , затем проинтегрируем почленно по области $\omega \subset \Omega$:

$$\int_{\omega} \rho \dot{v} \cdot \dot{u} dx = \int_{\omega} \operatorname{div} T \cdot \dot{u} dx + \int_{\omega} \rho b \cdot \dot{u} dx. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_{\omega} \rho \dot{v} \cdot \dot{u} dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho |\dot{u}|^2 dx.$$

Первое слагаемое в правой части равенства (13) преобразуем на основе формулы Остроградского — Гаусса с учетом симметрии тензора T по аналогии с преобразованиями, выполненными на с. 76:

$$\int_{\omega} \operatorname{div} T \cdot \dot{u} dx = \int_{\omega} \operatorname{div}(T\dot{u}) dx - \int_{\omega} \operatorname{tr}(T\nabla\dot{u}) dx,$$

$$\int_{\omega} \operatorname{div}(T\dot{u}) dx = \int_{\gamma} T\dot{u} \cdot \nu dx = \int_{\gamma} T\nu \cdot \dot{u} dx,$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \operatorname{tr}(T\nabla\dot{u}) dx &= \int_{\omega} \operatorname{tr}(T\mathcal{E}(\dot{u})) dx = \int_{\omega} T \cdot \mathcal{E}(\dot{u}) dx = \\ &= \int_{\omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\dot{u}) dx = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(u) dx = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \theta(\mathcal{E}(u)) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (13) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\omega} \rho |\dot{u}|^2 dx + \int_{\omega} \theta(\mathcal{E}(u)) dx \right) = \int_{\gamma} T\nu \cdot \dot{u} dx + \int_{\omega} \rho b \cdot \dot{u} dx. \quad (14)$$

Как отмечалось выше, величина $\frac{1}{2} \int_{\omega} \rho |\dot{u}|^2 dx$ — кинетическая энергия тела ω , а $T \cdot \mathcal{E}(\dot{u}) = \frac{d}{dt} \theta(\mathcal{E}(u))$ — мощность напряжений.

Поэтому $\int_{\omega} \theta(\mathcal{E}(u)) dx$, очевидно, по смыслу есть работа внутренних напряжений, или, иными словами, потенциальная энергия упругих деформаций. Функция $\theta(\mathcal{E}(u))$ — плотность потенциальной энергии упругих деформаций.

Равенство (14) показывает, что скорость изменения суммы потенциальной и кинетической энергии тела определяется скоростью совершения работы поверхностными и массовыми силами. Соотношение (14) составляет содержание так называемой теоремы о кинетической энергии для линейно-упругого тела.

4. Нестационарные задачи. Исследование единственности решений. К уравнению движения линейной теории упругости:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} L \mathcal{E}(u) + \rho b, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (15)$$

присоединяют начальные и граничные условия:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$u(x, t) = \mu_u(x, t), \quad x \in \Gamma_u, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$L\mathcal{E}(u)\nu = \mu_\sigma(x, t), \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad t > 0, \quad (18)$$

где $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ — граница области Ω , ν — нормаль (внешняя) к Γ , $u_0, u_1, \mu_u, \mu_\sigma$ — заданные функции.

Поясним смысл условий (16)–(18). Условия (16) означают, что в начальный момент времени известен вектор перемещений и скорости движения всех точек тела Ω . Условие (17) показывает, что известен закон движения точек границы области Ω , принадлежащих Γ_u , а условие (18) означает, что на Γ_σ заданы напряжения.

В частном случае, когда $\Gamma_u = \Gamma$, задача (15)–(17) называется первой начально-краевой задачей. Если $\Gamma_\sigma = \Gamma$, то задача (15), (16), (18) называется второй начально-краевой задачей.

Особо отметим случай, когда $\mu_u = 0$. В этом случае говорят, что часть границы, а именно, Γ_u , жестко закреплена (не испытывает смещений в процессе движения тела). Если $\mu_\sigma = 0$, то говорят, что часть границы, Γ_σ , свободна (в процессе движения на ней не возникает напряжений).

Теорема 1. Задача (15)–(18) может иметь не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $u^{(1)}, u^{(2)}$ — решения задачи (15)–(18). Тогда их разность — решение однородной задачи (15)–(18), т. е. $b = 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\mu_u = 0$, $\mu_\sigma = 0$. Запишем в этом случае равенство (14):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\dot{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \theta(\mathcal{E}(u)) dx \right) = 0,$$

откуда вытекает, что

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\dot{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \theta(\mathcal{E}(u)) dx = \operatorname{const},$$

но вследствие однородности начальных условий $\varphi(0) = 0$, т. е.

$$\varphi(t) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (19)$$

В силу положительной определенности тензора L можно написать, что $\theta(\mathcal{E}(u)) \geq 0$. Отсюда и из (19) вытекает, что $|\dot{u}| \equiv 0$. Вновь используя однородность начальных условий, получаем, что $u(x, t) \equiv 0$, т. е. $u^{(1)} = u^{(2)}$. \square

5. Стационарные задачи. Единственность решений. Рассматривается задача о равновесии упругого тела Ω , находящегося под действием заданных массовых и поверхностных сил, не зависящих от времени. В рамках линейной теории упругости эта задача формулируется как задача решения уравнения:

$$\operatorname{div} L \mathcal{E}(u) + \rho b = 0, \quad x \in \Omega, \quad (20)$$

получающегося из уравнения (15) в предположении, что u не зависит от времени. К уравнению (20) присоединяются граничные условия

$$u(x) = \mu_u(x), \quad x \in \Gamma_u, \quad (21)$$

$$L \mathcal{E}(u) \nu = \mu_\sigma(x), \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad (22)$$

μ_u, μ_σ — заданные функции, $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$.

В случае, когда $\Gamma_u = \Gamma$, задача (20), (21) называется первой краевой задачей для стационарной системы уравнений теории упругости. Если $\Gamma_\sigma = \Gamma$, задача (20), (22) называется второй краевой задачей.

При исследовании задачи (20)–(22) важную роль играет так называемый принцип возможных перемещений. Для того чтобы получить его формулировку, умножим уравнение (20) скалярно на произвольную функцию η , удовлетворяющую граничному условию:

$$\eta(x) = 0, \quad x \in \Gamma_u, \quad (23)$$

и проинтегрируем почленно полученное равенство по области Ω . После преобразований, аналогичных применявшимся при получении соотношения (14), будем иметь:

$$\int_{\Omega} L \mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx \equiv \int_{\Omega} L \mathcal{E}(\eta) \cdot \mathcal{E}(u) dx = \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx + \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot \eta dx. \quad (24)$$

Здесь учтена симметрия тензора L .

Соотношение (24) выражает *принцип возможных перемещений* в линейной теории упругости. Его механическая интерпретация будет дана чуть позже.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если тензор напряжений $T = L\mathcal{E}(u)$ и тензор деформаций $\mathcal{E}(\eta)$ представлены своими компонентами σ_{ij} , ε_{ij} в некотором ортонормированном базисе, то соотношение (24) можно записать в виде:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx = \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mu_{\sigma} \cdot \eta dx. \quad (25)$$

Теорема 2. Пусть $\text{mes } \Gamma_u > 0$. Тогда задача (20)–(22) имеет не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предположить, что $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ — решения задачи (20)–(22), то $u(x) = u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x) = 0$ при $x \in \Gamma_u$ и поэтому в силу (24) имеем:

$$\int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(u) dx = 0,$$

откуда вследствие положительной определенности оператора L получим, что $\mathcal{E}(u(x)) = 0$, $x \in \Omega$, а это значит (см. упражнение 1.5, с. 52), что $u(x) = a + Wx$, где a — постоянный вектор, W — постоянный кососимметричный тензор. Поскольку $u(x) = 0$ при $x \in \Gamma_u$, то $a = 0$, $W = 0$. \square

§ 2. Вариационные принципы линейной теории упругости

С задачей (20)–(22) §1 связан ряд вариационных постановок. Введем в рассмотрение функционал потенциальной энергии системы «упругое тело — внешние силы» (функционал Лагранжа):

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(u) dx - \int_{\Omega} \rho b \cdot u dx - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mu_{\sigma} \cdot u dx. \quad (1)$$

Первое слагаемое здесь — потенциальная энергия деформации упругого тела, вызываемой вектором перемещений u , второе и третье слагаемые — работа внешних (поверхностных и массовых) сил на этом перемещении.

1. Вариационный принцип Лагранжа. Обозначим через V_{μ} множество кинематически допустимых перемещений, т. е. множество функций, определенных на Ω и удовлетворяющих граничному условию (21) §1.

Теорема 1. Если u — решение задачи (20)–(22), то

$$F(u) = \min_{v \in V_{\mu}} F(v).$$

Обратно, если u реализует минимум функционала F на множестве V_μ , то u — решение задачи (20)–(22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой вектор $v \in V_\mu$ можно представить в виде $v = u + \eta$, где η удовлетворяет условию (23), с. 161, иными словами $\eta \in V_0$. Нетрудно подсчитать, что

$$F(v) = F(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(\eta) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx + l(u, \eta), \quad (2)$$

где

$$l(u, \eta) = \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx - \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx - \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot \eta dx.$$

Если u — решение задачи (20)–(22), с. 161, то вследствие (24), с. 161, и положительной определенности тензора L

$$F(v) = F(u) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(\eta) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx \geq F(u), \quad (3)$$

т. е. u реализует минимум функционала F на множестве V_μ . Обратно, если u реализует минимум функционала F на множестве V_μ , то $F(v) \geq F(u) \forall v \in V_\mu$. В силу (2) отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(\eta) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx + \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx - \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx - \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot \eta dx \geq 0$$

для любого $\eta \in V_0$. Заменяя η на $t\eta$, $t \in \mathbb{R}$, получим, что

$$\frac{t^2}{2} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(\eta) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx + t \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx - t \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx - t \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot \eta dx \geq 0$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что дискриминант квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства не положителен, следовательно¹⁾,

$$\int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx = \int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx + \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot \eta dx \quad \forall \eta \in V_0. \quad (4)$$

¹⁾Тождество (4), очевидно, можно трактовать как необходимое условие минимума функционала F в точке u .

Проводя теперь выкладки, аналогичные, применявшимся при доказательстве принципа возможных перемещений, будем иметь:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} L\mathcal{E}(u) + \rho b) \cdot \eta dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} (L\mathcal{E}(u)\nu - \mu_{\sigma}) \cdot \eta dx = 0,$$

откуда в силу произвольности η получаем, что u — решение задачи (20)–(22), §1. \square

Соотношение (2) позволяет дать механическую интерпретацию принципа возможных перемещений (24), §1. Понятно, что $l(u, \eta)$ есть главная (линейная) часть приращения потенциальной энергии системы при переходе от состояния, описываемого вектором смещений u , к состоянию, описываемому вектором смещений $v = u + \eta$. Этот переход задается вектором смещений $\eta \in V_0$. Равенство (24), §1, показывает, таким образом, что на любом малом смещении из положения равновесия, не нарушающем кинематических граничных условий, работа внутренних напряжений

$$\int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx$$

совпадает с работой внешних, массовых и поверхностных, сил, т. е. с

$$\int_{\Omega} \rho b \cdot \eta dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mu_{\sigma} \cdot \eta dx$$

на этом же векторе перемещений η .

2. Вариационный принцип Кастильяно. Рассмотрим теперь в некотором смысле двойственный по отношению к вариационному принципу Лагранжа вариационный принцип Кастильяно.

Будем говорить, что тензорное поле T статически допустимо, если $T = T^T$, выполнено уравнение равновесия

$$\operatorname{div} T + \rho b = 0, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

и граничные условия

$$T\nu = \mu_{\sigma}, \quad x \in \Gamma_{\sigma}. \quad (6)$$

Множество всех статически допустимых тензорных полей обозначим через $M = M(b, \mu_{\sigma})$.

Теорема 2 (вариационный принцип Кастильяно). Пусть u есть решение задачи (20)–(22),

$$T = L\mathcal{E}(u) \quad (7)$$

есть порождаемое им тензорное поле напряжений. Тогда

$$\Phi(T) = \sup_{S \in M} \Phi(S), \quad (8)$$

где

$$\Phi(S) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}S \cdot S dx + \int_{\Gamma_u} S\nu \cdot \mu_u dx,$$

причем $\Phi(T) = F(u)^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тензор L^{-1} так же, как и тензор L , симметричен и положительно определен. Поэтому

$$L^{-1}T \cdot S \leq \frac{1}{2}L^{-1}T \cdot T + \frac{1}{2}L^{-1}S \cdot S. \quad (9)$$

Проинтегрируем неравенство (9) по области Ω и учтем равенство (7). Получим:

$$\int_{\Omega} S \cdot \mathcal{E}(u) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}S \cdot S dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}T \cdot T dx. \quad (10)$$

Первое слагаемое слева в (10) преобразуем по аналогии с преобразованиями, при помощи которых было получено равенство (24), §1:

$$\int_{\Omega} S \cdot \mathcal{E}(u) dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} S \cdot u dx + \int_{\Gamma_u} S\nu \cdot \mu_u dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} S\nu \cdot u dx.$$

Воспользуемся теперь условием $S \in M$ и перенесем некоторые слагаемые в правую часть неравенства (10):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} S\nu \cdot \mu_u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}S \cdot S dx &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}T \cdot T dx - \\ - \int_{\Omega} \rho b \cdot u dx - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mu_{\sigma} \cdot u dx &= F(u). \end{aligned}$$

¹⁾Функционал Φ называют функционалом Кастильяно.

Вследствие уравнение равновесия для тензора T получим:

$$-\int_{\Omega} \rho b \cdot u dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot u dx.$$

Проводя далее преобразования, основанные на формуле Остроградского — Гаусса, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} T \cdot u dx &= - \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(u) dx + \int_{\Gamma} L\mathcal{E}(u)\nu \cdot u dx = \\ &= - \int_{\Omega} L^{-1}T \cdot T dx + \int_{\Gamma_u} T\nu \cdot \mu_u dx + \int_{\Gamma_\sigma} \mu_\sigma \cdot u dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$F(u) = \int_{\Gamma_u} T\nu \cdot \mu_u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} L^{-1}T \cdot T dx = \Phi(T). \quad \square$$

Вариационный принцип Кастильяно позволяет строить истинное поле напряжений как решение вариационной задачи (8). Практически ее решение затруднено наличием ограничений (5), (6). Однако ценность данного вариационного принципа несомненна. Так, например, он во многих случаях позволяет дать оценку снизу потенциальной энергии системы. Оценку сверху этой же величины можно получить при помощи вариационного принципа Лагранжа. Совместное применение этих принципов приводит к двусторонней оценке потенциальной энергии.

§ 3. Задача о равновесии цилиндра под действием внутреннего давления

Рассмотрим один из немногих примеров задач теории упругости, допускающих решение в явном виде.

Рассматривается полый круговой цилиндр (труба) с внутренним радиусом R_1 , внешним радиусом R_2 , подверженный постоянно внутреннему давлению p . Наружное давление и массовые силы отсутствуют. Материал цилиндра упругий, однородный, изотропный. Известны модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Длина цилиндра равна l . Заданы следующие условия закрепления: точки цилиндра, лежащие на торцах, не могут испытывать смещений в осевом и окружном направлениях, проекция касательного напряжения на радиальное направление равна нулю, т. е. точки торцов могут свободно

скользить в радиальном направлении. Эта задача называется *задачей Ламе* для полого цилиндра.

Решение задачи удобно строить, используя цилиндрическую систему координат, поместив ее начало в центр торца цилиндра и направив ось системы координат по оси цилиндра.

Пусть u_r, u_θ, u_z — физические компоненты вектора перемещений, $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{z\theta}$ — физические компоненты тензора деформаций, $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{z\theta}$ — физические компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат.

В этих обозначениях сформулированные выше граничные условия записываются в виде:

$$u_\theta = 0, \quad u_z = 0, \quad z = 0, \quad z = l, \quad (1)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad z = 0, \quad z = l, \quad (2)$$

$$\sigma_{rr} = -p, \quad r = R_1, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = 0, \quad r = R_2, \quad (4)$$

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad r = R_1, \quad r = R_2. \quad (5)$$

Из соображений симметрии ясно, что решением задачи должен быть вектор смещений, удовлетворяющий условиям:

$$u_r = u(r), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0. \quad (6)$$

Для компонент тензора деформаций тогда имеем:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{z\theta} = 0.$$

Компоненты тензора напряжений в соответствии с законом Гука записываются в виде (см. ниже упражнение 3.2):

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right), \quad (9)$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{z\theta} = 0. \quad (10)$$

Далее можно было бы выписать уравнения равновесия и проинтегрировать их, присоединяя граничные условия (1)–(5), но такой путь

не очень удобен, так как дивергенция тензора в цилиндрических координатах имеет достаточно громоздкий вид. Удобнее исходить из принципа возможных перемещений, для написания которого применительно к рассматриваемому случаю уже все подготовлено. Опираясь, на соответствующее интегральное тождество и применяя формулу интегрирования по частям, можно получить дифференциальное уравнение для отыскания функции u . Можно пойти и на дальнейшие упрощения. Действительно, граничные условия функции u уже известны, поэтому достаточно выписать в соотношении (24), с. 161, лишь интеграл по области Ω , учитывая при этом, что оператор L , фактически, определен соотношениями (7)–(10).

В результате получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta) dx &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\left((1-\nu) \frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \frac{d\eta}{dr} + \right. \\ &+ \left. \left((1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) \frac{\eta}{r} \right) r dr d\theta dz = \\ &= \frac{2\pi l E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{d}{dr} \left(r(1-\nu) \frac{du}{dr} \right) + (1-\nu) \frac{u}{r} \right) \eta dr + \dots \end{aligned}$$

Многоточием обозначены внеинтегральные слагаемые, возникающие после применения формулы интегрирования по частям, и которые нет необходимости выписывать. Функция η произвольна, поэтому функция u удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{d}{dr} \left(r(1-\nu) \frac{du}{dr} \right) + (1-\nu) \frac{u}{r} = 0. \quad (11)$$

Элементарными преобразованиями уравнение (11) приводится к виду:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим $u(r) = ar + b/r$, где a, b — произвольные постоянные.

Граничные условия (1), (2), (5) выполняются при любых значе-

ниях постоянных a, b . По формуле (7) имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}((1-\nu)(a-b/r^2) + \nu(a+b/r^2)) = \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(a - (1-2\nu)b/r^2).\end{aligned}$$

Решая систему (3), (4) относительно a, b , получим:

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\nu}{E}.$$

Подставляя найденные значения a, b в выражения для функций $u, \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$, получим распределение перемещений и компонент тензора напряжений по толщине трубы:

$$\begin{aligned}u(r) &= \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1+\nu}{E} ((1-2\nu)r + R_2^2/r), \\ \sigma_{rr} &= \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right), \\ \sigma_{zz} &= 2\nu \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.\end{aligned}$$

Элементарный анализ этих формул показывает, что величина σ_{rr} не превосходит по модулю p , величины $\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ неограниченно возрастают при уменьшении толщины трубы, причем максимум $\sigma_{\theta\theta}$ достигается на внутренней поверхности трубы и он всегда больше, чем σ_{zz} . Это объясняет тот экспериментально наблюдаемый факт, что разрушение трубы при достижении давлением некоторой предельной величины происходит вдоль образующей на внутренней поверхности трубы.

Упражнения.

3.1. Показать, что если $F = RU$ — полярное разложение градиента деформации, u — вектор смещений, то в рамках теории бесконечно малых деформаций

$$V = U = E + \mathcal{E}(u), \quad R = E + \frac{1}{2}(\nabla u - (\nabla u)^T).$$

3.2. Показать, что если $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ — компоненты тензоров T и \mathcal{E} в декартовой системе координат, то закон Гука (7) можно записать в виде:

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \quad (13)$$

3.3. Доказать, что в обозначениях предыдущего упражнения справедливы равенства:

$$E\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk}), \quad j \neq i, \quad k \neq i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$E\varepsilon_{ij} = (1 + \nu)\sigma_{ij}, \quad j \neq i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

3.4.* Пусть $\mathcal{E}(u)$ — тензор бесконечно малых деформаций. Показать, что $\text{tr } \mathcal{E}(u)$ можно интерпретировать как относительное изменение плотности.

3.5.* Показать что уравнение движения линейной теории упругости можно записать в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (c_L^2 - c_T^2) \nabla \text{div } u + c_T^2 \Delta u + b, \quad (14)$$

где $c_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_T^2 = \mu/\rho$.

3.6. Построить решение системы уравнений (14) при начальных условиях:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in V,$$

где $u_0(x) = 0$ при $x_1 \notin [-h, h]$, $u_0(x) = f(x_1)$ при $x_1 \in [-h, h]$, x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты, h — заданное число, f — заданная вектор-функция.

3.7. Показать, что вторая граничная задача для стационарной системы уравнений теории упругости может иметь решение лишь при условии, что для функций b, μ_σ выполнены следующие равенства:

$$\int_{\Omega} \rho b dx + \int_{\Gamma} \mu_\sigma dx = 0, \quad \int_{\Omega} \rho b \wedge x dx + \int_{\Gamma} \mu_\sigma \wedge x dx = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое из этих равенств означает, что главный вектор внешних сил, приложенных к телу Ω , равен нулю; второе означает равенство нулю главного момента внешних сил.

3.8. Показать, что если $u^{(1)}, u^{(2)}$ — решения второй краевой задачи теории упругости, то $u^{(1)}(x) = u^{(2)}(x) + c + Wx$, где c — произвольный постоянный вектор, W — произвольный постоянный кососимметричный тензор.

3.9. Показать, что решение второй граничной задачи для стационарной системы уравнений теории упругости определяется однозначно, если потребовать выполнения условий:

$$\int_{\Omega} u dx = 0, \quad \int_{\Omega} (\nabla u - (\nabla u)^T) dx = 0.$$

Дать механическую интерпретацию этих условий.

3.10.* Используя принцип возможных перемещений, доказать справедливость следующих утверждений.

а) Тело цилиндрической формы из упругого изотропного материала с произвольным поперечным сечением, поставленное своим основанием на горизонтальную плоскость, под влиянием силы тяжести укоротится по сравнению с недеформированным состоянием на величину $Ql/(2ES)$, где Q — вес тела, l — его длина, E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения.

б) Если тот же цилиндр положить на боковую поверхность, то он удлинится по сравнению с состоянием, свободным от напряжений, на величину $\nu Qh/(ES)$, где h — высота центра тяжести цилиндра над горизонтальной плоскостью, ν — коэффициент Пуассона.

в) Если сосуд произвольной формы с внутренним объемом v_1 , наружным объемом v_0 подвергнут внутреннему давлению p_1 и внешнему давлению p_0 , то объем стенок сосуда изменится на величину $(p_0v_0 - p_1v_1)/K$, где K — модуль объемного сжатия.

3.11.* (Задача Ламе для полого шара). Решить стационарную задачу теории упругости для полого изотропного шара, нагруженного внутренним давлением p_1 и внешним давлением p_2 .

§ 4. Стержни и пластины

В приложениях довольно часто приходится решать задачи теории упругости для тел, у которых один из размеров существенно отличается от двух других. Это — стержни, пластины и оболочки, являющиеся конструктивными элементами многих сооружений и машин. При естественных предположениях о характере распределения деформаций и напряжений в таких телах удается приближенно свести трехмерную систему уравнений теории упругости к существенно более простым математическим задачам.

1. Кручение стержня. Рассматривается длинное цилиндрическое тело (*стержень*). Область, занятую цилиндром, обозначим через Ω , S_0 , S_1 — основания (торцы), Γ — боковая поверхность цилиндра. Введем декартову систему координат, поместив ее начало в центре масс S_0 и направив ось x_3 вдоль оси цилиндра. Указанный способ выбора декартовой системы координат означает, что

$$\int_{S_0} x_1 dx = 0, \quad \int_{S_0} x_2 dx = 0. \quad (1)$$

Будем считать материал стержня упругим и изотропным. Предположим, что деформация стержня осуществляется только за счет поверхностных сил, приложенных к его торцам. Массовые силы отсутствуют.

Полная постановка рассматриваемой задачи состоит в решении однородных уравнений равновесия:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\sigma_{ii} = \lambda \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ii}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} T\nu &= f^{(0)}, \quad x \in S_0, \quad T\nu = f^{(1)}, \quad x \in S_1, \\ T\nu &= 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь, как обычно, T — тензор напряжений, σ_{ij} — его декартовы компоненты, ν — единичная нормаль, внешняя по отношению к Ω , $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ — векторные поля, заданные на S_0 , S_1 соответственно.

Решение этой задачи аналитическими и даже численными методами весьма затруднительно. Значительные упрощения, в случае, когда длина цилиндра существенно превышает размеры основания, достигаются за счет использования так называемого *принципа смягчения граничных условий* (*принципа Сен-Венана*).

Свяжем с векторными полями $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ главные векторы и главные моменты:

$$F^{(i)} = \int_{S_i} f^{(i)} dx, \quad M^{(i)} = \int_{S_i} f^{(i)} \wedge x dx, \quad i = 0, 1. \quad (7)$$

В соответствии с принципом Сен-Венана напряжения и деформации цилиндра на достаточном удалении от его оснований с приемлемой для практических целей точностью определяются не распределением поверхностных сил на торцах цилиндра, а лишь их интегральными характеристиками (7).

Таким образом приходят к задаче решения системы уравнений (2)–(5) при граничных условиях (6), а также при следующих граничных условиях:

$$\int_{S_i} T\nu dx = F^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad (8)$$

$$\int_{S_i} T\nu \wedge x dx = M^{(i)}, \quad i = 0, 1; \quad (9)$$

числа $F^{(i)}$, $M^{(i)}$, $i = 0, 1$, заданы.

Ясно, что при этом должны быть выполнены необходимые условия равновесия: $F^{(0)} + F^{(1)} = 0$, $M^{(0)} + M^{(1)} = 0$.

Применимость принципа смягчения граничных условий оправдывается многочисленными экспериментальными исследованиями,

сравнениями с аналитическими решениями простейших задач в полной постановке. В последние годы был проведен и ряд теоретических исследований, направленных на обоснование принципа Сен-Венана.

Различают следующие частные случаи задачи (2)–(5), (6), (8), (9).

1. Растяжение (сжатие) цилиндра: $F_j^{(i)} = 0$, $j = 1, 2$, $M^{(i)} = 0$, $i = 0, 1$; $F_3^{(0)} = -F_3^{(1)} = F_3$ задано.

2. Изгиб стержня поперечной силой: $F_j^{(i)} = 0$, $j = 2, 3$, $M^{(i)} = 0$, $i = 0, 1$; $F_1^{(0)} = -F_1^{(1)} = F_1$ задано.

3. Чистый изгиб цилиндра: $F^{(i)} = 0$, $M_{12}^{(i)} = 0$, $M_{23}^{(i)} = 0$, $i = 0, 1$; $M_{13}^{(0)} = -M_{13}^{(1)} = M_{13}$ задано.

4. Кручение цилиндра: $F^{(i)} = 0$, $M_{13}^{(i)} = 0$, $M_{23}^{(i)} = 0$, $i = 0, 1$; $M_{12}^{(0)} = -M_{12}^{(1)} = M_{12}$ задано.

Вследствие линейности задачи (2)–(5), (6), (8), (9) ее решение в общем случае может быть построено суперпозицией (суммированием) решений, построенных для указанных выше частных случаев.

Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь одной задачи — задачи о кручении стержня¹⁾. В этом случае естественно предположить, что среди всех компонент тензора напряжений ненулевыми будут только напряжения сдвига на площадках, ортогональных оси стержня, т. е. σ_{13} и σ_{23} . Как следствие (3), (4) отсюда получаем, что все компоненты тензора деформаций, кроме ε_{13} , ε_{23} , также равны нулю. Будем считать, что ось цилиндра не искривляется при кручении, т. е.

$$u_1(0, 0, x_3) \equiv 0, \quad u_2(0, 0, x_3) \equiv 0. \quad (10)$$

Из уравнений равновесия (2) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, σ_{13} , σ_{23} не зависят от x_3 . Уравнение (11) будет выполнено, если положить, что

$$\sigma_{13} = \frac{\partial \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial \Phi(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \quad (12)$$

¹⁾Задачи об изгибании стержня в рамках более простой модели рассматриваются в следующем пункте. По поводу задачи о растяжении стержня см. ниже упражнение 4.3.

где Φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Функцию Φ принято называть *функцией напряжений* или *функцией Прандтля*. Получим уравнения для ее определения. Прежде всего заметим, что вследствие условия (6)

$$\sigma_{13}\nu_1 + \sigma_{23}\nu_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\nu_1 - \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\nu_2 = 0, \quad x \in \partial S_0, \quad (13)$$

где ∂S_0 — граница S_0 , (ν_1, ν_2) — единичная нормаль к ∂S_0 . Из (13) вытекает, что $\partial\Phi(x)/\partial\tau = 0$ при $x \in \partial S_0$, где $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$ — вектор касательной к ∂S_0 . Таким образом, $\Phi(x) = \text{const}$ при $x \in \partial S_0$. Для однозначного определения компонент тензора напряжений функцию Φ достаточно определить с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому в дальнейшем можно считать, что

$$\Phi(x) = 0, \quad x \in \partial S_0. \quad (14)$$

Вычислим теперь главные векторы поверхностных сил и главные моменты на торцах стержня. Элементарные выкладки приводят к следующим выражениям: $F^{(0)} = F^{(1)} = 0$,

$$M_{12}^{(0)} = -M_{21}^{(0)} = \int_{S_0} (\sigma_{13}x_2 - \sigma_{23}x_1) dx. \quad (15)$$

Остальные компоненты тензора $M^{(0)}$ равны нулю. Используя (12), (15) и приравнявая $M_{12}^{(0)}$ заданному значению крутящего момента, получим:

$$\int_{S_0} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_1 \right) dx = M_{12}.$$

Преобразуя интеграл в левой части этого равенства при помощи формулы интегрирования по частям и учитывая граничное условие (14), получаем

$$\int_{S_0} \Phi dx = -M_{12}/2. \quad (16)$$

На основании (4), (5) можно написать:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \quad x \in \Omega. \quad (18)$$

Дифференцируя равенство (17) по x_2 , равенство (18) — по x_1 , а затем вычитая их почленно, получим:

$$\Delta\Phi = \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad (19)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа. Равенства $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$ означают, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega,$$

откуда легко выводится (см. упражнение 1.5, с. 52), что

$$u_1 = \delta(x_3)x_2 + g_1(x_3), \quad u_2 = -\delta(x_3)x_1 + g_2(x_3), \quad (20)$$

где δ, g_1, g_2 — произвольные функции. Из (19) тогда получаем:

$$\Delta\Phi = 2\mu\delta'(x_3), \quad x \in \Omega. \quad (21)$$

Левая часть этого равенства зависит только от x_1, x_2 , правая — только от x_3 , следовательно,

$$\delta'(x_3) = \alpha = \text{const}. \quad (22)$$

Таким образом, для определения функции Φ имеем уравнение Пуассона (21) с постоянной правой частью и с однородным граничным условием Дирихле (14).

Пусть Φ_0 — решение задачи:

$$\Delta\Phi_0 = -2, \quad x \in S_0, \quad (23)$$

$$\Phi_0(x) = 0, \quad x \in \partial S_0. \quad (24)$$

Тогда $\Phi = -\alpha\mu\Phi_0$. Выбирая α так, чтобы выполнялось условие (16), получим:

$$\alpha = \frac{M_{12}}{\mu C}, \quad (25)$$

где

$$C = 2 \int_{S_0} \Phi_0 dx. \quad (26)$$

Величина C есть геометрическая характеристика области S_0 .

Таким образом, функция Φ построена, следовательно, определены компоненты тензора напряжений (см. (12)).

Приступим к отысканию вектора перемещений. Из (20), (22) получаем:

$$u_1 = \alpha x_3 x_2 + g_1(x_3), \quad u_2 = -\alpha x_3 x_1 + g_2(x_3).$$

Вследствие (10) отсюда вытекает, что $g_1(x_3) = g_2(x_3) = 0$ и

$$u_1 = \alpha x_3 x_2, \quad u_2 = -\alpha x_3 x_1. \quad (27)$$

Функция u_3 зависит только от x_1, x_2 , поскольку $\varepsilon_{33} = \partial u_3 / \partial x_3 = 0$. Дифференцируя равенство (17) по x_1 , равенство (18) — по x_2 , а затем складывая их почленно, получим с учетом (27):

$$\Delta u_3 = 0, \quad x \in S_0, \quad (28)$$

т. е. u_3 — функция, гармоническая в области S_0 . Сформулируем граничное условие для функции u_3 . Умножим уравнение (17) на ν_1 , уравнение (18) — на ν_2 , затем сложим их почленно. Учитывая при этом равенства (13), (27), получим, что

$$\frac{\partial u_3}{\partial \nu} = \alpha(x_1 \nu_2 - x_2 \nu_1) = \alpha x \cdot \tau, \quad x \in \partial S_0, \quad (29)$$

т. е. функция u_3 определяется как решение задачи Неймана (28), (29).

Упражнение 4.1.* Показать, что

$$\int_{\partial S_0} (x_1 \nu_2 - x_2 \nu_1) dx = 0,$$

т. е. необходимое условие разрешимости задачи (28), (29) выполнено.

Поясним смысл полученного решения. Формулы (27) показывают, что каждое сечение стержня поворачивается на угол, определяемый расстоянием от координатной плоскости x_1, x_2 и величиной α , называемой *круткой*. Крутка (см. (25)) обратно пропорциональна величине μC . Эту величину называют поэтому *жесткостью* стержня на кручение. Она зависит от модуля сдвига материала стержня и от геометрических свойств его поперечного сечения. Заметим, что C всегда больше нуля, так как функция Φ_0 положительна в области S_0 (см. соответствующие рассуждения на с. 143), следовательно, направление поворота сечений стержня определяется (как и следовало ожидать) знаком крутящего момента M_{12} . Функция u_3 , определяемая с точностью до постоянного слагаемого, характеризует искривление (деформацию) поперечных сечений стержня при кручении.

Опираясь на принцип максимума для гармонических функций, можно установить важные свойства распределения напряжений при кручении.

Теорема 1. Максимальные значения модулей компонент касательных напряжений σ_{13} , σ_{23} достигаются на боковой поверхности стержня. Модуль вектора касательного напряжения $\sigma_\tau = (\sigma_{13}, \sigma_{23})$ также достигает максимального значения на боковой поверхности стержня¹⁾.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12), (17), (18), (27), (28) сразу получаем, что $\Delta\sigma_{13} = 0$, $\Delta\sigma_{23} = 0$ в области S_0 , т. е. функции σ_{13} , σ_{23} — гармонические в области S_0 , следовательно, либо они — тождественные постоянные, либо достигают своих минимальных и максимальных значений только на ∂S_0 . Первая часть теоремы доказана.

Далее, пусть вопреки утверждению теоремы максимальное значение $|\sigma_\tau|$ достигается во внутренней точке $x_0 \in S_0$. Повернем оси декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 так, чтобы ось x'_1 новой системы координат была направлена вдоль вектора $\sigma_\tau(x_0)$. Обозначим компоненты вектора σ_τ в новой системе координат через σ'_{13} , σ'_{23} . Оператор Лапласа инвариантен относительно ортогонального преобразования координат. Поэтому функции σ'_{k3} , $k = 1, 2$, будучи линейными комбинациями функций σ_{k3} , есть гармонические функции переменных x'_1, x'_2 . Пусть $x \in S_0$, $x \neq x_0$. Тогда

$$|\sigma'_{13}(x)| \leq \sqrt{(\sigma'_{13}(x))^2 + (\sigma'_{23}(x))^2} \leq \sqrt{(\sigma'_{13}(x_0))^2 + (\sigma'_{23}(x_0))^2} = |\sigma'_{13}(x_0)|,$$

т. е. гармоническая функция σ'_{13} достигает максимума модуля во внутренней точке области S_0 , что невозможно. \square

Построение решения задачи о кручении стержня сводится, как показано выше, к решению граничных задач для уравнений Лапласа и Пуассона, и потому оно может быть представлено в явном виде лишь при простейших очертаниях сечения стержня.

Рассмотрим пример. Пусть S_0 — круг радиуса R . Нетрудно видеть, что решением задачи (23), (24) в этом случае будет функция

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{2}(R^2 - r^2),$$

где, как всегда, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Заметим, далее, что при $|x| = R$, т. е. при $x = R(\nu_1, \nu_2)$, справедливо равенство: $x_1\nu_2 - x_2\nu_1 = 0$. Таким образом, граничное условие (29) для функции u_3 в данном случае является однородным. Это означает, что

$$u_3(x) = \text{const}, \quad (30)$$

¹⁾Это означает, что при достижении крутящим моментом некоторого критического значения разрушения прежде всего появляются на боковой поверхности стержня.

т. е. при кручении кругового цилиндра сечения, перпендикулярные его оси, остаются плоскими.

Элементарные вычисления по формуле (26) дают, что в рассматриваемом случае $C = \pi R^4/2$, следовательно,

$$\alpha = \frac{2M_{12}}{\mu\pi R^4}.$$

Эта соотношение может быть использовано для экспериментального определения модуля сдвига μ . С этой целью нужно опытным путем установить зависимость крутки α от крутящего момента M_{12} .

Напряжения сдвига определяются с помощью формул (12), (17), (18), (27), (30): $\sigma_{13} = -\mu\alpha x_2$, $\sigma_{23} = \mu\alpha x_1$, следовательно, $|\sigma_\tau| = \mu\alpha r$. Максимальное значение $|\sigma_\tau|$ достигается при $r = R$ и равно

$$\sigma_{\max} = \frac{2M_{12}}{\pi R^3}.$$

Эта формула имеет прикладное значение, так как позволяет оценить минимально возможный диаметр стержня (вала) по заданному крутящему моменту и допустимому (по условиям прочности) касательному напряжению.

Упражнения.

4.2. Решить задачу о кручении стержня эллиптического поперечного сечения. Показать, в частности, что максимум модуля касательного напряжения достигается в концах малой оси эллипса.

4.3.* Решить задачу о растяжении стержня.

Указание. Принять, что $\sigma_{33} = \text{const}$, а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю.

2. Элементарная теория изгиба стержней. В этом пункте рассматривается задача об изгибании стержня под действием массовых и поверхностных сил. Предполагается, что массовые силы направлены вдоль оси x_1 . Поверхностные силы, распределенные на Γ , также направлены вдоль x_1 .

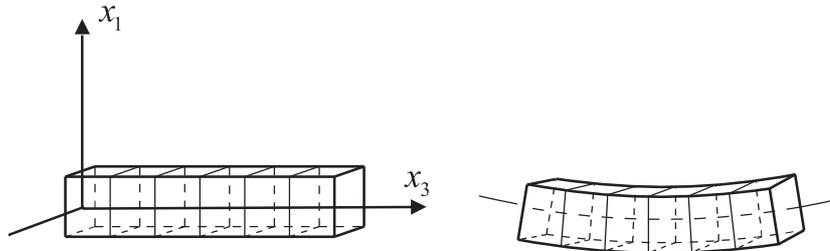


Рис. 3. Деформация стержня при изгибе.

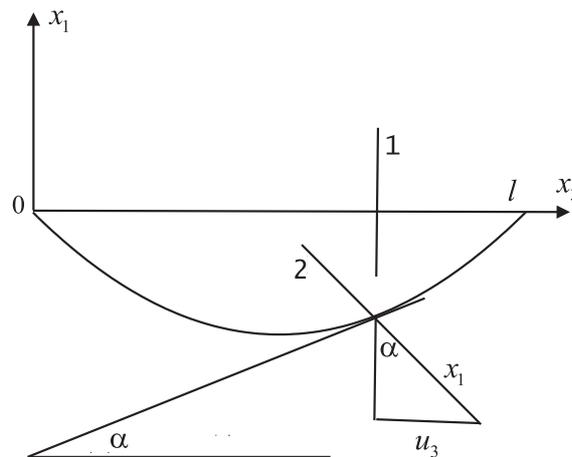


Рис. 4. К определению осевого перемещения: 1 — нормаль до деформации, 2 — нормаль после деформации; $u_3 = -x_1 \sin \alpha \approx -x_1 \operatorname{tg} \alpha = -x_1 \partial w / \partial x_3$.

Предполагается, что деформации стержня малы, так что точки, лежащие на координатной оси x_3 (оси стержня), могут смещаться лишь в направлении оси x_1 , т. е. $u_2(0, 0, x_3) = 0$, $u_3(0, 0, x_3) = 0$ при $0 \leq x_3 \leq l$, где l — длина стержня. Функцию $w(x_3) = u_1(0, 0, x_3)$ называют *прогибом* стержня. Прогиб мал, кроме того, форма оси стержня после деформации, описываемая уравнением:

$$x_1 = w(x_3), \quad 0 \leq x_3 \leq l,$$

мало отличается от прямолинейной. Иными словами, функция $w'(x_3)$ также мала.

Предполагается также, что любое поперечное сечение стержня при деформировании стержня испытывает жесткое смещение, оставаясь ортогональным оси (деформированной) стержня (см. рис. 3). Основываясь на этих допущениях, нетрудно убедиться, что компоненты вектора перемещений в каждой точке стержня могут быть выражены через прогиб w по следующим формулам (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= w(x_3), \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= -x_1 w'(x_3). \end{aligned} \quad (31)$$

Вычисляя тензор деформаций, получим, что в каждой точке стержня

$$\varepsilon_{33} = -x_1 w''(x_3),$$

а остальные компоненты ε_{ij} — нули.

Дальнейшие предположения относятся к распределению напряжений. Именно, считается, что σ_{11}, σ_{22} существенно меньше других компонент тензора напряжений и ими можно пренебречь:

$$\sigma_{11}, \sigma_{22} = 0. \quad (32)$$

При этих предположениях на основании закона Гука получаем, что

$$\sigma_{33} = -Ex_1w''(x_3), \quad (33)$$

а остальные компоненты тензора напряжений нули:

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23} = 0. \quad (34)$$

Теперь нужно построить уравнение и граничные условия для отыскания функции w . Будем исходить из вариационного принципа Лагранжа, а именно, будем разыскивать вектор перемещений, доставляющий минимальное значение функционалу Лагранжа (1), с. 162, на множестве перемещений, удовлетворяющих условиям (31). Компоненты тензора напряжений определяются соотношениями (32)–(34). Выписывая необходимое условие минимума функционала Лагранжа (см. (4), с. 163, (25), с. 162), получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{S_0} Ex_1^2 w''(x_3) \eta''(x_3) dx dx_3 &= \int_0^l \int_{S_0} \rho b_1 \eta(x_3) dx dx_3 + \\ &+ \int_0^l \int_{\partial S_0} \mu_1 \eta(x_3) dx dx_3 + \int_{S_0} \mu_1^{(0)} \eta(0) dx + \int_{S_1} \mu_1^{(1)} \eta(l) dx + \\ &+ \int_{S_0} (-x_1 \eta'(0) \mu_3^{(0)}) dx + \int_{S_1} (-x_1 \eta'(l) \mu_3^{(1)}) dx \end{aligned}$$

для любой функции η . Здесь, как обычно, b — плотность массовых сил, μ — вектор напряжений на боковой поверхности стержня, $\mu^{(0)}$ — вектор напряжений на S_0 , $\mu^{(1)}$ — вектор напряжений на S_1 , ∂S_0 — граница области S_0 . Выполняя элементарные преобразования, будем иметь:

$$\begin{aligned} - \int_0^l M \eta'' dx_3 &= \\ &= \int_0^l F \eta dx_3 + P^{(0)} \eta(0) + P^{(1)} \eta(l) + M^{(0)} \eta'(0) + M^{(1)} \eta'(l), \quad (35) \end{aligned}$$

где

$$M = \int_{S_0} \sigma_{33} x_1 dx = EI w''(x_3), \quad I = \int_{S_0} x_1^2 dx;$$

I — момент инерции поперечного сечения стержня относительно x_2 , M имеет смысл *изгибающего момента* в поперечном сечении стержня, проведенном в точке x_3 ;

$$F = \int_{S_0} b_1 dx + \int_{\partial S_0} \mu_1 dx$$

есть поперечная (*перерезывающая*) сила, действующая в сечении x_3 ;

$$P^{(k)} = \int_{S_k} \mu_1^{(k)} dx, \quad M^{(k)} = \int_{S_k} (-x_1 \mu_3^{(k)}) dx, \quad k = 0, 1,$$

есть поперечные силы и моменты соответственно, действующие на торцы стержня.

Тождество (35) выражает *принцип возможных перемещений* в элементарной теории изгиба стержней. Используя произвол в выборе функции η , получим из него уравнение и граничные условия для функции w (в дальнейшем для упрощения записей будем обозначать x_3 через x).

Преобразуем равенство (35) при помощи формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^l EI w^{IV} \eta dx - EI w'' \eta' \Big|_0^l + EI w''' \eta \Big|_0^l = \int_0^l F \eta dx + \\ + P^{(0)} \eta(0) + P^{(1)} \eta(l) + M^{(0)} \eta'(0) + M^{(1)} \eta'(l). \end{aligned} \quad (36)$$

Если на возможные прогибы стержня не накладывать никаких ограничений, т. е. считать, что функция η произвольна, то из (36) получаем уравнение:

$$EI w^{IV} = F, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (37)$$

и граничные условия:

$$-EI w'' = M^{(0)}, \quad x = 0, \quad EI w'' = M^{(1)}, \quad x = l, \quad (38)$$

$$EI w''' = P^{(0)}, \quad x = 0, \quad -EI w''' = P^{(1)}, \quad x = l. \quad (39)$$

Понятно, что граничные условия (38), (39) могут быть реализованы, если на соответствующем торце стержня известны изгибающий момент и перерезывающая сила.

Говорят, что торец стержня свободен, если изгибающий момент и перерезывающая сила — нули.

Во многих случаях на перемещения торцов стержня накладываются ограничения. Например, если, торец S_0 не может смещаться в направлении оси x_1 , то $w(0) = 0$. Если невозможны смещения этого торца в направлении оси x_3 (запрещен поворот вокруг оси x_2), то $w'(0) = 0$.

В любом случае, поскольку уравнение (37) — уравнение четвертого порядка, для однозначного определения его решения (прогиба) следует задать четыре граничных условия.

Приведем примеры часто возникающих на практике граничных условий.

1) Жесткое защемление торца:

$$w(0) = w'(0) = 0. \quad (40)$$

2) Шарнирное опирание:

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0.$$

Поясним, что в этом случае торец может свободно поворачиваться вокруг оси x_2 , так как изгибающий момент равен нулю.

3) Торец стержня свободен:

$$w''(0) = 0, \quad w'''(0) = 0.$$

Рассмотрим в рамках построенной модели задачу об изгибе стержня поперечной силой. Будем считать, что $F = 0$, т. е. массовые силы и поверхностные силы на Γ отсутствуют. Тогда

$$w^{IV}(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (41)$$

Пусть левый торец стержня жестко защемлен, т. е. выполнены граничные условия (40); на правый торец действует заданная поперечная сила P , изгибающий момент на правом торце равен нулю. Это означает (см. (38), (39)), что выполнены граничные условия:

$$-EIw'''(l) = P, \quad EIw''(l) = 0. \quad (42)$$

Вследствие (41) отсюда сразу получаем, что

$$w'''(x) = -P/EI, \quad w''(x) = P(l-x)/EI, \\ \sigma_{33} = -Px_1(l-x)/I, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (43)$$

Используя условия (40), нетрудно выписать выражение и для прогиба:

$$w(x) = \frac{P}{6EI}x^2(3l - x).$$

Уравнения (36)–(39) показывают, что при заданных нагрузках прогиб стержня обратно пропорционален EI . Эту величину называют *изгибной жесткостью* стержня. Для обеспечения максимального сопротивления стержня изгибу форму его поперечного сечения следует выбирать, максимизируя величину I .

3. Изгиб пластин. Построение приближенной теории изгиба тонких пластин во многом аналогично построению элементарной теории изгиба стержней.

Под пластиной понимают цилиндрическое тело, высота которого h (толщина пластины) существенно меньше размеров основания. Основания цилиндра называют *лицевыми поверхностями* пластины, поперечное сечение цилиндра, делящее пополам расстояние между *лицевыми поверхностями*, называют *срединной поверхностью*.

Введем декартову систему координат x_1, x_2, x_3 , совместив плоскость x_1, x_2 со срединной поверхностью пластины. Область, занимаемую срединной поверхностью в плоскости x_1, x_2 , обозначим через S , ее границу — через ∂S .

Будем считать, что на *лицевые поверхности* пластины действуют силы, параллельные оси x_3 . Массовые силы, действующие на пластину, также считаем параллельными оси x_3 . Поверхностные силы, приложенные к боковой поверхности пластины, могут быть направлены произвольно.

Предполагаются выполненными так называемые *гипотезы Кирхгофа*, налагающие следующие ограничения на перемещения и напряжения, возникающие в пластине при малых деформациях.

1) Точки срединной поверхности могут смещаться лишь в направлении оси x_3 , т. е. $u_1(x_1, x_2, 0) = 0$, $u_2(x_1, x_2, 0) = 0$.

2) Всякая нормаль к срединной поверхности совершает жесткое перемещение, оставаясь ортогональной к деформированной срединной поверхности.

3) Нормальные напряжения на площадках, ортогональных оси x_3 , т. е. σ_{33} , пренебрежимо малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений, иными словами, принимается, что $\sigma_{33} = 0$.

Функция $w(x_1, x_2) = u_3(x_1, x_2, 0)$ называется *прогибом пластины*. Предполагается, что прогиб мал, форма срединной поверхности

пластины после деформации, описываемая уравнением

$$x_3 = w(x_1, x_2),$$

мало отличается от плоской.

По аналогии со случаем деформации стержня на основе принятых предположений нетрудно получить выражения для перемещений точек пластины:

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2), \quad u_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Вычисляя компоненты тензора деформаций, получим в этом случае:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \varepsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}, \quad \varepsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \varepsilon_{13} &= 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{33} = 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Закон Гука с использованием гипотезы 3) дает:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Упражнение 4.4. Получить формулы (46).

Выписывая теперь необходимые условия минимума функционала Лагранжа (1), с. 162 (см. (4), с. 163, (25), с. 162) с учетом (45), (46) получим:

$$\begin{aligned} - \int_S \left(M_{11} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \right) dx = \\ = \int_S f \eta dx + \int_{\partial S} \left(M_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + Q \eta \right) dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11} dx_3, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{22} dx_3, \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{12} dx_3, \quad (48)$$

$$f = f(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho b_3 dx_3 + \mu_3(x_1, x_2, -h/2) + \mu_3(x_1, x_2, h/2), \quad (49)$$

$$M_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \mu_1 dx_3, \quad M_2 = - \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \mu_2 dx_3, \quad (50)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \mu_3 dx_3. \quad (51)$$

Поясним смысл величин, определяемых соотношениями (48)–(51): M_{11} — изгибающий момент, стремящийся повернуть площадку, ортогональную оси x_1 , вокруг оси x_2 (аналогичный смысл имеет M_{22}); M_{12} — крутящий момент, стремящийся повернуть площадку, ортогональную оси x_1 , вокруг оси x_1 (вследствие симметрии тензора напряжений точно такой же момент поворачивает площадку, ортогональную оси x_2 , вокруг оси x_2); f — плотность внешней нагрузки, обусловленной массовыми силами, а также поверхностными силами, распределенными по лицевым поверхностям пластины; M_1 , M_2 — изгибающие моменты, вызванные действием поверхностных сил, распределенных по боковой поверхности пластины; Q — поперечная (перерезывающая) сила, обусловленная поверхностными силами на боковой поверхности пластины, направленными вдоль оси x_3 .

Выразим производные функции η по x_1 , x_2 через ее производные по нормали и по касательной к ∂S :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \nu_1 - \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \nu_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \nu_2 + \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \nu_1. \quad (52)$$

Подставляя эти выражения в интеграл по ∂S в правой части (47), получим:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (M_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + Q \eta) dx &= \\ &= \int_{\partial S} \left(Q \eta + M_\nu \frac{\partial \eta}{\partial \nu} + M_\tau \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) dx, \end{aligned}$$

где $M_\nu = M_1 \nu_1 + M_2 \nu_2$, $M_\tau = -M_1 \nu_2 + M_2 \nu_1$.

Интеграл, содержащий $\partial\eta/\partial\tau$, преобразуем при помощи формулы интегрирования по частям. При этом надо учесть, что если на кривой ∂S есть угловые точки, то формулу интегрирования по частям нужно применять по отдельности на каждом участке кривой, лежащем между двумя соседними угловыми точками. Выпишем равенство (47) после указанного преобразования, считая для простоты, что на кривой ∂S есть лишь одна угловая точка P :

$$\begin{aligned} & - \int_S \left(M_{11} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} \right) dx = \\ & = \int_S f \eta dx + \int_{\partial S} \left(\left(Q - \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau} \right) \eta + M_\nu \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right) dx + [M_\tau] \eta(P). \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь $[M_\tau] = M_\tau(P+0) - M_\tau(P-0)$ — скачок функции M_τ при переходе через угловую точку P вдоль ∂S

Тождество (53) выражает *принцип возможных перемещений* в теории пластин. Вследствие произвольности функции η его можно использовать для получения уравнения и граничных условий, определяющих прогиб w .

Предварительно дадим более подробные выражения для моментов M_{ij} . Используя последовательно формулы (48), (46), (45) и выполняя затем элементарные преобразования, получим:

$$\begin{aligned} M_{11} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right), \quad M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right), \\ M_{12} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Преобразуем теперь выражение в левой части равенства (53) при помощи формулы интегрирования по частям. Опуская элементарные выкладки, можем написать:

$$- \int_S \left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_2^2} \right) \eta dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\partial S} \left(\left(\tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{M}_\tau}{\partial \tau} \right) \eta - \tilde{M}_\nu \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right) dx - [\tilde{M}_\tau] \eta(P) = \\
& = \int_S f \eta dx + \int_{\partial S} \left(\left(Q - \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau} \right) \eta + M_\nu \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right) dx + [M_\tau] \eta(P), \quad (55)
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q} = \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \right) \nu_1 + \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} \right) \nu_2,$$

$$\tilde{M}_\nu = M_{11} \nu_1^2 + 2M_{12} \nu_1 \nu_2 + M_{22} \nu_2^2,$$

$$\tilde{M}_\tau = (M_{22} - M_{11}) \nu_1 \nu_2 + M_{12} (\nu_1^2 - \nu_2^2).$$

Поскольку функция η произвольна, из (55) получаем, что

$$-\left(\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} \right) = f, \quad x \in S, \quad (56)$$

$$\tilde{Q} + \frac{\partial \tilde{M}_\tau}{\partial \tau} = Q - \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau}, \quad -\tilde{M}_\nu = M_\nu, \quad x \in \partial S, \quad -[\tilde{M}_\tau] = [M_\tau]. \quad (57)$$

Уравнение (56) есть уравнение равновесия пластины в моментах. Подставляя в это уравнение выражения моментов через прогиб (см. (54)), получим:

$$D \Delta^2 w = f, \quad x \in S, \quad (58)$$

где $\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}$ — бигармонический оператор.

Соотношения (57) нужно рассматривать как граничные условия для дифференциального уравнения (58). Понятно, что они могут быть реализованы лишь в том случае, когда известны M_1, M_2, Q , т. е. известны изгибающие моменты и перерезывающая сила на боковой поверхности пластины.

Во многих случаях на перемещения точек боковой поверхности пластины налагаются некоторые ограничения.

Так, если вектор смещений на боковой поверхности пластины равен нулю, то вследствие (44) получаем:

$$w(x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \partial S.$$

Используя (52), эти равенства можно переписать в эквивалентном виде:

$$w(x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial S. \quad (59)$$

Граничные условия (59) моделируют жесткую заделку пластины по контуру.

Предположим теперь, что $w(x) = 0$ на ∂S , т. е. боковая поверхность пластины не может смещаться в направлении оси x_3 . Тогда мы должны положить, что и $\eta(x) = 0$ на ∂S , и из (55) получаем:

$$-\widetilde{M}_\nu = M_\nu.$$

Таким образом, приходим к граничному условию:

$$w(x) = 0, \quad \widetilde{M}_\nu = -M_\nu, \quad x \in \partial S. \quad (60)$$

Если $M_\nu = 0$ то условия (60) соответствуют шарнирному опиранию пластинки по контуру.

На различных участках ∂S могут быть заданы граничные условия различных типов.

Отметим, что при любом из рассмотренных способов задания граничных условий прогиб пластины при заданных нагрузках обратно пропорционален D . В связи с этим величина D называется *изгибной* (или *цилиндрической*) жесткостью пластины. Она быстро убывает с уменьшением толщины пластины.

Теорема 2. Уравнение (58) при граничных условиях (59) (или (60)) может иметь не более одного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = w^{(1)} - w^{(2)}$ — разность двух возможных решений. Записывая для w тождество (53) при $\eta = w$, в каждом из рассматриваемых случаев получим:

$$-\int_S \left(M_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx = 0. \quad (61)$$

Вследствие (54) и условия $\nu \in (0, 1/2]$ (см. с. 155) имеем:

$$-\left(M_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2M_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= D \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) \geq \\
&\geq D(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (61), очевидно, вытекает, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad x \in S,$$

следовательно, функция w линейна на S , и поскольку $w = 0$ на ∂S , то $w = 0$ всюду в S . \square

Упражнение 4.5. Исследовать единственность решения уравнения (58) при граничных условиях (57).

В заключение рассмотрим примеры задач, допускающих точные решения.

1. Задача о равновесии круглой пластины, жестко закрепленной по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки. Эта задача сводится к интегрированию уравнения:

$$D\Delta^2 w = f, \quad |x| < R, \quad (62)$$

$f = \text{const}$, R — радиус пластины, при граничных условиях:

$$w(x) = 0, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = 0, \quad |x| = R. \quad (63)$$

Задачу естественно решать в полярных координатах. Из соображений симметрии функцию w можно считать зависящей лишь от r (полярного радиуса). Записывая оператор Лапласа в полярных координатах, получим:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = f, \quad (64)$$

$$w(R) = w'(R) = 0. \quad (65)$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что функция

$$w_0(r) = fr^4/64D$$

есть решение уравнения (64). Построим функцию w_1 как решение соответствующего однородного уравнения. Положим

$$v = \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} = \Delta w_1.$$

Тогда

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = 0,$$

откуда $v = c_1 + c_2 \ln r$. Поскольку v есть значение оператора Лапласа от четыре раза непрерывно дифференцируемой в области S функции w_1 , то функция v должна быть непрерывной в S , следовательно, мы должны положить $c_2 = 0$. Таким образом,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_1}{dr} \right) = c_1.$$

Отсюда непосредственным интегрированием получаем:

$$w_1(r) = c_1 r^2/4 + c_2 \ln r + c_3.$$

Обеспечивая непрерывность функции w_1 , полагаем $c_2 = 0$. Таким образом, функция $w(r) = r^4 f/64D + c_1 r^2/4 + c_3$ есть гладкое решение уравнения (64). Постоянные c_1, c_3 определяются из граничных условий (65). В результате получим¹⁾:

$$w(r) = \frac{R^4 f}{64D} (1 - (r/R)^2)^2. \quad (66)$$

Максимальное значение прогиба достигается в центре пластины и быстро возрастает с увеличением ее радиуса.

2. Задача о равновесии прямоугольной пластины, шарнирно опертой по контуру. Обозначим стороны пластины через l_1, l_2 . Тогда $S = \{x : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае

$$\widetilde{M}_\nu = \begin{cases} M_{11} & \text{при } x_1 = 0, l_1, \\ M_{22} & \text{при } x_2 = 0, l_2. \end{cases}$$

Таким образом, приходим к интегрированию уравнения:

$$D \Delta^2 w = f, \quad 0 < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2, \quad (67)$$

¹⁾В силу теоремы 2 других решений у задачи (62), (63) нет.

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad x_1 = 0, l_1, \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad x_2 = 0, l_2. \end{aligned}$$

Граничные условия удобно представить в следующем виде:

$$w = 0, \quad \Delta w = 0, \quad x \in \partial S. \quad (68)$$

Положим $v = \Delta w$. Тогда задача (67), (68) сводится к последовательному решению двух однородных задач Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольной области S :

$$\Delta v = f/D, \quad x \in S, \quad v = 0, \quad x \in \partial S, \quad (69)$$

$$\Delta w = v, \quad x \in S, \quad w = 0, \quad x \in \partial S. \quad (70)$$

Эти задачи естественно решать разложением правой части и искомой функции в ряд по собственным функциям оператора Лапласа, поскольку для прямоугольной области при граничных условиях Дирихле собственные функции и собственные числа оператора Лапласа легко находятся методом разделения переменных:

$$\Delta \varphi_{ij} + \lambda_{ij} \varphi_{ij} = 0, \quad x \in S,$$

где

$$\varphi_{ij}(x) = \sin \frac{\pi i x_1}{l_1} \sin \frac{\pi j x_2}{l_2}, \quad \lambda_{ij} = \left(\frac{\pi i}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2} \right)^2, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Выпишем окончательный вид решения задачи (67), (68):

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{D} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{f_{ij}}{\lambda_{ij}^2} \sin \frac{\pi i x_1}{l_1} \sin \frac{\pi j x_2}{l_2}.$$

Здесь

$$f_{ij} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f(x_1, x_2) \sin \frac{\pi i x_1}{l_1} \sin \frac{\pi j x_2}{l_2} dx_1 dx_2$$

суть коэффициенты Фурье функции f .

Отметим, что если $f(x_1, x_2) = f_0 \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2}$, где $f_0 = \text{const}$,
то

$$w(x_1, x_2) = \frac{f_0 l_1^4 l_2^4}{D(l_1^2 + l_2^2)^2 \pi^4} \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2}.$$

Упражнение 4.6.* Решить задачу о равновесии шарнирно опертой по контуру круглой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки.

Ответы и решения

Глава 1.

1.1. Подставляя разложение (1), с. 7, в равенство (2), с. 7, получим $e_p = \bar{A}_p^q A_q^l e_l$. Каждый вектор из V единственным образом можно разложить по векторам базиса, поэтому $\bar{A}_p^q A_q^l = \delta_p^l$. В то же время $\bar{A}_p^q A_q^l$ — элемент матрицы $[\bar{A}][A]$. Поэтому $[\bar{A}][A] = E$.

1.9. Для определенности рассмотрим множество тензоров $e_j \otimes e_k$, $j, k = 1, \dots, n$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $L = L^{jk} e_j \otimes e_k$. Покажем, что если $Le^p = 0$, $p = 1, \dots, n$, то $L^{jk} = 0$ при $j, k = 1, \dots, n$. Это будет означать линейную независимость тензоров $e_j \otimes e_k$. Размерность пространства тензоров равна n^2 , следовательно, будет установлено, что указанное множество тензоров есть базис. Используя определение тензорного произведения, получим:

$$Le^p = (L^{jk} e_j \otimes e_k) e^p = L^{jk} (e^p \cdot e_k) e_j = L^{jp} e_j, \quad (1)$$

поэтому, если $Le^p = 0$, то $L^{jp} = 0$ при $j = 1, \dots, n$. Умножая (1) скалярно на e^s , будем иметь $L^{sp} = Le^p \cdot e^s$.

1.18. Пусть $Q : V \rightarrow V$ — ортогональный тензор, действующий в трехмерном евклидовом пространстве V . Характеристическое уравнение $\det(Q - \lambda E) = 0$ в этом случае есть уравнение третьего порядка и, следовательно, имеет хотя бы один вещественный корень λ_1 . Значит у тензора Q существует собственный вектор. Обозначим его через e_1 и будем считать, что $|e_1| = 1$. Тогда $Qe_1 = \lambda_1 e_1$, и вследствие ортогональности Q имеем $1 = |e_1| = |Qe_1| = |\lambda_1| |e_1| = |\lambda_1|$, т. е. $\lambda_1 = \pm 1$, $Qe_1 = \pm e_1$. Через V_2 обозначим двумерное подпространство векторов из V , ортогональных e_1 . Подпространство V_2 инвариантно относительно Q . Действительно, если $u \in V_2$, то

$$Qu \cdot e_1 = u \cdot Q^T e_1 = u \cdot Q^{-1} e_1 = \pm u \cdot e_1 = 0.$$

Пусть e_2, e_3 — произвольные ортонормированные векторы из V_2 . Матрица тензора Q в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид:

$$[Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

причем, поскольку $\det Q = \pm 1$, то

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Сужение тензора Q на подпространство V_2 есть ортогональный тензор, поэтому

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Предположим сначала, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Отсюда вытекает, что

$$[Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

причем $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Полагая $\alpha = \cos \varphi$, $\beta = \sin \varphi$, получим (26), с. 21. Пусть теперь $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. Тогда характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & \delta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda - 1 = 0$$

имеет вещественные корни. Следовательно, тензор Q имеет собственный вектор $e \in V_2$, причем $Qe = \pm e$. Пусть \tilde{e} — произвольный вектор из V_2 , ортогональный e . Ортогональный тензор не меняет углов между векторами, следовательно, векторы $Q\tilde{e}$ и $Qe = \pm e$ также ортогональны, но отсюда вытекает, что векторы $Q\tilde{e}$ и \tilde{e} параллельны, т. е. $Q\tilde{e} = \pm\tilde{e}$, значит в базисе e_1, e, \tilde{e} матрица тензора Q имеет вид:

$$[Q] = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

причем, поскольку

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = -1,$$

справедливо (27), с. 21.

1.19. Как и в упражнении 1.18, получаем, что тензор W имеет собственный вектор: $We_1 = \lambda e_1$, причем вследствие кососимметрии тензора W имеем $We_1 \cdot e_1 = -We_1 \cdot e_1$, т. е. $We_1 \cdot e_1 = 0$, значит $\lambda_1 = 0$. Пусть $V_2 \subset V$ — двумерное подпространство векторов, ортогональных e_1 . Если $u \in V_2$, то $Wu \cdot e_1 = -u \cdot We_1 = 0$, следовательно, подпространство V_2 инвариантно относительно тензора W . Пусть $e_2, e_3 \in V_2$ — ортонормированные векторы. Тогда

$$We_2 = a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \quad We_3 = a_{32}e_2 + a_{33}e_3,$$

откуда получаем: $a_{22} = We_2 \cdot e_2 = 0$, $a_{33} = We_3 \cdot e_3 = 0$, $a_{23} = We_2 \cdot e_3$, $a_{32} = We_3 \cdot e_2 = -We_2 \cdot e_3$, т. е. матрица тензора W в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид:

$$[W] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & -\delta & 0 \end{pmatrix}.$$

1.23. Записывая матрицы произвольных тензоров A, B в ортонормированном базисе, нетрудно подсчитать, что $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Ясно также, что для любого тензора A имеем: $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$, следовательно,

$$\text{tr}(LT) = \text{tr}(TL) = \text{tr}((TL)^T) = \text{tr}(L^T T^T) = -\text{tr}(LT),$$

т. е. $\text{tr}(TL) = 0$.

Глава 2.

1.2. В соответствии с формулой (5), с. 49, относительное удлинение вектора h есть

$$\Delta = \frac{(Ch \cdot h)^{1/2}}{|h|} - 1,$$

откуда вследствие равенства $C = E + 2G$, получаем:

$$\Delta = \left(1 + \frac{2Gh \cdot h}{h \cdot h}\right)^{1/2} - 1.$$

Если считать относительное удлинение вектора h настолько малым, что величиной $(Gh \cdot h / (h \cdot h))^2$ можно пренебречь по сравнению с $Gh \cdot h / (h \cdot h)$, то $\Delta = Gh \cdot h / (h \cdot h)$.

1.23. Запишем равенство (25), с. 58, в виде

$$(\chi(\xi, t) - \chi(\eta, t)) \cdot (\chi(\xi, t) - \chi(\eta, t)) = (\xi - \eta) \cdot (\xi - \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \Omega_0, \\ t > t_0. \quad (2)$$

Используя формулу (9), с. 28, вычислим градиент по переменной ξ от левой и правой частей равенства (2). Получим:

$$2(\nabla\chi(\xi, t))^T(\chi(\xi, t) - \chi(\eta, t)) = 2(\xi - \eta). \quad (3)$$

Вычислим теперь градиент от обеих частей равенства (3) по переменной η . После элементарных преобразований будем иметь:

$$(\nabla\chi(\xi, t))^T \nabla\chi(\eta, t) = E \quad \forall \xi, \eta \in \Omega_0, \quad t > t_0, \quad (4)$$

откуда получаем, что

$$(\nabla\chi(\xi, t))^T = (\nabla\chi(\eta, t))^{-1} \quad \forall \xi, \eta \in \Omega_0, \quad t > t_0.$$

Поскольку переменные ξ, η меняются независимо, последнее равенство может быть выполнено лишь при условии, что $\nabla\chi(\xi, t)$ не зависит от ξ . Положив

$$\nabla\chi(\xi, t) = Q(t), \quad (5)$$

получим из (4):

$$Q(t)Q^T(t) = E, \quad (6)$$

т. е. тензор $Q(t)$ ортогонален. Дифференцируя равенство (6) по t , получаем: $\dot{Q}(t)Q^T(t) + Q(t)\dot{Q}^T(t) = 0$, т. е. тензор $W(t) = \dot{Q}(t)Q^T(t)$ кососимметричен. Используя формулу (7), с. 27, и (5), можем написать:

$$\chi(\xi, t) = \chi(\xi_0, t) + Q(t)(\xi - \xi_0), \quad (7)$$

где ξ_0 — фиксированная произвольным образом точка из Ω_0 . Таким образом, $\chi(\xi, t)$ — аффинное отображение при любом фиксированном t . Дифференцируя равенство (7) по t , будем иметь:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \dot{Q}(t)(\xi - \xi_0),$$

или $\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)Q(t)(\xi - \xi_0) = \dot{x}_0(t) + W(t)(x(t) - x_0(t))$. \square

1.28. Выполним в интеграле замену переменных $x = \chi(\xi, t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\chi(\xi, t), t) J d\xi = \int_{\Omega_0} (\dot{f}J + f\dot{J}) d\xi.$$

Теперь используем формулу Эйлера (21), с. 57, и затем возвратимся к интегрированию по $\Omega(t)$:

$$\int_{\Omega_0} (\dot{f}J + f\dot{J}) d\xi = \int_{\Omega_0} (\dot{f} + f \operatorname{div} v) J d\xi = \int_{\Omega(t)} (\dot{f} + f \operatorname{div} v) dx.$$

Учтем, что по формуле дифференцирования сложной функции

$$\dot{f} + f \operatorname{div} v = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot v,$$

причем по формуле (15), с. 29, $\nabla f \cdot v + f \operatorname{div} v = \operatorname{div}(fv)$, и, наконец, используем формулу Остроградского — Гаусса.

1.29. Проведем подробные рассуждения для формулы (38), формула (37) доказывается аналогично. Пусть кривая L_0 описывается уравнением: $\xi = \xi(\alpha)$, $\alpha \in [a, b]$. Тогда кривая $L(t)$ описывается уравнением: $x(\alpha) = \chi(\xi(\alpha), t)$, $\alpha \in [a, b]$. Записывая криволинейный интеграл по его определению и выполняя затем замену переменной, получим:

$$\begin{aligned} \int_{L(t)} f(x, t) \cdot \tau dx &= \int_a^b f(x(\alpha), t) \cdot (x'(\alpha)/|x'(\alpha)|)|x'(\alpha)|d\alpha = \\ &= \int_a^b f(\chi(\xi(\alpha), t), t) \cdot \nabla \chi(\xi(\alpha), t)\xi'(\alpha)d\alpha, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L(t)} f(x, t) \cdot \tau dx &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\chi(\xi(\alpha), t), t) \cdot \nabla \chi(\xi(\alpha), t)\xi'(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + f(\chi(\xi(\alpha), t), t) \cdot \frac{d}{dt} \nabla \chi(\xi(\alpha), t)\xi'(\alpha) \right) d\alpha, \end{aligned}$$

откуда на основании формулы (16), с. 56, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{L(t)} f(x, t) \cdot \tau dx &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} f(\chi(\xi(\alpha), t), t) \cdot \nabla \chi(\xi(\alpha), t)\xi'(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + f(\chi(\xi(\alpha), t), t) \cdot \nabla v(x(\alpha), t)\nabla \chi(\xi(\alpha), t)\xi'(\alpha)) \right) d\alpha, \end{aligned}$$

что, очевидно, эквивалентно равенству (38).

2.2. Будем исходить из равенства (15), с. 71. Не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$. Тогда $\sigma_2 - \sigma_1 = \alpha(\sigma_3 - \sigma_1)$, $\sigma_3 - \sigma_2 = (1 - \alpha)(\sigma_3 - \sigma_1)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, следовательно,

$$f_\tau^2 = (\sigma_3 - \sigma_1)^2(\nu_1^2\nu_2^2\alpha^2 + \nu_2^2\nu_3^2(1 - \alpha)^2 + \nu_1^2\nu_3^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_3 - \sigma_1)^2 (\nu_1^2 \nu_2^2 \alpha^2 + \nu_2^2 \nu_3^2 (1 - \alpha)^2 + \alpha \nu_1^2 \nu_3^2 + (1 - \alpha) \nu_1^2 \nu_3^2) = \\
&= (\sigma_3 - \sigma_1)^2 (\alpha \nu_1^2 (\nu_3^2 + \alpha \nu_2^2) + (1 - \alpha) \nu_3^2 (\nu_1^2 + (1 - \alpha) \nu_2^2)).
\end{aligned}$$

Используя теперь равенства $\nu_3^2 + \nu_2^2 = 1 - \nu_1^2$, $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1 - \nu_3^2$, получим:

$$f_\tau^2 \leq (\sigma_3 - \sigma_1)^2 (\alpha \nu_3^2 (1 - \nu_3^2) + (1 - \alpha) \nu_1^2 (1 - \nu_1^2)).$$

Осталось заметить, что $\nu_i^2 (1 - \nu_i^2) \leq 1/4$, поскольку $0 \leq \nu_i^2 \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.

6.1. По определению $q(x, \nu) = h(x, t) \cdot \nu$. В соответствии с законом Фурье $h(x, t) = K \nabla \theta$, т. е.

$$q(x, \nu) = K \nabla \theta \cdot \nu = \nabla \theta \cdot K \nu = \nabla \theta \cdot l = |l| \partial \theta / \partial l,$$

где $l = K \nu$. Далее, $l \cdot \nu = K \nu \cdot \nu > 0$, так как тензор K положительно определен, т. е. векторы l, ν образуют острый угол, а значит по условию задачи $\partial \theta / \partial l > 0$, т. е. $q(x, \nu) > 0$.

6.2. Записывая применительно к данному случаю уравнение (4), с. 75, получим:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho (\varepsilon(x, t) + |v|^2 / 2) dx = - \int_{\gamma} p v \cdot \nu dx.$$

Затем воспользуемся формулой дифференцирования (36), с. 62, формулой Остроградского — Гаусса и произвольностью $\omega(t)$.

Глава 3.

1.1. Указание. Воспользуйтесь записью ускорения в форме Громека — Ламба, см. (23), с. 57.

1.2. Заметим, что

$$\rho \dot{v} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (\nabla v) v = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \rho (\nabla v) v - v \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Выражая $\partial \rho / \partial t$ из уравнения неразрывности, получим:

$$\rho \dot{v} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + (\nabla v) \rho v + v \operatorname{div}(\rho v).$$

Осталось воспользоваться формулой (14), с. 29, а затем тождеством: $\nabla p = \operatorname{div} p E$.

1.3. Введем сферическую систему координат (r, φ, θ) с началом в центре сферы, направив полярную ось вдоль оси x_1 (см. упражнение 2.18, с. 44). Тогда граничное условие (16), с. 115, запишется так:

$$\partial \tilde{\varphi} / \partial r = V \cos \theta, \quad r = a. \quad (8)$$

Представляется естественным в связи с этим искать решение в виде: $\tilde{\varphi} = u(r) \cos \theta$. Записывая уравнение (15), с. 115, в сферических координатах (см. упражнение 2.24, с. 46), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция u : $r^2 u'' + 2ru' - 2u = 0$, или $u'' + 2(u/r)' = 0$. Общее решение этого уравнения есть $u(r) = c/r^2 + c_1 r$. Постоянную c_1 следует положить равной нулю, так как по условию $\tilde{\varphi}(r, \theta) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Постоянная c находится из граничного условия (8).

2.1. Используя формулы для градиента векторной функции в цилиндрической системе координат (см. с. 46) и учитывая предположения (30), с. 144, получим выражение градиента вектора скорости:

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 0 & -u/r & 0 \\ u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $\operatorname{div} v = 0$. Аналогично, градиент давления получаем в виде:

$$\nabla p = (p', 0, 0).$$

Для того, чтобы получить выражение для оператора Лапласа, удобно записать вектор скорости в проекциях на оси декартовой системы координат: $v = (v_1, v_2, v_3)$, где $v_1 = -u(r) \sin \varphi$, $v_2 = u(r) \cos \varphi$, $v_3 = 0$. Тогда $\Delta v = (\Delta v_1, \Delta v_2, 0)$, Δ — скалярный оператор Лапласа. Записывая этот оператор в цилиндрической системе координат (см. упражнение 2.24, с. 46), нетрудно подсчитать, что

$$\Delta v_1 = - \left(\frac{1}{r}(ru')' - \frac{1}{r^2}u \right) \sin \varphi, \quad \Delta v_2 = \left(\frac{1}{r}(ru')' - \frac{1}{r^2}u \right) \cos \varphi.$$

Это означает, что вектор Δv имеет следующие компоненты в цилиндрической системе координат:

$$(\Delta v)_r = 0, \quad (\Delta v)_z = 0, \quad (\Delta v)_\varphi = \frac{1}{r}(ru')' - \frac{1}{r^2}u.$$

Осталось подставить полученные дифференциальные выражения в уравнение (15), с. 140.

2.2. Свяжем декартову систему координат с неподвижной плоскостью, направив ось x_1 параллельно вектору скорости движущейся плоскости, ось x_3 перпендикулярно плоскостям. Начало координат поместим посередине между плоскостями. Неподвижная плоскость определяется уравнением $x_3 = -h$. Поле скоростей в слое жидкости

естественно подчинить следующим условиям: $v_1 = u(x_1, x_3)$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$. Тогда из уравнения неразрывности сразу получаем, что u не зависит от x_1 . Уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_2} &= \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что

$$\begin{aligned}p &= p(x_1), \quad p' = \text{const} = \mathcal{P}, \\ u &= \frac{\mathcal{P}}{2\mu} x_3^2 + c_1 x_3 + c_2.\end{aligned}$$

Постоянные c_1, c_2 определим из условий прилипания: $u(-h) = 0$, $u(h) = V$. Тогда

$$u = V \frac{x_3 + h}{2h} - \frac{\mathcal{P}}{2\mu} (h^2 - x_3^2).$$

2.3. Обозначим через α угол наклона плоскости к горизонту, через h — толщину слоя жидкости. Начало декартовой системы координат поместим на наклонной плоскости, ось x_1 направим в сто-

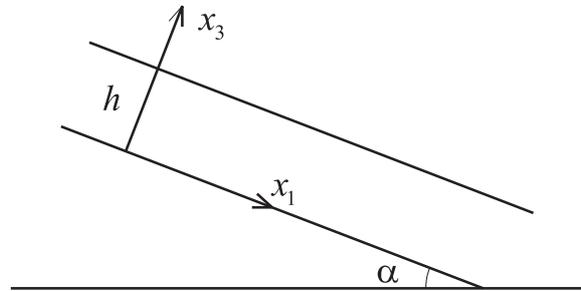


Рис. 1. Течение по наклонной плоскости.

рону уклона (см. рис. 1). Граничные плоскости слоя жидкости определяются уравнениями: $x_3 = 0$, $x_3 = h$. Предполагаем, что

$$v_1 = u(x_3), \quad v_2 = v_3 = 0, \quad p = p(x_3). \quad (9)$$

Уравнение неразрывности выполняется тождественно. Массовые силы, действующие на жидкость, обусловлены силой тяжести. Уравнения движения принимают, следовательно, вид:

$$\mu u'' + \rho g \sin \alpha = 0, \quad p' + \rho g \cos \alpha = 0. \quad (10)$$

Сформулируем граничные условия. Атмосферу, естественно, предполагаем идеальным газом, поэтому напряжение на границе раздела жидкости и атмосферы считаем равным $-p_0\nu$, где ν — нормаль, внешняя по отношению к слою жидкости. Таким образом, при $x_3 = h$

$$T\nu = (-pE + 2\mu D)\nu = -p_0\nu.$$

Записывая это равенство покомпонентно и учитывая (9), получим:

$$p(h) = p_0, \quad \mu u'(h) = 0. \quad (11)$$

Условие прилипания дает:

$$u(0) = 0. \quad (12)$$

Решение задачи (10)–(12) имеет вид:

$$p = p_0 + \rho g(h - x_3) \cos \alpha, \quad u = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} x_3(2h - x_3).$$

Глава 4.

3.4. Используем лагранжево уравнение неразрывности (28), с. 59: $J\rho = \rho_0$, где $J = \det F$. Если $F = RU$ — полярное разложение градиента деформации, то $\det F = \det U$. По формуле (2), с. 153, имеем $\det U = \det(E + \mathcal{E}) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)$. Здесь λ_i — собственные числа тензора \mathcal{E} . В рамках теории бесконечно малых деформаций можно написать, что $\det U = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + \text{tr } \mathcal{E}$, т. е. $\rho(1 + \text{tr } \mathcal{E}) = \rho_0$.

3.5. Указание. Полагая $u = (u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1))$, получить уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_T^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, 2;$$

затем воспользоваться формулой Даламбера решения задачи Коши для уравнения колебаний струны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Решение этой задачи позволяет интерпретировать величину c_L как скорость распространения продольной звуковой волны в изотропном упругом теле, а c_T — как скорость распространения поперечной звуковой волны. Отметим, что c_L всегда больше c_T .

3.10. а) Направим ось декартовой системы координат x_3 по оси цилиндра, начало координат расположим в плоскости основания цилиндра. Положим в равенстве (24), с. 161, $b = (0, 0, -g)$, т. е. b — плотность массовых сил в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g , $\eta = (-\nu x_1, -\nu x_2, x_3)$, где ν — коэффициент Пуассона.

Вычисляя по формулам (12), (13), с. 169, тензор $T = L\mathcal{E}(\eta)$, получим, что он имеет лишь одну ненулевую компоненту $\sigma_{33} = E$, где E — модуль Юнга. Вектор напряжений всюду на поверхности цилиндра, кроме нижнего основания, считаем равным нулю, а на нижнем основании параллельным оси x_3 , т. е. силой трения пренебрегаем. В результате равенство (24), с. 161, дает:

$$E \int_S (u_3(x_1, x_2, l) - u_3(x_1, x_2, 0)) dx_1 dx_2 = \rho \frac{Sl^2}{2} = Ql/2,$$

поэтому среднее значение $u_3(x_1, x_2, l) - u_3(x_1, x_2, 0)$, т. е. укорочение цилиндра равно $Ql/2ES$.

б) Все рассмотрения аналогичны: полагаем $\eta = (x_1, -\nu x_2, -\nu x_3)$ и считаем, что ось x_1 направлена по оси цилиндра, а сила тяжести параллельна оси x_3 .

в) Полагаем $\eta = x$. Тогда $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 3K$ (см. (8), с. 154), остальные компоненты тензора напряжений — нули. Пусть Ω — область, занятая стенкой сосуда, Γ_1 — внутренняя поверхность Ω , Γ_0 — наружная. Напряжение на Γ_1 равно $-p_1\nu$, на Γ_0 напряжение равно $-p_0\nu$, ν — нормаль, внешняя по отношению к Ω . Принцип возможных перемещений приводит к равенству:

$$3K \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = -p_1 \int_{\Gamma_1} \nu \cdot x \, dx - p_0 \int_{\Gamma_0} \nu \cdot x \, dx,$$

откуда, используя формулу Остроградского — Гаусса для преобразования интегралов, получим:

$$3K \left(\int_{\Gamma_1} u \cdot \nu \, dx + \int_{\Gamma_0} u \cdot \nu \, dx \right) = 3(p_1 V_1 - p_0 V_0).$$

Понятно, что при малых u сумму интегралов в левой части можно трактовать как изменение объема.

3.11. Введем сферические координаты. Рассуждая точно так же, как в случае задачи Ламе для цилиндра, будем искать решение задачи в виде $u_r = u(r)$, $u_\theta = 0$, $u_\varphi = 0$. Тогда $\varepsilon_{rr} = du/dr$, $\varepsilon_{\theta\theta} = u/r$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u/r$. Остальные компоненты тензора деформаций — нули. Используя принцип возможных перемещений, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для u :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 u) \right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть $u = c_1 r + c_2 / r^2$. Постоянные c_1, c_2 находятся из граничных условий: $\sigma_{rr} = -p_1$ при $r = R_1$, $\sigma_{rr} = -p_2$ при $r = R_2$, где R_1 — внутренний радиус шара, R_2 — внешний.

Отметим, что при $p_2 = 0$ (раздувании сферической оболочки внутренним давлением) получаются следующие выражения для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3 p_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 - \frac{R_2^3}{r^3} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R_1^3 p_1}{R_2^3 - R_1^3} \left(1 + \frac{R_2^3}{2r^3} \right).$$

Ясно, что $0 \leq \sigma_{rr} \leq p$, а максимум $\sigma_{\theta\theta}$ достигается при $r = R_1$ и возрастает с уменьшением толщины оболочки $h = R_2 - R_1$ со скоростью $O(1/h)$.

4.1. Достаточно заметить, что $2x \cdot \tau = \partial|x|^2/\partial\tau$.

4.3. Положим $S = \text{mes}(S_0)$. Задачу удобно переформулировать как задачу решения системы уравнений равновесия изотропного линейно упругого тела с граничным условием:

$$T\nu = \mu, \tag{13}$$

где $\mu = (F_3/S)\nu$ при $x \in S_0$, $x \in S_1$, $\mu = 0$ при $x \in \Gamma$. Нетрудно подсчитать, что тензор $\mu \wedge x$ при $x \in S_0$, $x \in S_1$ имеет лишь четыре ненулевые компоненты:

$$(\mu \wedge x)_{13} = -(\mu \wedge x)_{31} = -F_3 x_1 / S, \quad (\mu \wedge x)_{23} = -(\mu \wedge x)_{32} = -F_3 x_2 / S,$$

причем вследствие условий (1), с. 171, интегралы от них по S_0 равны нулю, т. е. $M^{(0)}, M^{(1)} = 0$. Положим, что $\sigma_{33} = F/S$ в области Ω , а все остальные компоненты тензора напряжений тождественно равны нулю. Для такого тензора, очевидно, выполнены уравнения равновесия и граничное условие (13). По закону Гука имеем (см. упражнение 3.3, с. 170):

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \varepsilon_{33} = \frac{F_3}{SE}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = -\nu \frac{F_3}{SE}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \varepsilon_{22} = -\nu \frac{F_3}{SE}; \tag{14}$$

здесь ν — коэффициент Пуассона. Ясно, что вектор перемещений с компонентами

$$u_3 = \frac{F_3 x_3}{ES}, \quad u_1 = -\nu \frac{F_3 x_1}{ES}, \quad u_2 = -\nu \frac{F_3 x_2}{ES} \tag{15}$$

удовлетворяет уравнениям (14). Любое другое решение этой задачи отличается лишь на жесткое смещение (см. упражнение 3.9, с. 170). Формулы (15) показывают, что поперечные сечения цилиндра при его

растяжении смещаются вдоль оси, оставаясь параллельными плоскости x_1, x_2 . Относительное удлинение цилиндра равно F_3/ES . Сечения цилиндра испытывают при этом плоские преобразования подобия с коэффициентом пропорциональности равным $1 - \nu F_3/ES$, т. е. при растяжении цилиндра размеры сечения уменьшаются, а при сжатии увеличиваются.

4.6. Задача формулируется как задача решения уравнения:

$$D\Delta^2 w = f = \text{const}, \quad |x| < R,$$

при граничных условиях:

$$w = 0, \quad \widetilde{M}_\nu = 0, \quad |x| = R.$$

Как и в случае круглой пластины, жестко закрепленной по контуру, будем строить осесимметричное решение, т. е. положим, что $w = w(r)$, $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ — полярный радиус. Поскольку искомое решение инвариантно относительно поворота декартовой системы координат, можно считать, что для любого значения полярного угла θ

$$\widetilde{M}_\nu = \widetilde{M}_\nu|_{\theta=0} = M_{11}|_{\theta=0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{\theta=0}.$$

Вычисляя производные $\partial^2 w(r)/\partial x_k^2$ как производные сложной функции, получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \Big|_{x_2=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Таким образом, приходим к интегрированию уравнения:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = f, \quad 0 < r < R, \quad (16)$$

при граничных условиях:

$$w(R) = 0, \quad w''(R) + \nu w'(R)/R = 0. \quad (17)$$

Как показано на с. 190, гладкое решение уравнения (16) имеет вид: $w(r) = fr^4/64D + c_1 r^2/4 + c_3$. Постоянные c_1, c_3 легко находятся из граничных условий (17). В результате получим:

$$w(r) = \frac{fR^4}{64D} (1 - (r/R)^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - (r/R)^2 \right).$$

Ясно, что $\frac{5 + \nu}{1 + \nu} > 1$ при $\nu > -1$. Отсюда вытекает, как и следовало ожидать, что прогиб шарнирно опертой пластины при той же нагрузке в любой точке S больше, чем прогиб пластины, жестко защемленной по контуру (см. формулу (66), с. 190).

Наиболее часто применяемые обозначения

δ_i^j — символ Кронекера.

\mathbb{R} — множество всех вещественных чисел.

$[L]$ — матрица тензора L относительно некоторого базиса.

L_i^j — элементы матрицы тензора L .

E — единичный тензор.

L^{-1} — тензор, обратный тензору L .

$\det(L)$ — определитель тензора L .

$\text{tr}(L)$ — след тензора L .

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические числа тензора.

I_1, \dots, I_n — инварианты тензора.

$u \cdot v$ — скалярное произведение векторов u, v .

L^T — тензор, транспонированный к тензору L .

V — евклидово пространство (как правило, трехмерное).

e_1, \dots, e_n — основной базис.

e^1, \dots, e^n — взаимный базис.

u_1, \dots, u_n — контравариантные компоненты вектора u .

u^1, \dots, u^n — ковариантные компоненты вектора u .

$a \otimes b$ — тензорное произведение (диада) векторов a, b .

$a \wedge b$ — внешнее произведение векторов a, b .

$a \times b$ — векторное произведение векторов a, b (в трехмерном евклидовом пространстве).

$L^{jk}, L_{jk}, L_{\cdot k}^j, L_k^{\cdot j}$ — ковариантные, контравариантные, смешанные компоненты тензора L .

g^{jk}, g_{jk} — ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора.

$L \cdot M$ — скалярное произведение тензоров L, M .

$S^{1/2}$ — корень квадратный из тензора S .

ρ_1, \dots, ρ_n — сингулярные числа тензора.

$df(t)/dt = \dot{f}(t)$ — производная функции скалярного аргумента t .

$\nabla f(x)$ — вектор — градиент скалярной функции f векторного аргумента x .

$\nabla f(x)$ — тензор — градиент векторной функции f векторного аргумента x .

$\text{div } f(x)$ — скаляр — дивергенция векторной функции f векторного аргумента x .

$\operatorname{div} L(x)$ — вектор — дивергенция тензорной функции L векторного аргумента x .

$\Delta f(x) = \operatorname{div} \nabla f(x)$ — оператор Лапласа скалярной или векторной функции f векторного аргумента x .

$\operatorname{rot} u$ — ротор векторного поля (в трехмерном евклидовом пространстве).

ν — нормаль к поверхности.

Γ_{pm}^k — символы Кристоффеля.

$\Omega_0 = \Omega(t_0)$ — отсчетная конфигурация тела.

$\Omega = \Omega(t)$ — актуальная конфигурация тела.

χ — деформация тела.

$F = \nabla \chi$ — градиент деформации.

u — вектор перемещения.

R — тензор поворота.

U — правый тензор растяжения.

V — левый тензор растяжения.

C — правая мера деформации Коши — Грина.

B — левая мера деформации Коши — Грина.

\mathcal{E} — тензор бесконечно малых деформаций.

ε_{ij} — декартовы компоненты тензора бесконечно малых деформаций.

D — тензор скоростей деформаций.

W — спин.

$v = v(x, t)$ — скорость движения точки x .

ρ — плотность.

$J = \det F$ — якобиан деформации.

$f(x, \nu)$ — вектор напряжения.

T — тензор напряжений.

σ_{ij} — декартовы компоненты тензора напряжений.

σ — гидростатическое (среднее) давление.

τ — октаэдрическое напряжение.

K — кинетическая энергия.

ε — массовая плотность внутренней энергии.

Q — скорость подвода тепла к телу.

$w = T \cdot D$ — мощность напряжений.

H — энтропия.

η — энтропия на единицу массы.

θ — абсолютная температура.

a — скорость звука.

M — число Маха.

p — давление.

Предметный указатель

- Цикл, 90
— Карно, 93
Число
— Маха, 123
— Рейнольдса, 151
Давление
— гидростатическое, 72
— термодинамическое, 96
— трения, 96
Деформации
— бесконечно малые, 51
Деформация, 48
— однородная, 60
— относительная, 54
Девиатор тензора, 96
Диада, 13
Дифференциальное уравнение движения, 69
Дифференциальное уравнение энергии, 77
Дивергенция
— тензора, 28
— вектора, 28
Движение
— безвихревое, 57
Энергия
— кинетическая, 74
— полная, 74
— свободная, 89
— внутренняя, 74
Энтальпия, 133
Энтропия, 89
Форма
— дивергентная, 128
Формула
— Бельтрами, 109
— Эйлера, 57
— Громека — Ламба, 57
— Стокса, 36
Формулы
— Чезаро, 53
— Остроградского — Гаусса, 34
— Трусделла, 57
Функция
— напряжений (Прандтля), 174
Газ
— термодинамический, 102
— — совершенный, 102
Газа
— конденсация, 121
Гипотезы
— Кирхгофа, 183
Градиент, 27
— деформации, 48
Коэффициент
— Пуассона, 155
Коэффициент полезного действия, 91
Коэффициент вязкости
— динамический (сдвиговый), 84
— объемный, 84
Компоненты тензора
— контравариантные, 14
— ковариантные, 14
— смешанные, 14
Конфигурация
— актуальная, 48
— отсчетная, 48
Корень квадратный из тензора, 18
Лемма
— Коши (фундаментальная), 65
Линия
— тока, 108
— вихревая, 108
Машина
— тепловая, 90
Материал
— несжимаемый, 156
Мера деформации Коши — Грина
— левая, 49
— правая, 49
Модуль
— Юнга (растяжения), 155
— объемного сжатия, 154
— сдвига, 155
Момент
— изгибающий, 181
Мощность, 74
— напряжений, 76
Напряжение
— касательное, 70

- нормальное, 70
- октаэдрическое, 73
- Напряжения
 - главные, 71
- Неравенство
 - Фридрихса, 135
 - Коши — Бунякавского, 135
 - Юнга, 135
- Оценка Карно — Клаузиса — Кельвина, 92
- Оператор Лапласа
 - скалярной функции, 28
 - векторной функции, 28
- Парадокс Даламбера, 116
- Параметры
 - Ламе, 154
- Пограничного слоя
 - уравнения, 151
- Потенциал, 57
 - термодинамический, 98
- Поверхность
 - сингулярная, 33
 - слабого разрыва, 33
- Предыстория, 88
- Принцип
 - диссипации, 88
 - приведенный, 89
 - локальности, 78
 - независимости от системы отсчета, 78
 - смягчения граничных условий, 172
 - теплового потока Фурье — Стокса, 75
 - термодинамически допустимого детерминизма, 88
 - вариационный
 - Кастильяно, 164
 - Лагранжа, 162
 - возможных перемещений, 161
 - в теории изгиба стержней, 181
 - в теории пластин, 186
- Процесс
 - адиабатический, 92
 - изоэнтропический, 92
 - изотермический, 92
 - однородный, 88
- Прогиб
 - пластин, 183
 - стержня, 179
- Произведение
 - внешнее, 20
- Производная
 - по направлению, 27
- Ротор векторного поля, 31
- Сила
 - массовая, 63
 - перерезывающая, 181
 - поверхностная, 63
- Символ Кристоффеля, 41
- Система отсчета, 47
- Система уравнений
 - акустики, 121
- Скалярное произведение, 11
 - тензоров, 15
- Скорость
 - звука, 122
- Соотношения Гюгонио, 133
- Спин, 54
- Стержень, 171
- Течение
 - дозвуковое, 124
 - сверхзвуковое, 124
 - вискозметрическое, 142
- Тело
 - несжимаемое, 60
 - упругое, 82
 - изотропное, 86
- Температура
 - абсолютная, 87
- Тензор, 8
 - Гука, 154
 - бесконечно малых деформаций, 51
 - деформаций, 50
 - кососимметричный, 15
 - неотрицательный, 16
 - ортогональный, 15
 - положительно определенный, 16
 - поворота, 48
 - растяжения
 - левый, 48
 - правый, 48
 - симметричный, 15
 - скоростей деформации, 54
 - скоростей поворота, 54
 - сопряженный, 15
 - транспонированный, 15
- Тензора
 - главные направления, 71
 - инварианты, 10
 - сингулярные числа, 19
 - сингулярный базис, 19
 - ядро, 20
- Тензорная функция

- изотропная, 22
- симметричная, 22
- Тензорное произведение
- векторов, 13
- Теорема
- Гельмгольца
- — первая, 112
- — третья, 113
- — вторая, 113
- Клаузиуса, 101
- Коши о полярном разложении, 19
- Коши о тензоре напряжений, 65
- Лагранжа — Коши, 111
- Максвелла, 33
- Рейнольдса (переноса), 63
- Рисса, 13
- Труделла, 91
- о кинетической энергии
- — линейно-упругого тела, 159
- Тепловая грань, 88
- Тождество Якоби, 26
- Трубка
- вихревая, 111
- Удельный объем, 60
- Уравнение
- Клайперона, 84
- баланса массы
- — интегральное, 61
- движения
- — в форме Громека — Ламба, 108
- состояния
- — калорическое, 106
- — термическое, 106
- волновое, 121
- Уравнение неразрывности
- Лагранжа, 59
- Уравнением неразрывности
- Эйлера — Даламбера, 60
- Уравнения Навье — Стокса, 85
- Условие
- прилипания, 134
- Условия
- совместности Сен-Венана, 53
- Вектор
- напряжений, 64
- перемещений, 50
- Вихревой трубки
- интенсивность, 112
- Волна
- ударная, 128
- звуковая, 126
- Вязкость
- жидкости
- — кинематическая, 139
- Задача
- Ламе
- — для цилиндра, 167
- — для шара, 171
- Закон
- Фурье теплопроводности, 105
- Гука
- — для изотропного линейно-упругого тела, 154
- — обобщенный, 154
- Пуазейля, 143
- адиабатического изменения Пуассона, 104
- движения Коши
- — первый, 69
- — второй, 69
- сохранения
- — количества движения, 64
- — момента количества движения, 64
- — полной энергии, 75
- Жесткость
- изгибная
- — пластины, 188
- — стержня, 183
- Жидкость
- баротропная, 84
- идеальная, 83
- линейно-вязкая, 82
- вязкая, 82

Литература

1. **Амензаде Ю.А.** Теория упругости. — М.: Высшая школа, 1971.
2. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
3. **Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.** Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1972.
4. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. — М.: Мир, 1987.
5. **Векуа И.Н.** Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978.
6. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
7. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
8. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
9. **Жермен П.** Курс механики сплошных сред.— М.: Высшая школа, 1983.
10. **Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П.** Задачи и упражнения по механике сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1973.
11. **Ильюшин А.А.** Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1978.
12. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа.— М.: Высшая школа, 1981.— Т. 1–2.
13. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
14. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
15. **Лурье А.И.** Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.

16. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
17. **Победря Б.Е.** Лекции по тензорному анализу. — М.: Изд-во МГУ, 1986.
18. **Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.** Основы механики сплошной среды. — М.: Физматлит, 2006.
19. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1970.
20. **Седов Л.И.** Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1973.
21. **Серрин Дж.** Математические основы классической механики жидкости.— М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.
22. **Сьярле Ф.** Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.
23. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
24. **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
25. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.
26. **Черных К.Ф.** и др. Введение в механику сплошных сред. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.

Учебное издание

Карчевский Михаил Миронович
Шагидуллин Ростем Рифгатович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Главный редактор *Н.И. Колосова*

Подписано в печать 30.01.07
Бумага офсетная. Печать ризографическая
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 12,32
Уч.-изд. л. 13,25. Тираж 250 экз. Заказ 1/4

Издательство
«Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина»

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательского центра Казанского
государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина
42008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
Тел. 231-53-59, 292-65-60