Изучаются элементы теории двуслойных ИМ. Рассматриваются их приложения к конкретным ИМ.

1. Методические рекомендации

При освоении материала занятия необходимо обратить особое внимание, понять и уметь доказательно отвечать на следующие основные вопросы:

1. Знать все определения, данные на занятии.
2. Знать формулировки всех теорем и лемм.
3. Знать запись методов Якоби и релаксации в каноническом виде.
4. Уметь доказывать теоремы 1, 2, 4 и следствия 1,2.

2. Самостоятельная работа

Упражнение 2.1. Закончить отладку функции, реализующую метод релаксации и прислать функцию в качестве отчета.

Упражнение 2.2. Покажите, что если матрицы A, B симметричные и положительно определенные, то итерационный метод

$$B\,\frac{x^{k+1}-x^k}{\tau}+Ax^k=b,\quad k=0,1,\,\ldots, \tag{2.1}$$

сходится при любом $\tau\in(0,2/M)$.

Упражнение 2.3. Докажите следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A и B симметричные и положительно определеные матрицы, положительные числа m и M таковы, что*

$$m\,(Bx,x)\leqslant(Ax,x)\leqslant M\,(Bx,x)\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Тогда оптимальное значение итерационного параметра τ равно $\tau_0=2/(M+m)$, а для спектрального радиуса матрицы перехода S справедлива оценка

$$\rho(S)\leqslant\frac{1-\xi}{1+\xi},\quad \xi=\frac{m}{M}. \tag{2.3}$$

Указание: Повторите доказательство аналогичной теоремы 4, внося малые поправки. Обратите внимание, что оценка (1.23) справедлива для всех x, а не только для собственных векторов. Обратите также внимание, что теперь m (M) есть оценка снизу (сверху) для минимального (максимального) собственного числа матрицы $B^{-1}A$.

1. Если A и B симметричные и положительно определенные матрицы, то удается получить оценки скорости сходимости сходимости итерационного метода (2.1).

Нам потребуются далее следующие вспомогательные построения. Пусть A — симметричная неотрицательно определенная матрица порядка n. Из курса алгебры известно, что для любой симметричной матрицы справедливо спектральное разложение $A = U\Lambda U^T$, где U — ортогональная матрица, столбцы которой есть собственные векторы A, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с соответствующим собственными числами на главной диагонали. Поскольку A — неотрицательно определенная матрица, то все $\lambda_k \geqslant 0$.

Лемма 1. *(докажите самостоятельно!) Пусть $\alpha \in (0,1)$. Определим матрицу A^α равенством $A^\alpha = U\Lambda^\alpha U^T$, где $\Lambda^\alpha = \mathrm{diag}(\lambda_1^\alpha, \ldots, \lambda_n^\alpha)$. Тогда:*

a) *A^α симметричная и неотрицательная матрица, причем, если матрица A положительно определена, то и матрица A^α положительно определена;*

b) *$A^\alpha A^{1-\alpha} = A$;*

c) *A^α и A перестановочны, т. е. $A^\alpha A = AA^\alpha$.*

d) *Если A положительно определена, то $(A^\alpha)^{-1} = (A^{-1})^\alpha$.*

Определение 1. *Матрицу A^α называют дробной степенью A; матрицу $A^{1/2}$ —* корнем квадратным *из матрицы A. Будем использовать обозначение $A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha$.*

Теорема 2. *Пусть матрицы A, B симметричные и положительно определены. Тогда для приближений, построенных по итерационному методу* (2.1) *при $\tau = \tau_0$, справедливы следующие оценки:*

$$\|x - x^k\|_A \leqslant \rho_0^k \, \|x - x^0\|_A, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Доказательство. Из равенства $z^{k+1} = Sz^k$ следует

$$A^{1/2} z^{k+1} = (I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}) A^{1/2} z^k,$$

следовательно,

$$\|z^{k+1}\|_A \leqslant \|(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})\|_2 \|z^k\|_A.$$

Матрица $I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$, очевидно, симметричная. Поэтому

$$\|(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2})\|_2 = \rho(I - \tau_0 A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}).$$

Пусть y, λ — собственная пара матрицы $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$, т. е.

$$A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}y = \lambda y. \tag{2.5}$$

Матрица $B^{-1}A^{1/2}$ обратима. Полагая $y = A^{-1/2}Bz$, получим, что собственные значения задачи (2.5) совпадают с собственными значениями матрицы $B^{-1}A$. Поэтому, проводя рассуждения полностью совпадающие с выполненными в в теореме 4, получим, что $\|z^{k+1}\|_A \leqslant \rho_0\|z^k\|_A$, откуда, очевидно, следует (2.4). $\square$

Упражнение 2.4. Покажите, что если выполнены условия теоремы 2, то справедливы оценки

$$\|x - x^k\|_B \leqslant \rho_0^k\|x - x^0\|_B, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$