

## КОММУТАТОРЫ И ИЗОКЛИННЫЕ ПРОЕКТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.М. Бикчентаев, Х.И. Алхасан

*Airat.Bikchentaev@kpfu.ru, alhassanmalhassan@gmail.com*

УДК 517.983

Установлены новые свойства (коммутаторов) изоклинных проекторов в гильбертовом пространстве. Найдены значения определителей некоторых классов матриц.

*Ключевые слова:* гильбертово пространство, линейный оператор, коммутатор, проектор, матрица, определитель

### Commutators and isoclinic projections on a Hilbert space

Some new properties of commutators of isoclinic projections on a Hilbert space are established. Values of certain classes of matrices are found.

*Keywords:* Hilbert space, linear operator, commutator, projection, matrix, determinant

Пусть  $\mathcal{H}$  – гильбертово пространство над полем  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  –  $*$ -алгебра всех линейных ограниченных операторов в  $\mathcal{H}$ ,  $I$  – тождественный оператор в  $\mathcal{H}$ . Оператор  $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  является коммутатором, если  $X = AB - BA$  для некоторых  $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Проекторы  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называются *изоклинными* (с углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ ), пишем  $P \overset{\theta}{\approx} Q$ , если  $PQP = \cos^2 \theta P$  и  $QPQ = \cos^2 \theta Q$ , см. [1]. Если  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$ , то  $P^\perp = I - P$ , проектор  $P \wedge Q$  определяется равенством  $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$ , а  $P \vee Q = (P^\perp \wedge Q^\perp)^\perp$  проектирует на  $\overline{\text{lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$ . Проекторы  $P$  и  $Q$  находятся в общем положении в  $\mathcal{H}$ , если  $P \wedge Q = P \wedge Q^\perp = P^\perp \wedge Q = P^\perp \wedge Q^\perp = 0$ , см. [2]. При  $\dim \mathcal{H} = n < \infty$  алгебра  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  отождествляется с полной матричной алгеброй  $M_n$ .

**Теорема 1.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$  и  $P \overset{\theta}{\approx} Q$  с некоторым углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Тогда справедливы следующие соотношения:

- (i)  $|PQ + QP| = \cos \theta (P + Q)$ ;
- (ii)  $|PQ| = \cos \theta Q$ ;
- (iii)  $|PQ + QP| = |PQ| + |QP|$ ;
- (iv)  $|PQ - QP| = \cos \theta |P - Q|$ ;
- (v)  $|S_P S_Q - S_Q S_P| = 2 \cos \theta |S_P - S_Q|$ ;
- (vi)  $\|PQ - QP\| = \sin \theta \cos \theta$ ;
- (vii)  $P \vee Q - P \overset{\pi/2-\theta}{\approx} Q$ ;
- (viii)  $P \vee Q - P \overset{\theta}{\approx} P \vee Q - Q$ .

**Следствие 1.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pr}}$  и  $P \overset{\theta}{\approx} Q$  с некоторым углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ ,  $X = P \vee Q - P - Q$ . Тогда

- (i)  $\|X\| = \cos \theta$  и  $\text{tr}(P \vee Q) = \text{tr}(P + Q)$ ;
- (ii) если  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , то  $X$  является коммутатором.

---

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Бикчентаев Айрат Мидхатович, д.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань, Россия); Airat Bikchentaev (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Алхасан Хасан, аспирант, КФУ (Казань, Россия); Alhasan Hasan (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

**Теорема 2.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pf}}$  и  $P \overset{\theta}{\approx} Q$  с некоторым углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i)  $P \overset{\pi/2-\theta}{\approx} Q^\perp$ ;
- (ii)  $P^\perp \overset{\theta}{\approx} Q^\perp$ ;
- (iii)  $|P - Q| = \sin \theta I$ ;
- (iv)  $|PQ - QP| = \sin \theta \cos \theta I$ ;
- (v)  $P \vee Q = I$ ;
- (vi)  $X = P \vee Q - P - Q$  обратим.

**Следствие 2.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{pf}}$  и  $P \overset{\theta}{\approx} Q$  с некоторым углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Если  $|P - Q| = \sin \theta I$ , то  $P$  и  $Q$  находятся в общем положении в  $\mathcal{H}$ .

**Следствие 3.** Пусть  $P, Q \in \mathcal{M}_n^{\text{pf}}$  и  $P \overset{\theta}{\approx} Q$  с некоторым углом  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Если  $n$  нечетно, то  $P \vee Q \neq I$  и соотношения (i), (ii) теоремы 2 не выполнены.

### Литература

1. Шерстнев А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. — М.: Физматлит, 2008.
2. Halmos P.R. Two subspaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 144. P. 381–389.