

<https://kias.rfbr.ru/index.php#>

**Проект 18-01-00491 А**

**Конформные инварианты римановых поверхностей гиперболического типа и плоских областей произвольной связности в задачах теории функций и математической физики.**

Участники:

Казанцев Андрей Витальевич (Р)  
Киндер Михаил Иванович  
Губайдуллина Сюзбель Альбертовна  
Аксентьев Леонид Александрович  
Гаранина Анастасия Евгеньевна

Уважаемый Андрей Витальевич!

25.12.2017 17:01:46

Ваша заявка по проекту 18-01-00491 не поддержана.

# РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРТИЗЫ

## Экспертное заключение 1.

### **Обоснование оценки "Актуальность заявленной темы исследований" (доступно заявителю):**

В целом, тематика проекта представляется мне узкоспециальной: интерес к теории однолистных функций после доказательства гипотезы Бибербаха постепенно угасает. Приложения к вихревой динамике идеальной жидкости описывает Б. Густафссон, упоминаемую авторами связь конформных радиусов с задачей об удержании плазмы магнитным полем я не нашел.

### **Обоснование оценки "Соответствие предложенных подходов и методов планируемых исследований поставленной цели и задачам проекта" (доступно заявителю):**

Подходы и методы полностью соответствуют заявленной цели и задачам проекта, их использование обосновано и может обеспечить достоверность и надежность ожидаемых результатов.

### **Рецензия эксперта (доступна заявителю)**

Данный проект лежит в русле традиционных исследований по геометрической теории функций. Его выполнение скорее всего не вызовет осложнений, но и не приведет к резонансным результатам мирового уровня. В коллективе есть молодые исследователи, а его основу составляют опытные профессионалы. Прикладное значение результатов проекта не очевидно, хотя вскользь и упоминается в заявке. В целом, это добротный проект и его можно поддержать при среднем уровне конкуренции.

### **Обоснование оценки "Соответствие уровня исследований и ожидаемых результатов проекта мировому уровню" (доступно заявителю):**

Авторами красочно описана "Драматургия, связанная с упомянутым выше «конфликтом интересов» между парами «Аксентьев – Казанцев» и “Chuaqui – Osgood” в свете «неформализованного знания», скрытого в работах Геринга – Поммеренке и Мартио – Сарваса". Однако публикаций в международных (и даже в центральных отечественных, за исключением, быть может, журнала Лобачевского) журналах по данной теме пока не имеют. Сами заявители не говорят о возможности каких-либо прорывных результатов.

### **Обоснование оценки "Реализуемость предложенного проекта" (доступно заявителю):**

Постановки задач достаточно размытые, их экспертная оценка осложняется витиеватыми формулировками, например "Исследование метапотоков, таких как аналогия между единственностью и однолистностью (классы единственности черпаются из однолистных источников) и аналогии голоморфных утверждений для гармонических отображений, которые еще только предстоит ввести в обиход проблематики, связанной с единственностью. "Ряд указанных величин является носителями корректности для соответствующего ряда задач теории функций и математической физики".

**Обоснование оценки "Уровень имеющегося научного задела и характеристика участников коллектива" (доступно заявителю):**

Значительный научный задел и достаточная квалификация участников имеются. Отсутствует информация о роли участников проекта в выполнении задания.

**Обоснование оценки "Качество представления современного состояния проблемы" (доступно заявителю):**

Представлена вся имеющаяся библиография по проблеме: от [А] до [Я].

## **Экспертное заключение 2.**

**Обоснование оценки "Новизна предложенного исследования" (доступно заявителю):**

Рецензент не нашел в заявке и последних работах участников проекта "существенные элементы новизны". Конкретные элементы новизны в заявке представлены весьма смутно. Как пример приводим следующую выдержку из п.4.5: Резюме. Новизна предлагаемой постановки и решения заявленной проблемы так или иначе связана с ожидаемыми продвижениями в задаче формообразования новых условий принадлежности функции множеству Гахова. Уже полученные результаты свидетельствуют об оправданности позитивных ожиданий в решении указанной задачи.

**Обоснование оценки "Уровень имеющегося научного задела и характеристика участников коллектива" (доступно заявителю):**

Руководитель и некоторые исполнители проекта имеют научный задел и достаточную квалификацию для выполнения проекта.

**Обоснование оценки "Соответствие предложенных подходов и методов планируемых исследований поставленной цели и задачам проекта" (доступно заявителю):**

Во многом отсутствие обоснований и описаний конкретных проблем наряду с многочисленными отступлениями в тексте от сути вещей является характерной чертой этого проекта.

**Обоснование оценки "Реализуемость предложенного проекта" (доступно заявителю):**

Достаточно ознакомиться с текстом проекта.

**Обоснование оценки "Соответствие уровня исследований и ожидаемых результатов проекта мировому уровню" (доступно заявителю):**

Трудно ожидать появление публикаций в ведущих журналах, если до этого авторы предпочитали весьма узкий круг изданий.

### **Рецензия эксперта (доступна заявителю)**

Заявка написана крайне небрежно. Наряду с потоком неточных ( и непонятных) высказываний и выражений доминируют многочисленные отклонения от сути проблемы. В проекте мало конкретики и описаний проблем по существу.

### **Обоснование оценки "Качество представления современного состояния проблемы" (доступно заявителю):**

Описание проблемы смутно угадывается сквозь потоки непонятных и неточных выражений.

### **Обоснование оценки "Актуальность заявленной темы исследований" (доступно заявителю):**

Из текста заявки не ясно, о каких "новых научных направлениях" может идти речь.

## **Экспертное заключение 3.**

### **Рецензия эксперта (доступна заявителю)**

Проект направлен на изучение свойств класса Гахова - подкласса голоморфных и локально однолистных в единичном круге функций, для которых гиперболическая производная (конформный радиус) имеет не более одной критической точки. Этот класс возникает достаточно естественно, однако был введен сравнительно недавно в работах руководителя проекта. Одно из основных направлений проекта - это отыскание новых (неулучшаемых) подклассов класса Гахова. Таким образом, должно быть получено содержательное описание этого класса.

Далее, в рамках проекта предполагается исследование конформных инвариантов, под которыми понимаются, в частности, внутренние, внешние, конформные и другие радиусы, конформные модули, различные емкости и т.д. Эти величины, как хорошо известно, связаны с рядом важных задач математической физики. Авторами проекта, в частности, выделяется связь конформного радиуса с одним интересным случаем задачи Гильберта или с задачей об удержании плазмы магнитным полем. Наличие критических точек конформного радиуса в этих задачах определяет геометрические свойства решений.

Также в рамках проекта планируется изучение единственности решений обратных задач логарифмического потенциала. Все эти задачи хорошо известны специалистам по комплексному анализу и являются интересными и актуальными.

Проект хорошо мотивирован и аккуратно написан. Авторами представлен подробный (скорее даже "сверхподробный") план работы по проекту, убедительно свидетельствующий о выполнимости проекта. Имеется достаточный задел по проекту, представленный заметным числом публикаций в достаточно авторитетных российских научных изданиях и пока не опубликованными наработками. Состав группы (один известный ученый-доктор наук, два кандидата наук и два молодых исследователя-студента) позволяет реализовать представленный план исследований. Задачи проекта вполне разумно распределены между участниками группы.

Нельзя, однако, не отметить, слабое место предлагаемого проекта. Это практически полное отсутствие у участников коллектива публикаций в центральных российских и ведущих зарубежных журналах. Более того, при (весьма подробном) планировании публикаций по проекту авторы снова ограничивают себя добротными, но не самыми сильными журналами.

**Обоснование оценки "Актуальность заявленной темы исследований"**  
(доступно заявителю):

Исследования в рамках предлагаемого проекта будут вестись по следующим направлениям современного комплексного анализа: исследование условий единственности критической точки конформного радиуса; конформные инварианты и их связь с задачами теории функций и математической физики; изучение множества Гахова, т.е. класса функций с (не более чем) единственной критической точкой гиперболической производной (конформного радиуса); единственность решений обратных задач логарифмического потенциала. Эти задачи известны специалистам по комплексному анализу в России и за рубежом, они являются интересными и актуальными. Так, начиная с 1990-х годов, было получено несколько доказательств теоремы о (не более чем) единственности критической точки конформного радиуса в классе Нехари (Chuaqui-Osgood, Gehring-Pommerenke и др.).

Другим важным направлением проекта, тесно связанным с первым содержательно, технически и методологически является исследование конформных инвариантов, под которыми понимаются, в частности, внутренние, внешние, конформные и другие радиусы, конформные модули, различные емкости и т.д. Эти величины, как хорошо известно, связаны с рядом важных задач математической физики. Таким образом, актуальность заявленной в проекте темы исследования не вызывает сомнений.

**Обоснование оценки "Уровень имеющегося научного задела и характеристика участников коллектива"** (доступно заявителю):

У авторов заявки имеется достаточный задел, оформленный в виде заметного числа публикаций в достаточно авторитетных российских научных изданиях. Ими уже получен ряд интересных результатов в задачах, входящих в тематику проекта или тесно к ней примыкающих. Указанный выше (при оценке методов и подходов, предлагаемых для выполнения проекта) новый подход к исследованию свойств множеств Гахова предложен участниками проекта. Группа состоит из 5 участников, среди которых один известный ученый-доктор наук, два достаточно известных специалиста-кандидата наук (один из которых является руководителем проекта) и два студента. К сожалению, у участников проекта практически нет публикаций в ведущих российских и зарубежных журналах. Это обстоятельство несколько снижает общее хорошее впечатление о проекте.

**Обоснование оценки "Соответствие уровня исследований и ожидаемых результатов проекта мировому уровню"** (доступно заявителю):

Как было отмечено при оценке актуальности тематики проекта, все основные упомянутые в заявке и предлагаемые к решению задачи известны специалистам по комплексному анализу в России и за рубежом. Ожидается получение интересных новых результатов. Среди них можно выделить нахождение новых неупрощаемых подклассов класса Гахова; нахождение новых условий, при которых множества уровня решений эллиптических PDE являются областями Нехари; нахождение новых условий единственности корня уравнения Гахова в случае, когда решение соответствующей внешней обратной краевой задачи однолистно; исследование радиуса Митюка в двусвязном случае. К сожалению, коллективом исполнителей даже не запланирована публикация полученных результатов в центральных российских и ведущих международных журналах (предполагается публикация работ по проекту в достаточно авторитетных, но не ведущих журналах и изданиях).

### **Обоснование оценки "Реализуемость предложенного проекта" (доступно заявителю):**

План работы по проекту сформулирован детально (может быть даже "слишком" детально). Для каждого направления работы по проекту приведена (с нечасто встречающейся скрупулезностью) оценка степени риска невыполнения заявленного плана. Представленный план четко и ясно вытекает из целей и задачи проекта и полностью им соответствует. Проект, безусловно, может быть выполнен в запланированные сроки.

### **Обоснование оценки "Качество представления современного состояния проблемы" (доступно заявителю):**

Представленный инициаторами проекта обзор состояние тематики, к которой относится заявка, дает хорошее представление об области исследования, полученных там результатах и имеющихся задачах.

### **Обоснование оценки "Соответствие предложенных подходов и методов планируемых исследований поставленной цели и задачам проекта" (доступно заявителю):**

Авторы проекта предлагают использование как классических методов геометрической теории функций, так и использование новых идей, основанных на использовании при исследовании класса Гахова методов функционального анализа и теории банаховых пространств голоморфных функций, топологических методов. В заявке приведено достаточно подробное описание методов и подходов, которые будут применяться при работе над проектом. Предлагаемые подходы и методы полностью соответствуют заявленной цели и задачам проекта, их использование обосновано и может обеспечить получение запланированных результатов.

## Формы проекта 18-01-00491 ( Заявка 2018 )

### Конформные инварианты римановых поверхностей гиперболического типа и плоских областей произвольной связности в задачах теории функций и математической физики.

#### Форма 1 Данные о проекте

1.0.1.	Номер проекта	18-01-00491
1.0.2.	Руководитель проекта	Казанцев Андрей Витальевич
1.1.	Название проекта	Конформные инварианты римановых поверхностей гиперболического типа и плоских областей произвольной связности в задачах теории функций и математической физики.
1.2.	Код и название конкурса	А Инициативный
1.3.	Область знаний	01 МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
1.4	Научная дисциплина - основной код	01-108 Комплексный анализ
1.5.	Научная дисциплина – дополнительные коды (по классификатору)	01-104 Геометрия 01-109 Вещественный и функциональный анализ 01-111 Дифференциальные уравнения с частными производными 01-113 Математическая физика
1.6.	Ключевые слова	конформные инварианты; конформные радиусы; уравнение Гахова; операторы на однолистных и многолистных функциях; граничные задачи ТФКП и математической физики, разрешимость которых приводит к исследованию экстремального поведения конформных инвариантов
1.7.	Аннотация, публикуемая на сайте Фонда (не более 0,5 стр., в том числе кратко – актуальность, уровень значимости и научная новизна исследования; ожидаемые результаты и их значимость; аннотация будет опубликована на сайте Фонда, если Проект получит поддержку)	<p>Проект посвящен исследованию конформных инвариантов, выступающих в виде вещественных поверхностей над областями комплексной плоскости, конформно эквивалентными единичному кругу или его многосвязным аналогам.</p> <p>Ряд поверхностей указанного типа является носителем корректности для соответствующего ряда задач теории функций и математической физики. Наиболее продвинутой связью подобного рода является зависимость внешней обратной краевой задачи теории аналитических функций от конформного радиуса области. Проект призван установить степень влияния этой зависимости на другие задачи, а также силу этой зависимости на исходной связке «внешняя задача – конформный радиус».</p> <p>Исследования проекта будут вестись по шести направлениям: 1) поиск новых неулучшаемых условий единственности критической точки конформного радиуса, в частности, для операторов на подклассах однолистных функций; 2) связь конформных инвариантов с задачами теории функций и матема-</p>

		<p>тической физики; 3) многосвязный случай; 4) изучение класса функций с (не более чем) единственной критической точкой конформного радиуса – множества Гахова – «в целом»; 5) параметрические семейства конформных инвариантов; 6) единственность решений обратных задач логарифмического потенциала.</p> <p>Актуальность исследования, с одной стороны, основана на его вовлеченности в развитие теории достаточных признаков однолистности, с другой – состоит в определении реального места рассматриваемой проблематики на стыке теории функций и математической физики. Новизна предлагаемой постановки и решения заявленной проблемы связана с ожидаемыми продвижениями в задаче формообразования новых условий единственности критической точки конформного радиуса. Выход на мировой уровень определяется несколькими историческими прецедентами, уровень классики – более чем тридцатилетней выдержкой начальных результатов, к которым восходит настоящее исследование.</p>
1.8.	Предполагает ли проект проведение экспедиций и/или полевых исследований	нет
1.9.	Количество членов научного коллектива	5
1.10.	Сроки выполнения	3 года
1.11.	Общий запрашиваемый объем финансирования на 2018 год, включая финансирование экспедиций и/или полевых испытаний	700000



## Форма 1en Данные о проекте на английском языке

1.1.	Название проекта (на английском языке)	Conformal invariants of the Riemann surfaces of the hyperbolic type and of the planar domains of the arbitrary connectivity in the problems of the function theory and mathematical physics.
1.2.	Фамилия, имя Руководителя проекта (на английском языке)	Kazantsev Andrei
1.3.	Ключевые слова (на английском языке)	conformal (inner mapping) radii; Gakhov's equation; operators on univalent and multivalent functions; boundary value problems in Complex Function Theory and Mathematical Physics with solvability leading to study the extrema of conformal radii

The Project is devoted to the investigation of the conformal invariants represented as the real surfaces over the planar domains which are conformally equivalent to the unit disk or its multiply connected analogies.

A number of the surfaces of the above type is the carrier of the correctness for the corresponding number of the problems in the function theory and the mathematical physics. The most developed connection of this kind is the dependence of the exterior inverse boundary value problem of the analytic function theory on the conformal (inner mapping) radius of the domain. The Project is called to establish the level of the influence of this dependence on the other problems, and the power of this dependence on the original pair “exterior problem – conformal radius”.

Аннотация Проекта на английском языке (объемом не более 0,5 стр.; в том числе кратко – актуальность, уровень фундаментальности и научная новизна; ожидаемые результаты и их значимость)

1.4.

Project's research will be lead along the six directions: 1) the finding of the new sharp uniqueness conditions for the critical point of the conformal radius, in particular, in the case of the operators on the subclasses of the univalent functions; 2) connection between the conformal invariants and the problems in the function theory and the mathematical physics; 3) multiply connected case; 4) the study of the class of functions with (no more than) unique critical point of the conformal radius – the Gakhov set – “in the large”; 5) parametrical families of conformal invariants; 6) uniqueness of the solutions of the inverse problems of the logarithmic potential.

Urgency of Project's research, on the one hand, is based on its involving in the development of the theory of the univalence conditions, on the other hand, is tied to the determination of the real place of the problems in question at the interface of the function theory and mathematical physics. The novelty of the posing just proposed and the solution of the problems just declared is connected with the expected progress in the morphogenesis problem of the new conditions for the critical point of the conformal radius to be unique. Hit in the world chart is determined by several historical precedents, the degree of classics is defined by more than thirty-year endurance of the seminal results to which the present study goes back.

**Форма 2Р Данные о физическом лице, представившем Проект на Конкурс – Руководителе проекта**

2.1.	Фамилия	Казанцев
2.2.	Имя	Андрей
2.3.	Отчество	Витальевич
2.4.	Фамилия (на английском языке)	Kazantsev Andrei
2.5.	Имя (на английском языке, полностью)	Andrei
2.6.	Дата рождения	03.03.1963
2.7.	Ученая степень	кандидат физико-математических наук
2.8.	Год присуждения ученой степени	1990
2.9.	Ученое звание	Доцент
2.10.	Год присвоения ученого звания	1996
2.11.	Полное название организации – основного места работы	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
2.12.	Сокращенное название организации – основного места работы	ФГАОУ ВО КФУ
2.13.	Должность по основному месту работы (сокращенное название)	Доцент
2.14.	Область научных интересов (ключевые слова)	конформные радиусы, краевые задачи, конформная геометрия, уравнение Гахова
2.15.	Область научных интересов (коды по классификатору)	01-108, 01-108, 01-109, 01-104, 01-111, 01-112, 01-113
2.16.	Общее число публикаций (исключая тезисы докладов)	-
2.17.	Участие в проекте(Р – Руководитель проекта, И – член коллектива, представившего Проект на Конкурс)	Р

2.18.	Образование	высшее
2.19.	Участие в Проектах, поддержанных Фондом	
2.20.	Участие в проектах, поддержанных другими фондами	нет
2.21.	Научные достижения (премии, награды, гранты)	нет

**Форма 2И Данные о физическом лице, представившем Проект на Конкурс – члене коллектива**

2.1.	Фамилия	Аксентьев
2.2.	Имя	Леонид
2.3.	Отчество	Александрович
2.4.	Фамилия (на английском языке)	Aksentev
2.5.	Имя (на английском языке)	Leonid
2.6.	Дата рождения	01.03.1932
2.7.	Ученая степень	доктор физико-математических наук
2.8.	Год присуждения ученой степени	1972
2.9.	Ученое звание	Профессор
2.10.	Год присвоения ученого звания	1974
2.11.	Полное название организации – основного места работы	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
2.12.	Сокращенное название организации – основного места работы	ФГАОУ ВО КФУ
2.13.	Должность	Профессор
2.14.	Область научных интересов (ключевые слова)	краевые задачи, обратные краевые задачи, однолистные функции, уравнение Гахова
2.15.	Область научных интересов (коды)	01-108

2.16.	Общее число публикаций	-
2.17.	Участие в проекте(И – член коллектива, представившего Проект на Конкурс)	И
2.18.	Образование	высшее
2.19.	Участие в Проектах, поддержанных Фондом	
2.20.	Участие в проектах, поддержанных другими фондами (указать номер проекта, название проекта, название фонда)	не заполнено
2.21.	Научные достижения (премии, награды, гранты)	не заполнено
<hr/>		
2.1.	Фамилия	Гаранина
2.2.	Имя	Анастасия
2.3.	Отчество	Евгеньевна
2.4.	Фамилия (на английском языке)	Garanina
2.5.	Имя (на английском языке)	Anastasia
2.6.	Дата рождения	29.09.1997
2.7.	Ученая степень	без ученой степени
2.8.	Год присуждения ученой степени	0
2.9.	Ученое звание	без ученого звания
2.10.	Год присвоения ученого звания	0
2.11.	Полное название организации – основного места работы	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
2.12.	Сокращенное название организации – основного места работы	ФГАОУ ВО КФУ
2.13.	Должность	Студент

2.14.	Область научных интересов (ключевые слова)	не заполнено
2.15.	Область научных интересов (коды)	01-108
2.16.	Общее число публикаций	-
2.17.	Участие в проекте(И – член коллектива, представившего Проект на Конкурс)	И
2.18.	Образование	неполное высшее
2.19.	Участие в Проектах, поддержанных Фондом	
2.20.	Участие в проектах, поддержанных другими фондами (указать номер проекта, название проекта, название фонда)	не заполнено
2.21.	Научные достижения (премии, награды, гранты)	не заполнено

---

2.1.	Фамилия	Губайдуллина
2.2.	Имя	Сюмбель
2.3.	Отчество	Альбертовна
2.4.	Фамилия (на английском языке)	Gubaydullina
2.5.	Имя (на английском языке)	Syumbel
2.6.	Дата рождения	09.08.1997
2.7.	Ученая степень	без ученой степени
2.8.	Год присуждения ученой степени	0
2.9.	Ученое звание	без ученого звания
2.10.	Год присвоения ученого звания	0
2.11.	Полное название организации – основного места работы	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

2.12.	Сокращенное название организации – основного места работы	ФГАОУ ВО КФУ
2.13.	Должность	Студент
2.14.	Область научных интересов (ключевые слова)	CONFORMAL INVARIANTS
2.15.	Область научных интересов (коды)	01-108
2.16.	Общее число публикаций	-
2.17.	Участие в проекте(И – член коллектива, представившего Проект на Конкурс)	И
2.18.	Образование	неполное высшее
2.19.	Участие в Проектах, поддержанных Фондом	
2.20.	Участие в проектах, поддержанных другими фондами (указать номер проекта, название проекта, название фонда)	не заполнено
2.21.	Научные достижения (премии, награды, гранты)	не заполнено

---

2.1.	Фамилия	Киндер
2.2.	Имя	Михаил
2.3.	Отчество	Иванович
2.4.	Фамилия (на английском языке)	Kinder
2.5.	Имя (на английском языке)	Michael
2.6.	Дата рождения	17.03.1960
2.7.	Ученая степень	кандидат физико-математических наук
2.8.	Год присуждения ученой степени	1985
2.9.	Ученое звание	Доцент

2.10.	Год присвоения ученого звания	1990
2.11.	Полное название организации – ос- новного места рабо- ты	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
2.12.	Сокращенное назва- ние организации – основного места ра- боты	ФГАОУ ВО КФУ
2.13.	Должность	Доцент
2.14.	Область научных интересов (ключе- вые слова)	обратные краевые задачи, внешняя обратная краевая задача, уравнение Гахова, внутренний (конформный) радиус, обоб- щенный приведенный модуль, функция Митюка, радиус Ми- тюка, индексы корней.
2.15.	Область научных интересов (коды)	01-108, 01-104, 01-109, 01-111, 01-112, 01-113
2.16.	Общее число публи- каций	-
2.17.	Участие в проекте(И – член коллектива, представившего Проект на Конкурс)	И
2.18.	Образование	высшее
2.19.	Участие в Проектах, поддержанных Фондом	
2.20.	Участие в проектах, поддержанных дру- гими фондами (ука- зать номер проекта, название проекта, название фонда)	нет
2.21.	Научные достиже- ния (премии, награ- ды, гранты)	нет

**Форма 3 Сведения об организации, предоставляющей условия для выполнения работ по Проекту (Организация)**

3.1.	Сокращенное название (в соответствии с учредительными документами)	ФГАОУ ВО КФУ
3.2.	Полное название (в соответствии с учредительными документами)	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"
3.3.	Полное название на английском языке (в соответствии с учредительными документами)	Kazan (Volga region) Federal University
3.4.	Ведомственная принадлежность (если есть)	Министерство образования и науки Российской Федерации
3.5.	Почтовый индекс (без почтового адреса)	420008
3.6.	Почтовый адрес (без почтового индекса)	г. Казань, ул. Кремлевская, д.18
3.7.	Город, населенный пункт	Казань
3.8.	Федеральный округ	Приволжский федеральный округ
3.9.	Код субъекта РФ	Татарстан



## Форма 4 Содержание проекта

### Содержание Проекта

4.1. Описание фундаментальной научной задачи, на решение которой направлено исследование.	<p>В работах руководителя Проекта ([4], [8], [9], [11] по списку п. 4.12) введено и исследовано новое понятие теории классов голоморфных функций – множество Гахова (класс Гахова), состоящий из всех голоморфных и локально однолистных в единичном круге функций, для которых уравнение Гахова имеет не более одного корня, или, что то же самое, для которых гиперболическая производная (конформный радиус) имеет не более одной критической точки. Результаты, полученные в [11] (по тому же списку), показывают, что множество Гахова допускает эффективное исследование «в целом», а не только по входящим в него классам функций, и тем самым является содержательным объектом с сопутствующим функционально-аналитическим контекстом.</p> <p>Ядро фундаментальной научной задачи, на решение которой направлено исследование, составляет содержательное описание множества Гахова за счет распознавания в нем новых классов единственности корня уравнения Гахова. Данное ядро является гарантом надежности проекта и, таким образом, полностью покрывает риски его невыполнения.</p> <p>Что же касается фундаментальной научной задачи Проекта, то она заключается в самом широком исследовании конформных инвариантов, которые выступают в виде вещественных поверхностей над областями комплексной плоскости, голоморфно параметризуемыми единичным кругом, из которого в многосвязном случае удаляются множества различной конфигурации. Понятие «конформный инвариант» мы используем здесь как обобщающее название для внутренних, внешних, конформных и других радиусов, конформных модулей, коэффициентов метрик, решений эллиптических PDE специального вида, емкостей, плотностей и т.п. (При таком многообразии объектов их каталогизация становится отдельной задачей.) Ряд указанных величин является носителями корректности для соответствующего ряда задач теории функций и математической физики. Возвращаясь к нашему ядру, мы получаем связь конформного радиуса с одним интересным случаем задачи Гильберта или с задачей об удержании плазмы магнитным полем, когда наличие и свойства критических точек радиуса определяет конкретные геометрические свойства решений указанных задач.</p> <p>Подобные взаимосвязи будут определять конкретные исследовательские направления проекта, о чем речь пойдет в последующих разделах.</p>
4.2. Актуальность исследования	В предшествующие времена актуальность данной тематики, формулируемой как исследование экстремумов некоторых функций над областями комплексной плоскости, замыкалась на применение получаемых в ее рамках результатов к тем за-

дачам, чья корректность от наличия этих экстремумов и зависела. Пример: единственность критической точки влечет за собой единственность соответствующего решения задачи.

Подобную «актуальность» теперь уже можно считать «модельной» – подобно применению конформных радиусов во внешней обратной краевой задаче, которое участники Проекта иногда используют как «архетип», определивший направленность их творческой ностальгии.

Для руководителя Проекта и его участников актуальность давно уже стала одним из синонимов конкуренции. В данном конкретном случае актуальность Проекта связана с тем фактом, что в начале 1990-х в работах ряда зарубежных математиков (M. Chuaqui – B. Osgood, S. Yamashita) стали появляться разные доказательства теоремы о (не более чем) единственности критической точки конформного радиуса в классе Нехари  $|\{f, \zeta\}| \leq 2/(1 - |\zeta|^2)^2$  голоморфных функций  $f$  в единичном круге. Обоснование этой теоремы впервые было обнаружено руководителем Проекта еще в 1984 г. в известной статье Ф. Геринга и Х. Поммеренке, где оно было частью доказательства другого утверждения, а сама теорема, судя по всему, оставалась неизвестной авторам ее доказательства! Точки над «и» были расставлены в публикациях Л.А. Аксентьева и А.В. Казанцева, причем Л.А. Аксентьев перенес метод Геринга – Поммеренке на исследование решения внешней обратной краевой задачи: оказалось, что принадлежность решения внешней задачи классу Нехари влечет за собой не более чем единственность критической точки гиперболической производной (конформного радиуса) решения соответствующей внутренней задачи!

Обращение к указанной теореме упомянутых математиков было воспринято как вызов в нашем научном сообществе – Казанском семинаре по геометрической теории функций. Два аспекта. Первый был связан с непонятной уклончивостью иностранцев: Chuaqui и Osgood (работа 1994 года в *Comment. Math. Helv.*), хоть и сослались на Геринга и Поммеренке, но не признали их приоритет в отношении указанной теоремы. Кроме того, их доказательство по существу было адаптированной версией текста на с. 397-398 работы О. Мартио и Ю. Сарваса «Теоремы инъективности в плоскости и пространстве» (Анналы Финской академии, 1978-1979), ссылки на которую в отмеченной работе Chuaqui – Osgood нет вообще. Доказательство теоремы единственности в классе Нехари на основе метода Мартио – Сарваса было впервые обнаружено Ф.Г. Авхадиевым не позднее 1989 года и стало центральной темой дипломной работы его ученицы Л.И. Шоклевой, защищенной в 1990 году.

Что касается статьи S. Yamashita «Производная Шварца и локальные максимумы производной Блоха», вышедшей в “*Math. Japonica*” в 1992 году, то его доказательство выглядит, так

сказать, более самостоятельным, но вызывает недоумение, зачем он приписал себе часть результатов Рушевея – Виртса из Math. Zeit. 1982 года, на которые это доказательство опиралось.

Другой аспект «проблемы вызова» был связан с тем, что упомянутая работа Chuaqui – Osgood была одной из их первых работ (впоследствии к ним присоединялись и другие авторы), с которых стартовало их научное направление в области однолистности, объединяющее условия Нехари, Альфорса – Вейля, Эпштейна и некоторые другие, на основе подхода, идущего от римановой геометрии. При этом направление формировалось таким образом, что одно из самых ярких условий единственности – неравенство Нехари – именно как условие единственности критической точки конформного радиуса выглядело периферийным по отношению к этому кругу условий, увлекая за собой остальные признаки единственности.

Таким образом, актуальность избранной нами фундаментальной задачи неразрывно связана с определением ее реального места в современной проблематике однолистности и месте научного коллектива Проекта в «международном разделении труда» по решению данной и близких задач.

Теперь сформулируем ряд, так сказать, внутренних аспектов актуальности фундаментальной задачи Проекта.

Итак, актуальность исследования заключается в распознавании следующих открытых проблем и скрытых достоинств.

1. Определение характера зависимости разрешимости той или иной задачи математической физики или теории функций от свойств экстремумов или, более общо, геометрии соответствующей вещественной поверхности, с которой связана корректность исходной задачи.

2. Для этого нужна каталогизация конформных инвариантов, предполагающая развертывание некоторых иерархий (например, инвариант – класс задач), прослеживание некоторых аналогий (например, свойства избранных точек функций и свойства решений соответствующих задач могут быть связаны аналогично для различных пар вида «точка – задача»), изучение вопроса о сохранении свойств при переходе от одного класса областей к другому (например, от односвязных к многосвязным) или от одного вида функций к другому (как меняются свойства радиусов при смене канонических областей их построения) и т.д.

3. Исследование метапотоков, таких как аналогия между единственностью и однолистностью (классы единственности черпаются из однолистных источников) и аналогии голоморфных утверждений для гармонических отображений, которые еще только предстоит ввести в обиход проблематики, связанной с единственностью.

4. Развитие новых результатов и феноменов, у которых нет аналогов и традиционных истолкований. Примеры: эпштейн-новость линейной выпуклости области Хартогса, эффект жесткости по параметру серии классов голоморфных функций, заключающийся в том, что классы содержательны только на конкретном отрезке параметров.

Здесь актуальность равнозначна отсутствию привыкания к результату, что автоматически делает его новым и порождает надежды, оправданность которых и представляет актуальность.

Тем не менее, именно на этом направлении ожидаются наиболее перспективные результаты.

5. Поражают то «упорство» и неожиданность, с которыми конформные радиусы встречались в истории математики. Так, обретя формальное определение в известном трактате Д. Пойа и Г. Сегё, конформный радиус – именно как инвариант – прошел через работы Э. Пешля начала 30-х, впервые выписавшего если не уравнение, то отображение, которое через полвека в Казани назовут отображением Гахова. Обращение к классу Блоха учеников Э. Пешля (Рушевей и Виртс в уже упоминавшейся выше работе) привело их к явной форме уравнения, к исследованию которого несколько позже профессор Л.А. Аксентьев привлек уже своих учеников. Было бы весьма актуально разобраться в той роли, которую конформные радиусы играют в геометрической теории функций (см. п. 3 выше).

6. Постулирование актуальности тематики, связанной с обратными задачами потенциала, восходит к работе Л.А. Аксентьева, Ю.Е. Хохлова и Е.А. Широковой 1978 года. Дело в поразительной аналогии между обратной задачей логарифмического потенциала и внешней обратной краевой задачей для аналитических функций – аналогии, воплотившейся в теоремах П.С. Новикова и Ю.Е. Хохлова о единственности решения соответствующей задачи в классе звездообразных областей.

Тем не менее, вопрос о том, управляются ли обратные задачи теории потенциала конформными инвариантами, остается открытым.

Упомянутые источники:

Chuaqui M., Osgood B. Ahlfors-Weill extensions of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric // Comment. Math. Helv. – 1994. – V. 69. – P. 659-668.

Yamashita S. The Schwarzian derivative and local maxima of the Bloch derivative // Math. Japonica. – 1992. – V. 37, No. 6. – P. 1116-1128.

Gehring F.W., Pommerenke Ch. On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P.

		<p>226-242.</p> <p>Аксентьев Л.А., Казанцев А.В. Новое свойство класса Нехари и его применение // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 8. – С. 69-72.</p> <p>Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. – 1978/1979. – V. 4, f. 2. – P. 383-401.</p> <p>Ruscheweyh St., Wirths K.-J. On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91-106.</p> <p>Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа: в 2 ч. – Ч. 2. – 3-е изд. – М.: Наука, 1978. – 432 с.</p> <p>Peschl E. Über die Krümmung von Niveaukurven bei der konformen Abbildung einfachzusammenhängender Gebiete auf das Innere eines Kreises. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von E. Study // Math. Ann. – 1932. – Bd. 111, h. 1. – S. 574-594.</p> <p>Peschl E. Über die Verwendung von Differentialinvarianten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Typus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. – 1963. – V. 336, No. 6. – 1963. – P. 1-22.</p> <p>Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24. – С. 319-333.</p> <p>Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. – 1938. – Т. 18, № 3. – С. 165-168.</p> <p>Хохлов Ю.Е. О разрешимости внешних обратных краевых задач для аналитических функций // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 278, № 2. – С. 298-301.</p> <p>Драматургия, связанная с упомянутым выше «конфликтом интересов» между парами «Аксентьев – Казанцев» и “Chuaqui – Osgood” в свете «неформализованного знания», скрытого в работах Геринга – Поммеренке и Мартио – Сарваса, подробно рассмотрена в работе</p> <p>Казанцев А.В. Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учебное пособие / Мар. гос. ун-т. – Йошкар-Ола, 2012. – 64 с.</p> <p>и частично затронута в статье [1] по списку 4.12.</p>
4.2.1.	Направление из Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации (при наличии) (выбор из справочника)	9. Фундаментальные исследования, обусловленные внутренней логикой развития науки, обеспечивающие готовность страны к большим вызовам, еще не проявившимся и не получившим широкого общественного признания, возможность своевременной оценки рисков, обусловленных научно-технологическим развитием
4.3.	Анализ современного состояния исследований в данной	Если рассматривать проблематику, которая в п. 4.1 была определена как ядро фундаментальной научной задачи, на решение которой направлено исследование, и которая состоит

области (приводится обзор исследований в данной области со ссылками на публикации в научной литературе).

в построении новых признаков единственности корня уравнения Гахова, то можно сказать, что участники настоящего Проекта составляют группу, имеющую лидирующие позиции в мире по данному направлению. Исследования в данной области в целом отражены в публикациях, представленных в п. 4.12 ниже и демонстрируют следующий исследовательский ландшафт.

В работе [А] (не вошедшей в список п. 4.12) определены типы бифуркаций нулей градиента гиперболической производной (конформного радиуса) голоморфной функции в единичном круге, вложенной в семейство ее линий уровня. Устанавливаемый в статье характер зависимости движения нулей от кривизны конформного радиуса позволяет расширить возможности теоремы Пуанкаре-Хопфа для построения класса новых условий единственности нуля в форме неотрицательности функционалов типа кривизны, развивая идеи работы [Б]. Данный класс содержит однопараметрическую серию неравенств Эпштейна, получаемых из условия линейной выпуклости по Бенке-Пешлю областей Хартогса специального вида. При этом возникает своеобразный эффект жесткости: указанные неравенства содержательны только на конечном отрезке параметров.

Работа [А] имеет иницирующий характер для дальнейшей серии работ руководителя Проекта; к ряду ее аспектов он вернулся в работе [1] по списку 4.12.

Множество Гахова определено в книге [В]. В работе [Г] ([11] по списку 4.12) название «множество Гахова» переносится на его образ под действием предшварцианами голоморфных функций. При таком определении исследуется расположение пересечения множества Гахова с пространством Блоха относительно банаховой структуры последнего. Выявлена связь между топологическими характеристиками множества Гахова и геометрическими характеристиками гиперболических производных его функций. Дано эффективное описание подмножества границы множества Гахова с минимальной преднормой. С использованием функционала Минковского установлена звездообразность подкласса функций из множества Гахова с нулевой критической точкой конформного радиуса. В статье [Д] даны некоторые аналогии полученных в [Г] утверждений для пространства Дирихле.

В работе [Е] ([9] по списку 4.12) для ряда известных подклассов однолистных функций при наличии нулевого корня уравнения Гахова дано эффективное описание множества траекторий выхода из множества Гахова; такой выход осуществляется при значении параметра, который отвечает неулучшаемой постоянной в соответствующем условии единственности корня. Показано, что выход из множества Гахова может происходить за счет бифуркаций только двух типов: 1) максимум в нуле переходит в два максимума и седло; 2) возникает ненулевое полуседло, распадающееся затем в седло и максимум. Продолжением работы [Е] является статья [Ж] ([8] по 4.12), в которой установлена неулучшаемая область в про-

странстве параметров такая, что образ любой звездообразной функции с нулевым корнем уравнения Гахова при отображении оператором Бернадского, соответствующим параметру области, попадает в множество Гахова. Для образа всего класса звездообразных функций с нулевым корнем вычислен гаховский поперечник и дано эффективное описание множества траекторий выхода из множества Гахова по линиям уровня. Ряд статей посвящен параметрическим семействам конформных радиусов.

Треугольнику Яновского, определяющему двупараметрическое семейство условий подчиненности на функционал  $\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)$ , посвящены статьи [3], [И] ([7], [12] по списку 4.12). В более ранней работе была установлена максимальная подобласть треугольника Яновского, принадлежность к которой параметров класса (= точки треугольника) обеспечивает каждой его функции свойство единственности (нулевого) корня уравнения Гахова. В более поздней работе такая область вычисляется для семейства классов Яновского с дополнительным параметром.

Работа [К] ([5] по списку 4.12) продолжает идеи заметки [Л]. В [К] с использованием подвижной униформизации исследована динамика множества критических точек гиперболических производных семейства голоморфных в единичном круге функций, предшварцианы которых удовлетворяют уравнению квазилевнеровского типа. Выбор новой формы уравнения Гахова приводит к новому условию (не более чем) единственности критической точки гиперболической производной голоморфной функции – неположительности якобиана уравнения в терминах предшварциана указанной функции.

Последняя из статей нашего обзора, специально посвященных параметрическим семействам уравнений Гахова, исследует выпуклые комбинации тождественного отображения с выпуклыми функциями [М] ([10] по списку 4.12).

Погружению в рассматриваемый поток тематики, связанной с обратными задачами теории потенциала, призваны способствовать две работы с участием профессора Л.А. Аксентьева [Н] и [О] ([13] и [14] по списку п. 4.12). В работе [О] выведен новый класс решений обратных задач логарифмического потенциала в виде логарифмической функции от отношения полиномов одинаковых степеней и приведены примеры конечной разрешимости обратных задач. В заметке [Н] продолжено выделение классов областей с конечным числом параметров, которыми характеризуется функция, отображающая единичный круг на искомую область задачи. Кроме того, в [Н] рассматриваются перспективы исследования прямых и обратных задач для градиента логарифмического потенциала простого слоя с различными типами контуров.

Если перейти к аспекту фундаментальной научной задачи Проекта, изучающему роль конформных инвариантов в разрешимости соответствующих задач теории функций и математической физики, то данное направление исследований представляется законсервированным со времени открытия

связи ряда таких задач с конформным радиусом области. Получить представление об этом времени и о предмете позволяют книги [П], [Р] и [С]. Довольно подробный список источников по задачам математической физики, в которых возникает конформный радиус, приводит Б. Густафссон [Т]. В отличие от этого сама фундаментальная задача постоянно привлекает внимание к конформным инвариантам. Это проявляется уже на уровне провинциальных конференций: на школах [У] и [Ф], проведенных в стенах КФУ в 2016 и 2017 гг., звучали следующие имена и задачи: Дубинин В.Н. (экстремальные разбиения), Насыров С.Р. (емкости Робэна), Хабибуллин Б.Н. (распределение нулей голоморфных функций и гиперболический радиус), Левицкий Б.Е. (р-приведенный модуль и р-гармонический радиус), Прилепкина Е.Г. (радиусы Робэна) и некоторые другие.

Завершая наш импровизированный очерк, следует отметить, что интересующее нас пространство внимания делится между научными группами стран Тихоокеанского бассейна: уже упоминавшаяся группа математиков США–Чили – оценки шварцианов и роста плотности метрики Пуанкаре [Х], [Ц], [Ч], [Ш]; Йонг Чан Ким и Тошийуки Шугава (Южная Корея–Япония) – оценки предшварцианов, изучение операторов на однолистных функциях, близкие вопросы [Щ], [Ы], [Э], [Ю]; Дальний Восток России – школа В.Н. Дубинина, отметим только работу Л.В. Ковалева по гиперболическому радиусу [Я].

Все три проекта, по-видимому, прошли свои «точки безубыточности», поэтому в настоящее время производят впечатление частично законсервированных или, точнее, на стадии переваривания удавом слона, выражаясь возвышенным языком де Сент-Экзюпери...

А. Казанцев А.В. Бифуркации и новые условия единственности гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180-194.

Перевод:

Kazantsev A.V. Bifurcations and new univalence criteria for critical points of hyperbolic derivatives // Lobachevskii J. Math. – 2011. – V. 32, No. 4. – P. 426-437. (DOI: 10.1134/S1995080211040263)

Б. Kazantsev A.V. On a problem of Polya and Szegő // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37-46. (URL: <http://www.kcn.ru/tat/en/science/ljm/contents.html>).

В. Казанцев А.В. Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учебное пособие / Маар. гос. ун-т. – Йошкар-Ола, 2012. – 64 с.

Г. Казанцев А.В. Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65-82.



- Д. Kazantsev A.V. Width of the Gakhov class over the Dirichlet space is equal to 2 // Lobachevskii J. Math. -- 2016. -- Vol. 37, No. 4. -- P. 449-454. DOI: 10.1134/S1995080216040120.
- Е. Казанцев А.В. О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
- Ж. Казанцев А.В. Казанцев А.В. Об уравнении Гахова для оператора Бернацкого // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. -- 2015. -- Т. 157, кн. 2. -- С. 79-92.
- З. Казанцев А.В. Об уравнении Гахова в классах Яновского с дополнительным параметром // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. -- 2015. -- Т. 157, кн. 1. -- С. 35-43.
- И. Жаркова Т.В., Казанцев А.В. О единственности решения уравнения Гахова для функций из классов Яновского // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2. – С. 108-119.
- К. Казанцев А.В. О семействах гиперболических производных с квазилевнеровской динамикой предшварцианов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. -- 2016. -- Т.158, кн. 1. -- С. 66-80.
- Л. Казанцев А.В. Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. - № 6. – С. 69-73.
- М. Жаркова Т.В., Казанцев А.В. Множество Гахова в теореме Меркеса о выпуклых комбинациях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 2. – С. 34-42.
- Н. Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л. А. Прямые и обратные задачи логарифмического потенциала с конечным числом параметров // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – 2017. – Т.54. – С. 23-27.
- О. Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 65-69.
- П. Kawohl B. Rearrangements and convexity of level sets in PDE. – Lecture Notes in Math. – V. 1150. – Springer-Verlag, Berlin, 1985. – 136 p.
- P. Bandle C., Flucher M. Harmonic radius and concentration of energy; hyperbolic radius and Liouville's equations  $\Delta U = eU$  and  $\Delta U = U(n+2)/(n-2)$  // SIAM Review. – 1996. – V. 38, No. 2. – P. 191-238.
- С. Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами. – Пер. с англ. Т.Н. Рожковской. Под ред. Н.Н. Уральцевой. – М.: Наука, 1990. – 536 с.
- T. Gustaffson B.-J. On the convexity of a solution of Liouville's equation // Duke Math. J. – 1990. – V. 60, No. 2. – P. 303-311.
- У. Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. – Казань: КФУ; изд-во Академии наук

		<p>РТ, 2016. – 374 с.</p> <p>Ф. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции. – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т. 54. – 420 с.</p> <p>X. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. Schwarzian derivatives of conformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2011. – V. 36. – P. 449-460.</p> <p>Ц. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. Schwarzian derivatives and uniform local univalence // Comput. Methods and Function Theory – 2008. – V. 8, No. 1, - P. 21-34.</p> <p>Ч. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. Schwarzian derivative criteria for valence of analytic and harmonic mappings // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 2007. – V. 143. – P. 473-486.</p> <p>Ш. Chuaqui M. Nehari functions and rates of growth of the Poincaré density // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2002. – V. 27. – P. 7-20.</p> <p>Щ. Kim Y.C., Sugawa T. On power deformations of univalent functions // Monatsh. Math. – 2012. – V. 167, No. 2. – P. 231-240.</p> <p>Ы. Kim Y.C., Sugawa T. Norm estimates of the pre-Schwarzian derivatives for certain classes of univalent functions // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2006. – V. 49. – P. 131-143.</p> <p>Э. Kim Y.C., Sugawa T. A conformal invariant for nonvanishing analytic functions and its applications // Michigan Math. J. – 2006. – V. 54. – P. 393-410.</p> <p>Ю. Kim Y.C., Ponnusamy S., Sugawa T. Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 299, No. 2. – P. 433-447.</p> <p>Я. Kovalev L.V. Domains with convex hyperbolic radius // Acta Math. Univ. Comenianae. – 2001. – V/ 70, No. 2. – P. 207-213.</p>
--	--	--

4.4.

Цель и задачи Проекта

Целью Проекта является разработка новых методов и получение новых результатов в исследовании конформных инвариантов гиперболических областей как носителей корректности некоторого набора задач теории функций и математической физики. Основной упор будет сделан на проверке жизнеспособности сюжета, который был реализован на связи конформного радиуса плоской области с внешней обратной краевой задачей в постановке Гахова. Сюжет такой: 1) какие характеристики избранных точек поверхности нужно исследовать (например, индексы стационарных точек) и какие значения они должны принимать, чтобы 2) соответствующие этим точкам решения имели требуемые свойства (например, однолистность), и 3) как характеризуются классы гиперболических областей, обеспечивающих единственность точки, значит, и соответствующего ей решения задачи (например, свойствами выпуклости или звездообразности).

Отдельным направлением исследований будет изучение раз-

решимости задач логарифмического потенциала, для которой еще не построен управляющий инвариант. Некоторые соображения, которые еще будут «доводиться до ума», позволяют выдвинуть предположение о том, что подобным инвариантом может быть конформный радиус области. Если эта гипотеза подтвердится, то будет продемонстрирована жизнеспособность новых сюжетов, когда проблема построения инварианта по управляемой им задаче сама по себе нетривиальна, либо для формулировки корректности задачи привлекаются инварианты из «чужих» задач.

Для достижения цели исследования предполагается решить следующие задачи:

1. Установление новых подклассов голоморфных функций, входящих в множество Гахова, с оценкой неулучшаемости такого включения. В рамках традиционного дискурса данная задача формулируется как получение новых достаточных условий единственности критической точки конформного радиуса с доведением этих условий до уровня неулучшаемых. Накопление подобных условий продемонстрировало наибольшие продвижения при фиксировании нулевой критической точки конформного радиуса (нужинский случай). Поэтому особую ценность представляют условия без изначальных ограничений на множество критических точек (гаховский случай). Важным (и чуть ли не единственным) примером последнего условия служит принадлежность предшварциана голоморфной функции блоховскому предшару радиуса 2 (см. [11] по списку п. 4.12). Его важность состоит в том, что оно не является линейно инвариантным, в отличие, скажем, от условия Нехари, где за счет этой самой линейной инвариантности можно доказывать единственность в удобном для этого случае нулевого корня уравнения Гахова, а итоговый результат формулировать уже без выделения ограничений на корни. По проблеме неулучшаемости в последнее время также наметился прогресс (см. [8], [9], [11] по списку п. 4.12), но он коснулся пока только тех условий единственности, которые записываются в форме подчиненности – применение соответствующих форм леммы Шварца позволяет контролировать все экстремальные ситуации, а также условия единственности, упомянутого выше в связи с блоховскими предшварцианами. Одной из насущных задач на этом направлении (которая уже постепенно становится старой) является задача полного описания всех параметрических семейств, по которым происходит одновременный выход из множества Гахова и из класса Нехари. Другими словами, решение задачи полного описания пересечения границы множества Гахова и сферы Нехари может служить одним из критериев успешной реализации Проекта.

Что касается конкретики новых условий единственности корней уравнения Гахова, то определенный оптимизм связан с операторами на подклассах однолистных функций. Важным

подспорьем на этом пути будут блестящие результаты, полученные в свое время Ю.Е. Хохловым.

2. Другим кругом задач может быть очерчена проблематика, связывающая экстремумы конформных инвариантов с решениями задач теории функций и математической физики. Для участников Проекта данная проблематика большей частью связана с творческим наследием А.В. Киселева, доказавшего гипотезу М.Т. Нужина о связи однолистности решения внешней обратной краевой задачи с неотрицательностью индекса соответствующей критической точки конформного радиуса, определяемого как гиперболическая производная решения сопутствующей внутренней задачи, а затем распространившего этот результат на конечносвязный случай.

Разумеется, дело не ограничивается только внешней обратной краевой задачей – как уже упоминалось выше в соответствующем разделе, актуальность данной задачи Проекта связана именно с множественностью задач, управляющихся конформными инвариантами. Другое дело, что подобная множественность, несмотря на свой многообещающий характер и вызываемое ею ощущение перспективы, несет в себе довольно высокий уровень риска, для покрытия которого зарезервирована связь конформного радиуса с внешней обратной краевой задачей. Указанная связь стала частью гаховской традиции после знаковой работы Л.А. Аксентьева 1984 г.

3. Традиционно важной тематикой в истории Казанской школы ТФКП является перенос результатов с «гиперболического» на многосвязный случай. Прорыв на этом направлении был осуществлен М.И. Киндером в начале 80-х, когда им была доказана разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае конечносвязной области. Разрешимость данной задачи сводилась к аналогу уравнения Гахова, эквивалентному условию на экстремум функции, которая тогда называлась «видоизмененным внутренним радиусом», а впоследствии приобрела название радиуса Митюка, так как именно профессор И.П. Митюк ввел ее в математический обиход.

Недавнюю работу А.М. Елизарова, А.В. Казанцева, М.И. Киндера ([2] по списку 4.12) о строгой супергармоничности функции Митюка предполагается продолжить одной или несколькими публикациями, посвященными дальнейшему обобщению результатов М.И. Киндера с конечносвязного на счетносвязный случай. Здесь уже есть определенный неопубликованный задел, так что степень риска здесь гораздо меньше, чем в предыдущем пункте.

Что касается собственно конечносвязного, точнее,  $p$ -связного случая при  $p \geq 2$ , то здесь своего исследования ждет поставленная еще в 80-е годы прошлого века задача достижимости числом критических точек радиуса Митюка своего минимального значения, равного порядку связности области (аналог условий единственности в односвязной ситуации). Достаточные условия такой минимальности имеются пока только

для случая  $n = 2$ .

Назрел вопрос и о том, какие условия в двусвязном случае будут аналогами условий выпуклости, звездообразности и других, ставших уже привычными, свойств из «односвязной теории» конформных инвариантов, с последующим их исследованием в контексте проблемы минимальности.

4. Будет продолжено изучение множества Гахова «в целом». Ограничение предшварцианов голоморфных функций по нормам Блоха или Дирихле, продемонстрировав свою плодотворность, оставило ряд нерешенных задач. Одной из них является проверка выпуклости образа множества Гахова под действием отображения, которое ставит в соответствие функции  $f$  ее предшварциан  $f''/f'$ .

Более насущная повестка связана с задачей исследования свойств погружений множества Гахова в подходящие банаховы пространства посредством отображения, сопоставляющего функции ее производную Шварца (близкая задача поставлена выше в п. 1).

Разумеется, не будут оставлены без внимания погружения  $f \rightarrow \zeta f''/f'$  и  $f \rightarrow f''/(\zeta f')$ , уже возникавшие в работах руководителя Проекта (А.В. Казанцев, Н.И. Попов), равно как и формирование общей постановки, формализующей порядок погружений  $f \rightarrow P(f)$  в контекст, обеспечивающий эффективное применение к исследованию образа множества Гахова конструкций из общей топологии и функционального анализа.

5. Параметрические семейства конформных инвариантов будут исследоваться ввиду их важности как для обоснования новых условий принадлежности множеству Гахова, так и для формообразования таких условий ([5] по списку п. 4.12). Достижение в данном направлении пока только одно – полное исследование динамики уравнения Гахова с левнеровской или квазилевнеровской левой частью – если не считать элементов изучения линейных комбинаций с тождественным отображением выпуклых функций в работе [10] (по указанному списку). Прояснение картины разрешимости уравнения Гахова для линейных комбинаций является естественной задачей, продолжающей указанное изучение.

Применение линейных комбинаций к предшварцианам уже отмечалось в предыдущем пункте в контексте выпуклости и эквивалентно применению операций Хорнича  $F'(\zeta) = f'(\zeta)(1 - \lambda) \cdot g'(\zeta)\lambda$ . Гораздо менее удобной для исследования в контексте единственности корня уравнения Гахова является введенная Ю.Е. Хохловым в работе 1978 года мультипликативная комбинация  $F(\zeta) = f(\zeta)(1 - \lambda) \cdot g(\zeta)\lambda$ . В обоих случаях интересен также выход из отрезка  $[0, 1]$  изменения  $\lambda$  в множество вещественных, а затем и комплексных чисел.

Классическим разделом теории параметрических семейств конформных инвариантов является исследованная профессором Р.Б. Салимовым в его известной монографии внешняя

обратная краевая задача об изменении контуров.

Руководителю Проекта в свое время посчастливилось связать ее с конформными радиусами. При этом выяснился интересный эффект: несмотря на то, что на каждом этапе решения внешней задачи об изменении контуров происходит линеаризация по параметру, тем не менее, условие построения приближенного решения указанной задачи оказывается условием существования и единственности ее точного решения. Вопрос о том, что стоит за этим эффектом, может стать хорошей задачей для дипломной работы. Что касается магистерской диссертации, то на рассматриваемом направлении естественно поставить вопрос о характере и свойствах бифуркаций решений внешней задачи, зависящей от одного или нескольких дополнительных параметров.

Завершает данный круг задач тематика, связанная с теорией квазирешений внешних задач, развивавшейся в свое время профессором А.М. Елизаровым. В рамках этой тематики было бы интересно формализовать и исследовать предположение о том, что возникающие в указанной теории меры близости связаны с салимовскими семействами внешних задач специального вида. Уместно сравнить эту связь с взаимодействием между траекториями выхода из множества Гахова и мерами близости, возникающими при погружении такого выхода в тот или иной функционально-аналитический контекст (см. пп. 1 и 4 выше).

6. Что касается стоящих пока несколько особняком задач логарифмического потенциала, то острие возникающей здесь проблематики направлено на выяснение взаимодействия указанных задач и внешних обратных краевых задач для аналитических функций. Требуется получить новые классы решений, которые содержат конечное число параметров.

Желательно получить условия для поверхности конформного радиуса области, обеспечивающие единственное решение обратной задачи логарифмического потенциала.

Какие классы функций обеспечивают единственность решения обратной задачи теории потенциала? Что можно сказать по поводу классов Нехари или Беккера? Будут ли функции этих классов давать единственность? Вот основные вопросы, с которых начнется развитие данной тематики в рамках Проекта.

Традиционно рассматриваются два вида обратных задач для логарифмического потенциала:

- 1) когда тяготеющая масса распределена по области,
- 2) когда тяготеющая масса распределена по контуру – в этом случае получается логарифмический потенциал простого слоя.

Пока нет теоремы единственности для второго вида. И.М. Рапопорт доказал, что звездообразность искомого контура не обеспечивает единственность решения обратной задачи.

Предстоит проверить имеющуюся гипотезу о том, что един-

ственность решения обеспечивается выпуклостью искомого контура.

Упомянутые источники:

Хохлов Ю.Е. Операторы и операции на классе однолистных функций // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 10. – С. 83-89.  
Киселев А.В. Геометрические свойства решений внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 20-25.

Аксентьев Л.А. Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3-11.

Аксентьев Л.А., Киндер М.И., Сагитова С.Б. Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. Ун-т, 1983. – Вып. 20. – С. 22-34.

Киндер М.И. Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. Ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104-116.

Киндер М.И. О числе решений уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязной области // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 8. – С. 69-72.

Митюк И.П. Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2. – С. 110-119.

Казанцев А.В., Попов Н.И. О некоторых задачах, связанных с функционалами изопериметрического типа // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2002. – Т. 14. – С. 144-157.

Салимов Р.Б. Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости. – Казань: Изд-во КВКИУ, 1970 – 364 с.

Елизаров А.М. О квазирешениях внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 10. – С. 42-50.

Рапопорт И.М. Об одной задаче теории потенциала // Укр. матем. журнал. – 1950. – Т. 2, № 2. – С. 48-55.

4.5.	Научная новизна исследования, заявленного в Проекте (формулируется новая научная идея, обосновывается новизна предлагаемой постановки и решения заявленной проблемы)	<p>Новая идея состоит в развитии ряда новых эффектов по отдельным направлениям и формируется вокруг исследования множества Гахова «в целом».</p> <p>1. Открытые в работе [1] (по списку п. 4.12) новые эффекты можно сгруппировать в три направления: а) эпштейновость линейной выпуклости областей Хартогса, б) исследования под девизом «неаналитические условия единственности содержательны только для отрезка параметров», в) теорема Пуанкаре-Хопфа как инструмент перехода от нужинского к гаховскому случаю в построении новых условий единственности критической точки конформных радиусов (см. п. 4.4).</p> <p>2. Понимание природы неулучшаемости.</p> <p>В предшествующую эпоху для представления завершеного научного результата – признака единственности корня уравнения Гахова достаточно было доказать неулучшаемость</p>
------	--	--

(скажем, той или иной постоянной) с помощью предъявления одной функции, порождаемое которой параметрическое семейство теряет единственность одновременно с выходом из рассматриваемого класса (с превышением постоянной постулируемого неуклучшаемого значения).

Теперь ставится задача найти все функции, чьи параметрические семейства теряют единственность одновременно с выходом из рассматриваемого класса. Таким образом, возникает необходимость эффективного описания пересечения границы множества Гахова и лежащего в нем максимального шара в той или иной норме.

Подобную задачу естественно ставить и для других условий, например, для условия однолистности.

3. Прослеживание аналогии «единственность – однолистность».

Задача: какие неравенства будут неуклучшаемыми признаками и включения функции в множество Гахова, и однолистности данной функции? Решением данной задачи, как известно, является «шар» Нехари радиуса 2. Что касается увеличения двойки, то в случае однолистности такое увеличение вовлекает в «шар» бесконечнолистные функции (Ф.Г. Авхадиев, И.Р. Каюмов, 1999 г.). Что будет аналогом данного результата в случае единственности?

Это только один из вопросов, возникающий при осмыслении указанной аналогии, однако его решение было бы хорошим продвижением в ее исследовании.

4. Новые эффекты «золотого сечения».

В статье [3] (по списку п. 4.12) была, в частности, установлена невозможность прямого переноса условия Нехари на двусвязный случай. При этом была открыта функция (аналог полосы в односвязной ситуации), участвующая в построении искомого аналога. Существуют ли другие аналогии? Каковы будут аналогии для условий выпуклости и звездообразности? Каков будет характер объективного отставания возможностей двусвязного случая в сравнении с односвязным? Как будут записываться условия выпуклости и звездообразности для решения внешней обратной краевой задачи в двусвязном случае?

Вот далеко не полный перечень вопросов «планируемой новизны» в двусвязном случае.

5. Новые условия единственности критической точки конформных инвариантов будут устанавливаться при переходе от единичного круга к другим областям. В свое время (Л.А. Аксентьев, А.В. Казанцев, «Новое свойство класса Нехари...», 1989) был открыт эффект, заключающийся в существовании гиперболических областей, не допускающих условий единственности в форме неравенств типа Нехари (условия однолистности в той же форме в данных областях имели место). Существуют ли области, не допускающие условия единственности других типов, и как соотносятся между собой «не допускающие» области разных типов?



		<p>Резюме. Новизна предлагаемой постановки и решения заявленной проблемы так или иначе связана с ожидаемыми продвижениями в задаче формообразования новых условий принадлежности функции множеству Гахова. Уже полученные результаты свидетельствуют об оправданности позитивных ожиданий в решении указанной задачи.</p>
<p>4.6.</p>	<p>Предлагаемые подходы и методы, и их обоснование для реализации цели и задачи исследований (Развернутое описание предлагаемого исследования; форма изложения должна дать возможность эксперту оценить новизну идеи Проекта, соответствие подходов и методов исследования поставленным целям и задачам, надежность получаемых результатов)</p>	<p>Если говорить о методах, так сказать, в узком смысле, то при исследовании конформных радиусов в контексте внешней обратной краевой задачи традиционно использовались методы геометрической теории функций (метод подчиненности, метод неколеблемости решений ОДУ, метод линейно инвариантных семейств), методы анализа (теория неявных функций, теория ветвления решений нелинейных уравнений, теория бифуркаций) и методы дифференциальной геометрии (метод векторных полей, теория поверхностей).</p> <p>К формируемым указанными методами подходам в настоящее время добавились проверенные на ряде результатов представления о полезности в исследовании множества Гахова некоторых конструкций общей топологии и функционального анализа (топологические операции, индуцированные топологии, теория функционала Минковского, банаховы пространства голоморфных функций).</p> <p>При дальнейшем изучении множества Гахова может быть полезной его факторизация при перенесении в пространство Блоха посредством погружения <math>f \rightarrow \zeta f''/f'</math>. А именно, внутренними точками множества Гахова будут функции с положительной кривизной конформного радиуса в единственном экстремуме, в граничных точках множества Гахова указанная кривизна будет равна нулю. Более того, при переходе от общего, гаховского случая к топологии, индуцированной нулевой ситуацией (с фиксированным нулевым корнем уравнения Гахова), новая граница будет высекаться из старой условием равенства единице индекса нулевой критической точки. Если индекс указанной точки равен нулю, то это будет участок старой границы, который еще предстоит изучать.</p> <p>Что касается расположения класса однолистных функций и его подклассов относительно указанных связей и структур, то пока это – самая настоящая <i>terra incognita</i>. В данном контексте мы можем предъявить только отдельные результаты о зависимости от однолистности некоторых интегральных представлений характера экстремумов конформных инвариантов, от которых эти представления зависят (теорема А.В. Киселева, упоминавшаяся в п. 4.4, 2).</p> <p>Переходя от общей цели – формирования единой, целостной системы представлений о множестве Гахова, его свойствах, приложениях и аналогиях для «других» уравнений Гахова – к задачам, подчиненным достижению этой цели, получим следующий список методов и подходов, идущих вдоль п. 4.4.</p> <p>1. Поиск новых неулучшаемых подклассов множества Гахова. Уровень риска невыполнения – не более 5%.</p>

1) Необходимую остойчивость данному направлению придает метод подчиненности, продолжающий оставаться наиболее надежным методом получения новых результатов, прежде всего, в классе нужинских (с фиксированным экстремумом в нуле) условий единственности критической точки конформного радиуса.

2) Для построения гаховских условий (с нефиксированным экстремумом) предполагается использовать следующее обобщение теоремы Пуанкаре – Хопфа из работы руководителя Проекта в «Ученых записках КФУ» 2011 года.

Теорема. Если индекс равен единице на всем множестве корней уравнения Гахова, то данное множество одноточечно.

3) Исследование множества корней уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций можно рассматривать как симбиоз двух тем – параметрических семейств конформных радиусов и достаточных условий однолистности.

В этом контексте будут возобновлены подходы Ю.Е. Хохлова, связанные с исследованием класса альфа-выпуклых функций Мокану, вычислением радиусов альфа-выпуклости некоторых классов, а также изучением свойств гипергеометрического оператора, который теперь называется оператором Хохлова.

2. Связь конформных инвариантов с задачами теории функций и математической физики.

Уровень риска невыполнения – не более 50%.

Теорема А.В. Киселева гласит, что для однолистности решения внешней обратной краевой задачи, отвечающего некоторому корню уравнения Гахова, необходимо, чтобы в этом корне индекс векторного поля градиента конформного радиуса (в многосвязном случае – радиуса Митюка) был равен единице.

Обоснование данной теоремы использует методы векторных полей, теории поверхностей и однолистных функций, с которых мы начнем формировать багаж рассматриваемого научного направления.

Можно считать, что указанная теорема реализует подход, состоящий в использовании оценок коэффициентов интегральных представлений для вычисления геометрических характеристик поверхностей, определяемых голоморфными функциями, от которых зависят отмеченные представления.

К числу задач математической физики, в которых возникает конформный радиус, можно отнести задачу об удержании плазмы магнитным полем (А. Фридман), задачу об определении зоны контакта твердого тела и удерживающей его мембраны (Ч. Элиот – А. Фридман), задачу о капле воды на мыльной пленке (Э. Кокер – А. Фридман – Б. Мак-Леод), задачу о движении вихря (Б. Андерссон, Б. Густафссон, С

Ричардсон); библиография имеется, например, в работе [Т] п. 4.3. Характер и направленность исследования конформных радиусов в рамках проблематики, задаваемой этими работами, связаны с исследованием решений эллиптических PDE на предмет наличия у них той или иной разновидности выпуклости (обычно речь идет о выпуклости линий уровня) при условии выпуклости области, в которой ищется решение соответствующего PDE. Программой в данном направлении можно считать работу А. Фридмана и Л. Каффарелли в *Duke Mathematical Journal*, Vol. 52, No. 2 за 1985 год.

Естественным продолжением указанной тематики является исследование решений эллиптических PDE в классе областей Нехари – образов единичного круга под действием голоморфных функций  $f$ , удовлетворяющих условию однолистности (и единственности!) Нехари  $|\{f, \zeta\}| \leq 2/(1 - |\zeta|^2)^2$ , и в перспективе – создание иерархии условий «нехариевости» по аналогии с уже разработанной иерархией условий выпуклости. Развитие соответствующего контекста естественно начать с выяснения ответа на следующий вопрос: если область, в которой у данного PDE существует решение, является областью Нехари, то будут ли областями Нехари множества уровня решения, рассматриваемого как поверхность над областью существования?

### 3. Многосвязный случай.

Уровень риска невыполнения – не более 5%.

Перенос схемы решения внешней обратной краевой задачи с конечносвязного на счетносвязный случай с единственной предельной точечной граничной компонентой предполагает применение классических конструкций Г. Гретша, Л. Брауна, Э. Рейха – С. Варшавского, применимость которых к отмеченному счетносвязному случаю уже проверена.

Ключевыми инструментами здесь выступают теорема Гретша о существовании конформного отображения бесконечносвязной области на круг с круговыми концентрическими разрезами и теорема Рейха – Варшавского о представлении такого отображения в виде равномерного (на компактах в области) предела его конечносвязных аналогов.

Для  $p$ -связного,  $p \geq 2$ , случая исходная постановка из статьи Л.А. Аксентьева, М.И. Киндера, С.Б. Сагитовой будет видоизменяться в двух направлениях. Первое связано со сменой канонической области: вместо кругов с концентрическими разрезами будут рассматриваться круги с радиальными разрезами и, возможно, круги с радиальными и концентрическими разрезами. Второе имеет дело с изменением постановки – от «по параметру  $s$ » к смешанным задачам по параметрам  $s$  и  $\theta$  и т.п.

Особняком стоит двусвязный случай, так как, судя по уже полученным для него результатам, он методически гораздо более насыщен, чем общий многосвязный (и, разумеется, порождает гораздо больше ожиданий). Пора уже задуматься о

перенесении на случай функции Митюка, заданной в кольце, некоторых методов (а значит, и результатов), разработанных для односвязного случая. Некоторые предварительные заметки указывают на возможность реализации для радиуса Митюка левнеровской динамики предшварцианов.

Естественными вопросами являются проблема задания для случая кольца аналога множества Гахова и связанная с ней задача выяснения принадлежности этому множеству известных подклассов голоморфных функций в кольце. В качестве основы будет использоваться теория классов функций в круговом кольце, развивавшаяся в свое время математиками школы В.А. Зморовича (Л.Е. Дундученко, В.А. Похилевич, И.К. Коробкова и др.).

Как уже отмечалось выше (п. 4.5), аналог неравенства Нехари для случая кольца оказывается бессодержательным. Вспоминая о феномене жесткости (п. 4.3, работа [А], п. 4.3, 1, б)), можно поставить вопрос о том, погружается ли указанное неравенство в одномерную серию, включающую содержательные классы.

#### 4. Изучение множества Гахова «в целом».

Уровень риска невыполнения – не более 5-10%.

После довольно резкого погружения в функционально-аналитический контекст в работах [6] и [11] (по списку п. 4.12) предполагается больше внимания уделить «диффузии» направлений, связанных с развивавшимися в указанных работах подходами с одной стороны и с традиционными классами голоморфных функций в круге – с другой. В качестве основного рассматривается вопрос о расположении упомянутых классов относительно банаховой структуры в пространстве предшварцианов.

#### 5. Параметрические семейства конформных инвариантов.

Уровень риска невыполнения – не более 10%.

Перенос левнеровской динамики на случай кольца не выводит за рамки односвязной методологии, отличаясь только характерной для двусвязного случая громоздкостью.

Такое же продолжение методологии связано с проблематикой работы [10] (по списку 4.12).

Определенные продвижения ожидаются в исследовании линейных комбинаций предшварцианов – как в плане динамики корней уравнения Гахова, так и в получении новых условий их единственности. Некоторый задел, связанный с подчиненностью, здесь уже есть.

Продолжение исследований по задаче Р.Б. Салимова об изменении контуров целесообразно перенести с исследования решения внутренней задачи на изучение поведения внешней. В качестве начальных результатов в этом направлении ожидаются оценки разности решений внешней задачи при близких значениях параметра.

Перспективными представляются исследования по квазирешениям внешних обратных краевых задач. Первостепенным вопросом является введение указанных задач в контекст экстремального поведения конформного радиуса. Горизонтом исследований представляется отмеченная в п. 4.4, 5 возможность взаимодействия данной тематики с задачами об изменении контуров, а также пока еще чисто номинальная связь «по линии функционального анализа» с изучением множества Гахова «в целом» (см. предшествующий раздел 4 настоящего п. 4.6).

6. Обратные задачи логарифмического потенциала.  
Уровень риска невыполнения – не более 10%.

В исследованиях обратных задач потенциала предполагается применение метода симметрии и метода интегральных уравнений. Используется способ вычисления контурных интегралов с помощью вычетов. На начальном этапе исследования логарифмического потенциала простого слоя основные усилия предстоит направить на изучение следствий выпуклости искомого контура.

Выше в данном п. 4.6 были приведены методы и подходы, которые будут использованы в работе по Проекту, с оценками надежности получаемых результатов по каждому разделу задач.

Соответствие подходов и методов исследования поставленным целям и задачам очевидно.

Что касается развернутого описания предлагаемого исследования и новизны идеи проекта, то такое описание в полном объеме составляет содержание пп. 4.1 – 4.6, см. также п. 4.7 ниже.

4.7.	Ожидаемые результаты научного исследования и их научная и прикладная значимость.	<p>1. Поиск новых неупрощаемых подклассов множества Гахова.</p> <p>1.1. Новые условия единственности корня уравнения Гахова в форме подчиненности. Конкретные условия не выделяются, так как данным условиям предстоит «инвентаризация», которая закладывается в план как отдельный результат.</p> <p>1.2. Поиск новых гаховских условий с использованием обобщения теоремы Пуанкаре-Хопфа также не конкретизируются, но уже ввиду трудностей, связанных с указанным поиском.</p> <p>1.3. Новые условия единственности корня уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций (операторы Бернадского, Бернадди, Либера, Хохлова, гипергеометрические операторы), в частности, связанные с треугольником Яновского. Исследование принадлежности классу Гахова класса альфа-выпуклых функций Мокану. Проверка возможности применения подходов Ю.Е. Хохлова к оценке радиусов единственности для ряда подклассов однолистных функций.</p> <p>1.4. Исследование проблемы неупрощаемости условий единственности критической точки конформных радиусов. Вы-</p>
------	--	--

числение экстремальных функций. Исследование проблемы эффективного описания пересечения границы множества Гахова и сферы Нехари, а также сфер в разных нормах в пространстве предшварцианов, в частности, по условию Беккера.

2. Связь конформных инвариантов с задачами теории функций и математической физики.

2.1. Характеристики классов задач, использующих конформные инварианты в вопросах разрешимости. Формирование обзора результатов, связанных с иерархией разновидностей выпуклости решений соответствующих задач.

2.2. Поиск условий, обеспечивающих выполнение свойства «быть областью Нехари» для множеств уровня решений эллиптических PDE в областях, обладающих этим свойством. Данное исследование целесообразно начать с конформного радиуса как решения уравнения Лиувилля.

2.3. Развитие тематики, связанной с теоремой А.В. Киселева. В частности, поиск условий единственности корня уравнения Гахова, когда решение соответствующей внешней обратной краевой задачи однолистно.

3. Многосвязный случай.

3.1. Постановка и решение внешней обратной краевой задачи по параметру  $s$  для счетносвязного случая с единственной предельной точечной граничной компонентой.

3.2. Решение смешанной обратной задачи по двум параметрам в конечносвязном случае.

3.3. Исследование радиуса Митюка в двусвязном случае: левнеровская динамика предшварцианов; условия минимальности числа критических точек ( $= 2$ ); формирование широкого набора примеров функций в кольце с двумя корнями уравнения Гахова; исследование аналогов неравенств Нехари и Беккера для случая кольца.

3.4. Исследование вопроса о введении аналога множества Гахова для случая кольца и оценка его пересечения с известными на настоящий момент подклассами однолистных функций в кольце.

4. Изучение множества Гахова «в целом».

4.1. Поиск классов однолиственности, вкладывающихся в шары по норме Блоха или Дирихле в пространстве предшварцианов. Изучение свойств множества Гахова «в целом» в пространстве предшварцианов с нормой Блоха, в частности, проверка выпуклости множества Гахова.

4.2. Условия единственности в форме подчиненности предшварцианов функциям, пробегающим классы – расширения класса выпуклых функций, в контексте банаховых структур.

4.3. Поиск одно- и двупараметрических семейств голоморфных функций, проясняющих устройство границы множества

		<p>Гахова в пространстве предшварцианов.</p> <p>4.4. Исследование образов множества Гахова при погружениях, отличных от определяемого предшварцианами.</p> <p>5. Параметрические семейства конформных инвариантов.</p> <p>5.1. Исследование динамики корней уравнения Гахова для конкретных параметрических семейств голоморфных функций, прежде всего, связанных с линейными комбинациями Меркеса, линейными комбинациями предшварцианов и мультипликативными комбинациями по Ю.Е. Хохлову.</p> <p>5.2. Исследование характера ответвления решений внешней обратной краевой задачи от нужинского решения (ответвляющегося нулевой критической точке). Поиск примеров ситуации, когда от теряющего однолиственность решения ответвляются два однолистных.</p> <p>5.3. Исследование квазирешений внешних обратных краевых задач. Проверка связи теории квазирешений с задачей Р.Б. Салимова об изменении контуров.</p> <p>6. Обратные задачи логарифмического потенциала.</p> <p>6.1. Проверка гипотезы о единственности выпуклого решения обратной задачи логарифмического потенциала.</p> <p>6.2. Выяснение вопроса о единственности указанного решения для серии классов звездообразных функций конечного порядка.</p> <p>Научная значимость: доведение избранного фундаментального исследования до уровня, обеспечивающего возможность широкого обсуждения специалистами.</p> <p>Прикладная значимость: историко-культурное значение рассматриваемой тематики связано с тем, что теория однолистных функций через модельные задачи аэрогидродинамики связывает нынешнее мировосприятие обучающегося математике, механике, физике, информатике гражданина России с героикой индустриального периода Отечественной истории, когда представители указанных наук создавали основу для победы в «войне моторов». Приобщение к Победе как добытой своим умением является значимым элементом воспитания гражданского оптимизма как в отношении прошлых, так и будущих успехов страны.</p>
4.8.	<p>Общий план работ на весь срок реализации Проекта (форма представления информации)</p>	<p>Разворачивается в соответствии с детализацией п. 4.7.</p> <p>Первый год:</p> <p>1.1. Дать обзор условий единственности корня уравнения</p>

должна дать возможность эксперту оценить реализуемость заявленного плана работы и риски его невыполнения; общий план реализации Проекта даётся с разбивкой по годам)

Гахова в форме подчиненности. Основные объекты подчинения: производная (логарифм производной), логарифмическая производная  $\zeta f' / f$ , предшварцианы  $f'' / f'$  или  $\zeta f'' / f'$ , их комбинации и примененные к ним простейшие функции. В качестве основного источника использовать условия однолистности, взяв за основу известные обзоры Л.А. Аксентьева, Ф.Г. Авхадиева, А.М. Елизарова, П. Дюрена и других математиков.

Риск невыполнения не выше 5%.

1.2. --

1.3. Установить новые условия единственности корня уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций. В качестве операторов избрать частные случаи, отмеченные в статье Ю.Е. Хохлова, отмеченной в литературе п. 4.4. Исследовать принадлежность множеству Гахова класса альфа-выпуклых функций Мокану.

По материалам исследований подготовить публикацию в Математическом журнале Лобачевского.

Риск невыполнения не выше 5%.

1.4. Исследовать положение дел с неухудшаемостью для условий п. 1.1.

Риск невыполнения не выше 5-10%.

По результатам подготовить статью в «Ученые записки КФУ. Серия Физико-математические науки».

Исследовать возможность неухудшаемого описания единственности критической точки конформного радиуса в классах Беккера.

Риск невыполнения не выше 15-20%.

2.1. Дать обзор классов задач, использующих конформные инварианты в вопросах разрешимости.

Риск невыполнения не выше 5%.

2.2. Исследовать возможность построения условий, обеспечивающих выполнение свойства «быть областью Нехари» для множеств уровня конформного радиуса или простейших функций от него – логарифмической, квадратичной и т.п. в случае, если область задания сама является областью Нехари.

Риск невыполнения не выше 10-20%.

2.3. Исследовать возможности развития тематики, связанной с теоремой А.В. Киселева.

Риск невыполнения не оценивается.

3.1. Сформулировать постановку и дать решение внешней обратной краевой задачи по параметру  $s$  для счетносвязного случая с единственной предельной точечной граничной компонентой. По результатам исследования подготовить публикацию.

Риск невыполнения не более 5 %.

3.2. Сформулировать постановку и дать решение смешанной внешней обратной краевой задачи по параметрам  $s$  и  $\theta$ . По результатам исследования подготовить публикацию.

Риск невыполнения не более 5%.



3.3. Провести исследование динамики критических точек радиуса Митюка двусвязной области в случае левнеровской динамики предшварцианов.

Риск невыполнения – 10-15%.

3.4. –

4.1. Сформировать набор условий однолистности, выполнение которых обеспечивает попадание функции в шары по норме Блоха или Дирихле в пространстве предшварцианов. Риск невыполнения не более 5%.

4.2. Дать новые условия единственности в форме мажорации предшварциана функцией, когда последняя пробегает фиксированный класс; в качестве такого класса взять класс выпуклых функций и последовательно классы из ряда его расширений. Вычислить поперечники указанных классов в пространстве предшварцианов с нормой Блоха или Дирихле. По результатам работы подготовить публикацию.

Риск невыполнения не более 5%.

4.3. –

4.4. –

5.1. Исследовать динамику корней уравнения Гахова для конкретных параметрических семейств голоморфных функций. Выбор осуществить сообразно требованиям других задач и в соответствии с сопутствующими обстоятельствами.

Риск невыполнения около 25-30%.

5.2. Сформировать набор примеров ситуаций, когда, в соответствии с бифуркацией корней уравнения Гахова, отвечающие этим корням решения внешней задачи образуют бифуркационную картину, в которой однолистное решение переходит в неоднолистное с одновременным ответвлением двух однолистных решений.

Риск невыполнения 10-15%.

5.3. Изучить возможность приведения к исследованию конформных радиусов проблемы отыскания квазирешений для внешней обратной краевой задачи.

Риск невыполнения около 15-20%.

6.1. Исследовать набор выпуклых областей на предмет единственности решения обратной задачи потенциала.

Риск невыполнения не более 5%.

6.2. –

Второй год:

1.1. На базе проведенного обзора получить серию новых условий единственности критической точки конформного радиуса.

Риск невыполнения не выше 5%.

1.2. Получить новые условия единственности корня уравнения Гахова, не фиксированного заранее – с использованием

теоремы Пуанкаре-Хопфа.

Риск невыполнения ориентировочно 50%.

1.3. Провести исследование единственности корня уравнения Гахова для операторов, допускающих определение на функциях треугольника Яновского.

Риск невыполнения не выше 5%.

1.4. Продолжить исследование связей с задачами п. 1.1.

Риск невыполнения не выше 5-10%.

Провести предварительное исследование проблемы описания пересечения границы множества Гахова и сферы Нехари.

Риск невыполнения примерно 15-30%.

2.1. Формирование обзора результатов, связанных с иерархией разновидностей выпуклости решений эллиптических уравнений.

Риск невыполнения не более 5-20%.

2.2. Исследовать возможность полного описания гиперболических областей, не допускающих условий единственности в форме неравенств типа Нехари (см. п. 4.5, 5).

Риск невыполнения порядка 25%.

2.3. Исследовать вопрос о свойствах экстремумов конформного радиуса, отвечающего однолиственному решению внешней обратной краевой задачи.

Риск невыполнения порядка 30-40%.

3.1. –

3.2. –

3.3. Начать формирование набора примеров функций в кольце с двумя критическими точками радиуса Митюка.

Риск невыполнения не более 5-10%.

Вести поиск новых условий минимальности числа критических точек радиуса Митюка.

Риск невыполнения порядка 25-30%.

3.4. Ввести аналог множества Гахова для случая кольца. Оценить его пересечение с известными на настоящий момент подклассами однолистных функций в кольце.

Риск невыполнения около 15-30%.

4.1. Сформировать набор свойств множеств в банаховом пространстве, которые затем проверить на множестве Гахова в пространстве предшварцианов с нормой Блоха или Дирихле.

Риск невыполнения порядка 20-30%.

4.2. –

4.3. Сформулировать стратегию и начать реализацию поиска одно- и двухпараметрических семейств голоморфных функций, проясняющих устройство границы множества Гахова в пространстве предшварцианов.

Риск невыполнения около 20%.

4.4. Провести исследование образов множества Гахова при погружениях, отличных от определяемого предшварцианами.

Риск невыполнения 15-20%.

5.1. Продолжить работу по данному направлению. Начать формирование обзора результатов по исследованным семействам.

Риск невыполнения 20-30%.

5.2. Для параметрических семейств голоморфных функций, допускающих полное описание динамики корней уравнения Гахова, исследовать динамику ветвления соответствующих решений обратной задачи. Направление исследования должно вести к полному описанию всех разновидностей ветвления.

Риск невыполнения около 40%.

5.3. Осуществить проверку связи теории квазирешений для внешней обратной краевой задачи с задачей Р.Б. Салимова об изменении контуров.

Риск невыполнения около 30-40%.

6.1. На данном направлении исследований перейти от примеров к содержательным утверждениям.

Риск невыполнения около 15-20%.

6.2. Организовать поиск ситуаций единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала, выходящий за рамки выпуклых областей, оставаясь в классе звездообразных областей.

Риск невыполнения около 20-25%.

Третий год:

1.1. Идеальным завершением данной части работы по Проекту было бы построение новых условий единственности корня уравнения Гахова, не сводящихся к известным условиям однолистности, и исследование геометрических свойств функций определяемых этими условиями классов, в частности, однолистности.

Риск невыполнения не оценивается.

1.2. Продолжить выполнение решения данной задачи.

Риск невыполнения не оценивается.

1.3. Дать окончательные результаты по исследованию единственности корня уравнения Гахова для операторов, допускающих определение на функциях треугольника Яновского. Подготовить публикацию.

Риск невыполнения около 20-25%.

1.4. Оформить полученные результаты по данному направлению в форме отчета.

2.1. Достойным завершением данной части работы по Проекту было бы построение новых теорем о выпуклости решений эллиптических уравнений.

Риск невыполнения не оценивается.

2.2. Дать отчет, суммирующий результаты о поведении конформных инвариантов в областях Нехари.

Риск невыполнения около 20%.

2.3. Исследовать возможность получения условий единствен-

ности корня уравнения Гахова, когда решение соответствующей внешней обратной краевой задачи однолистно.  
Риск невыполнения около 15-25%.

3.1. --

3.2. --

3.3. Сформировать отчет о возможности построения для случая кольца аналогов условий Нехари и Беккера. Дать ответ на вопрос, будут ли построенные классы содержать функции с двумя критическими точками функции Митюка.

Риск невыполнения не оценивается.

3.4. —

4.1. Дать ответ на вопрос: будет или нет множество Гахова выпуклым в пространстве предшварцианов с нормой Блоха.  
Риск невыполнения — 50%.

4.2. —

4.3. Завершить работы по указанному направлению. Сформировать каталог получившихся поверхностей со складками, сборками и другими видами катастроф.

Риск невыполнения около 15-20%.

4.4. —

5.1. Завершить работу по указанному направлению с подготовкой итогового отчета.

Риск невыполнения не оценивается.

5.2. —

5.3. —

6.1. Сформировать отчет о работе по данному направлению.

Риск невыполнения не оценивается.

6.2. Сформулировать заключение по рассматриваемой задаче.

Риск невыполнения не оценивается.

4.9.	План работ на первый год реализации Проекта (план предоставляется с учетом содержания работ каждого из участников Проекта, предполагаемых поездок)	<p>1.1. Дать обзор условий единственности корня уравнения Гахова в форме подчиненности. Основные объекты подчинения: производная (логарифм производной), логарифмическая производная <math>\zeta f' / f</math>, предшварцианы <math>f'' / f'</math> или <math>\zeta f'' / f'</math>, их комбинации и примененные к ним простейшие функции. В качестве основного источника использовать условия однолистности, взяв за основу известные обзоры Л.А. Аксентьева, Ф.Г. Авхадиева, А.М. Елизарова, П. Дюрена и других математиков. (Участники Проекта)</p> <p>1.2. --</p> <p>1.3. Установить новые условия единственности корня уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций. В качестве операторов избрать частные случаи, отмеченные в статье Ю.Е. Хохлова, отмеченной в литературе п. 4.4. Исследовать принадлежность множеству Гахова класса альфа-выпуклых функций Мокану. По материалам исследований подготовить публикацию в Математическом журнале Лобачевского. (Казанцев А.В.)</p>
------	--	---

- 1.4. Исследовать положение дел с неулучшаемостью для условий п. 1.1. (Казанцев А.В., Губайдуллина С.А.)  
По результатам подготовить статью в «Ученые записки КФУ. Серия Физико-математические науки».  
Исследовать возможность неулучшаемого описания единственности критической точки конформного радиуса в классах Беккера. (Участники Проекта)
- 2.1. Дать обзор классов задач, использующих конформные инварианты в вопросах разрешимости. (Участники Проекта)
- 2.2. Исследовать возможность построения условий, обеспечивающих выполнение свойства «быть областью Нехари» для множеств уровня конформного радиуса или простейших функций от него – логарифмической, квадратичной и т.п. в случае, если область задания сама является областью Нехари. (Казанцев А.В.)
- 2.3. Исследовать возможности развития тематики, связанной с теоремой А.В. Киселева. (Участники Проекта)
- 3.1. Сформулировать постановку и дать решение внешней обратной краевой задачи по параметру  $s$  для счетносвязного случая с единственной предельной точечной граничной компонентой. По результатам исследования подготовить публикацию. (Казанцев А.В., Киндер М.И.)
- 3.2. Сформулировать постановку и дать решение смешанной внешней обратной краевой задачи по параметрам  $s$  и  $\theta$ . По результатам исследования подготовить публикацию. (Киндер М.И.)
- 3.3. Провести исследование динамики критических точек радиуса Митюка двусвязной области в случае левнеровской динамики предшварцианов. (Казанцев А.В.)
- 3.4. –
- 4.1. Сформировать набор условий однолистности, выполнение которых обеспечивает попадание функции в шары по норме Блоха или Дирихле в пространстве предшварцианов. (Казанцев А.В., Гаранина А.Е., Губайдуллина С.А.)
- 4.2. Дать новые условия единственности в форме мажорации предшварциана функцией, когда последняя пробегает фиксированный класс; в качестве такого класса взять класс выпуклых функций и последовательно классы из ряда его расширений. Вычислить поперечники указанных классов в пространстве предшварцианов с нормой Блоха или Дирихле. По результатам работы подготовить публикацию. (Казанцев А.В., Гаранина А.Е., Губайдуллина С.А.)
- 4.3. –
- 4.4. –
- 5.1. Исследовать динамику корней уравнения Гахова для конкретных параметрических семейств голоморфных функций. Выбор осуществить сообразно требованиям других задач и в соответствии с сопутствующими обстоятельствами. (Участ-

		<p>ники Проекта)</p> <p>5.2. Сформировать набор примеров ситуаций, когда, в соответствии с бифуркацией корней уравнения Гахова, отвечающие этим корням решения внешней задачи образуют бифуркационную картину, в которой однолистное решение переходит в неоднолистное с одновременным ответвлением двух однолистных решений. (Участники Проекта)</p> <p>5.3. Изучить возможность приведения к исследованию конформных радиусов проблемы отыскания квазирешений для внешней обратной краевой задачи. (Казанцев А.В., Киндер М.И.)</p> <p>6.1. Исследовать набор выпуклых областей на предмет единственности решения обратной задачи потенциала. (Аксентьев Л.А.)</p> <p>6.2. –</p> <p>Предполагаемые поездки.</p> <p>Предполагается поездка участников Проекта (всех или частично) на Международную школу-конференцию «Комплексный анализ и его приложения», посвященную 90-летию со дня рождения известного математика Игоря Петровича Митюка, инициатора и главного организатора традиционных школ-конференций по геометрической теории функций комплексного переменного, проводившихся на Кубани с 1971 по 1991 годы. Конференция состоится со 2-го по 9-е июня 2018 г.</p> <p>Примечание. Работы первого года проекта распределены между участниками в соответствии с детализацией п. 4.7. Конкретные фамилии ставятся в скобки после вида работ, если участие данных персоналий предполагается по ряду внутренних причин. Слова «Участники проекта» ставятся, когда особых причин для персонального выделения нет. В таких случаях группы исполнителей будут формироваться по ходу дела, руководитель Проекта будет участвовать во всех работах.</p>
4.10.	<p>Ожидаемые научные результаты за первый год реализации Проекта (форма изложения должна дать возможность провести экспертизу результатов и оценить возможную степень выполнения заявленного в Проекте плана работы)</p>	<p>1. Поиск новых неупрощаемых подклассов множества Гахова.</p> <p>Как основа для будущей коллективной монографии будет дан обзор уже имеющихся условий единственности корня уравнения Гахова в форме подчиненности. Основные объекты подчинения: производная (логарифм производной), логарифмическая производная <math>\zeta f' / f</math>, предшварцианы <math>f'' / f'</math> или <math>\zeta f'' / f'</math>, их комбинации и примененные к ним простейшие функции.</p> <p>Будут даны новые условия единственности в форме подчиненности с акцентом на неупрощаемости и описанием всех экстремальных функций. В зависимости от количества материала будут подготовлены одна или две статьи для журнала</p>

«Ученые записки КФУ. Серия Физико-математические науки». Предполагаемые авторы Казанцев А.В., Губайдуллина С.А.

Будут установлены новые условия единственности корня уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций – в продолжение исследований Ю.Е. Хохлова 1970-80-х гг. В рамках этой работы будет исследована принадлежность множеству Гахова класса альфа-выпуклых функций Мокану. По материалам исследований Казанцевым А.В. будет подготовлена статья для публикации в Математическом журнале Лобачевского.

## 2. Связь конформных инвариантов с задачами теории функций и математической физики.

В рамках работы над коллективной монографией будет дан обзор классов задач, использующих конформные инварианты в вопросах разрешимости. В данной работе так или иначе будут принимать участие все участники Проекта.

Руководителем Проекта будет исследована возможность построения условий, обеспечивающих выполнение свойства «быть областью Нехари» для множеств уровня конформного радиуса или простейших функций от него – логарифмической, квадратичной и т.п. в случае, если область задания сама является областью Нехари.

Участниками проекта – Аксентьевым Л.А., Казанцевым А.В., Киндером М.И. – будет исследована возможность развития тематики, связанной с теоремой А.В. Киселева.

## 3. Многосвязный случай.

Будет сформулирована постановка и дано решение внешней обратной краевой задачи по параметру  $s$  для счетносвязного случая с единственной предельной точечной граничной компонентой. По результатам исследования Киндером М.И. и Казанцевым А.В. будет подготовлена одна или несколько публикаций.

Будет сформулирована постановка и дано решение смешанной внешней обратной краевой задачи по параметрам  $s$  и  $\theta$ . По результатам исследования Киндером М.И. будет подготовлена публикация.

Исследование динамики критических точек радиуса Митюка двусвязной области в случае левнеровской динамики предшварцианов будет проведено Казанцевым А.В.

## 4. Изучение множества Гахова «в целом».

Будет сформирован набор условий однолистности, выполнение которых обеспечивает попадание функции в шары по норме Блоха или Дирихле в пространстве предшварцианов. Будут даны новые условия единственности в форме мажора-

ции предшварциана функцией, когда последняя пробегает класс выпуклых функций или одно из его расширений. Будут вычислены поперечники указанных классов в пространстве предшварцианов с нормой Блоха или Дирихле и выписаны соответствующие экстремальные семейства. По результатам работы будет подготовлена одна или две публикации с участием Казанцева А.В., Гараниной А.Е., Губайдуллиной С.А.

#### 5. Параметрические семейства конформных инвариантов.

Участниками Проекта будет исследоваться динамика корней уравнения Гахова для конкретных параметрических семейств голоморфных функций. Будет сформирован набор примеров ситуаций, когда, в соответствии с бифуркацией корней уравнения Гахова, отвечающие этим корням решения внешней задачи образуют бифуркационную картину, в которой однолистное решение переходит в неоднолистное с одновременным ответвлением двух однолистных решений. Киндером М.И. и Казанцевым А.В. будет изучена возможность приведения к исследованию конформных радиусов проблемы отыскания квазирешений для внешней обратной краевой задачи.

#### 6. Обратные задачи логарифмического потенциала.

Аксентьевым Л.А. будет исследоваться проблема единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала в классе выпуклых областей.

4.11.	Имеющийся у коллектива научный задел по Проекту (указываются полученные результаты, разработанные программы и методы, экспериментальное оборудование, материалы и информационные ресурсы, имеющиеся в распоряжении коллектива для реализации Проекта)	<p>Научный задел по публикациям изложен в пп. 4.3 и 4.12. Научный задел по плану и ожидаемым результатам приведем в соответствии с п. 4.10.</p> <p>1. Поиск новых неупрощаемых подклассов множества Гахова.</p> <p>Часть обзора по условиям единственности корня уравнения Гахова в форме подчиненности уже подготовлена. Новые условия единственности в форме подчиненности с акцентом на неупрощаемости и описанием всех экстремальных функций частично имеются, осталось только выбрать план изложения, который в целом следует в направлении, открытым работой [9] по списку п. 4.12. Получен ряд новых условий единственности корня уравнения Гахова для операторов на подклассах однолистных функций по тематике Ю.Е. Хохлова 1970-80-х гг.</p> <p>2. Связь конформных инвариантов с задачами теории функций и математической физики.</p> <p>Имеется некоторый задел по исследованию возможности построения условий, обеспечивающих выполнение свойства «быть областью Нехари» для множеств уровня конформного</p>
-------	---	--



		<p>радиуса или простейших функций от него – логарифмической, квадратичной и т.п. в случае, если область задания сама является областью Нехари.</p> <p>3. Многосвязный случай.</p> <p>Постановка и решение внешней обратной краевой задачи по параметру <math>s</math> для счетносвязного случая с единственной предельной точечной граничной компонентой в основном построены, как и постановка и решение смешанной внешней обратной краевой задачи по параметрам <math>s</math> и <math>\theta</math>. Исследование динамики критических точек радиуса Митюка двусвязной области в случае левнеровской динамики предшварцианов проведено в существенной части.</p> <p>4. Изучение множества Гахова «в целом».</p> <p>Формирование набора условий однолистности, выполнение которых обеспечивает попадание функции в шары по норме Блоха или Дирихле в пространстве предшварцианов, уже начато. Построена качественная картина новых условий единственности в форме мажорации предшварциана функцией, пробегающей класс выпуклых функций или одно из его расширений. Поперечники соответствующих классов уже вычислены, осталось получить экстремальные семейства.</p> <p>5. Параметрические семейства конформных инвариантов.</p> <p>На данном направлении имеются некоторые оценки разности двух решений внешней обратной краевой задачи, отвечающих близким решениям параметра.</p> <p>6. Обратные задачи логарифмического потенциала.</p> <p>Аксентьевым Л.А. начато исследование проблемы единственности решения обратной задачи логарифмического потенциала в классе выпуклых областей.</p>
4.12.	<p>Публикации (не более 15) участников коллектива, включая Руководителя проекта, наиболее близко относящиеся к Проекту за последние 5 лет (для каждой публикации при наличии указать ссылку в сети Интернет для доступа эксперта к аннотации или полному</p>	<p>1. A.V. Kazantsev. Conformal radius: at the interface of traditions // Lobachevskii J. Math. -- 2017. -- Vol. 38, No. 3. -- P. 469-475. DOI: 10.1134/S1995080217030167.</p> <p>2. A.M. Elizarov, A.V. Kazantsev, M.I. Kinder. Strict superharmonicity of Mityuk's function for countably connected domains of simple structure // Lobachevskii J. Math. -- 2017. -- Vol. 38, No. 3. -- P. 408-413. DOI: 10.1134/S1995080217030088.</p> <p>3. Казанцев А.В. Условия золотого сечения для радиуса Митюка двусвязных областей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 33–46. <a href="http://mi.mathnet.ru/uzku1390">http://mi.mathnet.ru/uzku1390</a></p>

- тексту публикации) 4. Казанцев А.В. О линейной связности регулярной части множества Гахова // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. – Сер. 1: Мат. Физ. – 2016. – № 6. – С. 55-60. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2016.6.5>
5. Казанцев А.В. О семействах гиперболических производных с квазилиевнеровской динамикой предшварцианов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. -- 2016. -- Т.158, кн. 1. -- С. 66-80.
6. A.V. Kazantsev. Width of the Gakhov class over the Dirichlet space is equal to 2 // Lobachevskii J. Math. -- 2016. -- Vol. 37, No. 4. -- P. 449-454. DOI: 10.1134/S1995080216040120.
7. Казанцев А.В. Об уравнении Гахова в классах Яновского с дополнительным параметром // Уч. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. -- 2015. -- Т. 157, кн. 1. -- С. 35-43.
8. Казанцев А.В. Об уравнении Гахова для оператора Бернацкого // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. -- 2015. -- Т. 157, кн. 2. -- С. 79-92.
9. Казанцев А.В. О выходе из множества Гахова, контролируемом условиями подчиненности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 1. – С. 31–43.
10. Жаркова Т.В., Казанцев А.В. Множество Гахова в теореме Меркеса о выпуклых комбинациях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2014. – Т. 156, кн. 2. – С. 34-42.
11. Казанцев А.В. Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65-82.
12. Жаркова Т.В., Казанцев А.В. О единственности решения уравнения Гахова для функций из классов Яновского // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2. – С. 108-119.
13. Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л. А. Прямые и обратные задачи логарифмического потенциала с конечным числом параметров // Труды матем. центра им. Н.И.Лобачевского. – 2017. – Т.54. – С. 23-27.
14. Абубакиров Н.Р., Аксентьев Л.А. О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 65-69.
15. Губайдуллина С.А., Казанцев А.В. О некоторых условиях единственности корня уравнения Гахова // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – 2017. – Т. 54. – С. 135-136.

**Форма 5 Сведения по организации экспедиции и/или полевых исследований по тематике Проекта**

**Сведения по организации экспедиции и/или полевых исследований в первый год реализации Проекта**

5.1.	Научная цель экспедиции (полевых исследований)	нет
5.2.	Обоснование необходимости экспедиции. Основные задачи экспедиции. Связь экспедиции с целями и задачами Проекта.	нет
5.3.	Обоснование необходимости полевых работ. Основные задачи полевых исследований. Связь полевых исследований с целями и задачами Проекта.	нет
5.4.	Регион проведения экспедиции (полевых испытаний)	нет
5.5.	Название района проведения экспедиции (полевых испытаний) в составе региона	нет
5.6.	Сроки проведения экспедиции (полевых исследований)	нет
5.7.	Перечень средств транспорта, оборудования и материалов, имеющихся в наличии, для проведения экспедиции	нет
5.8.	Перечень и назначение оборудования, имеющегося в наличии, для проведения полевых исследований	нет

5.9. Запрашиваемая стоимость экспедиции (полевых испытаний) (в руб.)

## Файлы

Данные в форме отсутствуют

## Результаты экспертизы

### Экспертное заключение 1

**Обоснование оценки "Актуальность заявленной темы исследований" (доступно заявителю):**

В целом, тематика проекта представляется мне узкоспециальной: интерес к теории однолистных функций после доказательства гипотезы Бибербаха постепенно угасает. Приложения к вихревой динамике идеальной жидкости описывает Б.Густафссон, упоминаемую авторами связь конформных радиусов с задачей об удержании плазмы магнитным полем я не нашел.

**Обоснование оценки "Соответствие предложенных подходов и методов планируемых исследований поставленной цели и задачам проекта" (доступно заявителю):**

Подходы и методы полностью соответствуют заявленной цели и задачам проекта, их использование обосновано и может обеспечить достоверность и надежность ожидаемых результатов

**Рецензия эксперта (доступна заявителю)**

Данный проект лежит в русле традиционных исследований по геометрической теории функций. Его выполнение скорее всего не вызовет осложнений, но и не приведет к резонансным результатам мирового уровня. В коллективе есть молодые исследователи, а его основу составляют опытные профессионалы. Прикладное значение результатов проекта не очевидно, хотя вскользь и упоминается в заявке. В целом, это добротный проект и его можно поддержать при среднем уровне конкуренции

**Обоснование  
оценки "Соот-  
ветствие уров-  
ня исследова-  
ний и ожидае-  
мых результа-  
тов проекта  
мировому  
уровню" (до-  
ступно заяви-  
телю):**

Авторами красочно описана "Драматургия, связанная с упомянутым выше «конфликтом интересов» между парами «Аксентьев – Казанцев» и “ Chuaqui – Osgood” в свете «неформализованного знания», скрытого в работах Геринга – Поммеренке и Мартио – Сарваса". Однако публикаций в международных (и даже в центральных отечественных, за исключением быть может журнала Лобачевского) журналах по данной теме пока не имеют. Сами заявители не говорят о возможности каких-либо прорывных результатов.

**Обоснование  
оценки "Реали-  
зуемость пред-  
ложенного про-  
екта" (доступно  
заявителю):**

Постановки задач достаточно размытые, их экспертная оценка осложняется витиеватыми формулировками, например " Исследование метапотоков, таких как аналогия между единственностью и однолистностью (классы единственности черпаются из однолистных источников) и аналоги голоморфных утверждений для гармонических отображений, которые еще только предстоит ввести в обиход проблематики, связанной с единственностью. " "Ряд указанных величин является носителями корректности для соответствующего ряда задач теории функций и математической физики"

**Обоснование  
оценки "Уро-  
вень имеюще-  
гося научного  
задела и харак-  
теристика  
участников  
коллектива"  
(доступно за-  
явителю):**

Значительный научный задел и достаточная квалификация участников имеются. Отсутствует информация о роли участников проекта в выполнении задания.

**Обоснование  
оценки "Каче-  
ство представ-  
ления совре-  
менного состо-  
яния пробле-  
мы" (доступно  
заявителю):**

Представлена вся имеющаяся библиография по проблеме: от [А] до [Я].

## Экспертное заключение 2

**Обоснование  
оценки "Новизна  
предложенного  
исследования"  
(доступно  
заявителю):**

Рецензент не нашел в заявке и последних работах участников проекта "существенные элементы новизны". Конкретные элементы новизны в заявке представлены весьма смутно. Как пример приводим следующую выдержку из п.4.5: Резюме. Новизна предлагаемой постановки и решения заявленной проблемы так или иначе связана с ожидаемыми продвижениями в задаче формообразования новых условий принадлежности функции множеству Гахова. Уже полученные результаты свидетельствуют об оправданности позитивных ожиданий в решении указанной задачи.

**Обоснование  
оценки "Уровень  
имеющегося  
научного  
задела и харак-  
теристика  
участников  
коллектива"  
(доступно за-  
явителю):**

Руководитель и некоторые исполнители проекта имеют научный задел и достаточную квалификацию для выполнения проекта.

**Обоснование  
оценки "Соот-  
ветствие пред-  
ложенных под-  
ходов и методов  
планируемых  
исследований  
поставленной  
цели и задачам  
проекта" (до-  
ступно заяви-  
телю):**

Во многом отсутствие обоснований и описаний конкретных проблем наряду с многочисленными отступлениями в тексте от сути вещей является характерной чертой этого проекта.

**Обоснование  
оценки "Реали-  
зуемость пред-  
ложенного про-  
екта" (доступно  
заявителю):**

Достаточно ознакомиться с текстом проекта.

**Обоснование  
оценки "Соот-  
ветствие уров-  
ня исследова-  
ний и ожидае-  
мых результа-  
тов проекта  
мировому  
уровню" (до-  
ступно заяви-  
телю):**

Трудно ожидать появление публикаций в ведущих журналах, если до этого авторы предпочитали весьма узкий круг изданий.

**Рецензия экс-  
перта (доступна  
заявителю)**

Заявка написана крайне небрежно. Наряду с потоком неточных ( и непонятных) высказываний и выражений доминируют многочисленные отклонения от сути проблемы. В проекте мало конкретики и описаний проблем по существу.

**Обоснование  
оценки "Каче-  
ство представ-  
ления совре-  
менного состо-  
яния пробле-  
мы" (доступно  
заявителю):**

Описание проблемы смутно угадывается сквозь потоки непонятных и неточных выражений.

**Обоснование  
оценки "Акту-  
альность заяв-  
ленной темы  
исследований"  
(доступно за-  
явителю):**

Из текста заявки не ясно о каких "новых научных направлениях" может идти речь.

### **Экспертное заключение 3**

**Рецензия экс-  
перта (доступна  
заявителю)**

Проект направлен на изучение свойств класса Гахова - подкласса голоморфных и локально однолистных в единичном круге функций, для которых гиперболическая производная (конформный радиус) имеет не более одной критической точки. Этот класс возникает достаточно естественно, однако был введен сравнительно недавно в работах руководителя проекта. Одно из основных направлений проекта - это отыскание

новых (неулучшаемых) подклассов класса Гахова. Таким образом, должно быть получено содержательное описание этого класса. Далее, в рамках проекта предполагается исследование конформных инвариантов, под которыми понимаются, в частности, внутренние, внешние, конформные и другие радиусы, конформные модули, различные емкости и т.д. Эти величины, как хорошо известно, связаны с рядом важных задач математической физики. Авторами проекта, в частности, выделяется связь конформного радиуса с одним интересным случаем задачи Гильберта или с задачей об удержании плазмы магнитным полем. Наличие критических точек конформного радиуса в этих задачах определяет геометрические свойства решений. Также в рамках проекта планируется изучение единственности решений обратных задач логарифмического потенциала. Все эти задачи хорошо известны специалистам по комплексному анализу и являются интересными и актуальными. Проект хорошо мотивирован и аккуратно написан. Авторами представлен подробный (скорее даже "сверхподробный") план работы по проекту, убедительно свидетельствующий о выполнимости проекта. Имеется достаточный задел по проекту, представленный заметным числом публикаций в достаточно авторитетных российских научных изданиях и пока не опубликованными наработками. Состав группы (один известный ученый-доктор наук, два кандидата наук и два молодых исследователя-студента) позволяет реализовать представленный план исследований. Задачи проекта вполне разумно распределены между участниками группы. Нельзя, однако, не отметить, слабое место предлагаемого проекта. Это практически полное отсутствие у участников коллектива публикаций в центральных российских и ведущих зарубежных журналах. Более того, при (весьма подробном) планировании публикаций по проекту авторы снова ограничивают себя добротными, но не самыми сильными журналами.

**Обоснование  
оценки "Актуальность заявленной темы исследований" (доступно заявителю):**

Исследования в рамках предлагаемого проекта будут вестись по следующим направлениям современного комплексного анализа: исследование условий единственности критической точки конформного радиуса; конформные инварианты и их связь с задачами теории функций и математической физики; изучение множества Гахова, т.е. класса функций с (не более чем) единственной критической точкой гиперболической производной (конформного радиуса); единственность решений обратных задач логарифмического потенциала. Эти задачи известны специалистам по комплексному анализу в России и за рубежом, они являются интересными и актуальными. Так, начиная с 1990-х годов, было получено несколько доказательств теоремы о (не более чем) единственности критической точки конформного радиуса в классе Нехари (Chuaqui-Osgood, Gehring-Pommerenke и др.). Другим важным направлением проекта, тесно связанным с первым содержательно, технически и методологически является исследование конформных инвариантов, под которыми понимаются, в частности, внутренние, внешние, конформные и другие радиусы, конформные модули, различные емкости и т.д. Эти величины, как хорошо известно, связаны с рядом важных задач математической физики. Таким образом, актуальность



заявленной в проекте темы исследования не вызывает сомнений.

**Обоснование  
оценки "Уро-  
вень имеюще-  
гося научного  
задела и харак-  
теристика  
участников  
коллектива"  
(доступно за-  
явителю):**

У авторов заявки имеется достаточных задел, оформленный в виде заметного числа публикаций в достаточно авторитетных российских научных изданиях. Ими уже получен ряд интересных результатов в задачах, входящих в тематику проекта или тесно к ней примыкающих. Указанный выше (при оценке методов и подходов, предлагаемых для выполнения проекта) новый подход к исследованию свойств множеств Гахова предложен участниками проекта. Группа состоит из 5 участников, среди которых один известный ученый-доктор наук, два достаточно известных специалиста-кандидата наук (один из которых является руководителем проекта) и два студента. К сожалению, у участников проекта практически нет публикаций в ведущих российских и зарубежных журналах. Это обстоятельство несколько снижает общее хорошее впечатление о проекте.

**Обоснование  
оценки "Соот-  
ветствие уров-  
ня исследова-  
ний и ожидае-  
мых результа-  
тов проекта  
мировому  
уровню" (до-  
ступно заяви-  
телю):**

Как было отмечено при оценке актуальности тематики проекта, все основные упомянутые в заявке и предлагаемые к решению задачи известны специалистам по комплексному анализу в России и за рубежом. Ожидается получение интересных новых результатов. Среди них можно выделить нахождение новых неупрощаемых подклассов класса Гахова; нахождение новых условий, при которых множества уровня решений эллиптических PDE являются областями Нехари; нахождение новых условий единственности корня уравнения Гахова в случае, когда решение соответствующей внешней обратной краевой задачи однолистно; исследование радиуса Митюка в двусвязном случае. К сожалению, коллективом исполнителей даже не запланирована публикация полученных результатов в центральных российских и ведущих международных журналах (предполагается публикация работ по проекту в достаточно авторитетных, но не ведущих журналах и изданиях).

**Обоснование  
оценки "Реали-  
зуемость пред-  
ложенного про-  
екта" (доступно  
заявителю):**

План работы по проекту сформулирован детально (может быть даже "слишком" детально). Для каждого направления работы по проекту приведена (с нечасто встречающейся скрупулезностью) оценка степени риска невыполнения заявленного плана. Представленный план четко и ясно вытекает из целей и задачи проекта и полностью им соответствует. Проект, безусловно, может быть выполнен в запланированные сроки.

**Обоснование  
оценки "Каче-  
ство представ-  
ления совре-**

Представленный инициаторами проекта обзор состояние тематики, к которой относится заявка, дает хорошее представление об области исследования, полученных там результатах и имеющихся задачах.

**менного состояния  
яния проблемы"  
мы" (доступно  
заявителю):**

**Обоснование  
оценки "Соот-  
ветствие пред-  
ложенных под-  
ходов и методов  
планируемых  
исследований  
поставленной  
цели и задачам  
проекта" (до-  
ступно заяви-  
телю):**

Авторы проекта предлагают использование как классических методов геометрической теории функций, так и использование новых идей, основанных на использовании при исследовании класса Гахова методов функционального анализа и теории банаховых пространств голоморфных функций, топологических методов. В заявке приведено достаточно подробное описание методов и подходов, которые будут применяться при работе над проектом. Предлагаемые подходы и методы полностью соответствуют заявленной цели и задачам проекта, их использование обосновано и может обеспечить получение запланированных результатов.