Математические заметки

Том 112 выпуск 3 сентябрь 2022

УДК 517.98

Обратимость операторов в гильбертовом пространстве и идеалы в C^*-алгебрах

А. М. Бикчентаев

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Найдены достаточные условия положительности и обратимости операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Произвольная симметрия из алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ записана в виде произведения $A^{-1}UA$ с положительным обратимым A и самосопряженным унитарным U из $\mathcal{A}$. Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ и $\|A\| \leqslant 1$. Если $A^*A - I \in \mathfrak{N}_\varphi$, то $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство $\|A-U\|_{\varphi,2} \geqslant \||A|-I\|_{\varphi,2}$. Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A, то в этом неравенстве достигается равенство.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, обратимый оператор, алгебра фон Неймана, C^*-алгебра, вес.

DOI: https://doi.org/???

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Поиск достаточных условий положительности и обратимости операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является одной из задач теории операторов, см. например, [1]–[7] и библиографию в них. Перечислим полученные результаты.

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и B обратим, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – операторно монотонная функция с $f(0) = 0$ и $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Тогда оператор $f(f^{-1}(A) + B) - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим (теорема 1; положительность оператора B здесь существенна). Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и A обратим слева, пусть $(\lambda - \lambda^2)|A|^2 \geqslant 2|B|^2$ для некоторого числа $0 < \lambda < 1$. Тогда оператор $|A + B|^2 - |B|^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ и обратим (теорема 2). В [8; следствие 1] для унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ и $S \in \mathcal{A}$ установлена равносильность условий:

(i) $S^2 = I$;

(ii) $S = T^{-1}UT$ для некоторых обратимого T и эрмитова унитарного U из $\mathcal{A}$. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ оператор T можно выбрать положительным (теорема 4).

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-882).

Изучение следов и весов на операторных алгебрах является важной частью работ по теории некоммутативного интегрирования (см. [9]–[11]) и постоянно привлекают внимание исследователей, см., например, [12]–[15] и библиографию в них.

Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ и $\|A\| \leqslant 1$. Если $A^*A - I \in \mathfrak{N}_\varphi$, то $|A| - I \in \mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство

$$\|A - U\|_{\varphi,2} \geqslant \||A| - I\|_{\varphi,2}.$$

Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A, то в этом неравенстве достигается равенство (теорема 5). Пусть φ – конечный вес на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда

$$\|A - zU\|_{\varphi,2}^2 \geqslant \|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2 \qquad \text{для всех} \quad z \in \mathbb{C}$$

(теорема 6).

2. Определения и обозначения. Левый (соответственно, правый) идеал в алгебре $\mathcal{A}$ – это векторное подпространство $\mathcal{J}$ в $\mathcal{A}$ такое, что

$$A \in \mathcal{A} \qquad \text{и} \qquad B \in \mathcal{J} \quad \Longrightarrow \quad AB \in \mathcal{J} \quad (\text{соответственно, } BA \in \mathcal{J}).$$

C^*-*алгеброй* называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \qquad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($A = A^2$), эрмитовых ($A^* = A$) элементов и положительных элементов соответственно. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$ и $\operatorname{Re}\{A\} = (A + A^*)/2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$. Если I – единица алгебры $\mathcal{A}$, то формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и множеством $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$ всех симметрий ($S^2 = I$) в $\mathcal{A}$. Через $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ обозначим подмножества обратимых элементов и унитарных ($A^*A = AA^* = I$) элементов соответственно. Элемент $A \in \mathcal{A}$ называется изометрией, если $A^*A = I$.

Весом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi\colon \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X) \qquad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathcal{A}^+, \quad \lambda \geqslant 0$$

(при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$). Вес φ называется *точным*, если $\varphi(X) = 0 \Rightarrow X = 0$, $X \in \mathcal{A}^+$. Для веса φ определим (см. [16; гл. II, II.6.7.3], [11; гл. 2, § 11])

- $\mathfrak{M}_\varphi^+ = \{X \in \mathcal{A}^+ : \varphi(X) < +\infty\}$, $\mathfrak{M}_\varphi^{\mathrm{sa}} = \operatorname{lin}_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_\varphi^+$;
- $\mathfrak{N}_\varphi = \{A \in \mathcal{A} : A^*A \in \mathfrak{M}_\varphi^+\}$ – левый идеал в $\mathcal{A}$;
- $\|A\|_{\varphi,2} = \sqrt{\varphi(A^*A)}$ ($A \in \mathfrak{N}_\varphi$) – полунорма (норма для точного φ) на $\mathfrak{N}_\varphi$.

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_\varphi^+}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_\varphi = \operatorname{lin}_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_\varphi^+$, который будем обозначать той же буквой φ. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса (т.е. $\varphi(X) < +\infty$ для всех $X \in \mathcal{A}^+$) с положительными функционалами на $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, $\sigma(A)$ – спектр оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Любую

C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк; см. [17; теорема 3.4.1]). Локально выпуклая топология в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, определяемая полунормами $X \mapsto \|X\xi\|$ ($\xi \in \mathcal{H}$), называется *сильной операторной топологией* (so-*топологией*). *Коммутантом* множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется множество

$$\mathcal{X}' = \{Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX \text{ для всех } X \in \mathcal{X}\}.$$

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, называется $*$-подалгебра $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, для которой $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее решетку проекторов ($A = A^* = A^2$). Для оператора $X \in \mathcal{A}$ через $\mathrm{rp}(X)$ обозначается его ранговый проектор, т.е. проектор на замыкание области значений оператора X; имеем $\mathrm{rp}(X) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. При $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ отождествляется с полной матричной алгеброй $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ – интервал. Функция $f\colon \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ называется

- *матрично монотонной порядка* n или n-*монотонной*, если для всех $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^{\mathrm{sa}}$ с $\sigma(A), \sigma(B) \subseteq \mathcal{I}$ из $A \leqslant B$ следует $f(A) \leqslant f(B)$;
- *операторно монотонной*, если она n-монотонна для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если f 2-монотонна, то $f \in C^1(\mathcal{I})$ и $f' > 0$ для $f \neq \mathrm{const}$. Функция $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ операторно монотонна тогда и только тогда, когда она операторно вогнута, т.е.

$$f(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B) \qquad \text{для всех} \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$$

и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Примеры

1) $f(t) = t^p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$;
2) $f(t) = (t-1)/\log(t)$, $f(0) := 0$, $f(1) := 1$, см. [18; § 2].

3. Об обратимости некоторых операторов.

Лемма 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– операторно монотонная функция с* $f(0) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$ *и число* $t_0 > 0$. *Тогда*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, t \in [0, t_0] \qquad (f(t+\varepsilon) \geqslant f(t) + \delta).$$

Доказательство. В силу [19; гл. VII, теорема 4] 2-монотонная функция f, $f \neq \mathrm{const}$, представляется в виде $f(t) = \int_0^t dx/c(x)^2$, где функция $c(x) > 0$ и вогнута для всех $x > 0$. Перепишем неравенство $f(t+\varepsilon) \geqslant f(t) + \delta$ в виде $\int_0^{t+\varepsilon} dx/c(x)^2 \geqslant \int_0^t dx/c(x)^2 + \delta$, т.е.

$$\int_t^{t+\varepsilon} \frac{dx}{c(x)^2} \geqslant \delta. \qquad (1)$$

{eq1}

Покажем, что функция $1/c(x)^2$ убывает. Допустим, что $1/c(x)^2$ строго возрастает на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$. Тогда функция

$$f(t) = \int_0^t \frac{dx}{c(x)^2}$$

будет строго выпуклой на (a, b), что невозможно, так как всякая операторно монотонная на $\mathbb{R}^+$ функция является вогнутой. Теперь ясно, что число $\delta = \varepsilon/c(t_0+\varepsilon)^2$ удовлетворяет неравенству (1).

Теорема 1. *Пусть* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ *и* B *обратим,* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *– операторно монотонная функция с* $f(0) = 0$ *и* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. *Тогда*

$$\text{оператор } f(f^{-1}(A) + B) - A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+ \text{ и обратим.}$$

Доказательство. Поскольку $f^{-1}(A) + B \geqslant f^{-1}(A)$, в силу операторно монотонности функции f имеем $f(f^{-1}(A) + B) - A \geqslant 0$. Так как $B \geqslant 0$ и обратим, существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $B \geqslant \varepsilon I$. Тогда

$$f(f^{-1}(A) + B) \geqslant f(f^{-1}(A) + \varepsilon I) \tag{2}$$

{eq2}

в силу операторно монотонности функции f. Покажем, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$f(f^{-1}(A) + \varepsilon I) \geqslant A + \delta I. \tag{3}$$

{eq3}

Для этого воспользуемся спектральной теоремой в форме мультипликаторов (для оператора A) и леммой 1 с достаточно большим параметром t_0, поскольку неравенство (3) находится в "коммутативной" ситуации. При этом оператор A рассматривается как неотрицательная существенно ограниченная измеримая функция на пространстве с мерой (Ω, Σ, μ), являющимся прямой суммой пространств с конечными мерами. Теперь из (2), (3) имеем $f(f^{-1}(A) + B) - A \geqslant \delta I$, что и требовалось.

Для функции $f(t) = \sqrt{t}\,$, $t \geqslant 0$, выбор числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ можно сделать и без обращения к лемме 1. Возьмем число $\delta > 0$ таким, что $\varepsilon \geqslant 2\delta\|A\| + \delta^2$. Тогда

$$\varepsilon I \geqslant 2\delta\|A\| I + \delta^2 I \geqslant 2\delta A + \delta^2 I, \qquad A^2 + \varepsilon I \geqslant A^2 + 2\delta A + \delta^2 I = (A + \delta I)^2,$$

тем самым (3) установлено в силу операторно монотонности функции f.

Пример 1. Положительность оператора B существенна в теореме 1. В $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$

$$\text{для} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{имеем} \quad A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для обратимой матрицы

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица

$$A^2 + B = \sqrt{A^2 + B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

является проектором. Поэтому матрица

$$\sqrt{A^2 + B} - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0$$

и необратима.

Теорема 2. *Пусть* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *и* A *обратим слева, пусть*

$$(\lambda - \lambda^2)|A|^2 \geqslant 2|B|^2 \quad \text{для некоторого числа} \quad 0 < \lambda < 1. \tag{4}$$

{eq4}

Тогда оператор $|A + B|^2 - |B|^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ *и обратим.*

Доказательство. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ обратим слева, если он ограничен снизу, т.е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \xi \in \mathcal{H} \qquad (\|A\xi\| \geqslant \varepsilon\|\xi\|).$$

Тогда

$$\langle A^*A\xi, \xi\rangle = \langle A\xi, A\xi\rangle = \|A\xi\|^2 \geqslant \varepsilon^2\|\xi\|^2 = \varepsilon^2\langle I\xi, \xi\rangle \qquad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{H},$$

т.е. $A^*A \geqslant \varepsilon^2 I$. Имеем

$$\begin{aligned} |A+B|^2 - |B|^2 &= (1-\lambda)|A|^2 + \lambda|A|^2 + A^*B + B^*A + \frac{1}{\lambda}|B|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \\ &= (1-\lambda)|A|^2 + \left|\sqrt{\lambda}\,A + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}B\right|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \\ &\geqslant (1-\lambda)|A|^2 - \frac{1}{\lambda}|B|^2 \geqslant \frac{1-\lambda}{2}|A|^2 \geqslant \frac{(1-\lambda)\varepsilon^2}{2} I. \end{aligned}$$

Пример 2. Условие (4) существенно в теореме 2. Для произвольного числа $0 < \varepsilon < 1/10$ в $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ положим

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix},$$

и пусть $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$|A|^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1-\varepsilon^2 \\ 1-\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix} \ngeqslant \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2|B|^2,$$

т.е. условие (4) не выполнено для всех $0 < \lambda < 1$. Оператор

$$|A+B|^2 - |B|^2 = (A+B)^2 - B^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6+4\varepsilon+2\varepsilon^2 & 4-2\varepsilon-2\varepsilon^2 \\ 4-2\varepsilon-2\varepsilon^2 & 2+2\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

обратим и имеет отрицательное собственное значение.

Лемма 2. *Пусть* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ so-*сходится. Пусть выполнено* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ *и*

$$0 < a = \inf_{n\geqslant 1} \lambda_n \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \lambda_n = b < \infty.$$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$ so-*сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \quad \textit{обратим} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n \quad \textit{обратим.}$$

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n$ so-сходится в силу [20; теорема 2]. Заметим, что

1) $a\sum_{n=1}^{\infty} A_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n \leqslant b\sum_{n=1}^{\infty} A_n$;
2) $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$ обратим $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $A \geqslant \varepsilon I$.

Теорема 3. *Пусть* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *и числа* $\lambda, \mu > 0$. *Тогда*

(i) *если* $A^*B + B^*A$ *обратим, то* $\lambda A^*A + \mu AA^*$ *обратим*;

(ii) *если* $A \geqslant 0$ *и* $AB^* + BA$ *обратим, то* $\lambda A + \mu BAB^*$ *обратим*.

Доказательство. В силу леммы 2 можно положить $\lambda = \mu = 1$. Пусть $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$, $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$ и $-X \leqslant Y \leqslant X$. Если Y обратим, то X обратим [21; следствие 2].

(i) Поскольку $(A \pm B)^*(A \pm B) \geqslant 0$, имеем

$$-A^*A - B^*B \leqslant A^*B + B^*A \leqslant A^*A + B^*B.$$

(ii) Поскольку $(\sqrt{A} \pm B\sqrt{A}\,)(\sqrt{A} \pm B\sqrt{A}\,)^* \geqslant 0$, имеем

$$-A - BAB^* \leqslant AB^* + BA \leqslant A + BAB^*.$$

4. Симметрии и идеалы в алгебрах фон Неймана. В [8; следствие 1] для унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ и $S \in \mathcal{A}$ установлена равносильность условий: (i) $S^2 = I$, т.е. $S \in \mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$; (ii) $S = T^{-1}UT$ для некоторых $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$. Покажем, что для алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ оператор T можно выбрать положительным.

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– алгебра фон Неймана и* $S \in \mathcal{A}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $S^2 = I$;

(ii) $S = A^{-1}UA$ *для некоторых* $A \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ *и* $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Формула $S_P = 2P - I$ задает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$. Если $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, то существует $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ такой, что

$$Q \equiv T^{-1}PT \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$$

[22; лемма 16]. Если $T^{-1} = V|T^{-1}|$ – полярное разложение оператора T^{-1}, то $V = T^{-1}|T^{-1}|^{-1} \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и $T = |T^{-1}|^{-1}V^*$ в силу теоремы об обратном к произведению операторов. Теперь

$$P = TQT^{-1} = |T^{-1}|^{-1}V^*QV|T^{-1}| = A^{-1}RA \qquad \text{с} \quad A = |T^{-1}| \in \mathcal{A}^+ \cap \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$$

и $R = V^*QV \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Следовательно,

$$S = 2P - I = 2A^{-1}RA - I = A^{-1}(2R - I)A$$

и можно положить $U = 2R - I$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathcal{J}$ *– левый (или правый) идеал в унитальной* C^**-алгебре* $\mathcal{A}$ *и* $A \in \mathcal{A}^+$, $I - A \in \mathcal{J}$. *Тогда*

(i) $I - A^{1/2^n} \in \mathcal{J}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *если* $\mathcal{A}$ *– алгебра фон Неймана и* $A \leqslant I$, *то* $I - \mathrm{rp}(A) \in \mathcal{J}$; *для* so*-замкнутого* $\mathcal{J}$ *условие* $A \leqslant I$ *можно опустить*.

Доказательство. (i) Пусть $\mathcal{J}$ – левый идеал в унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Поскольку

$$(I + \sqrt{A}\,)(I - \sqrt{A}\,) = I - A \in \mathcal{J}$$

и элемент $I+\sqrt{A}$ обратим, имеем $I-\sqrt{A}\in\mathcal{J}$. Поскольку

$$(I+A^{1/4})(I-A^{1/4})=I-\sqrt{A}\in\mathcal{J}$$

и элемент $I+A^{1/4}$ обратим, имеем $I-A^{1/4}\in\mathcal{J}$. Продолжая такой процесс, получаем требуемое.

(ii) Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана и $A\leqslant I$. Так как $\mathrm{rp}(A)\geqslant A$, имеем $I-A\geqslant I-\mathrm{rp}(A)\geqslant 0$ и $\mathrm{rp}(A)A=A\,\mathrm{rp}(A)=A$. Если $X,Y\in\mathcal{A}^+$ и $X\leqslant Y$, то найдется $Z\in\mathcal{A}$ с $\|Z\|\leqslant 1$ такой, что $\sqrt{X}=Z\sqrt{Y}$ [23; гл. 1, § 1, лемма 2]. Поэтому

$$\sqrt{I-\mathrm{rp}(A)}=I-\mathrm{rp}(A)=Z\sqrt{I-A}$$

для некоторого $Z\in\mathcal{A}$ с $\|Z\|\leqslant 1$. В силу спектральной теоремы в форме мультипликаторов имеем

$$\begin{aligned}I-\mathrm{rp}(A)&=\sqrt{I-\mathrm{rp}(A)}=\sqrt{(I-\mathrm{rp}(A))(I-A)}=(I-\mathrm{rp}(A))\sqrt{I-A}\\&=Z\sqrt{I-A}\cdot\sqrt{I-A}=Z(I-A)\in\mathcal{J}.\end{aligned}$$

Пусть теперь левый идеал $\mathcal{J}$ so-замкнут. Так как $\mathcal{J}$ – выпуклое подмножество в $\mathcal{A}$, в силу [9; гл. II, § 2, п. (iv) теоремы 2.6] $\mathcal{J}$ σ-слабо замкнут. Поэтому в силу [9; гл. II, § 3, предложение 3.12] в $\mathcal{J}$ содержится единственный проектор E такой, что $\mathcal{J}=\mathcal{A}E$. Пусть $X\in\mathcal{A}$ такой, что $I-A=XE$. Тогда

$$I-\mathrm{rp}(A)=I-A-\mathrm{rp}(A)(I-A)=(I-\mathrm{rp}(A))(I-A)=(I-\mathrm{rp}(A))XE\in\mathcal{J}$$

и лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть φ – вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, $A\in\mathcal{A}$ и $\|A\|\leqslant 1$. Если $A^*A-I\in\mathfrak{N}_\varphi$, то $|A|-I\in\mathfrak{N}_\varphi$ и для любой изометрии $U\in\mathcal{A}$ выполняется неравенство*

$$\|A-U\|_{\varphi,2}\geqslant\||A|-I\|_{\varphi,2}. \tag{5}$$ {eq5}

Если оператор U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A, то в (5) достигается равенство.

Доказательство. Поскольку $|A|=\sqrt{A^*A}$ и $\mathfrak{N}_\varphi$ является левым идеалом в $\mathcal{A}$, имеем $|A|-I\in\mathfrak{N}_\varphi$ в силу п. (i) леммы 3. Для доказательства неравенства (5) без ограничения общности достаточно рассмотреть случай произвольной изометрии $U\in\mathcal{A}$, для которой $A-U\in\mathfrak{N}_\varphi$. Пусть $B=|A|-I$, тогда полярное представление оператора A будет иметь вид $A=W(I+B)$, где W – унитарный оператор. Пусть $V=W^*U$, тогда V является изометрией и

$$\|A-U\|^2_{\varphi,2}=\|I+B-V\|^2_{\varphi,2}=\varphi((B+I-V)^*(B+I-V)).$$

Поэтому

$$\|A-U\|^2_{\varphi,2}=\varphi(B^2)+\varphi(D), \tag{6}$$ {eq6}

где

$$D=2I+2B-V-V^*-BV-V^*B\in\mathfrak{M}^{\mathrm{sa}}_\varphi.$$

Покажем, что $D \geqslant 0$. Так как $\|A\| \leqslant 1$, имеем $|A|^2 \leqslant |A|$. Тогда

$$\begin{aligned} D &= 2I + |A| - I - V - V^* - |A|V^* + V^* - V|A| + V \\ &= I + |A| - |A|V - V^*|A| = (|A| - V)^*(|A| - V) + (|A| - |A|^2) \geqslant 0, \end{aligned}$$

как сумма двух неотрицательных операторов и (5) выполнено в силу (6) и монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}\,$, $t \geqslant 0$.

Пусть U является унитарным оператором из полярного разложения оператора A, т.е. $U = A|A|^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A - U\|^2_{\varphi,2} &= \varphi((A - A|A|^{-1})^*(A - A|A|^{-1})) \\ &= \varphi(|A|^2 - |A|^{-1}|A|^2 - |A|^2|A|^{-1} + |A|^{-1}|A|^2|A|^{-1}) \\ &= \varphi(|A|^2 - 2|A| + I) = \varphi((|A| - I)^2) = \||A| - I\|^2_{\varphi,2}, \end{aligned}$$

т.е. в (5) достигается равенство.

Для $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi = \mathrm{tr}$ и унитарного оператора A утверждение теоремы 5 получено в [24; гл. VI, лемма 3.1] и показано, что в этом частном случае знак равенства в (5) достигается тогда и только тогда, когда U является унитарным оператором из полярного разложения обратимого оператора A.

Лемма 4. *Для чисел $a, c > 0$ и $b \in \mathbb{C}$ определим функцию $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, полагая $f(z) = c|z|^2 - 2\Re\{z\overline{b}\} + a$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\min_{z\in\mathbb{C}} f(z) = f\left(\frac{b}{c}\right) = a - \frac{|b|^2}{c}\,.$$

Доказательство. Для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$f(z) = \left(\sqrt{c}\,z - \frac{b}{\sqrt{c}}\right)\left(\sqrt{c}\,\overline{z} - \frac{\overline{b}}{\sqrt{c}}\right) - \frac{|b|^2}{c} + a = \left|\sqrt{c}\,z - \frac{b}{\sqrt{c}}\right|^2 - \frac{|b|^2}{c} + a.$$

Теорема 6. *Пусть φ – вес на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда*

(i) *$A \in \mathfrak{N}_\varphi \Leftrightarrow UA \in \mathfrak{N}_\varphi$ и при этом $\|UA\|_{\varphi,2} = \|A\|_{\varphi,2}$;*

(ii) *если φ конечен, то $\|A - zU\|^2_{\varphi,2} \geqslant \|A\|^2_{\varphi,2} - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2$ для всех $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. (i) Имеем

$$\|UA\|^2_{\varphi,2} = \varphi(A^*U^*UA) = \varphi(A^*A) = \|A\|^2_{\varphi,2}.$$

(ii) Продолжение конечного веса φ на всю алгебру $\mathcal{A}$ обозначаем той же буквой φ. Поскольку $\varphi(X^*) = \overline{\varphi(X)}$ и $\varphi(\mathrm{Re}\{X\}) = \Re\{\varphi(X)\}$ для всех $X \in \mathcal{A}$, для всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\begin{aligned} \|A - zU\|^2_{\varphi,2} &= \varphi((A^* - \overline{z}U^*)(A - zU)) = \varphi(A^*A) - \varphi(2\,\mathrm{Re}\{\overline{z}U^*A\}) + |z|^2\varphi(I) \\ &= \|A\|^2_{\varphi,2} - 2\Re\{\overline{z}\varphi(U^*A)\} + |z|^2\varphi(I). \end{aligned}$$

Минимум этого выражения (при фиксированных A и U) достигается в точке $z = \varphi(I)^{-1}\overline{\varphi(U^*A)}$ и равен $\|A\|^2_{\varphi,2} - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2$, см. лемму 4.

Из теоремы 5 и теоремы 6 с $z = 1$ имеем

Следствие 1. *Пусть φ – конечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ с $\|A\| \leqslant 1$ и $U \in \mathcal{A}$ – изометрия. Тогда*

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 \geqslant \max\{\||A| - I\|_{\varphi,2}^2,\ \|A\|_{\varphi,2}^2 - \varphi(I)^{-1}|\varphi(U^*A)|^2\}.$$

Пример 3. Пусть положительный функционал $\varphi\colon \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ задается матрицей плотности $S_\varphi = \mathrm{diag}(t+s, t-s)$ с фиксированными $t > 0$ и $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда

$$\varphi(X) = \mathrm{tr}(S_\varphi X) = (t+s)x_{11} + (t-s)x_{22} \qquad \text{для всех} \quad X = [x_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}).$$

Положим $A := \mathrm{diag}(1,0)$, $U := \mathrm{diag}(1,-1)$. Тогда

$$\|A - U\|_{\varphi,2}^2 = \||A| - I\|_{\varphi,2}^2 = t - s$$

и в неравенстве теоремы 5 достигается равенство для всех $0 \leqslant s \leqslant t$. Имеем $\varphi(I) = 2t$ и

$$\|A\|_{\varphi,2}^2 = \varphi(U^*A) = \varphi(A) = t + s,$$

поскольку A – проектор. Неравенство в п. (ii) теоремы 6 перепишется в виде

$$t - s \geqslant t + s - \frac{(t+s)^2}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{s^2}{2t},$$

и для $s = t$ здесь достигается равенство. Таким образом, и в неравенстве следствия 1 для $s = t$ достигается равенство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О. Г. Авсянкин, "Об обратимости многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами", *Матем. заметки*, **108**:2 (2020), 291–295.

[2] А. М. Бикчентаев, "Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы", *Сиб. матем. журн.*, **63**:2 (2022), 272–282.

[3] A. M. Bikchentaev, "On invertibility of some operator sums", *Lobachevskii J. Math.*, **33**:3 (2012), 216–222.

[4] A. M. Bikchentaev, "On τ-essentially invertibility of τ-measurable operators", *Int. J. Theor. Phys.*, **60**:2 (2021), 567–575.

[5] M. Kostadinov, "Injectivity of linear combinations in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$", *Electron. J. Linear Algebra*, **37** (2021), 359–369.

[6] M. H. Mortad, "On the invertibility of the sum of operators", *Anal. Math.*, **46**:1 (2020), 133–145.

[7] X. Ding, Sh. Wu, X. Zhao, "Invertibility and spectral properties of dual Toeplitz operators", *J. Math. Anal. Appl.*, **484**:2 (2020), Article ID 123762.

[8] А. М. Бикчентаев, Х. Фауаз, "Разности и коммутаторы идемпотентов в C^*-алгебрах", *Изв. вузов. Матем.*, 2021, № 8, 16–26.

[9] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 5, Encyclopaedia Math. Sci., **124**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[10] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[11] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.

[12] L. Zsidó, "On the equality of operator valued weights", *J. Funct. Anal.*, **282**:9 (2022), Article ID 109416.

[13] A. Bikchentaev, "Trace inequalities for Rickart C^*-algebras", *Positivity*, **25**:5 (2021), 1943–1957.

[14] А. М. Бикчентаев, "Полунормы, ассоциированные с субаддитивными весами на C^*-алгебрах", *Матем. заметки*, **107**:3 (2020), 341–350.

[15] K. Thomsen, "The factor type of dissipative KMS weights on graph C^*-algebras", *J. Noncommut. Geom.*, **14**:3 (2020), 1107–1128.

[16] B. Blackadar, *Operator Algebras. Theory of C^*-Algebras and von Neumann Algebras*, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III, Encyclopaedia Math. Sci., **122**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[17] Дж. Мёрфи, *C^*-алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997.

[18] F. Hiai, "Matrix analysis: matrix monotone functions, matrix means, and majorization", *Interdiscip. Inform. Sci.*, **16**:2 (2010), 139–248.

[19] W. F. Donoghue, Jr., *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*, Die Grundlehren Math. Wiss., **207**, Springer, New York, 1974.

[20] А. М. Бикчентаев, "Сходимость по мере и τ-компактность τ-измеримых операторов, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана", *Изв. вузов. Матем.*, 2020, № 5, 89–93.

[21] А. М. Бикчентаев, "Об одной лемме Ф. А. Березина", *Матем. заметки*, **87**:5 (2010), 787–791.

[22] I. Kaplansky, "Modules over operator algebras", *Amer. J. Math.*, **75**:4 (1953), 839–858.

[23] J. Dixmier, *Les algebres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* (*algebres de von Neumann*), Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[24] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

А. М. Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный
университет, г. Казань
E-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Поступило
15.04.2022
После доработки
16.05.2022
Принято к публикации
20.05.2022