Дорогие студенты, вы зашли в так называемую "Виртуальную аудиторию," в которой к каждому понедельнику я буду заносить материал новых лекций. Если у вас возникают какие-либо вопросы, то вы можете присылать их мне по электронной почте

volodinstudent@gmail.com

На ваши вопросы я буду отвечать вам reply'ем. В конце текста каждой лекции будут предложены задания, которые вам следует выполнить и выслать мне по почте (или, по крайней мере, сообщать, что вы "на проводе"). О том, как их выполнить я могу вам рассказать при общении в Teams'е.

С надеждой на скорое закрытие карантина ваш преподаватель Игорь Николаевич.

Лекция 6

Гауссовские модели ошибок наблюдений

Следующие два занятия будут посвящены одной из самых распространенных в природе вероятностной модели, приводящей к так называемому *нормальному* распределению наблюдаемого случайного элемента (случайноЙ величины, случайного вектора, случайного процесса). Сегодняшнее занятие мы посвятим изучению самой модели, а потом обратимся к статистическим проблемам, связанным с нормальным распределением.

Как всегда, начнем с рассмотрением некоторых реальных объектов с построением вероятностной модели в наблюдениях их характеристик.

Пример 1. *Определение видимой звездной величины.* Наблюдения за изменением блеска небесных светил, в частности звезд, являются одной из важнейших задач практической астрономии. Только с помощью анализа таких наблюдений можно обнаружить *переменные* звезды, поставляющие информацию о расстояниях до отдаленных светил (цефеиды), а также об их массах, размерах и пр. (затменные переменные и спектрально-двойные звезды).

Величина блеска звезды определяется так называемой *видимой звездной величиной* – характеристикой светимости, пропорциональной количеству квантов света, исходящих от звезды и достигших прибора (электрического фотометра, фотографической пластинки и т.п.), который регистрирует поток лучевой энергии. С точки зрения проблемы построения вероятностной модели изменчивости в повторных наблюдениях блеска, мы имеем ту же картину, что и при измерениях интенсивности радиоактивного источника: каждый квант света с определенной вероятностью p достигает регистрирующего прибора, и общее количество регистрируемых квантов определяет результат наблюдения блеска звезды. Принципиальное различие с измерениями радиоактивности состоит в достаточно большом значении вероятности "успешного исхода" p, в то время как общее количество "испытаний" n (в данном случае – количество квантов, направленных на прибор) чрезвычайно велико. Таким образом возникает проблема асимптотического анализа биномиального распределения при фиксированном p и $n \to \infty$.

Пример 2. *Определение общего содержания серы в дизельном топливе.* Общее содержание серы служит одной из важных характеристик экологической чистоты дизельного топлива. Речь идет не об "элементарной сере" (процентном содержании химического элемента S, что с высокой степенью точности определяется с помощью спектрального анализа вещества), а способности элемента S при сгорании топлива соединяться с кислородом, образуя серный газ SO_2. Именно этот газ через выхлопные трубы машин попадает в среду нашего обитания и соединяется с водой, образуя серную кислоту H_2SO_4. Что такое серная кислота, и что она может натворить с нашими легкими, вы знаете из школьного курса химии.

Итак, речь идет о химической активности серы, содержащейся в дизельном топливе в связанном виде. Анализ этой активности производится следующим образом. Берется определенное количество дизельного топлива, скажем 100 грамм, и сжигается в замкнутой колбе. Продукты сгорания в виде дыма переходят по трубчатому отводу в другую замкнутую колбу, наполненную водой. Серный газ соединяется с водой, образуя раствор серной кислоты. Титруя этот раствор определенным количеством щелочи, мы можем определить общее количество элемента серы, которое из дизельного топлива через сжигание и последующее соединение с кислородом и водой перешло в серную кислоту. Разделив это количество серы на вес анализируемой пробы топлива (100 грамм) и умножив результат на 100%, мы получим результат x нашего статистического эксперимента по наблюдению случайной величины ξ.

Повторные анализы аналогичных проб той же партии топлива, в тех же условиях эксперимента и на тех же приборах указывают на изменчивость результатов в повторных экспериментах. Метрологический анализ испытаний указывает на то, что эта изменчивость в первую очередь обусловлена случайным характером процессов "спекания" определенного количества серы с другими продуктами сгорания (образование так называемой копоти на стенках колбы), а также неполным соединением серного газа с водой. Грубо говоря, каждая молекула серы только с некоторой достаточно высокой вероятностью p может достичь своего конечного состояния в молекуле серной кислоты и внести свой вклад в результат x наблюдения ξ. Понятно, что количество n молекул серы в пробе топлива чрезвычайно велико. Следовательно, мы имеем дело с проблемой асимптотического анализа биномиального распределения при растущем числе испытаний n и постоянной вероятности успеха p.

Ограничимся рассмотрением этих двух примеров, из которых легко видеть, что существует обширнейший класс статистических экспериментов, связанных с наблюдением линейной функции от случайной величины с биномиальным законом распределения $\mathrm{B(n, p)}$, в котором p=const, а n чрезвычайно велико. Проведем асимптотический анализ такой ситуации и начнем его с исследования асимптотического поведения ξ/n – частотной оценки вероятности p успешного испытания в схеме Бернулли. Тот факт, что при $n \to \infty$ относительная частота ξ/n стремится к p, в определенном вероятностном смысле устанавливает один из основных законов теории вероятностей, открытый И.Бернулли в XVII веке.

Теорема 1. (Закон больших чисел Бернулли). *Пусть* $\xi \sim \mathrm{B(n,\ p)}$. *Тогда, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Чебышева в форме следствия 6.1, где в случае биномиального распределения $\mathbf{E}\xi = np$ и $\mathbf{D}\xi = np(1-p)$. Имеем

$$P\left(\left|\frac{\xi}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbf{D}(\xi/n)}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)/n^2}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0,$$

когда $n \to \infty$.

Закон больших чисел разъясняет природу стабилизации относительной частоты выпадения герба около значения $p = 1/2$, относительной частоты наследования доминантного признака $p = 3/4$ в опытах Менделя, и пр.. Действительно, в случайных экспериментах нельзя утверждать, что $|\,\xi/n - p\,| \leqslant \varepsilon$, начиная с некоторого n. Истина в том, что, начиная с некоторого n, это неравенство выполняется с любой, наперед заданной и сколь угодно близкой к единице вероятностью. Таким образом, мы должны сказать, что в данном случае наблюдается *сходимость по вероятности*, которая имеет совершенно другую природу, чем та сходимость, которую мы изучаем в курсе математического анализа.

Естественно, если не делить ξ на n, то $\xi \to \infty$ по вероятности, когда $n \to \infty$. Но если ξ центрировать ее средним значением np и затем масштабировать стандартным отклонением, то построенная таким образом случайная величина $\eta_n = (\xi - np)/\sqrt{np(1-p)}$ имеет при $n \to \infty$ невырожденное распределение. Вид этого распределения устанавливают знаменитые *предельные теоремы Муавра–Лапласа* (XVIII век!).

Теорема 3. (Локальная предельная теорема Муавра–Лапласа). *Пусть при $n \to \infty$ целое $k = np + O(\sqrt{n})$. Тогда*

$$f(k\,|\,n,\,p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right\} \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right)\right).$$

Теорема 4 (Интегральная предельная теорема Муавра–Лапласа). *Для любых постоянных a и b и случайной величины $\xi \sim \mathrm{B(n,\,p)}$ справедливо асимптотическое представление*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant \frac{\xi - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-x^2/2} dx. \qquad (2)$$

Естественно, в рассматриваемых нами примерах с определениями звездной величины и содержания общей серы ни n, ни p определить невозможно, но можно ввести, как и в биномиальном распределении, две характеристики: μ – “положения” и σ – “масштаба”. При таких характеристиках мы можем ввести функцию распределения наблюдаемой случайной величины в следующим образом.

Как известно из общего курса анализа, интеграл Эйлера–Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = 1,$$

поэтому при любых $\mu \in \mathrm{R}$ и $\sigma \in \mathrm{R}_+$

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

есть функция распределения, а

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{d}{dx}\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \ -$$

функция плотности. Эти функции определяют двухпараметрическое семейство *нормальных* или *гауссовских* распределений с носителем $\mathcal{X} = \bar{\mathrm{R}} = [-\infty, +\infty]$ и параметрическим пространством $\Theta = \mathrm{R} \times \mathrm{R}_+$. Мы будем обозначать это распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Если $\mu = 0$, а $\sigma = 1$, то $\mathcal{N}(0, 1)$ называется *стандартным нормальным* распределением; ему соответствуют функция распределения $\Phi(x)$ и функция плотности $\varphi(x)$. Поскольку параметры нормального распределения являются параметрами сдвига (μ) и масштаба (σ), то семейство нормальных распределений замкнуто относительно линейных преобразований случайных величин: если $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Так как $\exp\{-x^2/2\}$ – четная функция, то нормальное распределение симметрично относительно точки $x = \mu$, которая, как легко видеть, является модой распределения. Симметричность функции плотности влечет также очевидные равенства: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ и $\Phi(0) = 1/2$.

Так как среднее значение стандартного нормального распределения

$$\mathbf{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 0,$$

(как интеграл от нечетной функции по всему R), то $\sigma\xi + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ имеет среднее значение μ. В силу той же нечетности подынтегральных функций все центральные моменты нечетного порядка

$$\mu_{2k+1} = \mathbf{E}(\xi - \mu)^{2k+1} = 0.$$

Четные моменты вычисляются с помощью гамма-функции Эйлера:

$$\mu_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2k} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \frac{2\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} t^{2k} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt =$$

$$\frac{\sigma^{2k} 2^k \sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x^{k-1/2} e^{-x} dx = \frac{\sigma^{2k} 2^k \sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sigma^{2k}(2k-1)!!.$$

В частности, $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$, что оправдывает обозначения параметров μ и σ^2 нормального распределения. Так как $\mu_4 = 3\sigma^4$, то коэффициент эксцесса $\gamma_2 = 0$. В силу этого пикообразность или сплющенность вершины функции плотности любого распределения соотносится с кривой нормальной плотности, которая часто называется в честь Ф. Гаусса *гауссиадой*.

Итак, возвращаясь к нашим примерам с определениями видимой звездной величины и общего содержания серы в дизельном топливе, мы должны прийти к заключению о нормальности распределения наблюдаемой случайной величины (заметим, что это предположение блестяще подтверждается статистическим анализом реальных данных). В этом распределении μ играет роль параметра, неизвестное значение которого составляет предмет проводимого исследования (эксперимента), в то время как значение σ характеризует ошибку наблюдений.

Тем не менее, специалисты в области проведения экспериментов по определению характеристик дизельного топлива, не совсем согласны с доводами в пользу нормального распределения, которые мы привели в примере 2. Они утверждают, что наличие копоти в колбе вообще не допустимо, а разброс в повторных наблюдениях объясняется небольшими ошибками при отборе требуемого объема пробы и дополнительных химикатов, различных взвешиваний в процессе анализа результатов обработки пробы, ошибки в тетрировании раствора серной кислоты и пр. В таком подходе к построению вероятностной модели мы должны обратиться к распределению суммы независимых случайных величин, то есть исследовать асимптотическое ($n \to \infty$) распределение $\sum_1^n \xi_k$.

Теорема 3 (центральная предельная теорема). *Пусть* $\{\xi_n,\, n \geqslant 1\}$ *– последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с конечными математическим ожиданием* $\mathbf{E}\,\xi_1 = \mu$ *и дисперсией* $\mathbf{D}\,\xi_1 = \sigma^2$. *Тогда при любом* $x \in \mathrm{R}$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_1^n \xi_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

В таком виде модель нормального распределения была построена в конце IXX-го века и получила широкое распространение при проведении различных экспериментов у физиков, астрономов, химиков, биологов, медиков, в общем у всех, кому до этого было дело. Возникло даже утверждение, что в природе нет других распределений. кроме нормального, которое основывалось на довольно вольной трактовке независимости и одинаковой распределенности ошибок наблюдений.

На этом мы закончим рассмотрении одномерной модели нормального распределения и перейдем к его многомерному аналогу.

Определяя следующий многомерный аналог биномиального распределения, рассмотрим также многомерный аналог теоремы Муавра–Лапласа и введем многомерное нормальное распределение.

Мультиномиальное распределение $\mathcal{M}\,(m,\, n,\, \mathbf{p})$. Рассматривается схема независимых испытаний, в каждом из которых может произойти одно из $m \geqslant 2$ событий $A_1, \ldots, A_m$ с вероятностями

$$p_1, \ldots, p_m, \quad \sum_1^m p_j = 1.$$

Типичный пример таких испытаний – наблюдения энтомолога по оценке численности видов насекомых, населяющих некоторый, достаточно изолированный район нашей планеты. Всего проводится n независимых испытаний, и регистрируются значения

$x_1, \ldots, x_m$ компонент случайного вектора

$$\xi^{(m)} = (\xi_1, \ldots, \xi_m), \quad \sum\nolimits_1^m \xi_j = n,$$

где x_j – количество испытаний, в которых произошло событие A_j, $j = 1, \ldots, m$.

Функция плотности *мультиномиального распределения* $\mathcal{M}(\mathrm{m}, \mathrm{n}, \mathbf{p})$ по m-кратному произведению считающих мер равна

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_m!} p_1^{x_1} \cdots p_m^{x_m},$$

в области

$$\sum\nolimits_1^m x_j = n.$$

Соответствующие нормировки по средним значениям и стандартным отклонениям каждой компоненты наблюдаемого вектора и переход к пределу при $n \to \infty$ в распределении нормированного вектора приводит к утверждениям, аналогичным теоремам 2 и 3 Муавра–Лапласа и, следовательно, к m-мерному нормальному распределению с $\mathcal{N}_m(\mu, \Lambda)$ с функцией плотности случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m$, равной

$$\varphi_m(\mathbf{x}' \,|\, \mu, \Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} \sigma_1 \cdots \sigma_m \sqrt{|\,\mathbf{P}\,|}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\mathbf{P}_{ij}}{|\,\mathbf{P}\,|} \cdot \frac{(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right\}, \quad \mathbf{x}' \in \mathrm{R}^m,$$

где определитель матрицы ковариаций $||\lambda_{ij}$

$$|\,\Lambda\,| = \sigma_1^2 \cdots \sigma_m^2 \cdot |\,\mathbf{P}\,|,$$

а $\mathbf{P}_{ij}/|\mathbf{P}|$ – элементы матрицы $\mathbf{P}^{-1}$, обратной к матрице коэффициентов корреляции $\mathbf{P}$.

Нетрудно видеть, что если коэффициенты корреляции $\rho_{ij} = 0$, когда $i \neq j$, то есть $\mathbf{P}$ есть единичная матрица, а в матрице ковариаций Λ отличны от нуля только диагональные элементы $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_m^2$, то нормальная функция плотности распадается в произведение маргинальных нормальных $\mathcal{N}_1(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, m$ функций плотности. Поэтому справедливо

Предложение 1. *В случае нормального распределения случайного вектора некоррелированность его компонент влечет их независимость.*

Следует обратить особое внимание на требование *положительной определенности* корреляционной матрицы $\mathbf{P}$ или, что то же, ковариационной матрицы Λ. Если эти матрицы положительно полуопределены, то есть имеют ранг $r < m$, то мы получим *несобственное* m-мерное нормальное распределение, вся вероятностная масса которого будет сосредоточена на гиперплоскости R^r, а между компонентами случайного вектора $\xi^{(m)}$ будет существовать линейная зависимость.

Указанные свойства многомерного нормального распределения наиболее наглядно прослеживаются в случае $m = 2$ – нормального распределения на плоскости R^2. Функция плотности распределения случайного вектора $(\xi, \eta) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Lambda)$ при $\rho = \rho_{\xi\eta} \neq \pm 1$ равна

$$\varphi_2(x,\, y\,|\,\mu,\, \Lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Здесь $\mu_1 = \mathbf{E}\xi$, $\mu_2 = \mathbf{E}\eta$ есть вектор средних значений; $\sigma_1^2 = \mathbf{D}\xi$, $\sigma_2^2 = \mathbf{D}\eta$ – дисперсии соответствующих случайных величин; $\rho = \mathrm{cov}(\xi,\, \eta)/\sigma_1\sigma_2$, – коэффициент корреляции между ξ и η. В том, что это действительно так, можно убедиться и непосредственным вычислением интегралов, определяющих соответствующие моментные характеристики. Маргинальные функции плотности $f^\xi(x)$ и $f^\eta(y)$ находятся также непосредственным интегрированием совместной функции плотности $\varphi_2(x,\, y\,|\,\mu, \Lambda)$ по соответствующим переменным y и x :

$$f^\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\},\; f^\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\},$$

то есть

$$\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1,\, \sigma_1^2),\;\; \eta \sim \mathcal{N}(\mu_2,\, \sigma_2^2).$$

Особо отметим, что *существуют многомерные распределения, отличные от нормального, но имеющие нормальные маргинальные распределения.*

Подобные эллипсы

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) = c^2$$

играют роль *кривых равных вероятностей*: нетрудно вычислить, что вероятность попадания $(X,\, Y)$ в область, ограниченную этим эллипсом, равна $1 - \exp\{-c^2\}$.

Форма эллипса равных вероятностей дает хорошее представление о виде поверхности $z = \varphi_2(x,\, y\,|\,\mu,\, \Lambda)$ нормальной плотности. При $\rho = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2$ эллипсы превращаются в окружности. Когда ρ приближается к $+1$ или –1, эллипсы становятся более тонкими и вытянутыми, что является показателем стремления вероятностной массы сосредотачиваться около общей большой оси этих эллипсов.

Особый интерес представляет эллипс с $c = 2$, который называется *эллипсом рассеяния.* Он обладает достаточно высокой вероятностью $1 - e^{-4} \approx 0.98$ попадания случайной точки $(\xi,\, \eta)$ внутрь эллипса и еще одним замечательным свойством: равномерное распределение по области, ограниченной эллипсом рассеяния, имеет те же моменты первого $(\mu_1,\, \mu_2)$ и второго $(\sigma_1^2,\, \sigma_2^2,\, \rho\sigma_1\sigma_2)$ порядков, что и нормальное распределение.

В заключение отметим, что двумерное нормальное распределение играет важную роль в *теории стрельб*: распределение координат точек попадания при стрельбе из закрепленного ствола хорошо согласуется с нормальным законом.

Нельзя обойти стороной проблемы наилучшего в среднем квадратическом прогнозе ожидаемого значения одной компоненты η наблюдаемого вектора $(\xi,\, \eta)$ по результату наблюдения другой компоненты ξ.

Эта проблема состоит в отыскании функции $g(\xi)$, которая минимизирует некоторую меру уклонения $g(\xi)$ от η. Мы будем решать задачу минимизации *среднего квадратического уклонения* $\mathbf{E}(\eta - g(\xi))^2$, в котором математическое ожидание вычисляется по совместному распределению ξ и η. Решение задачи дает

Предложение 2. *Минимум функционала* $\mathbf{E}(\eta - g(\xi))^2$ *достигается на функции*

$$g^*(\xi) = \mathbf{E}\{\eta \,|\, \xi\}.$$

Итак, наилучший в среднем квадратическом прогноз ожидаемого значения η по результату x наблюдения случайной величины ξ доставляет реализация в точке $\xi = x$ условного математического ожидания $\mathbf{E}\{\eta \,|\, \xi\}$. Допуская некоторую вольность, запишем эту реализацию в виде функции $y = g^*(x) = \mathbf{E}\{\eta \,|\, \xi = x\}$. Функция $y = g^*(x)$ называется *кривой средней квадратической регрессии* η на ξ, а минимальное среднее квадратическое уклонение $\sigma^2_{\eta|\xi} = \mathbf{E}(\eta - g^*(\xi))^2$ – *остаточной дисперсией.*

В случае совместного нормального распределения ξ и η функция $g^*(x)$ и остаточная дисперсия определяются посредством формулировки следующего утверждения.

Предложение 3. *Пусть* $(\xi, \eta) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Lambda)$. *Тогда кривая средней квадратической регрессии* η *на* ξ *есть прямая*

$$y = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1). \tag{1}$$

Остаточная дисперсия $\quad \sigma^2_{\eta|} = \sigma^2_2(1 - \rho^2)$.

Контрольные вопросы.

1. Доказать, что гамма-распределение $G(\lambda, \theta)$ асимптотически при $\lambda \to \infty$ нормально и указать параметры асимптотической нормальности.

2. Используя вывод распределения Пуассона $P(\lambda)$ как предела биномиального, доказать асимптотическую нормальность этого распределения и указать параметры асимптотической нормальности.