Компьютерная Графика

Р.Р.Нигматуллин

КФУ ИВМиИТ(ВМК)

Казань, 2019

Задача: Имеется набор точек $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ в каждом из которых задано значение функции $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$.
Требуется построить многочлен степени не выше , чем N-1, такой что $f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, N-1$.

Известно ,что задача разрешима.

Решения:
Полином Лагранжа

$$L(x) = \sum_{i=0}^{N-1} y_i * l_i(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{N-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Полином Ньютона
(Подробнее в курсе «Численные Методы»).

Интерполяционные многочлены

Многочлены высокой степени дают теоретическое решение задачи, но малопригодны для интерполяции.

Причина: возможная сильная осцилляция полученного решения.

Если многочлен небольшой степени, решение находится из системы линейных уравнений.

Предназначены для решения задачи о проведение кривой через заданное множество точек.

Накладываются более слабые условия на гладкость кривой.

Требуется существование производной у кривой только до заданного порядка.

Идея: Вместо многочлена большой степени, строится набор многочленов малой степени с дополнительными условиями сопряжения в узлах.

Реализация зависит от способа представления многочлена (выбор базиса) и условий сопряжения

Заданы узлы $x_0, x_1, \ldots, x_N$ и значения в них $y_0, y_1, \ldots, y_N$.
Предполагается, что $x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_N$
На интервале x_i, x_{i+1} сплайн представляется в виде:

$$f_i(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3$$

При условии:

$$f_i(x_i) = y_i$$

$$f_i(x_i) = f_{i+1}(x_i)$$

$$f_i^{'}(x_i) = f_{i+1}^{'}(x_i)$$

Всего $4N$ переменных.

Количество уравнений:
Равенство в узлах: $2N$
Совпадение производных: $2N - 2$
Ограничения на производные в граничных точках: 2

Итого: $4N$ уравнений и $4N$ неизвестных. Задача решается с помощью системы линейных уравнений.

Упрощение вычислений при переходе к другому базису:

$$f_i(x) = b_{0i} + b_{1i}(x - x_i) + b_{2i}(x - x_i)^2 + b_{3i}(x - x_i)^3$$

$$f_i(x_i) = b_{0i}$$
$$f_i^{'}(x_i) = b_{1i}$$

Упрощение вычислений при переходе к другому базису:

$$f_i(x) = c_{0i}(x - x_{i+1})^3 + c_{1i}(x - x_{i+1})^2(x - x_i) +$$

$$+ c_{2i}(x - x_{i+1})(x - x_i)^2 + c_{3i}(x - x_i)^3$$

$$f_i(x_i) = c_{0i}(x_i - x_{i+1})^3$$

$$f_i(x_{i+1}) = c_{3i}(x_{i+1} - x_i)^3$$

Недостаток: при изменении значения в одном узле приходится пересчитывать все коэффициенты, а число переменных может быть достаточно велико.

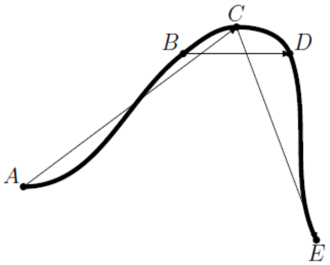
Снова рассматривается набор точек (x_i, y_i) через которые должна проводится кривая.

На каждом интервале кривая задается многочленом третьей степени.

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Идея сплайна Catmull Rom заключается в условиях определения гладкости.

Определение касательной в узле, определяется направлением вектора, построенного на смежных узлах.



Преимущество сплайна Catmull Rom:
Локальные изменения данных не требуют глобального перерасчета коэффициентов.

Были разработаны в автомобильной промышленности в 60-х годах.

В отличии от сплайнов используют контрольные точки для уточнения формы кривой.

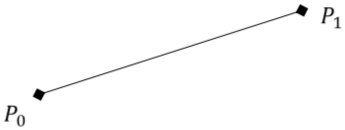
При изменении контрольной точки происходит локальное искажение формы.

Основой для кривых Безье служат базисные полиномы Берштейна. Эти полиномы введены С.Н. Берштейном в 1912 году.

$$b_{nk}(t) = C_n^k t^k (1 - t)^{n-k}$$

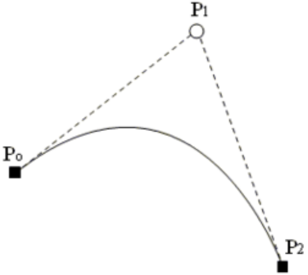
Кривая Безье 1-го порядка.
Имеется 2 точки P_0, P_1 . Рассматривается кривая вида:

$$P(t) = P_0(1-t) + P_1 t, \quad t \in [0,1]$$



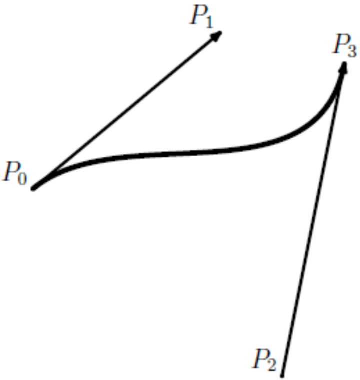
Кривая Безье 2-го порядка.
Имеется 3 точки P_0, P_1, P_2 . Рассматривается кривая вида:

$$P(t) = P_0(1-t)^2 + 2P_1(1-t)t + P_2t^2, \quad t \in [0,1]$$



Кривая Безье 3-го порядка.
Имеется 4 точки P_0, P_1, P_2, P_3 . Рассматривается кривая вида:

$$P(t) = P_0(1-t)^3+3P_1(1-t)^2t+3P_2(1-t)t^2+P_3t, \quad t \in [0,1]$$



Свойства:

Сумма коэффициентов кривой Безье равна 1.

$$1 = 1^3 = (1 - t + t)^3 = (1 - t)^3 + 3t(1 - t)^2 + 3t^2(1 - t) + t^3$$

Точка $P(t)$ лежит внутри выпуклой оболочки с вершинами в точках $P_j, \quad j = 0, \ldots, 3$

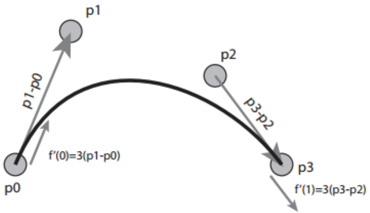
Свойства:

По построению: $P(0) = P_1, P(1) = P_3$.

Касательные в точках $P(0), P(1)$:

$$P^{'}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$P^{'}(1) = 3(P_3 - P_2)$$



Вывод для кривой Безье 3-го порядка:

$$P(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1(1-t)^2 t + 3P_2(1-t)t^2 + P_3 t^3.$$

$P'(t) = -3P_0(1-t)^2 - 6P_1(1-t)t + 3P_1(1-t)^2 - 3P_2 t^2 + 6P_2(1-t)t + 3P_3 t^2$

$$P^{'}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$P^{'}(1) = 3(P_3 - P_2)$$

Кривые Безье произвольного порядка: Имеется набор точек: $P_0, P_1, \ldots, P_n$. В общем случае кривая Безье определяется следующим образом:

$$P(P_0, \ldots, P_n, t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} P_k$$

По построению: $P(0) = P_0, P(1) = P_n$. Остальные точки управляют формой кривой.

Вычисление точек кривой Безье:

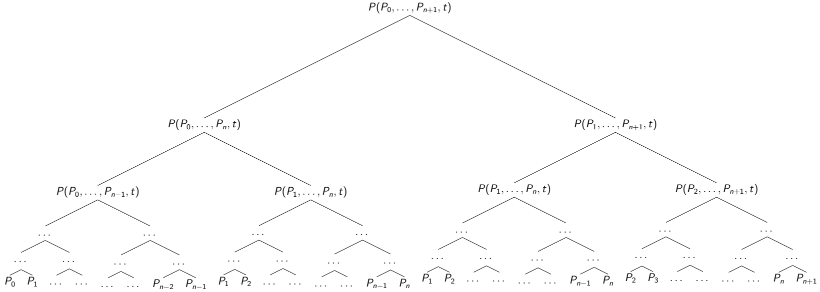
Возможно рекурсивное вычисление значения точки Кривой Безье.
Из соотношения $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ следует:
$P(P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}, t) =$
$(1-t)P(P_0, P_1, \ldots, P_n, t) + tP(P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}, t)$
Вычисление кривой Безье сводится к вычислению кривых меньшего порядка. Указанное свойство лежит в основе алгоритма де Кастольжо.

Кривые Безье. Алгоритм де Кастольжо

Алгоритм использует представление кривой Безье через кривые меньшего порядка. При этом каждая из кривых меньшего порядка содержит на одну контрольную точку меньше чем исходная кривая Безье. Процесс декомпозиции продолжается до тех пор пока не останется одна точка. Если рассматривать вычисление кривой Безье в отдельных точках, то каждый этап алогритма де Кастольжо представляет собой применение кривой Безье первого порядка.

Кривые Безье. Алгоритм де Кастольжо

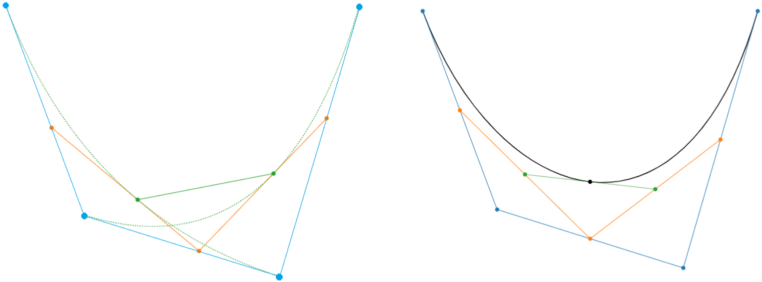
$$P(P_i, P_j, t) = (1 - t)P(P_i, P_{j-1}, t) + tP(P_{i+1}, P_j, t)$$



Рекурсивный алгоритм де Кастольжо

function deCasteljau($P_i, \ldots, P_j, t, n = j - i$)
  if $n == 0$ then
    return P_i
  else
    return $(1-t) \cdot deCasteljau(\mathrm{P}_i, ..., P_{j-1}, t, n-1) +$
$t \cdot deCasteljau(\mathrm{P}_{i+1}, ..., P_j, t, n-1)$

Геометрическая интерпретация.



Прямой алгоритм.
Прямой алгоритм деКастольжо предполагает вычисление на каждом этапе новых контрольных точек по текущим, используя кривую Безье первого порядка. На каждом этапе количество контрольных точек становится на 1 меньше чем на предыдущем. Количество этапов совпадает с прядком кривой Безье. В результате остается 1 точка, которая лежит на исходной кривой Безье.

Прямой алгоритм.

function deCasteljau($P_0, \ldots, P_n, t, n$)
    for i from 1 to n
        for j from 0 to n-i
            $P_j = (1 - t) \cdot P_j + t \cdot P_{j+1}$
    return P_0

Свойства кривой Безье:

- Кривая всегда проходит через начальную и конечную точку
- Кривая лежит внутри минимальной объемлющей выпуклой оболочки всех контрольных точек
- Касательными к кривой в точках P_0 и P_n являются прямые, проходящие через точки (P_0, P_1) и (P_{n-1}, P_n) соответственно
- Произвольная прямая имеет количество пересечений с кривой Безье не большее чем с поли линией, составленной по контрольным точкам.

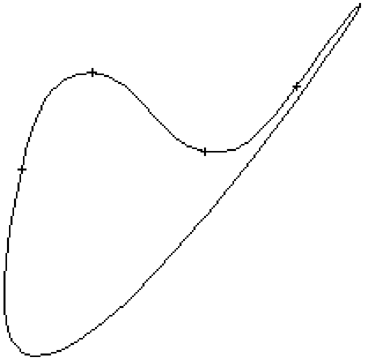
- Для выполнения аффинного преобразования над кривой достаточно выполнить аффинное преобразование над контрольными точками
- Степень полинома описывающего кривую по $N+1$ точкам равна N
- При изменении положения одной контрольной точки происходит глобальное перестроение всей кривой. Любая контрольная точка оказывает влияние на форму всей кривой.
- При переносе контрольной точки k на вектор v новое значение кривой в точке t будет вычисляться как:

$$C(t) + B_{k,n}(t) * v,$$

где $C(t)$ – старое значение

Кривая Безье. Построение замкнутых кривых.

Имеется набор точек: $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1},$. Требуется построить замкнутую кривую определяемую этими точками.
Задача может быть решена различными способами.
Рассмотрим способ на основе кривых Безье.



Кривая Безье. Построение замкнутых кривых.

Для построение замкнутой кривой используем кривые Безье второго порядка. При этом точки $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, возьмём в качестве контрольных. А точки через которые должны проходить кривые Безье обозначим как
$Q_0, Q_1, \dots, Q_{n-1},$.
Рассмотрим кривую, проходящую через точки Q_i, Q_{i+1} и имеющую контрольную точку P_{i+1}.

$$P(Q_i, P_{i+1}, Q_{i+1}, t) = Q_i(1-t)^2 + 2P_{i+1}(1-t)t + Q_{i+1}t^2$$

$$P(0) = Q_i; P(1) = Q_{i+1};$$

$$P'(0) = 2(P_{i+1} - Q_i); P'(1) = 2(Q_{i+1} - P_{i+1});$$

Кривая Безье. Построение замкнутых кривых.

Для согласования производных (обеспечение гладкости) в концевых точках должно иметь место равенство:

$$Q_i - P_i = P_{i+1} - Q_i$$

Откуда:

$$Q_i = 0.5(P_i + P_{i+1})$$

Если менять P_i то надо пересчитывать только 2 точки и как следствие меняются только 2 кривые.

Для предыдущей задачи можно использовать кривые Безье 3-го порядка.
Заданы точки P_{2k}, P_{2k+1}. Требуется найти точки Q_k, Q_{k+1}.

$$P(Q_k, P_{2k}, P_{2k+1}, Q_{k+1}, t) = Q_k(1-t)^3 + 3P_{2k}(1-t)^2 t +$$

$$+ 3\mathrm{P}_{2k+1}(1-t)t^2 + Q_{k+1}t^3.$$

Из этого условия находятся точки:

$$Q_i = 0.5(P_{2k} + P_{2k+1})$$

B-сплайн является обобщением кривых Безье. B-сплайн представляет собой линейную комбинацию некоторых базисных сплайнов. При этом требуется обеспечить только значение в нужных точках, а гладкость будет выполнена автоматически.

Определяется сплайн следующим образом:

Задается вектор узлов $T = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$, представляющий собой неубывающую последовательность значений $t_i \in [0, 1]$, и набор контрольных точек $P_0, ..., P_n$.

Степень $p = m - n - 1$.

Узлы $t_{p+1}, ..., t_{m-p-1}$ называются внутренними узлами.

Задается набор базисных функций:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1} \text{ и } t_i < t_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i} B_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1} - t}{t_{i+j+1} - t_{i+1}} B_{i+1,j-1}(t)$$

Где $j = 1, 2, ..., p$. B-сплайн представляется как линейная комбинация базисных функций:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{ip}(t)$$

$p = 1$

$B_{01} = 1, t \in [t_0, t_1]$

$p = 2$

$$B_{02} = \begin{cases} t, t \in [t_0, t_1] \\ 1 - t, t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

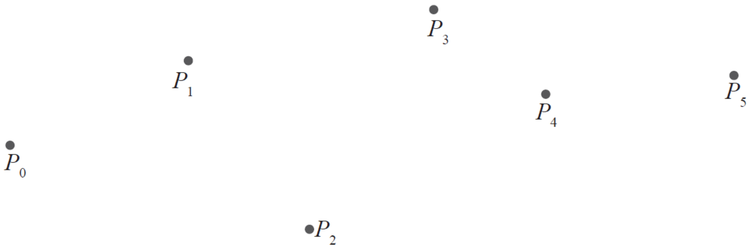
$p = 3$

$$B_{03} = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, t \in [t_0, t_1] \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2}, t \in [t_1, t_2] \\ \frac{(3-t)^2}{2}, t \in [t_2, t_3] \end{cases}$$

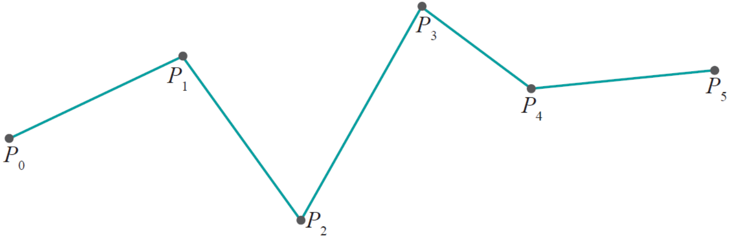
$p = 4$

$$B_{04} = \begin{cases} \frac{t^3}{6}, t \in [t_0, t_1] \\ \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), t \in [t_1, t_2] \\ \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4), t \in [t_2, t_3] \\ \frac{1}{6}(1 - t)^3, t \in [t_3, t_4] \end{cases}$$

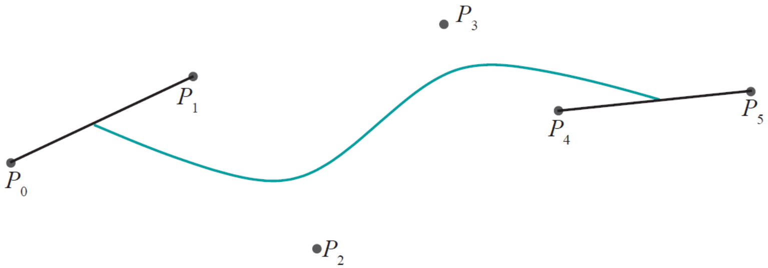
Пример кривой, построенной по базисным сплайнам с $p = 1$



Пример кривой, построенной по базисным сплайнам с $p = 2$



Пример кривой, построенной по базисным сплайнам с $p = 3$



- Кривая Безье является частным случаем B - сплайна.
- B - сплайн отвечает всем основным свойствам кривых Безье
- B - сплайн кривые обладают более гибкими возможностями по заданию кривой.
    - Степень кривой задаётся отдельно
    - Мы можем изменять положение контрольной точки без глобального изменения кривой

B-сплайн кривые требуют больше описания и их теория гораздо сложнее, чем теория кривых Безье.

NURBS – nonuniform rational B-splines.
B-сплайны удобны при применении к контрольным точкам различных преобразований. Однако, с их помощью нельзя получить такую кривую как окружность. Для этого используют NURBS.

В общем случае NURBS определяется следующим образом:

$$S(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_i w_i B_{ip}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{ip}(t)}$$

добавляются веса w_i

Рассмотрим параметрическое описание единичной окружности:

$$x = sin(\alpha)$$

$$y = cos(\alpha)$$

Произведем замену $u = tg(\alpha/2)$

$$x(u) = \frac{2u}{1+u^2} \quad y(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Переходя к проективным координатам получим:

$$x_1(u) = 2u \quad x_2(u) = 1 - u^2 \quad x_3(u) = 1 + u^2$$

При этом рассматривается только верхняя полуокружность и параметр u изменяется [-1,1].
Введем замену $u = 2t - 1$. Теперь $t \in [0, 1]$.

Уравнения примут вид:

$$x_1(t) = 2t - 1 \quad x_2(t) = 2t(t-1) \quad x_3(t) = 1 - 2t + 2t^2$$

Каждый из многочленов можно заменить кривой Безье:

$$x_1(t) = -(1-t)^3 - (1-t)^2 t + (1-t)t^2 + t^3$$

$$x_2(t) = 2((1-t)^2 t + (1-t)t^2)$$

$$x_3(t) = (1-t)^3 + (1-t)^2 t + (1-t)t^2 + t^3$$

В векторной форме это можно записать как:

$$X(t) = P_0(1-t)^3 + P_1(1-t)^2 t + P_2(1-t)t^2 + P_3 t^3$$

Где,

$$P_0 = (-1, 0, 1) \quad P_1 = (-1, 2, 1) \quad P_2 = (1, 2, 1) \quad P_3 = (1, 0, 1)$$

Меняя положение точек, изменяем форму кривой