§ 7.5 ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА

1^0. Пусть функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, тогда на $[a,b]$ интегрируемы функции: $f(x)\pm g(x),\ f(x)g(x),\ \lambda f(x),\ \lambda -$ $const, |f(x)|,\ f(x)/g(x)$, где $|g(x)| \geq d > 0$. При этом $\int\limits_a^b (f \pm g)dx = \int\limits_a^b f dx \pm \int\limits_a^b g dx,\ \int\limits_a^b \lambda f dx = \lambda \int\limits_a^b f dx.$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность разбиений $\Delta_k = \Delta_k(a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{n_k}^{(k)} = b)$ такую, что $d(\Delta_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Функции f и g интегрируемы, поэтому при любых $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$ существуют пределы

$$\lim_{d(\Delta_k)\to 0} \sum_i f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{d(\Delta_k)\to 0} \sum_i g(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Из существования данных пределов следует существование предела

$$\lim_{d(\Delta_k)\to 0} \sum_i (f(\xi_i^{(k)}) \pm g(\xi_i^{(k)}))(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \lim_{d(\Delta_k)\to 0} \sum_i f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} -$$

$$- x_{i-1}^{(k)}) \pm \lim_{d(\Delta_k)\to 0} \sum_i g(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$$

при любых $\xi_i^{(k)} \in [x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}]$.

Таким образом, функция $f(x) \pm g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Подобным образом

$$\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lim_{d(\Delta_k)\to 0}\sum_i \lambda f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) =$$

$$= \lambda \lim_{d(\Delta_k)\to 0}\sum_i f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Пусть $\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Введем обозначения:

Пусть $\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Введем обозначения:

$$M_f^i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_f^i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ K_f = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Для произвольных $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|f(\xi_i)| - |f(\eta_i)| \le |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \le M_f^i - m_f^i, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\eta_i)g(\eta_i) = f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\eta_i) + f(\xi_i)g(\eta_i) - \\ - f(\eta_i)g(\eta_i) \le |f(\xi_i)||g(\xi_i) - g(\eta_i)| + |g(\eta_i)||f(\xi_i) - f(\eta_i)| \le \\ \le K_f(M_g^i - m_g^i) + K_g(M_f^i - m_f^i). \end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{1}{g(\xi_i)} - \frac{1}{g(\eta_i)} = \frac{g(\eta_i) - g(\xi_i)}{g(\xi_i)g(\eta_i)} \le \frac{1}{d^2}(M_g^i - m_g^i). \tag{3}$$

Возьмем sup левых частей неравенств (1) и (3) по $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, умножим полученные числа на $(x_i - x_{i-1})$ и просуммируем по i. В результате получим

$$\sum_i (M_{|f|}^i - m_{|f|}^i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_i (M_f^i - m_f^i)(x_i - x_{i-1}), \tag{4}$$

$$\sum_i (M_{1/g}^i - m_{1/g}^i)(x_i - x_{i-1}) \le \frac{1}{d^2}\sum_i (M_g^i - m_g^i)(x_i - x_{i-1}). \tag{5}$$

Вследствие интегрируемости f и g (см. § 7.3) правые части (4) и (5) при надлежащем разбиении можно сделать меньшими ε, но тогда и левые части можно сделать меньшими ε. $\Rightarrow$ Функции $|f|$ и $1/g$ интегрируемы на $[a, b]$.

Функции f и g интегрируемы на $[a, b]$, поэтому существуют разбиения Δ_1 и Δ_2 отрезка $[a, b]$ такие, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1}(f) - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1}(f) < \varepsilon,\ \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2}(g) - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2}(g) < \varepsilon.$$

Пусть $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, т. е. разбиение Δ отрезка $[a, b]$ состоит из множества точек, являющегося теоретико-множественной суммой множества точек, из которых состоят Δ_1 и Δ_2 ($\Delta = \Delta(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$). Из свойства 2^0 нижних и верхних сумм (см. § 7.2) следует, что

$$\overset{*}{S}_\Delta(f) - \underset{*}{S}_\Delta(f) < \varepsilon,\ \overset{*}{S}_\Delta(g) - \underset{*}{S}_\Delta(g) < \varepsilon.$$

Взяв sup левой части неравенств (2) по $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, умножив полученные числа на $(x_i - x_{i-1})$ и просуммировав по i, получим

$$\sum_i (M^i_{fg} - m^i_{fg})(x_i - x_{i-1}) \leq K_f \sum_i (M^i_g - m^i_g)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ K_g \sum_i (M^i_f - m^i_f)(x_i - x_{i-1}) = K_f(\overset{*}{S}_\Delta(g) - \underset{*}{S}_\Delta(g)) +$$

$$+ K_g(\overset{*}{S}_\Delta(f) - \underset{*}{S}_\Delta(f)) < (K_f + K_g) < \varepsilon. \qquad (6)$$

Таким образом, можно указать такое разбиение Δ, что левая часть (6) может быть сделана как угодно малой, что показывает: функция $f(x) \cdot g(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

Нетрудно показать теперь интегрируемость частного функцией $f(x)/g(x)$. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $|g(x)| \geq d > 0$, то, по доказанному выше, интегрируема на $[a, b]$ функция $1/g(x)$, а следовательно, функция $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = f(x)/g(x)$ также интегрируема на $[a, b]$. ■

Замечания:

1. Из интегрируемости $|f(x)|$ не следует интегрируемость $f(x)$. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q} \bigcap [a, b], \\ -1, & \text{если } x \in [a, b] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

   $|f(x)|$ – интегрируема на $[a, b]$, так как $|f(x)| \equiv 1$ на $[a, b]$, в то время, как $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$ (см. пример с функцией Дирихле из § 7.1). ■

2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ отличается от функции $f(x)$ лишь в конечном числе точек, то функция $g(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Пусть $g(x)$ отлична от $f(x)$ в точках $x_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$. Введем на $[a,b]$ функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x_i) - f(x_i), & \text{если } x = x_i, \\ 0, & \text{если } x \neq x_i,\ i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = 0$ (см. пример § 7.1). Очевидно, что $g(x) = f(x) + \varphi(x)$. Из интегрируемости суммы интегрируемых функций следует интегрируемость $g(x)$ на $[a,b]$ и равенство

$$\int\limits_a^b g(x)fx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

2⁰. Имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,\ a < c < b, \tag{$*$}$$

в том смысле, что если определена одна из его частей, то определена и другая и они равны.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$. Тогда существуют разбиения Δ_1 и Δ_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно такие, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} < \varepsilon/2,\ \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} < \varepsilon/2.$$

Объединяя разбиения Δ_1 и Δ_2, мы получим разбиение Δ отрезка $[a,b]$, для которого

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} = \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} + \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Допустим теперь, что $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение Δ отрезка $[a,b]$ такое, что

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta} < \varepsilon. \tag{7}$$

Будем считать, что точка c является делящей точкой разбиения Δ. В противном случае мы ее просто добавляем к точкам разбиения Δ и получаем более частое разбиение отрезка $[a,b]$, для которого тем более будет справедливо (7) (см. свойство 2^0 верхних и нижних сумм, § 7.2). Разбиение Δ отрезка $[a, b]$ порождает разбиения Δ_1 и Δ_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, при этом

$$\overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_1} < \varepsilon,\ \overset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} - \underset{*}{\mathrm{S}}_{\Delta_2} < \varepsilon.$$

Следовательно, согласно необходимому и достаточному условию интегрируемости функций (см. § 7.3), функция f будет интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Пусть $\Delta_k = \Delta_k(a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_n^{(k)} = b)$ – последовательность разбиений отрезка $[a, b]$ такая, что $d(\Delta_k) \to 0$. Точку c будем включать при любом k в число делящих точек разбиения Δ_k (этого можно всегда легко добиться). Тогда интегральная сумма функции $f(x)$ на $[a, b]$ будет равна сумме интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\mathrm{S}_{\Delta_k}(f) = \mathrm{S}_{\Delta_{1k}}(f) + \mathrm{S}_{\Delta_{2k}}(f).$$

Переходя к пределу при $d(\Delta_k) \to 0$, мы получим равенство $(*)$. $\blacksquare$

Замечание. Полезно расширить определение интеграла Римана по отрезку на случай, когда $a > b$ и $a = b$. По определению полагаем:

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, если $a > b$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.