КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.Я. ЗАБОТИН, Р.С. ЯРУЛЛИН

МЕТОДЫ ОТСЕЧЕНИЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ

Учебное пособие

КАЗАНЬ

2022

УДК 519.85

Рекомендовано
учебно-методической комиссией института
ВМиИТ К(П)ФУ
Протокол № 4 от 24 ноября 2022 г.

Научный редактор –
д.ф.-м.н., профессор И.Б. Бадриев

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор В.М. Конюхов,
к.ф.-м.н, доцент А.А. Андрианова

Заботин И.Я., Яруллин Р.С.
Методы отсечений с аппроксимацией допустимой области: учебное пособие. – Казань, 2022. – 80 с.

В пособии излагаются методы решения задач нелинейного программирования, которые относятся к классу методов отсечений и используют для построения итерационных точек аппроксимацию области ограничений исходной задачи некоторыми многогранными множествами.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Прикладная математика», «Прикладная математика и информатика», «Бизнес-информатика» и может быть использовано при изучении курсов «Методы оптимизации», «Дополнительные главы оптимизации», «Дополнительные главы исследования операций» и др.

УДК 519.85

Оглавление

Введение

Методы нелинейного программирования часто используются при решении прикладных задач исследования операций. Поэтому раздел «Нелинейное программирование» присутствует во многих математических и экономико-математических курсах лекций, в частности, «Методы оптимизации», «Исследование операций», «Дополнительные главы оптимизации» и др.

К настоящему времени известно значительное число методов решения задач нелинейного программирования. Описание этих методов можно найти в учебной и специальной научной литературе (напр., [1; 2; 4; 6; 7; 12—15; 17; 18]). Сложилась определенная классификация таких методов. В отдельные классы выделились методы штрафных и барьерных функций, методы возможных направлений, методы типа линеаризации, квазиньютоновские методы, субградиентные и ε-субградиентные, методы приведенных градиентов, методы центров и др.

Довольно широкий класс методов нелинейного программирования образуют так называемые методы отсечений (напр., [3; 4; 9; 14]). Однако подробное изложение этих методов в учебной литературе практически не представлено. Настоящее учебное пособие в какой-то степени позволяет заполнить этот пробел.

Значительное число методов отсечений для задач нелинейного программирования характерно следующим. При построении итерационных точек в этих методах используется последовательное погружение либо множества ограничений исходной задачи, либо надграфика целевой функции в некоторые множества более простой структуры. Сразу подчеркнем, что данное пособие посвящено изложению методов отсечений первого типа, а именно, методов, где для отыскания приближений используется аппроксимация некоторыми многогранными множествами области ограничений решаемой задачи.

В таких методах каждое из аппроксимирующих множеств строится на основе предыдущего путем отсечения от него плоскостями некоторого подмножества, содержащего текущую итерационную точку. Одна из основных проблем методов отсечений такого типа при их практическом применении заключается в том, что от шага к шагу, как правило, неограниченно растет число отсекающих плоскостей, формирующих аппроксимирующие множества. Поэтому с увеличением числа шагов возрастает и трудоемкость решения задач нахождения итерационных точек. Указанный недостаток названных методов оказывается существенным при решении задач с высокой точностью даже небольшой размерности, поскольку возникают сложности с переполнением текущей информацией памяти компьютера.

В работе авторов [10] описывается принцип периодического обновления аппроксимирующих область ограничений множеств, который можно применить в методах отсечений для задач с практически любыми, а именно, непрерывными целевыми функциями. Этот принцип обновления основывается на введенном в работе критерии качества аппроксимирующих множеств в окрестности текущих итерационных точек. Данный принцип позволяет включать в методы такие процедуры обновления, при которых можно периодически отбрасывать произвольное число любых построенных ранее отсечений. А именно, допустимо как полное, так и частничное обновление погружающих множеств. В случае частичного обновления можно оставлять, например, только «активные» на данном шаге отсекающие плоскости или $n+1$ последнее отсечение.

В пособии все описываемые методы отсечений характерны тем, что в них включены процедуры периодического обновления аппроксимирующих множеств, основанные на указанном выше принципе.

Такие процедуры обновления с отбрасыванием накапливающихся в процессе счета отсечений делают методы более привлекательными с практической точки зрения.

Изложенный в пособии материал содержит полное обоснование всех описываемых методов. Подробно обсуждаются особенности методов, возможности их численных реализаций, проводится сравнение некоторых из них между собой. При этом предполагается, что читатель знаком с основами курсов математического анализа и линейной алгебры, с методами линейного программирования, а также с основными понятиями и свойствами задач выпуклого программирования.

Номера утверждений, замечаний, формул в пособии задаются двумя числами, и для ссылок на них в тексте используется та же двойная нумерация. Первое из чисел означает параграф, в котором изложен материал, а второе – номер, соответственно, утверждения, замечания или формулы в этом параграфе.

Опишем кратко содержание каждого параграфа.

В § 1 приводится общий метод решения задачи

$$\min\{f(x) : x \in D\}, \tag{0.1}$$

где $f(x)$ – непрерывная в n-мерном евклидовом пространстве $\mathrm{R_n}$ функция, а множество $D \subset \mathrm{R_n}$ выпукло и замкнуто.

Вышеупомянутый метод отсечений вырабатывает вспомогательную последовательность приближений $\{y_i\}$, $i \in K = \{0, 1, \ldots\}$, и фиксирует основную итерационную последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, в виде подпоследовательности $\{y_{i_k}\}$ последовательности $\{y_i\}$. На i-ом шаге $(i \geq 0)$ для построения точки y_i приближенно решается вспомогательная задача минимизации функции $f(x)$ на аппроксимирующем область ограничений множестве M_i. Если точка y_i в определенном смысле оказалась близка к множеству D, то фиксируются номер $i = i_k$ и точка $x_k = y_{i_k}$, и происходит обновление аппроксимирующего множества $M_i = M_{i_k}$. В противном случае считается, что качество аппроксимации области D множеством M_i является неудовлетворительным, и на основе M_i строится очередное аппроксимирующее множество M_{i+1} путем отсечения от M_i точки y_i с использованием обобщенно-опорных элементов. Далее в множестве M_{i+1} указанным выше способом находится очередное приближение y_{i+1} вспомогательной последовательности.

В том же параграфе приведено сравнение этого метода с идейно близким методом опорных множеств [3], построенным для задачи (0.1) с выпуклой целевой функцией $f(x)$. Принципиальное отличие метода из § 1 от метода [3] состоит в том, что в нем заложен критерий оценки качества аппроксимирующего множества, позволяющий вводить процедуры обновления погружающих множеств за счет периодического отбрасывания любого числа любых отсекающих плоскостей.

Далее, в § 2 описывается метод отсечений для решения задачи (0.1), в которой область ограничений имеет более общий вид:

$$D = D' \bigcap D'', \tag{0.2}$$

где D', D'' – выпуклые замкнутые в $\mathrm{R_n}$ множества, причем второе из них может заведомо иметь пустую внутренность.

Метод отличается от изложенного в § 1 метода, в частности, способами построения аппроксимирующих множеств. А именно, погружающее множество M_{i+1} строится путем отсечений от M_i точки y_i плоскостями, построенными с помощью субградиентов функции, определяющей множество D'. Кроме того, в этом методе по сравнению с предыдущим предусмотрены более широкие возможности для выбора итерационных точек основной последовательности. За счет этих возможностей допустимо построение на основе этого метода отсечений некоторых смешанных алгоритмов. Сходимость таких смешанных алгоритмов гарантируется сходимостью описываемого метода отсечений. Метод из § 2 характерен тем, что также предусматривает возможность периодического обновления аппроксимирующих множеств на тех итерациях, где качество аппроксимирующего множества становится удовлетворительным.

В § 3 приводится метод отсечений для нахождения проекции точки $y \in \mathrm{R_n}$ на выпуклое множество D, заданное в виде (0.2). На каждой итерации метода определенным образом строится многогранное множество, аппроксимирующее область D', и приближение получается путем проектирования точки y на пересечение этого аппроксимирующего множества с множеством D''. В случае, если D'' задано системой линейных уравнений или неравенств, то построение приближения не вызывает большого труда, так как задача проектирования решается известными алгоритмами за конечное число шагов. Как и в методах из предыдущих параграфов, в этом проекционном методе тоже заложена возможность обновления аппроксимирующих область D' множеств за счет отбрасывания дополнительных ограничений.

В § 4 для задачи (0.1) излагается еще один метод отсечений с аппроксимацией области ограничений, который отличается от методов из §§ 1, 2 тем, что допускает возможность распараллеливания процесса отыскания итерационных точек. В этом методе для построения основных итерационных точек сначала некоторым способом строится определенное число многогранных множеств, аппроксимирующих область ограничений исходной задачи. Далее в каждом из этих множеств находится вспомогательная точка приближенного минимума целевой функции. Наконец, в качестве основной итерационной точки выбирается рекордная из найденных вспомогательных точек. Заметим, что эти вспомогательные точки могут находится параллельно различными алгоритмами минимизации.

1 Метод отсечений на основе аппроксимации допустимой области семейством опорных плоскостей

Опишем метод для решения задачи нелинейного программирования с обновлением аппроксимирующих множеств.

Пусть $f_j(x)$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, – выпуклые в n-мерном евклидовом пространстве $\mathrm{R_n}$ функции,

$$D = \{x \in \mathrm{R_n} : f_j(x) \le 0,\ j \in J\}, \tag{1.3}$$

$f(x)$ – непрерывная достигающая на D минимального значения функция, и для всех $j \in J$ множества

$$D_j = \{x \in \mathrm{R_n} : f_j(x) \le 0\} \tag{1.4}$$

имеют непустую внутренность $\operatorname{int} D_j$. Решается задача

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \tag{1.5}$$

Положим $F(x) = \max\limits_{j \in J} f_j(x)$, $D_\varepsilon = \{x \in \mathrm{R_n} : F(x) \le \varepsilon\}$, где $\varepsilon \ge 0$, $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $E^* = \{x \in \mathrm{R_n} : f(x) \le f^*\}$, $W^1(x, D_j) = \{a \in \mathrm{R_n} : \langle a, z - x\rangle \le 0\ \forall z \in D_j,\ \|a\| = 1\}$ – множество нормированных обобщенно-опорных векторов для множества D_j в точке $x \in \mathrm{R_n}$, $K = \{0, 1, \ldots\}$.

Сразу отметим, что в (1.5) внутренность множества D может быть пустой.

Метод решения задачи (1.5) вырабатывает последовательности приближений $\{y_i\}$, $i \in K$, $\{x_k\}$, $k \in K$, и заключается в следующем.

Метод 1. *Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset \mathrm{R_n}$, содержащее хотя бы одну точку множества X^*, например, точку x^*. Выбираются точки $v^j \in \operatorname{int} D_j$ для всех $j \in J$. Задается число $\varepsilon_0 \geq 0$. Полагается $k = 0$, $i = 0$.*

1. *Находится точка*

$$y_i \in M_i \bigcap E^*. \tag{1.6}$$

2. *Формируется множество*

$$J_i = \{j \in J : y_i \notin D_j\}.$$

Если $J_i = \emptyset$, то $y_i \in X^*$, и процесс завершается.

3. *Если $y_i \notin D_{\varepsilon_k}$, то выбирается выпуклое замкнутое множество $G_i \subset \mathrm{R_n}$, содержащее точку x^*, полагается*

$$Q_i = M_i \bigcap G_i, \tag{1.7}$$

и следует переход к п. 4. В противном случае полагается $i_k = i$,

$$x_k = y_{i_k}, \tag{1.8}$$

и выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i = Q_{i_k}$ *такое, что*

$$x^* \in Q_i. \tag{1.9}$$

Задается число $\varepsilon_{k+1} \geq 0$*, значение* k *увеличивается на единицу, и следует переход к очередному пункту.*

4. *Для каждого* $j \in J_i$ *в интервале* (v^j, y_i) *выбирается точка* z_i^j *так, чтобы* $z_i^j \notin \operatorname{int} D_j$ *и при некотором* $q_i^j \in [1, q]$, $q < +\infty$*, для точки*

$$\bar{y}_i^j = y_i + q_i^j(z_i^j - y_i) \tag{1.10}$$

выполнялось включение $\bar{y}_i^j \in D_j$*. Для всех* $j \in J \setminus J_i$ *полагается* $z_i^j = \bar{y}_i^j = y_i$*.*

5. *Выбирается множество* $H_i \subset J_i$ *так, чтобы выполнялось включение* $j_i \in H_i$*, где номер* j_i *удовлетворяет условию*

$$\|y_i - z_i^{j_i}\| = \max_{j \in J_i} \|y_i - z_i^j\|. \tag{1.11}$$

6. *Для каждого* $j \in H_i$ *выбирается конечное множество* $A_i^j \subset W^1(z_i^j, D_j)$*, полагается*

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap_{j \in H_i} \{x \in \mathrm{R_n} : \langle a, x - z_i^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}, \tag{1.12}$$

и следует переход к п. 1 при i*, увеличенном на единицу.*

Сделаем некоторые замечания, касающиеся данного метода.

Замечание 1.1. *Если на шаге 2 метода выполняется условие* $J_i = \emptyset$, *то согласно (1.6) точка* y_i, *действительно, является решением исходной задачи.*

Замечание 1.2. *Множество* $M_i \bigcap E^*$ *содержит, по крайней мере, точку* x^*, *а значит, выбор* y_i *из условия (1.6) возможен. В частности, точку* y_i *можно находить согласно равенству*

$$f(y_i) = \min\{f(x) : x \in M_i\}. \tag{1.13}$$

Замечание 1.3. *В случае, когда* $f(x)$ *выпукла,* $J = \{1\}$, $v^1 = v \in \operatorname{int} D$, *причем* $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, $\varepsilon_0 = 0$ *и точки* y_i *выбраны согласно (1.13), то предлагаемый метод идейно близок к известному методу погружений В. П. Булатова (напр., [3]) для задачи выпуклого программирования.*

Замечание 1.4. *В упомянутом методе [3] отсечения строятся с помощью точек пересечения отрезка* $[v, y_i]$ *с границей множества* D. *В методе 1 точки* z_i^j, $j \in J_i$, *используемые для построения отсечений, можно выбирать отличными от точек пересечения отрезков* $[v^j, y_i]$ *с границами множеств* D_j, *что существенно с точки зрения решения практических задач.*

Замечание 1.5. *Если в п. 5 положить* $H_i = J_i$, *то отпадает потребность в фиксировании согласно* (1.11) *номера* j_i *«самого глубокого» на* i*-ом шаге отсечения.*

Замечание 1.6. *Для выбора начального аппроксимирующего множества* M_0 *имеется много возможностей. Если, например, положить*

$$M_0 = \bigcap_{j \in J'} D_j, \tag{1.14}$$

где $J' \subset J$, *то нет необходимости в задании точек* $v^j \in \operatorname{int} D_j$, $j \in J'$, *поскольку тогда для всех* $i \in K$ *и* $j \in J'$ *выполняются включения* $y_i \in D_j$, *и точки* v^j, $j \in J'$, *в построении отсекающих плоскостей не участвуют. Отметим также, что выбор* M_0 *в виде* (1.14) *удобен в том случае, когда* $\bigcap\limits_{j \in J'} D_j$ *– выпуклый многогранник.*

Если $M_0 = \mathrm{R_n}$, *а функция* $f(x)$ *достигает в* $\mathrm{R_n}$ *своего абсолютного минимального значения, то можно положить* $y_0 = \arg\min\limits_{x \in \mathrm{R_n}} f(x)$.

При выборе $M_0 = D$ *метод завершает процесс отыскания решения задачи* (1.5) *на нулевом шаге.*

Отметим, что если $\operatorname{int} D \neq \emptyset$ *и известна точка* $v \in \operatorname{int} D$, *то в методе удобно положить* $v^j = v$ *для всех* $j \in J$.

Приведем теперь принципиальное замечание для метода, касающееся возможности периодического обновления погружающих множеств M_i за счет отбрасывания любого числа построенных к i-ому шагу отсекающих плоскостей.

Замечание 1.7. *Пусть в (1.7) $G_i = \mathrm{R_n}$ для всех $i \in K$, и для точки y_i выполняется включение*

$$y_i \in D_{\varepsilon_k}. \tag{1.15}$$

Положим

$$Q_i = M_{r_i}, \tag{1.16}$$

где $0 \leq r_i \leq i = i_k$. Ясно, что при всех $r_i = 0, \ldots, i$ условие (1.9) выполняется. Согласно (1.16) в качестве Q_i можно выбирать любое из построенных к i-ому шагу погружающих множеств $M_0, \ldots, M_i$. В частности, для всех $i \in K$, для которых выполняется (1.15), можно положить

$$Q_i = M_0.$$

Тем самым при каждом $i = i_k$, $k \in K$, произойдет отбрасывание всех накопившихся к шагу i_k отсекающих плоскостей.

Понятно, что множества Q_i при выполнении условия (1.15) можно выбирать и не следуя этому замечанию. А именно, множества Q_i удобно задавать следующим образом:

$$Q_i = M_0 \bigcap_{j \in H_{i-1}} \{x \in \mathrm{R_n} : \langle a, x - z^j_{i-1} \rangle \leq 0 \ \forall a \in A^j_{i-1}\}, \ i \geq 1.$$

Кроме того, отметим, что согласно (1.9) множества Q_i при условии (1.15), как и множество M_0, можно выбирать совпадающими с $\mathrm{R_n}$.

Далее, отметим, что при всех $i \in K$, независимо от выполнения условия (1.15), множества Q_i допустимо задавать в виде (1.7), поскольку включения (1.9) для них выполняются. В таком случае ввиду (1.12)

$$M_{i+1} = M_i \bigcap G_i \bigcap_{j \in H_i} \{x \in \mathrm{R_n} : \langle a, x - z^j_i \rangle \leq 0 \ \forall a \in A^j_i\} \ \forall i \in K,$$

то есть от шага к шагу происходит накопление отсекающих плоскостей и никаких обновлений погружающих множеств не происходит. Свойства последовательности $\{y_i\}$, построенной с условием (1.7) выбора множеств Q_i при всех $i \in K$, будут обсуждаться ниже.

Перейдем к исследованию сходимости изложенного метода. Сначала изучим некоторые свойства построенной согласно методу последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$. Везде далее в этом параграфе будем предполагать, что она ограничена.

Лемма 1.1. *Пусть $U \subset \mathrm{R_n}$ – выпуклое множество, L – его несущее подпространство, а множество Q из аффинной оболочки U ограничено и не содержится в $\mathrm{ri}\,U$ – относительной внутренности множества U. Если точка $u \in \mathrm{R_n}$ такова, что выполняется включение $u \in \mathrm{ri}\,U$, то найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $z \in Q \setminus \mathrm{ri}\,U$ и всех $a \in L \bigcap W^1(z, U)$ справедливо неравенство $\langle a, u - z \rangle \le -\delta$.*

Доказательство утверждения приведено в [8].

С учетом сделанного выше замечания о возможности выбора множеств Q_i в виде (1.7), независимо от принадлежности точек y_i множествам D_{ε_k}, сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.2. *Пусть последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, построена методом 1 с условием, что для всех $i \in K$, начиная с некоторого номера $i' \ge 0$, множества Q_i выбраны согласно (1.7). Тогда любая предельная точка последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i \ge i'$, принадлежит множеству D.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$, $i \in K' \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность, выделенная из последовательности точек y_i, $i \in K$, $i \ge i'$, и $\bar{y}$ – ее предельная точка. Покажем справедливость включения

$$\bar{y} \in D. \tag{1.17}$$

Пусть индекс $l \in J$ такой, что номер j_i, удовлетворяющий условию (1.11), совпадает с l для бесконечного числа номеров $i \in K'$. Положим

$$K_l = \{i \in K' : j_i = l\}$$

и докажем сначала равенство

$$\lim_{i \in K_l} \|z_i^l - y_i\| = 0, \tag{1.18}$$

учитывая, что вместе с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K_l$, для каждого $j \in J$ построены и последовательности $\{z_i^j\}$, $\{\bar{y}_i^j\}$, $i \in K_l$.

Заметим, что для всех $i \in K$ и $j \in J$

$$z_i^j = y_i + \gamma_i^j (v^j - y_i), \tag{1.19}$$

где $\gamma_i^j \in [0, 1)$, причем $\gamma_i^l > 0$ для всех $i \in K_l$. Для произвольного $i \in K_l$ зафиксируем номер $p_i \in K_l$ такой, что $p_i > i$. В силу (1.7), (1.12) выполняется включение $M_{p_i} \subset M_i$. Кроме того, ввиду (1.6) $y_{p_i} \in M_{p_i}$, а любой элемент множества A_i^l является обобщенно-опорным и для множества M_{p_i} в точке z_i^l. Следовательно,

$$\langle a, y_{p_i} - z_i^l \rangle \le 0 \quad \forall a \in A_i^l.$$

Отсюда с учетом (1.19) при $j = l$ для всех $a \in A_i^l$ имеем

$$\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \geq \gamma_i^l \langle a, y_i - v^l \rangle.$$

По лемме 1.1 найдется такое число $\delta_l > 0$, что $\langle a, y_i - v^l \rangle \geq \delta_l$ для всех $i \in K_l$, $a \in A_i^l$. Значит, $\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \geq \gamma_i^l \delta_l$ для всех $a \in A_i^l$, а поскольку $\|a\| = 1$ для всех $a \in A_i^l$, то

$$\|y_i - y_{p_i}\| \geq \gamma_i^l \delta_l \quad \forall i, p_i \in K_l, \quad p_i > i. \tag{1.20}$$

Так как последовательность $\{y_i\}$, $i \in K_l$, является сходящейся, то согласно (1.20) $\gamma_i^l \to 0$, $i \to \infty$, $i \in K_l$. Поэтому из (1.19) при $j = l$ с учетом ограниченности последовательности $\{\|v^l - y_i\|\}$, $i \in K_l$, следует равенство (1.18).

Далее, в силу условия (1.11) для всех $i \in K_l$ справедливы неравенства $\|z_i^l - y_i\| \geq \|z_i^j - y_i\|$, $j \in J_i$. Кроме того, согласно п. 4 метода $\|z_i^j - y_i\| = 0$ для всех $j \in J \setminus J_i$, $i \in K_l$. Следовательно, при любых $i \in K_l$, $j \in J$

$$\|z_i^l - y_i\| \geq \|z_i^j - y_i\|.$$

Тогда ввиду (1.18)

$$\lim_{i \in K_l} \|z_i^j - y_i\| = 0 \quad \forall j \in J. \tag{1.21}$$

Согласно п. 4 алгоритма для каждого $i \in K_l$ и $j \in J$ точка $\bar{y}_i^j$ либо совпадает с y_i, либо имеет вид (1.10). Так как последовательность $\{y_i\}$, $i \in K_l$, ограничена, то отсюда с учетом (1.19) следует ограниченность последовательностей $\{\bar{y}_i^j\}$, $i \in K_l$, для всех $j \in J$. Выделим теперь для каждого $j \in J$ из последовательности $\{\bar{y}_i^j\}$, $i \in K_l$, сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{y}_i^j\}$, $i \in K_l^j \subset K_l$, и пусть u_j – ее предельная точка. Заметим, что $u_j \in D_j$, $j \in J$, в силу замкнутости множеств D_j. Положим для каждого $j \in J$

$$P_1^j = \{i \in K_l^j : j \in J_i\}, \quad P_2^j = K_l^j \setminus P_1^j.$$

Хотя бы одно из множеств P_1^j или P_2^j для каждого $j \in J$ состоит из бесконечного числа номеров. Перейдем теперь при каждом фиксированном $j \in J$ к пределу в равенствах (1.10) по $i \to \infty$, $i \in P_1^j$, с учетом (1.21), если множество P_1^j бесконечно, или в равенствах $\bar{y}_i^j = y_i$ по $i \to \infty$, $i \in P_2^j$, если бесконечным является множество P_2^j. Тогда получим равенства $\bar{y} = u_j$ для всех $j \in J$, из которых следует включение (1.17). Лемма доказана.

Замечание 1.8. *Если в методе положить*

$$\varepsilon_0 = 0, \tag{1.22}$$

то $D_{\varepsilon_0} = D$. Поскольку $y_i \notin D$ для всех $i \in K$ по построению, то согласно п. 3 метода ни одна из точек x_k не будет зафиксирована ввиду условия (1.8).

Кроме того, в этом случае не будут выбраны и числа ε_1, ε_2, ... В связи с этим отметим, что при выполнении (1.22) множества Q_i для всех $i \in K$ будут иметь вид (1.7).

С учетом замечания 1.8 приведем утверждение, касающееся свойств последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, построенной с условием (1.22).

Теорема 1.1. *Пусть число ε_0 в методе выбрано согласно (1.22). Тогда любая предельная точка последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, принадлежит X^*, а если при этом для всех $i \in K$ выполняется (1.13), то вся последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, сходится к множеству X^*.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$, $i \in K_1 \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, и $\bar{y}$ – ее предельная точка. Как отмечено выше, для всех $i \in K$ выполняется (1.7). Тогда по лемме 1.2 справедливо включение $\bar{y} \in D$, а значит, $f(\bar{y}) \geq f^*$. С другой стороны, ввиду (1.6) $f(y_i) \leq f^*$ для всех $i \in K$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K_1$, получим $f(\bar{y}) \leq f^*$. Таким образом, $f(\bar{y}) = f^*$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь все точки y_i, $i \in K$, удовлетворяют условию (1.13). В силу (1.7), (1.12) $M_{i+1} \subset M_i$, $i \in K$, а значит, $f(y_{i+1}) \geq f(y_i)$, $i \in K$. Отсюда с учетом ограниченности $\{y_i\}$, $i \in K$, следует, что $\{f(y_i)\}$, $i \in K$, сходится. Тогда в силу уже доказанного первого утверждения последовательность $\{f(y_i)\}$, $i \in K$, является минимизирующей, и по теореме ([6, с. 62]) второе утверждение теоремы тоже доказано.

Перейдем, наконец, к исследованию сходимости последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$. Прежде всего покажем, что при условии положительности всех чисел ε_k, $k \in K$, наряду с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K$, будет построена соглано (1.8) и последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$.

Лемма 1.3. *Пусть последовательность* $\{y_i\}$, $i \in K$, *построена методом 1, и при этом числа* ε_k, $k \in K$, *были выбраны так, что*

$$\varepsilon_k > 0 \quad \forall k \in K. \tag{1.23}$$

Тогда для каждого $k \in K$ *существует такой номер* $i = i_k$, *что выполняется равенство (1.8).*

Доказательство. 1) Пусть $k = 0$. Если $y_0 \in D_{\varepsilon_0}$, то согласно п. 3 метода $i_0 = 0$, $x_0 = y_{i_0} = y_0$, и равенство (1.8) для $k = 0$ выполняется. Поэтому будем считать, что $y_0 \notin D_{\varepsilon_0}$. Покажем тогда существование номера $i = i_0 > 0$, для которого справедливо включение

$$y_{i_0} \in D_{\varepsilon_0}. \tag{1.24}$$

Допустим противное, то есть

$$y_i \notin D_{\varepsilon_0} \quad \forall i \in K, \quad i > 0. \tag{1.25}$$

Выделим из ограниченной последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K'$, и пусть y' – ее предельная точка. Согласно п. 3 метода с учетом сделанных допущений для всех $i \in K$ множество Q_i имеет вид (1.7). Тогда по лемме 1.2 выполняется включение $y' \in D$, и, следовательно,

$$F(y') \leq 0. \tag{1.26}$$

С другой стороны, в силу (1.25) $F(y_i) > \varepsilon_0$ для всех $i \in K'$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K'$, получим $F(y') \geq \varepsilon_0 > 0$, что противоречит (1.26). Таким образом, существование номера i_0, для которого справедливо (1.24), доказано, и равенство (1.8) имеет место при $k = 0$.

2) Допустим теперь, что (1.8) выполняется при некотором фиксированном $k \geq 0$, то есть $x_k = y_{i_k}$ при выбранном значении k. Покажем существование такого номера $i_{k+1} > i_k$, что

$$y_{i_{k+1}} \in D_{\varepsilon_{k+1}}, \tag{1.27}$$

тогда $x_{k+1} = y_{i_{k+1}}$, и лемма будет доказана.

Предположим противное, то есть

$$y_i \notin D_{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall i > i_k. \tag{1.28}$$

Выберем среди точек y_i, $i > i_k$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K''$, и пусть y'' – ее предельная точка. Согласно (1.28) для всех $i \in K$, $i > i_k$, множества Q_i по алгоритму задаются в виде (1.7). Значит, по лемме 1.2 выполняется неравенство $F(y'') \leq 0$. Как и в первой части доказательства, из условия (1.28) с учетом (1.23) легко получается неравенство $F(y'') > 0$, противоречащее предыдущему. Таким образом, показано существование номера i_{k+1}, удовлетворяющего (1.27). Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Пусть последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, построена методом 1 с условием, что числа ε_k, $k \in K$, выбраны согласно (1.23), и*

$$\varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.29}$$

Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству X^*, а если для всех $k \in K$ выполняются неравенства

$$f(x_{k+1}) \geq f(x_k), \tag{1.30}$$

то вся последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, сходится к множеству X^*.

Доказательство. Так как в силу сделанного предположения последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, ограничена, то $\{x_k\}$, $k \in K$, также ограничена. Пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и $\bar{x}$ – ее предельная точка. Покажем, что

$$\bar{x} \in X^*, \tag{1.31}$$

тогда первое утверждение будет доказано. Действительно, для всех $k \in K$ справедливы неравенства

$$0 < F(x_k) \leq \varepsilon_k.$$

Отсюда с учетом (1.29) следует, что $\lim\limits_{k \in K} F(x_k) = 0$. Тогда

$$\lim_{k \in K} F(x_k) = \lim_{k \in K'} F(x_k) = F(\bar{x}) = 0,$$

и $\bar{x} \in D$, следовательно,

$$f(\bar{x}) \geq f^*.$$

С другой стороны, согласно (1.6) $f(x_k) \leq f^*$, $k \in K'$, а значит, $f(\bar{x}) \leq f^*$. Следовательно, $f(\bar{x}) = f^*$, и включение (1.31) доказано.

Пусть теперь для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, выполняется условие (1.30). Тогда ввиду ограниченности $\{x_k\}$, $k \in K$, последовательность $\{f(x_k)\}$, $k \in K$, является сходящейся, и по доказанному выше

$\lim\limits_{k\in K} f(x_k) = f^*$. Поэтому в силу вышеупомянутой известной теоремы ([6, с. 62]) второе утверждение тоже доказано.

Заметим, что условие (1.30) для построенной методом последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, имеет место, если, например, для всех $k \in K$ выполняются включения $M_{i_{k+1}} \subset M_{i_k}$, а точки y_{i_k} найдены согласно равенству (1.13), в котором $i = i_k$.

Отметим также, что для выделения из последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, минимизирующей подпоследовательности $\{x_{k_l}\}$, $l \in K$, достаточно номера k_l выбрать из условия $f(x_{k_{l+1}}) \geq f(x_{k_l})$ для всех $l \in K$.

При исследовании сходимости метода использовалось предположение об ограниченности последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$. Ясно, что ограниченность $\{y_i\}$, $i \in K$, можно обеспечить за счет соответствующего выбора множеств M_0 и Q_i.

Получим теперь для метода 1 оценки точности решения задачи и на их основе приведем оценки скорости сходимости последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$.

Опишем сначала такой алгоритм метода, где на каждой итерации легко оценить значение f^*.

Пусть в (1.5) $\operatorname{int} D \neq \emptyset$, и известна точка $v \in \operatorname{int} D$. Положим в методе $v^j = v$ для всех $j \in J$. Пусть на i-ой итерации найдены согласно (1.10) точки $\bar{y}_i^j \in$

D_j, $j \in J_i$, и зафиксирован такой номер $r_i \in J_i$, что $\bar{y}_i^{r_i} \in D$. Тогда, положив $\bar{y}_i = \bar{y}_i^{r_i}$, имеем оценки

$$f(y_i) \leq f^* \leq f(\bar{y}_i).$$

Покажем далее, что при некоторых дополнительных условиях на исходную задачу оценки близости значений $f(x_k)$ и приближений x_k к значению f^* и множеству X^* можно получить и для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, построенной общим методом.

Везде далее в данном параграфе будем считать, что для функций $f(x)$, $f_j(x)$, $j \in J$, и множества D справедливо следующее

Предположение 1.1. *Пусть функция $f(x)$ выпукла, а функции $f_j(x)$, $j \in J$, сильно выпуклы с константами сильной выпуклости μ_j соответственно. Кроме того, пусть множество D удовлетворяет условию Слейтера, и любая точка абсолютного минимума функции $f(x)$, при наличии таковой, не принадлежит множеству* $\operatorname{int} D$.

Теорема 1.3. *Пусть выполняется предположение 1.1, тогда решение задачи (1.5) единственно.*

Доказательство. Допустим, что это утверждение неверно. Выберем x_1^*, $x_2^* \in X^*$ так, что $x_1^* \neq x_2^*$, и положим $z = \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*$, где $0 < \alpha < 1$.

Тогда с учетом строгой выпуклости фунции $F(x)$ и равенств $F(x_1^*) = F(x_2^*) = 0$ имеем $F(z) < \alpha F(x_1^*) + (1-\alpha)F(x_2^*) = 0$, а значит, $f(z) > f^*$. С другой стороны, $f(z) \leq \alpha f(x_1^*) + (1-\alpha)f(x_2^*) = f^*$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

В связи с доказанным будем считать далее, что $X^* = \{x^*\}$.

Исследуем некоторые свойства функции $F(x)$.

Лемма 1.4. *Функция $F(x)$ сильно выпуклая с константой сильной выпуклости $\mu = \min\limits_{j\in J} \mu_j$.*

Доказательство. Зафиксируем точки u_0, $u_1 \in R_n$ и число $\alpha \in [0,1]$ такие, что $u_1 \neq u_2$. С учетом условия сильной выпуклости функций $f_j(x)$, $j \in J$, справедливы следующие соотношения: $F(\alpha u_0 + (1-\alpha)u_1) = \max\limits_{j\in J}\{f_j(\alpha u_0 + (1-\alpha)u_1)\} \leq \max\limits_{j\in J}\{\alpha f_j(u_0) + (1-\alpha)f_j(u_1) - \alpha(1-\alpha)\mu_j\|u_0 - u_1\|^2\} \leq \alpha \max\limits_{j\in J} f_j(u_0) + (1-\alpha)\max\limits_{j\in J} f_j(u_1) - \alpha(1-\alpha)\min\limits_{j\in J}\mu_j\|u_0 - u_1\|^2$. Отсюда следует справедливость утверждения.

Лемма 1.5. *([5, с. 221]). Пусть U – открытое выпуклое множество из $\mathrm{R_n}$, пусть функция $J(u)$ равномерно выпукла на U с модулем выпуклости $\delta(t)$, $\partial F(u)$ – субдифференциал функции $J(u)$ в точке $u \in \mathrm{R_n}$. Тогда необходимо выполняются* *неравенства*

$$J(u) \geq J(v) + \langle c(v), u - v \rangle + \delta(|u - v|),$$

$$\langle c(u) - c(v), u - v \rangle \geq 2\delta(|u - v|)$$

при всех $c(v) \in \partial J(v)$, $c(u) \in \partial J(u)$ *и всех* u, $v \in U$.

Положим

$$X_1^*(\delta) = \{x \in \mathrm{R_n} : \|x - x^*\| \leq \delta\}, \tag{1.32}$$

$$X_2^*(\gamma) = \{x \in \mathrm{R_n} : |f(x) - f^*| \leq \gamma\}, \tag{1.33}$$

где γ, $\delta \geq 0$. Пользуясь методикой, близкой к [11], докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.6. *Пусть* $\varepsilon > 0$, *точка* $y \in D_\varepsilon$ *такова, что* $y \neq x^*$ *и при всех* $\alpha \in (0, 1]$ *для точки* $z = \alpha y + (1 - \alpha)x^*$ *выполняется неравенство*

$$F(z) > 0. \tag{1.34}$$

Тогда справедливо включение

$$y \in X_1^*(\delta), \tag{1.35}$$

где $\delta = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$.

Доказательство. Согласно (1.34) и равенству $F(x^*) = 0$ имеем $F(z) - F(x^*) = F(x^* + \alpha(y - x^*)) - F(x^*) > 0$, а значит,

$$\frac{F(x^* + \alpha(y - x^*)) - F(x^*)}{\alpha} > 0$$

для любого $\alpha \in (0, 1]$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $\alpha \to +0$, получим для производной $F'(x^*, y - x^*)$ функции $F(x)$ в точке x^* по направлению $y - x^*$ следующее неравенство:

$$F'(x^*, y - x^*) \geq 0. \tag{1.36}$$

Известно (см., например, [16, с. 74]), что

$$F'(x^*, y - x^*) = \max\{\langle c(x^*), y - x^* \rangle : c(x^*) \in \partial F(x^*)\},$$

где $\partial F(x^*)$ – субдифференциал функции $F(x)$ в точке x^*. Тогда отсюда и из (1.36) вытекает существование такого $c'(x^*) \in \partial F(x^*)$, что

$$\langle c'(x^*), y - x^* \rangle \geq 0. \tag{1.37}$$

Поскольку функция $F(x)$ сильно выпукла, то согласно лемме 1.5 для вектора $c'(x^*)$ имеет место неравенство

$$F(y) \geq F(x^*) + \langle c'(x^*), y - x^* \rangle + \mu \|y - x^*\|^2,$$

из которого с учетом (1.37) и равенства $F(x^*) = 0$ следует, что $F(y) \geq \mu \|y - x^*\|^2$. Но по условию $F(y) \leq \varepsilon$. Значит,

$$\|y - x^*\| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \tag{1.38}$$

и утверждение леммы доказано.

Лемма 1.7. *Пусть выполняются условия леммы 1.6, и, кроме того, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L. Тогда*

$$y \in X_1^*(\delta) \bigcap X_2^*(\gamma), \tag{1.39}$$

где δ определено в (1.35), а $\gamma = L\delta$.

Доказательство утверждения следует из (1.35), а также неравенства

$$|f(y) - f(x^*)| \leq L\|y - x^*\| \tag{1.40}$$

и оценки (1.38).

Лемма 1.8. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для любой точки $y \in D_\varepsilon \bigcap E^*$, $y \neq x^*$, выполняется (1.35), а если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то справедливо и включение (1.39).*

Доказательство. Положим $z = \alpha y + (1 - \alpha)x^*$, где $\alpha \in (0, 1]$. Докажем справедливость неравенства (1.34). Тогда для точки y будут выполнены условия леммы 1.10, и утверждение (1.35) будет доказано.

Предположим противное, допустим, что $F(z) \leq 0$. Тогда $z \in D$ и $f(z) \geq f^*$. С другой стороны, поскольку $y \in E^*$, $x^* \in E^*$, а множество E^* выпукло, то $z \in E^*$, и $f(z) \leq f^*$. Следовательно,

$$f(z) = f^*. \tag{1.41}$$

Однако согласно теореме 1.3 решение задачи (1.5) единственно, а $z \neq x^*$, так как $y \neq x^*$ и $\alpha > 0$. Полученное с равенством (1.41) противоречие доказывает неравенство (1.34), а значит, и включение (1.35).

Вторая часть утверждения леммы вытекает из (1.35), (1.40), (1.38).

Лемма 1.9. *Пусть последовательность* $\{y_i\}$, $i \in K$, *построена методом 1. Если для некоторого номера* $i \in K$ *и* $r > 0$ *выполняется* $y_i \in D_r$, *то* $y_i \in X_1^*(\delta)$ *при* $\delta = \sqrt{\dfrac{r}{\mu}}$, *а если к тому же* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица, то* $y_i \in X_1^*(\delta) \bigcap X_2^*(\gamma)$ *при* $\delta = \sqrt{\dfrac{r}{\mu}}$, $\gamma = L\delta$.

Доказательство утверждений непосредственно следует из леммы 1.8, так как согласно (1.6) $y_i \in E^*$, и $y_i \neq x^*$ для всех $i \in K$.

Лемма 1.9 дает возможность оценивать на каждой итерации близость точки y_i к решению задачи. А именно, поскольку для всех $i \in K$ выполняется включение $y_i \in D_{r_i}$, где $r_i = F(y_i)$, то по лемме 1.9

$$\|y_i - x^*\| \leq \delta_i,$$

где $\delta_i = \sqrt{\dfrac{F(y_i)}{\mu}}$. Кроме того, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то для всех $i \in K$

справедливо также неравенство

$$|f(y_i) - f^*| \le L\delta_i.$$

Теорема 1.4. *Пусть последовательность* $\{x_k\}$, $k \in K$, *построена предложенным методом. Тогда для каждого* $k \in K$ *имеет место следующая оценка:*

$$\|x_k - x^*\| \le \delta_k, \tag{1.42}$$

где $\delta_k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_k}{\mu}}$. *Если же* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица, то, кроме (1.42), при каждом* $k \in K$ *справедлива также оценка*

$$|f(x_k) - f^*| \le L\delta_k. \tag{1.43}$$

Доказательство. Согласно (1.8) $x_k = y_{i_k}$ для всех $k \in K$, причем $y_{i_k} \in D_{\varepsilon_k}$ и $y_{i_k} \ne x^*$. Тогда по лемме 1.9 выполняется включение $x_k \in X_1^*(\delta_k)$, $k \in K$, а значит, и неравенство (1.42). При условии Липшица на функцию $f(x)$ по той же лемме 1.9 имеет место и оценка (1.43). Теорема доказана.

Зададим теперь числа ε_k, $k \ge 1$, в методе в виде

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k^p}, \tag{1.44}$$

где $p > 0$. Тогда согласно (1.42) для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$\|x_k - x^*\| \le \frac{1}{\sqrt{\mu}k^{p/2}}, \;\; k \ge 1. \tag{1.45}$$

Кроме того, если для $f(x)$ выполняется условие Липшица, то наряду, с (1.45), имеем также в силу (1.43) оценки

$$|f(x_k) - f^*| \leq \frac{L}{\sqrt{\mu} k^{p/2}}, \ k \geq 1. \tag{1.46}$$

Замечание 1.9. *При очень большом $p > 0$ значение в (1.44) ε_k очень мало. Но при малом ε_k для построения точки $x_k = y_{i_k}$, для которой с учетом необходимых предположений справедливы оценки типа (1.45), (1.46), может понадобится много вспомогательных итераций по i, а количество этих вспомогательных итераций с построением точек y_i в оценке никак не учитывается. Отсюда приведенные оценки скорости сходимости (1.45), (1.46) несколько условны, так как касаются только для точек x_k и не отражает полного количества итераций, необходимых для построения точек x_k.*

Замечание 1.10. *Как уже отмечено в (1.44), числа ε_k, $k \geq 1$, допустимо выбирать, как и число ε_0, на предварительном шаге метода. Однако, в таком случае последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, не будет адаптирована к процессу минимизации. Поэтому в методе предусмотрена возможность выбора чисел ε_k, $k \geq 1$, на шаге 3, то есть в ходе отыскания приближений. Приведем пример задания последова-*

тельности $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, *связанной с процессом построения* $\{x_k\}$, $k \in K$.

Не выбирая конкретного значения, считаем ε_0 *настолько большим, что* $y_0 \in D_{\varepsilon_0}$ *и* $x_0 = y_0$. *Для всех* $k \geq 0$ *положим*

$$\varepsilon_{k+1} = \sigma_k F(x_k),$$

где $0 < \sigma_k < 1$. *Тогда для* $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, *справедливо* (1.23), *а при условии, что* $\sigma_k \to 0$, $k \in K$, *выполняется* (1.29).

2 Метод отсечений с возможностью построения на его основе смешанных алгоритмов

В данном параграфе излагается метод отсечений для решения задачи (1.5), в которой область ограничений D имеет более общий вид. Излагаемый метод также характерен тем, что предусматривает возможность обновления аппроксимирующих множеств. Метод отличается от метода 1, в частности, способами построения аппроксимирующих множеств.

Пусть для функций $f(x)$, $f_j(x)$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, множеств D_j, $j \in J$, выполняются условия, приведенные в § 1. Пусть

$$D' = \{x \in \mathrm{R_n} : f_j(x) \leq 0, \ j \in J\}, \tag{2.1}$$

$D'' \subset \mathrm{R_n}$ – выпуклое замкнутое множество,

$$D = D' \bigcap D''.$$

Решается задача (1.5).

Заметим, что внутренность множества D может быть пустой, если, например, $\mathrm{int}\, D' = \emptyset$ или $\mathrm{int}\, D'' = \emptyset$.

Определим функцию $F(x)$ как и в § 1, и положим

$$D'_\varepsilon = \{x \in \mathrm{R_n} : F(x) \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon \geq 0$. Будем использовать обозначения f^*, X^*, E^*, K предыдущего параграфа.

В настоящем параграфе метод решения задачи (1.5) вырабатывает последовательности приближений y_i, $i \in K$, x_k, z_k, $k \in K$, и заключается в следующем.

Метод 2. *Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset \mathrm{R_n}$, содержащее хотя бы одну точку множества X^*, например, точку x^*. Задается число $\varepsilon_0 \geq 0$. Полагается $k = 0$, $i = 0$.*

1. *Находится точка*

$$y_i \in M_i \bigcap D'' \bigcap E^*. \tag{2.2}$$

Если выполняется включение

$$y_i \in D', \tag{2.3}$$

то $y_i \in X^*$, и процесс завершается.

2. *Если $y_i \notin D'_{\varepsilon_k}$, то выбирается выпуклое замкнутое множество $G_i \subset \mathrm{R_n}$, содержащее точку x^*, полагается*

$$Q_i = M_i \bigcap G_i, \tag{2.4}$$

$$u_i = y_i, \tag{2.5}$$

и следует переход к п. 4.

3. *Полагается $i_k = i$,*

$$x_k = y_{i_k}, \tag{2.6}$$

выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i = Q_{i_k}$ *такое, что*

$$x^* \in Q_i. \tag{2.7}$$

Выбирается точка

$$z_k \in M_{i_k} \bigcap D'', \tag{2.8}$$

удовлетворяющая неравенствам

$$f(x_k) \le f(z_k) \le f^*. \tag{2.9}$$

Если $z_k \in D'$, *то* $z_k \in X^*$, *и процесс завершается. В противном случае полагается*

$$u_i = z_k. \tag{2.10}$$

Задается число $\varepsilon_{k+1} \ge 0$, *значение* k *увеличивается на единицу.*

4. *Выбирается конечное множество*

$$A_i \subset \partial F(u_i) \tag{2.11}$$

или конечные множества

$$A_i^j \subset \partial f_j(u_i) \tag{2.12}$$

для всех $j \in J_i = \{j \in J : y_i \notin D_j\}$.

5. *Полагается*

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap T_i, \tag{2.13}$$

где

$$T_i = \{x \in \mathrm{R_n} : F(u_i) + \langle a, x - u_i\rangle \le 0 \quad \forall a \in A_i\} \tag{2.14}$$

в случае (2.11), или

$$T_i = \bigcap_{j \in J_i} \{x \in \mathrm{R_n} : f_j(u_i) + \langle a, x - u_i\rangle \le 0 \quad \forall a \in A_i^j\} \tag{2.15}$$

в случае (2.12). Следует переход к п. 1 при i*, увеличенном на единицу.*

Прежде, чем обсуждать свойства строящихся методом последовательностей, приведем некоторые замечания к методу.

Замечание 2.1. *Выбор точек* y_i *из условия (2.2) возможен для каждого* $i \in K$*. Действительно, поскольку множество* M_0 *по построению содержит точку* x^**, и согласно п. 2 метода* $x^* \in G_i$ *при всех* $i \in K$*, то ввиду (2.4), (2.7), (2.13)* $x^* \in M_i$ *для всех* $i \in K$*. В то же время* $x^* \in D''$*, и, кроме того,* $x^* \in E^*$*. Следовательно,*

$$M_i \bigcap D'' \bigcap E^* \ne \emptyset \quad \forall i \in K.$$

Замечание 2.2. *В частности, точку* y_i *можно отыскивать согласно равенству*

$$f(y_i) = \min\{f(x) : x \in M_i \bigcap D''\}. \tag{2.16}$$

Если $f(x)$ – линейная функция, то точки y_i естественно искать в виде (2.16).

Условие (2.2) позволяет отыскивать y_i, как точки приближенного минимума функции $f(x)$ на множествах $M_i \bigcap D''$, $i \in K$.

Замечание 2.3. *Если для точки y_i выполняется включение (2.3), то в силу (2.2) $y_i \in D$ и $f(y_i) = f^*$, то есть, как отмечено в п. 1 метода, y_i – решение исходной задачи.*

Замечание 2.4. *Множество M_0 можно выбирать разными способами. Например, допустимо считать, что $M_0 = \mathrm{R_n}$. Если множество D'' определено системой линейных равенств или неравенств, а функции $f(x)$ и $f_j(x)$, $j \in J' \subset J$, линейны, то множество M_0 удобно задать в виде (1.14).*

Ввиду (2.4), (2.7) для задания множеств Q_i, участвующих в построении аппроксимирующих множеств M_{i+1}, также немало возможностей. Если для всех $i \in K$, независимо от принадлежности точки y_i множеству D'_{ε_k}, положить $Q_i = M_i$, считая $G_i = \mathrm{R_n}$, то согласно (2.13) $M_{i+1} = M_i \bigcap T_i$, $i \in K$. В таком случае от итерации к итерации происходит накопление отсекающих плоскостей, и никаких обновлений погружающих множеств M_i в процессе решения задачи не происходит. Покажем теперь аналогично замечанию 1.7 к методу 1, как за счет выбора множеств Q_i можно проводить в методе 2 вышеупомянутые обновления.

Замечание 2.5. *Допустим, что в соотношении (2.4) $G_i = \mathrm{R_n}$ при всех $i \in K$, для некоторого номера $i = i_k$ точка y_i выбрана согласно*

$$y_i \in D'_{\varepsilon_k}, \qquad (2.17)$$

а множество Q_i – согласно (1.16), где $0 \leq r_i \leq i = i_k$. Согласно выбору множества $Q_i = Q_{i_k}$ выполняются включения (2.7) при всех $r_i = 0, \ldots, i$. В связи с этим множество Q_{i_k} можно задать с помощью любых множеств $M_0, \ldots, M_{i_k}$, которые построены к i_k-ому шагу. Следовательно, на каждом шаге $i = i_k$ будет инициирован процесс отбрасывания любых накопившихся к шагу i_k секущих плоскостей.

Замечание 2.6. *Для выбора точек z_k из условий (2.8), (2.9) тоже есть разные возможности. Например, не проводя специальных вычислений, можно положить*

$$z_k = x_k.$$

При дополнительных условиях на $f(x)$ для поиска точки z_k допустимо применить метод внешних штрафных функций. Тогда в качестве z_k можно *выбрать ту из точек минимума вспомогательных штрафных функций на $M_{i_k} \bigcap D''$, в которой значение целевой функции окажется не меньшим, чем значение $f(x_k)$. В таком случае построится смешанный алгоритм на основе метода 2 с привлечением метода штрафов, а поскольку сходимость метода отсечений ниже будет доказана, то тем самым будет обоснована и сходимость смешанного алгоритма.*

Перейдем к исследованию сходимости метода. Будем считать далее в этом параграфе, что последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, и последовательность $\{z_k\}$, $k \in K$, в случае ее построения, ограничены.

Лемма 2.1. *Для всех $i \in K$ справедливо включение*

$$x^* \in M_i. \tag{2.18}$$

Доказательство. При $i = 0$ включение (2.18) выполняется по условию выбора множества M_0 на предварительном шаге метода. Допустим теперь, что (2.18) имеет место при $i = l \geq 0$. Покажем справедливость включения (2.18) при $i = l + 1$, тогда лемма будет доказана.

Отметим, что ввиду (2.2), (2.7) с учетом индукционного предположения $x^* \in Q_l$. Значит, для обоснования леммы согласно (2.13) достаточно доказать,

что
$$x^* \in T_l. \tag{2.19}$$

Предположим сначала, что множество T_l было выбрано на шаге $i = l$ согласно (2.14). Так как функция $F(x)$ выпукла, то для всех $a \in A_l$ выполняется неравенство $F(x^*)-F(u_l) \geq \langle a, x^*-u_l \rangle$. Отсюда с учетом того, что $F(x^*) \leq 0$, имеем $F(u_l)+\langle a, x^*-u_l \rangle \leq 0$ для всех $a \in A_l$, и включение (2.19) доказано.

Пусть теперь множество T_l имеет вид (2.15), где $i = l$. Поскольку согласно (2.5), (2.10) $u_l \notin D'$, то $J_l \neq \emptyset$. Тогда для всех $a \in A_l^j$, $j \in J_l$ в силу выпуклости функции $f_j(x)$ имеют место неравенства $f_j(x^*) - f_j(u_l) \geq \langle a, x^* - u_l \rangle$. Но $f_j(x^*) \leq 0$ для всех $j \in J$, в том числе и для всех $j \in J_l$. Следовательно, $f_j(u_l) + \langle a, x^* - u_l \rangle \leq 0$ для всех $a \in A_l^j$, $j \in J_l$. Включение (2.19), а с ним и лемма, доказаны.

Лемма 2.2. *Пусть последовательность* $\{u_i\}$, $i \in K$, *построена методом 2 с условием, что для всех* $i \in K$, *начиная с некоторого номера* $\tilde{i} \geq 0$ *множества* Q_i *выбраны согласно (2.4). Тогда для любых номеров* i', $i'' \in K$ *таких, что*
$$i'' > i' \geq \tilde{i},$$
выполняется включение
$$u_{i''} \in T_{i'}. \tag{2.20}$$

Доказательство. В силу (2.2), (2.5) и (2.8), (2.10) для всех $i \in K$ имеют место включения $u_i \in M_i$. Значит,

$$u_{i''} \in M_{i''}. \tag{2.21}$$

Согласно (2.13) и условию леммы $M_{i''} \subset M_{i'+1} \subset T_{i'}$. Отсюда и из (2.21) следует (2.20). Лемма доказана.

Отметим, что при каждом $i \in K$, независимо от выполнения для точки y_i условия (2.17), множество Q_i можно задавать в виде (2.4), поскольку в силу леммы 2.1 включение (2.7) имеет место. Если Q_i для всех $i \geq \tilde{i} \geq 0$ выбирать в виде (2.4), то, начиная с шага $\tilde{i}$, будет происходить накопление отсекающих плоскостей и обновлений погружающих множеств не произойдет. С учетом этого замечания сформулируем следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Пусть последовательность* $\{u_i\}$, $i \in K$, *построена методом 2 с условием, что для всех* $i \in K$, *начиная с некоторого номера* $\tilde{i} \geq 0$, *множества* Q_i *выбраны согласно (2.4). Тогда любая предельная точка последовательности* $\{u_i\}$, $i \in K$, *принадлежит множеству* D.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существует такая сходящаяся подпоследовательность $\{u_i\}$, $i \in K_1 \subset K$, последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, что ее предельная точка $\bar{u}$ удовлетворяет неравенству $F(\bar{u}) > 0$. Положим $F(\bar{u}) = \gamma$. Так как функция $F(x)$ непрерывна, то найдется окрестность ω точки $\bar{u}$ такая, что

$$F(x) \geq \frac{\gamma}{2}$$

для всех $x \in \omega$. Зафиксируем такой номер $\hat{i} \in K_1$, что $\hat{i} \geq \tilde{i}$ и для всех $i \in K_1$, $i \geq \hat{i}$ имеет место включение $u_i \in \omega$. Тогда

$$F(u_i) = \max_{j \in J} f_j(u_i) \geq \frac{\gamma}{2} \quad \forall i \in K_1, \quad i \geq \hat{i}. \tag{2.22}$$

В силу (2.22) и конечности множества J существует $r \in J$, при котором для бесконечного числа номеров $i \in K_1$, $i \geq \hat{i}$, выполнется неравенство

$$f_r(u_i) \geq \frac{\gamma}{2}. \tag{2.23}$$

Положим

$$K_2 = \{i \in K_1 : i \geq \hat{i},\ f_r(u_i) \geq \frac{\gamma}{2}\}.$$

Выберем номера $i', i'' \in K_2$ так, что $i'' > i'$. Тогда по лемме 2.2 выполняется включение (2.19). Если множество T_i при $i = i'$ было выбрано согласно (2.14), то ввиду (2.19)

$$F(u_{i'}) + \langle a, u_{i''} - u_{i'} \rangle \leq 0 \quad \forall a \in A_{i'}. \tag{2.24}$$

Если же $T_{i'}$ имеет вид (2.15), то из того же включения (2.19) следует неравенство

$$f_r(u_{i'}) + \langle a, u_{i''} - u_{i'} \rangle \leq 0 \qquad (2.25)$$

для всех $a \in A^r_{i'}$, так как $f_r(u_{i'}) > 0$, и $r \in J_{i'}$. Таким образом, из (2.24), (2.25) и неравенств (2.22), (2.23) при $i = i'$ имеем неравенство

$$\langle a, u_{i''} - u_{i'} \rangle \leq -\frac{\gamma}{2} \qquad (2.26)$$

для всех $a \in A_{i'}$, если множество $T_{i'}$ выбрано в виде (2.14), и имеем то же неравенство (2.26) для всех $a \in A^r_{i'}$, если $T_{i'}$ задано равенством (2.15).

Далее, ввиду ограниченности последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, найдется (см., напр., [15, с. 121]) такое число $\theta > 0$, что для всех $a \in \partial F(u_i)$, $a \in \partial f_r(u_i)$, $i \in K_2$, выполняется неравенство

$$\|a\| \leq \theta. \qquad (2.27)$$

Тогда из (2.26), (2.27) следует, что

$$\theta \|u_{i''} - u_{i'}\| \geq \frac{\gamma}{2}. \qquad (2.28)$$

Выберем теперь для каждого $i \in K_2$ такой номер $p_i \in K_2$, что $p_i \geq i + 1$. Согласно (2.28) $\theta\|u_{p_i} - u_i\| \geq \gamma/2$. Последнее неравенство противоречиво, поскольку $u_i \to \bar{u}$ и $u_{p_i} \to \bar{u}$ при $i \to \infty$, $i \in K_2$. Лемма доказана.

Теорема 2.1. *Если для последовательности* $\{u_i\}$, $i \in K$, *выполняются условия леммы 2.3, то любая ее предельная точка принадлежит множеству* X^*.

Доказательство. Пусть $\{u_i\}$, $i \in K_1 \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, и $\bar{u}$ – ее предельная точка. Тогда по лемме 2.3 справедливо включение $\bar{u} \in D$, а значит $f(\bar{u}) \geq f^*$. С другой стороны, ввиду (2.2), (2.5) и (2.9), (2.10) для всех $i \in K$, $i \geq \tilde{i}$, выполняется неравенство $f(u_i) \leq f^*$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $i \in K_1$, получим $f(\bar{u}) \leq f^*$. Таким образом, $f(\bar{u}) = f^*$, и утверждение теоремы доказано.

Заметим,что условия (2.8)–(2.10) выбора точек z_k позволяют задавать точки $u_i = z_k$ в виде (2.5), считая $z_k = x_k = y_{i_k}$. Следовательно, допустим случай, когда, начиная с некоторого номера $\tilde{i} \geq 0$, множества Q_i имеют вид (2.4), а члены последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, – вид (2.5). С учетом этого замечания приведем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия леммы 2.3. Кроме того, пусть для всех* $i \geq \tilde{i} \geq 0$ *выполняются равенства (2.5), и точки* y_i *выбраны согласно условию (2.16). Тогда последовательность* $\{u_i\}$, $i \in K$, *сходится к множеству* X^*.

Доказательство. В силу (2.4), (2.13) для всех $i \in K$, $i \geq \tilde{i}$, имеют место включения $M_{i+1} \subset M_i$, а значит, согласно (2.5), (2.16) $f(u_{i+1}) \geq f(u_i)$, $i \in K$, $i \geq \tilde{i}$. Отсюда ввиду ограниченности $\{u_i\}$, $i \in K$, следует, что $\{f(u_i)\}$, $i \in K$, является минимизирующей, и с учетом известной теоремы (напр., [6, с. 62]) утверждение доказано.

Перейдем теперь к исследованию последовательностей $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, строящихся описанным методом.

Замечание 2.7. *Отметим, что если положить $\varepsilon_0 = 0$, то при всех $i \in K$ в силу соотношений $D' = D'_{\varepsilon_0}$ и $y_i \in D'$ шаг 3 метода будет пропускаться, и точки x_k, z_k, $k \in K$, построены не будут. Аналогично, если при некотором $k > 0$ положить на шаге 3 метода $\varepsilon_{k+1} = 0$, то при всех $i > i_k$ будут выполняться равенства (2.4), (2.5), значения k перестанут изменяться, и процесс построения точек x_k, z_k прекратится.*

В связи с замечанием 2.7 прежде всего покажем, что при условии положительности всех чисел ε_k, $k \in K$, вместе с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K$, будут построены и последовательности $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$.

Лемма 2.4. *Пусть последовательность* $\{y_i\}$, $i \in K$, *построена методом* 2 *с условием, что числа* ε_k, $k \in K$, *выбраны согласно* (1.23). *Тогда для каждого* $k \in K$ *существует такой номер* $i = i_k \in K$, *что выполняется равенство* (2.6).

Доказательство. 1) Пусть $k = 0$. Если $y_0 \in D'_{\varepsilon_0}$, то согласно п. 3 метода $i_0 = 0$, $x_0 = y_0$, и равенство (2.6) при $k = 0$ выполняется. Поэтому будем считать, что $y_0 \notin D'_{\varepsilon_0}$. Покажем тогда существование номера $i = i_0 > 0$, для которого справедливо включение

$$y_{i_0} \in D'_{\varepsilon_0}. \tag{2.29}$$

Допустим противное, то есть

$$y_i \notin D'_{\varepsilon_0} \quad \forall i \in K, \quad i > 0. \tag{2.30}$$

Выделим из последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K' \subset K$, и пусть y' – ее предельная точка. Согласно п. 2 метода с учетом допущения (2.30) множество Q_i для всех $i \in K$, $i > 0$, имеет вид (2.4), и для тех же i выполняется равенство (2.5). Тогда по лемме 2.3 имеем включение $y' \in D$, и

$$F(y') \leq 0. \tag{2.31}$$

С другой стороны, в силу (2.30) $F(y_i) > \varepsilon_0$ для всех $i \in K'$. Переходя в последнем неравенстве к пределу по $i \in K'$, получим $F(y') \geq \varepsilon_0 > 0$, что противоречит (2.31). Таким образом, существование номера $i_0 > 0$, для которого справедливо (2.29), доказано, и равенство (2.6) при $k = 0$ имеет место.

2) Допустим теперь, что (2.6) выполняется при некотором фиксированном $k \geq 0$, то есть $x_k = y_{i_k}$ при выбранном k. Покажем существование такого номера $i_{k+1} > i_k$, что

$$y_{i_{k+1}} \in D'_{\varepsilon_{k+1}}, \tag{2.32}$$

тогда $x_{k+1} = y_{i_{k+1}}$, и лемма будет доказана.

Предположим противное, то есть

$$y_i \notin D'_{\varepsilon_{k+1}} \quad \forall i \in K, \quad i > i_k. \tag{2.33}$$

Выберем среди точек y_i, $i \in K$, $i > i_k$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K''$. Пусть y'' – ее предельная точка. Согласно предположению (2.33) для всех $i \in K$, $i > i_k$, выполняются равенства (2.5), а множества Q_i задаются в виде (2.4). Значит, по лемме 2.3 имеет место неравенство

$$F(y'') \leq 0. \tag{2.34}$$

Как и в первой части доказательства из (2.33) с учетом (1.23) легко получается неравенство $F(y'') > 0$, противоречащее (2.34). Таким образом, доказано существование номера i_{k+1}, для которого справедливо (2.32). Лемма доказана.

Из леммы 2.4 следует, что в случае (1.23) для каждого $k \in K$ зафиксируется в виде (2.6) точка x_k, а значит, будет выбрана согласно (2.9) и точка z_k.

Теорема 2.3. *Пусть последовательности $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, построены методом 2 с условием, что числа ε_k, $k \in K$, выбраны согласно (1.23) и (1.29). Тогда любые предельные точки последовательностей $\{x_k\}$, $k \in K$, и $\{z_k\}$, $k \in K$, принадлежат множеству X^*.*

Доказательство. Напомним, что условие (1.23) гарантирует существование последовательностей $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$. Отметим, что последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, ограничена в силу (2.6) и ограниченности $\{y_i\}$, $i \in K$. Пусть $\{x_k\}$, $k \in K_1 \subset K$, и $\{z_k\}$, $k \in K_2 \subset K$, – любые сходящиеся подпоследовательности последовательностей $\{x_k\}$, $k \in K$, и $\{z_k\}$, $k \in K$, а $\bar{x}$ и $\bar{z}$, соответственно, – их предельные точки. Покажем, что

$$\bar{x} \in X^*, \quad \bar{z} \in X^*, \tag{2.35}$$

тогда утверждение будет доказано.

Так как $y_{i_k} \in D'_{\varepsilon_k}$, $k \in K$, то ввиду (2.6) $0 < F(x_k) \leq \varepsilon_k$, $k \in K$, и из (1.29) следует, что

$\lim\limits_{k\in K} F(x_k) = 0$. Тогда

$$\lim_{k\in K} F(x_k) = \lim_{k\in K_1} F(x_k) = F(\bar{x}) = 0,$$

и $\bar{x} \in D'$. Кроме того, $x_k \in D''$ для всех $k \in K$, и в силу замкнутости множества D'' выполняется включение $\bar{x} \in D''$. Таким образом, $\bar{x} \in D$ и потому $f(\bar{x}) \geq f^*$. С другой стороны, согласно (2.2), (2.6) $f(x_k) \leq f^*$, $k \in K_1$, а значит, $f(\bar{x}) \leq f^*$. Следовательно, $f(\bar{x}) = f^*$, и первое из включений (2.35) доказано.

Далее, последовательности $\{z_k\}$, $k \in K_2$, соответствует подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K_2$. Выделим из $\{x_k\}$, $k \in K_2$, сходящуюся подпоследовательность $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K_2$, и пусть x' – ее предельная точка. Заметим, что по доказанному $x' \in X^*$, то есть

$$f(x') = f^*. \tag{2.36}$$

Перейдем теперь в неравенствах (2.9) к пределу по $k \to \infty$, $k \in K'$, с учетом, что $z_k \to \bar{z}$, $k \in K'$. Тогда $f(x') \leq f(\bar{z}) \leq f^*$, и ввиду (2.36) $f(\bar{z}) = f^*$. Следовательно, второе из включений (2.36) также имеет место. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются условия теоремы 2.3. Если для точек x_k, $k \in K$, выполняются неравенства*

$$f(x_{k+1}) \geq f(x_k) \quad \forall k \in K, \tag{2.37}$$

то последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, *сходится к множеству* X^*. *Если точки* z_k, $k \in K$, *выбраны с условием, что*

$$f(z_{k+1}) \geq f(z_k) \quad \forall k \in K, \tag{2.38}$$

то последовательность $\{z_k\}$, $k \in K$, *сходится к множеству* X^*.

Доказательство. Пусть имеют место неравенства (2.37), (2.38). Тогда в силу ограниченности последовательностей $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, последовательности $\{f(x_k)\}$, $\{f(z_k)\}$, $k \in K$, сходятся, и по теореме 2.3 выполняются равенства $\lim\limits_{k \in K} f(x_k) = f^*$, $\lim\limits_{k \in K} f(z_k) = f^*$. Поэтому согласно вышеупомянутой теореме ([6, с. 62]) последовательности $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, сходятся к множеству X^*. Утверждение доказано.

При исследовании сходимости метода использовалось условие ограниченности последовательностей $\{y_i\}$, $i \in K$, $\{z_k\}$, $k \in K$. Ясно, что выполнение этого условия можно обеспечить за счет соответствующего выбора множеств M_0 и Q_i.

Коротко обсудим далее возможности задания последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$.

Замечание 2.8. *Числа* ε_k, $k \geq 1$, *допустимо выбирать, как и значение* ε_0, *на предварительном ша-*

ге метода. Однако в таком случае последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, не будет адаптирована к процессу минимизации. Поэтому в методе предусмотрена возможность задания чисел ε_k, $k \geq 1$, на шаге 3, то есть в ходе построения приближений x_k, z_k. Приведем пример такого задания последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$.

Не выбирая конкретного значения, считая ε_0 настолько большим, что $y_0 \in D'_{\varepsilon_0}$. Тогда $x_0 = y_0$, а точку z_0 можно выбрать, например, в виде $z_0 = x_0$. Для всех $k \geq 0$ положим $\varepsilon_{k+1} = \gamma_k F(x_k)$ или $\varepsilon_{k+1} = \gamma_k F(z_k)$, где $0 < \gamma_k < 1$. Для такой последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, справедливо (1.23), а при условии, что $\gamma_k \to 0$, $k \in K$, выполняется условие (1.29).

Получим теперь для метода 2 при некоторых дополнительных условиях на исходную задачу оценки точности ее решения, а также оценки скорости сходимости последовательностей $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$.

Будем предполагать далее в этом параграфе, что $D'' = \mathrm{R_n}$, то есть $D = D'$. Пусть, кроме того, для функций $f(x)$, $f_j(x)$, $j \in J$, и множества D выполняется предположение 1.1. Заметим, что в силу предположения 1.1 и согласно теореме 1.3 решение задачи (1.5) единственно, то есть $X^* = \{x^*\}$.

Как и ранее будем считать, что множества $X_1^*(\delta)$,

$X_2^*(\gamma)$ заданы в виде (1.32), (1.33) соответственно.

В силу предположения 1.1 справедлива лемма 1.8, которая дает возможность оценивать на каждой итерации близость точек u_i, $i \in K$, построенных предложенным методом, к решению исходной задачи. А именно, поскольку для каждого $i \in K$ выполняются включения $u_i \in E^*$, $u_i \in D'_{r_i}$, где $r_i = F(u_i) > 0$, и при этом $u_i \neq x^*$, то по лемме 1.8 имеем $u_i \in X_1^*(\delta_i)$ или, что то же самое,

$$\|u_i - x^*\| \leq \delta_i,$$

где $\delta_i = \sqrt{\frac{F(u_i)}{\mu}}$. Кроме того, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константной L, то согласно той же лемме 1.8 справедливо включение $u_i \in X_1^*(\delta_i) \bigcap X_2^*(L\delta_i)$, а значит,

$$|f(u_i) - f^*| \leq L\delta_i.$$

Приведем теперь оценки точности решения для последовательностей $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$.

Теорема 2.5. *Для последовательностей* $\{x_k\}$, $\{z_k\}$, $i \in K$, *построенных методом 2 с условием (1.23), справедливы следующие три утверждения.*

1) Имеет место оценка

$$\|x_k - x^*\| \leq \delta_k \quad \forall k \in K,$$

где $\delta_k = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu}}$.

2) Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, то

$$|f(x_k) - f^*| \leq L\delta_k \quad \forall k \in K, \tag{2.39}$$

$$|f(z_k) - f^*| \leq L\delta_k \quad \forall k \in K. \tag{2.40}$$

3) Если точки z_k, $k \in K$, выбраны на шаге 3 метода с дополнительным условием

$$z_k \in D'_{\varepsilon_k}, \tag{2.41}$$

то справедлива оценка

$$\|z_k - x^*\| \leq \delta_k \quad \forall k \in K. \tag{2.42}$$

Доказательство. Так как согласно пп. 1, 3 метода

$$y_{i_k} \in E^*, \quad y_{i_k} \neq x^*, \quad y_{i_k} \in D'_{\varepsilon_k}, \quad k \in K, \tag{2.43}$$

то ввиду леммы 1.8 и равенства (2.6) для всех $k \in K$ выполняется включение $x_k \in X_1^*(\delta_k)$, где $\delta_k = \sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\mu}}$. Следовательно, первое утверждение теоремы доказано.

Далее, при условии Липшица на функцию $f(x)$ по леммы 1.8 в силу (2.43), (2.6) для всех $k \in K$ справедливо включение $x_k \in X_2^*(\gamma_k)$, где $\gamma_k = L\delta_k$, а значит, и неравенство (2.39). Из (2.39) и (2.9) следует (2.40).

Пусть, наконец, для точки z_k выполняется условие (2.41). Так как, кроме того, $z_k \in E^*$ и $z_k \neq x^*$,

$k \in K$, то согласно той же лемме 1.8 $z_k \in X_1^*(\delta_k)$, то есть имеет место оценка (2.42). Теорема доказана.

Приведем при тех же дополнительных условиях на исходную задачу оценки скорости сходимости последовательностей $\{x_k\}$ и $\{z_k\}$, $k \in K$.

Как уже отмечалось, числа ε_k для всех $k \in K$ допустимо задать на предварительном шаге метода. Пусть числа ε_k, $k \in K$, в методе заданы согласно (1.44). Тогда согласно теореме 2.5 для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, справедлива оценка (1.45), а для последовательности $\{z_k\}$, $k \in K$, построенной с условием (2.41), имеет место оценка

$$\|z_k - x^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu} k^{p/2}}, \quad k \geq 1.$$

Кроме того, если для $f(x)$ выполняется условие Липшица, то в силу (2.39), (2.40) справедливы также оценки

$$|f(x_k) - f^*| \leq \frac{L}{\sqrt{\mu} k^{p/2}}, \quad |f(z_k) - f^*| \leq \frac{L}{\sqrt{\mu} k^{p/2}}, \quad k \geq 1.$$

3 Метод проектирования точки, использующий аппроксимирующие множества

В данном параграфе описывается метод нахождения проекции точки на выпуклое множество. Приближения в алгоритме находятся путем проектирования точки на некоторые множества, которые задаются системами линейных неравенств и аппроксимируют исходное множество в окрестности решения. Метод характерен тем, что не требует вложения каждого из этих множеств в предыдущее. Как и в методах из предыдущих параграфов, такая особенность позволяет при построении аппроксимирующих множеств периодически освобождаться от части задающих их неравенств и тем самым существенно упрощать вспомогательные задачи отыскания итерационных точек.

Пусть множество $D'' \subset \mathrm{R_n}$ выпукло и замкнуто, функции $f_j(x)$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$, выпуклы в $\mathrm{R_n}$, множество D' задано в виде (2.1), и $D = D' \bigcap D''$. Решается задача отыскания проекции точки $y \in \mathrm{R_n}$ на множество D.

Положим $p^* = Pr(y, D)$ – проекция точки y на множество D, $r^* = \|p^* - y\|$, $D_j = \{x \in \mathrm{R_n} : f_j(x) \leq 0\}$. Будем считать, что множества $W^1(x, D)$ и K определены как и в § 1.

Для решения поставленной задачи метод вырабатывает последовательность приближений $\{p_k\}$, $k \in K$, и заключается в следующем.

Метод 3. *Выбираются точки* $v^j \in \operatorname{int} D_j$ *для всех* $j \in J$. *Задается числовая последовательность* $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, *такая, что*

$$\varepsilon_k > 0, \quad k \in K, \quad \varepsilon_k \to 0, \quad k \to \infty.$$

Полагается $k = 0$, $i = 0$, $M_0 = \mathrm{R_n}$, $y_0 = Pr(y, D'')$.

1. *Формируется множество*

$$J_i = \{j \in J \ : \ y_i \notin D_j\}.$$

Если $J_i = \emptyset$, *то* y_i *– решение задачи, и процесс завершается.*

2. *Если* $y_i \notin D'_{\varepsilon_k}$, *то полагается*

$$Q_i = M_i, \tag{3.1}$$

и следует переход к п. 3. В противном случае полагается $i_k = i$,

$$p_k = y_{i_k}, \tag{3.2}$$

$$Q_i = Q_{i_k} = \mathrm{R_n}, \tag{3.3}$$

значение k *увеличивается на единицу, и следует переход к очередному пункту.*

3. *Для каждого* $j \in J_i$ *в интервале* (v^j, y_i) *выбирается точка* z_i^j *так, чтобы* $z_i^j \notin \operatorname{int} D_j$ *и при некотором* $q_i^j \in [1, q]$, $1 \le q < \infty$, *для точки*

$$\bar{y}_i^j = y_i + q_i^j(z_i^j - y_i)$$

выполнялось включение $\bar{y}_i^j \in D_j$. *Для всех* $j \in J \setminus J_i$ *полагается* $z_i^j = \bar{y}_i^j = y_i$.

4. *Отыскивается номер* $j_i \in J_i$ *такой, что*

$$\|y_i - z_i^{j_i}\| = \max_{j \in J_i} \|y_i - z_i^j\|.$$

5. *Выбирается вектор* $a_i \in W^1(z_i^{j_i}, D_{j_i})$, *полагается*

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} \ : \ \langle a_i, x - z_i^{j_i} \rangle \le 0\}.$$

6. *Отыскивается точка*

$$y_{i+1} = Pr(y, M_{i+1} \bigcap D''),$$

и следует переход к п. 1 при i, *увеличенном на единицу.*

Замечание 3.1. *В силу выбора множеств* M_0, Q_i *и векторов* a_i *для всех* $i \in K$ *выполняется включение* $D' \subset M_i$, *а значит,*

$$M_i \bigcap D'' \ne \emptyset \quad \forall i \in K,$$

и построение точки y_i *согласно алгоритму возможно.*

Замечание 3.2. *Если* $D'' = \mathrm{R_n}$ *или множество* D'' *задано линейными равенствами или неравенствами, то на каждом шаге алгоритма решается задача проектирования точки* y *на многогранное множество. Подчеркнем, что эта задача, как задача квадратичного программирования, может быть решена некоторыми известными методами (см., напр., [6; 13]) за конечное число шагов.*

Замечание 3.3. *Если* $\operatorname{int} D' \neq \emptyset$ *и известна точка* $v \in \operatorname{int} D'$, *то в методе удобно положить* $v^j = v$ *для всех* $j \in J$.

Замечание 3.4. *При выполнении включения* $y_i \in D'_{\varepsilon_k}$ *согласно (3.3) происходит полное отбрасывание всех накопившихся к шагу* $i = i_k$ *линейных неравенств, формирующих аппроксимирующие множества, и* M_{i+1} *задается лишь одним неравенством* $\langle a_i, x - z_i^{j_i} \rangle \leq 0$. *Это существенно упрощает решение вспомогательных задач построения очередных приближений.*

Теперь перейдем к исследованию сходимости метода. Следующее утверждение показывает, что построенные согласно методу точки y_i, $i \in K$, отличаются от y для всех $i > 0$.

Лемма 3.1. *Для всех $i \geq 1$ выполняется соотношение*

$$y \notin M_i \bigcap D''. \tag{3.4}$$

Доказательство. Покажем, что

$$y \notin M_i \quad \forall i \geq 1, \tag{3.5}$$

тогда (3.4) будет доказано.

Пусть $i = 1$. Тогда $M_1 = Q_0 \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} \ : \ \langle a_0, x - z_0^{j_0} \rangle \leq 0\}$. По построению $Q_0 = \mathrm{R_n}$ независимо от принадлежности точки y_0 множеству D'_{ε_0}. Поэтому M_1 задается неравенством $\langle a_0, x - z_0^{j_0} \rangle \leq 0$, и по выбору вектора a_0 имеем $y \notin M_1$, то есть (3.5) справедливо при $i = 1$.

Пусть теперь утверждение (3.5) выполняется при $i = l$, где $l \geq 1$. Покажем, что

$$y \notin M_{l+1}, \tag{3.6}$$

тогда утверждение (3.5) будет доказано. По построению

$$M_{l+1} = Q_l \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} \ : \ \langle a_l, x - z_l^{j_l} \leq 0\}.$$

Но $Q_l = M_l$ или $Q_l = \mathrm{R_n}$. Если $Q_l = \mathrm{R_n}$, то M_{l+1} задается неравенством $\langle a_l, x - z_l^{j_l} \rangle \leq 0$ и согласно выбору a_l имеем (3.6). Пусть $Q_l = M_l$. По индукционному предположению $y \notin M_l$. Тогда $y \notin Q_l$, и, следовательно, выполняется (3.6). Утверждение доказано.

Критерий остановки, заложенный в п. 1 алгоритма, обосновывает следующая

Лемма 3.2. *Пусть точка y_i, построенная методом, такова, что $J_i = \emptyset$. Тогда $y_i = p^*$.*

Доказательство. Поскольку $D' \subset M_i$, то $D = D' \bigcap D'' \subset M_i \bigcap D''$. Кроме того, $y_i = Pr(y, M_i \bigcap D'')$ для всех $i \in K$. Следовательно,

$$\|y_i - y\| = \min_{x \in M_i \bigcap D''} \|x - y\| \leq \min_{x \in D} \|x - y\| = \|p^* - y\|.$$

По условию леммы $y_i \in D'$, а значит, $y_i \in D$, и $\|y_i - y\| \geq \|p^* - y\|$. Отсюда и из предыдущего неравенства следует утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, построенная методом, ограничена.*

Доказательство. По построению $\|y_i - y\| \leq \|x - y\|$ для всех $x \in M_i \bigcap D''$, $i \in K$. Поскольку $D \subset M_i \bigcap D''$ для всех $i \in K$, то $p^* \in M_i \bigcap D''$ для каждого $i \in K$, а значит,

$$\|y_i - y\| \leq \|p^* - y\| = r^* \quad \forall i \in K.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, построена методом. Тогда для каждого $k \in K$*

существует такой номер $i = i_k$, *что выполняется* (3.2).

Доказательство. Пусть $k = 0$. Будем считать, что $y_0 \notin D'_{\varepsilon_0}$, так как в противном случае равенство (3.2) имеет место при $k = 0$. Докажем существование номера $i = i_k > 0$, для которого $y_{i_0} \in D'_{\varepsilon_0}$.

Допустим противное, то есть $y_i \notin D'_{\varepsilon_0}$ для всех $i \in K$, $i > 0$. Выделим из последовательности $\{y_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_i\}$, $i \in K' \subset K$, и пусть y' – ее предельная точка. Согласно п. 3 метода Q_i для всех $i \in K'$ имеет вид (3.1). По методике, используемой при обосновании леммы 1.2, доказывается, что $y' \in D'$ и, следовательно, $F(y') \leq 0$. С другой стороны, по предположению $F(y_i) > \varepsilon_0$ при всех $k \in K'$, а потому $F(y') > 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (3.2) при $k = 0$.

Аналогично показывается, что, если $p_k = y_{i_k}$ при некотором $k \geq 0$, то существует такой номер $i_{k+1} > i_k$, что $y_{i_{k+1}} \in D'_{\varepsilon_{k+1}}$ и $p_{k+1} = y_{i_{k+1}}$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность* $\{p_k\}$, $k \in K$, *построена методом* 3. *Тогда любая ее предельная точка совпадает с* p^*, *а если для всех* $k \in K$

выполняются неравенства

$$\|p_{k+1} - y\| \geq \|p_k - y\|, \tag{3.7}$$

то вся последовательность $\{p_k\}$, $k \in K$, *сходится к точке* p^*.

Доказательство. Пусть $\{p_k\}$, $k \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{p_k\}$, $k \in K$, и $\bar{p}$ – ее предельная точка. Так как $0 < F(p_k) \leq \varepsilon_k$, $k \in K$, то с учетом выбора последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $k \in K$, имеем $\lim\limits_{k \in K} F(p_k) = \lim\limits_{k \in K'} F(p_k) = F(\bar{p}) = 0$, и $\bar{p} \in D'$. Кроме того, $p_k \in D''$, $k \in K'$, и в силу замкнутости D'' выполняется включение $\bar{p} \in D''$. Таким образом, $\bar{p} \in D$ и $\|\bar{p} - y\| \geq r^*$. С другой стороны, поскольку $p_k = Pr(y, M_{i_k} \bigcap D'')$, а $D \subset M_{i_k} \bigcap D''$, то $\|p_k - y\| \leq r^*$, и значит, $\|\bar{p} - y\| \leq r^*$. Отсюда следует, что $\|\bar{p} - y\| = r^* = \|p^* - y\|$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь для последовательности $\{p_k\}$, $k \in K$, выполняется условие (3.7). Тогда ввиду ограниченности $\{p_k\}$, $k \in K$, последовательность $\{\|p_k - y\|\}$, $k \in K$, является сходящейся, и по доказанному выше $\lim\limits_{k \in K} \|p_k - y\| = r^*$. Поэтому в силу известной теоремы [6, с. 62] второе утверждение тоже доказано.

Замечание 3.5. *Условие (3.7) для построенной методом последовательности* $\{p_k\}$, $k \in K$, *имеет* *место, если, например, для всех* $k \in K$ *выполняются включения* $M_{i_{k+1}} \subset M_{i_k}$. *Для выделения из последовательности* $\{p_k\}$, $k \in K$, *сходящейся к решению подпоследовательности* $\{p_{k_l}\}$, $l \in K$, *достаточно номера* k_l *выбрать из условия* $\|p_{k_{l+1}} - y\| \geq \|p_{k_l} - y\|$ *при всех* $l \in K$.

4 Метод отсечений, допускающий параллельные вычисления

В настоящем параграфе излагается метод отсечений для решения задачи (1.5), позволяющий на каждом шаге распараллеливать процесс вычислений при отыскании очередной итерационной точки.

Пусть функции $f(x)$, $f_j(x)$, $j \in J$, и множества D_j удовлетворяют условиям § 1, а множество D имеет вид (1.3). Решается задача (1.5). Будем пользоваться обозначениями § 1.

Описываемый метод вырабатывает последовательность приближений x_k, $k \in K$, и заключается в следующем.

Метод 4. *Строится выпуклое замкнутое множество* $M_0 \subset \mathrm{R_n}$, *содержащее хотя бы одну точку множества* X^*. *Выбираются точки* $y^j \in \operatorname{int} D_j$ *для всех* $j \in J$, *находится точка* $x_0 \in M_0$ *такая, что* $f(x_0) \le f^*$. *Пусть уже построена точка* x_k, $k \in K$.

1. *Если*

$$x_k \in D, \tag{4.1}$$

то процесс заканчивается.

2. *Полагается* $J_k = \{j \in J \ : \ x_k \notin D_j\}$.

3. *Для каждого* $j \in J_k$ *в интервале* (y^j, x_k) *выбирается точка* $z_k^j \notin \operatorname{int} D_j$ *так, чтобы при некотором*

$1 \leq q_k^j \leq q < \infty$ *выполнялось включение*

$$x_k + q_k^j(z_k^j - x_k) \in D_j, \tag{4.2}$$

и полагается

$$\bar{y}_k^j = x_k + q_k^j(z_k^j - x_k). \tag{4.3}$$

4. *Для каждого* $j \in J_k$ *выбирается конечное множество* $A_k^j \subset W^1(z_k^j, D_j)$, *полагается*

$$M_k^j = M_k \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} \ : \ \langle a, x - z_k^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_k^j\},$$

и находится точка u_k^j *такая, что*

$$u_k^j \in M_k^j, \quad f(u_k^j) \leq f^*. \tag{4.4}$$

5. *Отыскивается номер* $j_k \in J_k$, *удовлетворяющий условию*

$$\|x_k - z_k^{j_k}\| = \max_{j \in J_k} \|x_k - z_k^j\|. \tag{4.5}$$

6. *Определяется множество*

$$J'_k = \{j \in J_k \ : \ u_k^j \in M_k^{j_k}\}.$$

Находится номер $l_k \in J'_k$ *такой, что* $f(u_k^{l_k}) = \max\limits_{j \in J'_k} f(u_k^j)$.

7. *Полагается*

$$M_{k+1} = M_k^{j_k} \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} : \langle a, x - z_k^{l_k} \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_k^{l_k}\},$$

$$x_{k+1} = u_k^{l_k}. \tag{4.6}$$

Сделаем некоторые замечания относительно метода 4.

Замечание 4.1. *Если на некотором шаге выполняется включение (4.1), то* $x_k \in X^*$. *Если же в результате работы метода выработана последовательность* $\{x_k\}$, $k \in K$, *то, как показано ниже, любая предельная точка принадлежит* X^*. *На начальном шаге метода можно положить, в частности,* $M_0 = \bigcap\limits_{j \in J'} D_j$, *где* $J' \subset J$. *Так как* $x_k \in M_0$ *для всех* $k \in K$, *то точки* $y^j \in \operatorname{int} D_j$, $j \in J'$, *ни на одной итерации не понадобятся, и в этом случае нет необходимости в их задании. Такой способ выбора множества* M_0 *удобен, например, когда* $\bigcap\limits_{j \in J'} D_j$ *– выпуклый многогранник. При достижении функцией* $f(x)$ *в* $\mathrm{R_n}$ *своего минимального значения можно считать, например, что*

$$M_0 = \mathrm{R_n}, \quad x_0 = \operatorname{argmin} \{f(x) : x \in \mathrm{R_n}\}.$$

Замечание 4.2. *В случае когда* $\operatorname{int} D \neq \emptyset$ *и известна точка* $y \in \operatorname{int} D$, *в методе удобно задать* $y^j = y$ *для всех* $j \in J$.

Если в (4.2) положить $q_k^j = 1$, *то* $z_k^j = \bar{y}_k^j$, *и* z_k^j *является точкой пересечения отрезка* $[x_k, y^j]$ *с границей множества* D_j. *Однако условие задания чисел*

q_k^j *позволяет искать указанную точку пересечения приближенно.*

Замечание 4.3. *Отметим, что условие (4.4) дает возможность отыскивать* u_k^j *при каждом* $j \in J_k$ *как точку приближенного минимума* $f(x)$ *на множестве* M_k^j. *В случае, если для каждого* $k \in K$ *точки* $u_k^j \in M_k^j$, $j \in J_k$, *находятся из условия*

$$f(u_k^j) = \min\{f(x) : x \in M_k^j\}, \tag{4.7}$$

то, как доказано ниже, вся последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, *сходится к множемтву* X^*.

Замечание 4.4. *Подчеркнем также, что* $J_k' \neq \emptyset$ *для всех* $k \in K$, *так как, по крайней мере, номер* j_k *«самого глубокого» отсечения содержится в* J_k' *согласно включению* $u_k^{j_k} \in M_k^{j_k}$. *Так как* $u_k^{l_k} \in M_k^{j_k}$ *и* $u_k^{l_k} \in M_k^{l_k}$, *то ввиду (4.6)* $x_{k+1} \in M_{k+1}$.

Сделаем принципиальное замечание, касающееся проведения параллельных вычислений в методе.

Замечание 4.5. *Заметим, наконец, что на каждой итерации задачи отыскания точек* z_k^j, *а затем и точек* u_k^j *можно решать для всех* $j \in J_k$ *одновременно и независимо друг от друга. Таким образом, метод действительно позволяет для каждого*

$k \in K$ проводить на шаге 3 и шаге 4 параллельные вычисления при нахождении точки x_{k+1}.

Перейдем к обоснованию сходимости метода. Будем далее считывать, что последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, построена вышепредложенным методом является ограниченной.

Лемма 4.1. *Пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и номер $r \in J$ таков, что множество $K_r = \{k \in K' \ : \ r = j_k\}$, где j_k определен в (4.5), состоит из бесконечного числа элементов. Тогда*

$$\lim_{k \in K_r} \|z_k^j - x_k\| = 0 \quad \forall j \in J. \tag{4.8}$$

Доказательство. Согласно п. 3 метода для всех $k \in K$ и $j \in J$ существует такое число $\gamma_k^j \in [0, 1)$, что

$$z_k^j = x_k + \gamma_k^j (y^j - x_k), \tag{4.9}$$

причем $\gamma_k^r > 0$ для всех $k \in K_r$.

Для произвольного $k \in K_r$ зафиксируем номер $p_k \in K_r$ такой, что $p_k > k$. Поскольку $x_{p_k} \in M_{p_k}, M_{p_k} \subset M_{k+1}$, $M_{k+1} \subset M_k^r$, а

$$M_k^r = M_k \bigcap \{x \in \mathrm{R_n} \ : \ \langle a, x - z_k^r \rangle \le 0 \ \forall a \in A_k^r\},$$

то $A_k^r \subset W^1(z_k^r, M_{p_k})$, а значит, $\langle a, x_{p_k} - z_k^r \rangle \le 0$ для всех $a \in A_k^r$. Отсюда с учетом равенства (4.9) при

$j = r$ для всех $a \in A_k^r$ имеем

$$\langle a, x_k - x_{p_k} \rangle \geq \gamma_k^r \langle a, x_k - y^r \rangle.$$

Далее, учитывая включение $y^r \in \operatorname{int} D_r$, а также условия выбора последовательности $\{x_k\}$, $k \in K_r$, и векторов множества A_k^r, нетрудно доказать существование такого числа $\delta_r > 0$, что $\langle a, x_k - y^r \rangle \geq \delta_r$ для всех $k \in K_r$, $a \in A_k^r$, то

$$\|x_k - x_{p_k}\| \geq \gamma_k^r \delta_r \quad \forall k, p_k \in K_r, \quad p_k > k. \tag{4.10}$$

Так как по условию леммы последовательность $\{x_k\}$, $k \in K_r$, является сходящейся , то согласно (4.10) $\gamma_k^r \to 0$, $k \to \infty$, $k \in K_r$. Поэтому из (4.9) при $j = r$ с учетом ограниченности величин $\|y^r - x_k\|$, $k \in K_r$, следует равенство

$$\lim_{k \in K_r} \|z_k^r - x_k\| = 0. \tag{4.11}$$

Наконец, в силу условия (4.5) выбора номеров j_k, $k \in K_r$, при каждом $k \in K_r$ выполняется неравенство $\|z_k^r - x_k\| \geq \|z_k^j - x_k\|$ для всех $j \in J$, из которого с учетом (4.11) следует (4.8). Лемма доказана.

Теорема 4.1. *Любая предельная точка последовательности* $\{x_k\}$, $k \in K$, *принадлежит множеству* X^*.

Доказательство. Пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и $\bar{x}$ – ее предельная точка. Покажем сначала, что

$$\bar{x} \in D. \tag{4.12}$$

Пусть, как и в лемме 4.1, номер $r \in J$ выбран так, что множество $K_r = \{k \in K' : j_k = r\}$ бесконечно. Отметим, что последовательность $\{x_k\}$, $k \in K_r$, при каждом $j \in J$ соответствуют последовательности $\{z_k^j\}$, $k \in K_r$, и $\{\bar{y}_k^j\}$, $k \in K_r$. При этом для $\{z_k^j\}$, $k \in K_r$, справедливо (4.8), а для точек $\bar{y}_k^j$, $k \in K_r$, согласно п. 3 метода выполняется либо равенство (4.4), либо равенство $\bar{y}_k^j = x_k$. Тогда из ограниченности последовательности $\{x_k\}$, $k \in K_r$, следует, что последовательности $\{\bar{y}_k^j\}$, $k \in K_r$, также ограничены для всех $j \in J$.

Выделим теперь для каждого $j \in J$ из $\{\bar{y}_k^j\}$, $k \in K_r$, сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{y}_k^j\}$, $k \in K_r^j \subset K_r$, и пусть v_j – предельная точка. Заметим, что $v_j \in D_j$ для всех $j \in J$ в силу замкнутости множеств D_j. Положим для каждого $j \in J$

$$P_1^j = \{k \in K_r^j \ : \ j \in J_k\}, \quad P_2^j = K_r^j \setminus P_1^j.$$

Хотя бы одно из множеств P_1^j или P_2^j для каждого $j \in J$ состоит из бесконечного числа номеров.

Перейдем теперь при каждом фиксированном $j \in J$ к пределу в равенствах (4.3) по $k \to \infty$, $k \in P_1^j$, с учетом (4.8), если множество P_1^j бесконечно, или в равенствах $\bar{y}_k^j = x_k$ по $k \to \infty$, $k \in P_2^j$, если P_2^j бесконечно. Тогда получим равенства $\bar{x} = v_j$ для всех $j \in J$, из которых следует включение (4.12).

Далее, согласно (4.12) выполняется неравенство $f(\bar{x}) \geq f^*$. С другой стороны, ввиду второго из условий (4.4) и равенства (4.6) $f(x_k) \leq f^*$ для всех $k \in K$, и потому $\lim\limits_{k \in K'} f(x_k) = f(\bar{x}) \leq f^*$. Таким образом, $f(\bar{x}) = f^*$, и утверждение теоремы доказано.

Теорема 4.2. *Пусть для последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, приближение x_0 является точкой минимума функции $f(x)$ на множестве M_0, а точки $u_k^j \in M_k^j$, выбраны для всех $k \in K$ и $j \in J_k$ из условия (4.7). Тогда последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, сходится к множеству X^*.*

Доказательство. Для каждого $k \in K$ согласно пунктам 4, 7 метода выполняется включение $M_{k+1} \subset M_k^{l_k}$, а согласно п. 6 – включение $u_k^{l_k} \in M_{k+1}$. Кроме того, по условию теоремы $u_l^{l_k}$ – точка минимума функции $f(x)$ на множестве $M_k^{l_k}$ для каждого $k \in K$. Следовательно, $u_k^{l_k}$ – точка минимума функции $f(x)$ на множестве M_{k+1}. Таким образом, с учетом (4.6) и условия выбора точки x_0 имеем

$$x_k = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in M_k\} \quad \forall k \in K. \qquad (4.13)$$

Далее, для каждого $k \in K$ справедливо включение $M_{k+1} \subset M_k$. Тогда ввиду (4.13) $f(x_{k+1}) \geq f(x_k)$, $k \in K$. Значит, в силу ограниченности $\{x_k\}$, $k \in K$, последовательность $\{f(x_k)\}$, $k \in K$, сходится, и по предыдущей теореме $\lim\limits_{k \in K} f(x_k) = f^*$. Отсюда и из известного утверждения [6, с. 62] следует, что вся последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, сходится к множеству решений задачи (1.5). Теорема доказана.

Утверждение этой теоремы останется в силе, если для каждого $k \in K$ точка $u_k^{l_k}$ выбрана из условия

$$f(u_k^{l_k}) = \min\{f(x) : x \in M_k^{l_k}\},$$

а точки u_k^j, $j \in J_k \setminus \{l_k\}$, – из менее жесткого условия (4.4).

Литература

1. *Андрианова А. А., Заботин Я. И.* Алгоритмы в методе центров с аппроксимацией множества допустимых решений // Изв. вузов. Матем. — 2001. — № 12. — С. 41—45.
2. *Астафьев Н. Н., Еремин И. И.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М. : Наука, 1976.
3. *Булатов В. П.* Методы погружения в задачах оптимизации. — Новосибирск : Наука, 1977.
4. *Васильев Л. В., Демьянов В. Ф.* Недифференцируемая оптимизация. — М. : Наука, 1981.
5. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М. : Наука, 1988.
6. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации: в 2-ух кн. — М. : МЦНМО, 2011.
7. *Голиков А. И., Жадан В. Г.* Две модификации метода линеаризации в нелинейном программировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1983. — Т. 23, № 2. — С. 314—325.
8. *Заботин И. Я.* О некоторых алгоритмах погружений-отсечений для задачи математического программирования // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. «Математика». — 2011. — Т. 4, № 2. — С. 91—101.
9. *Заботин И. Я., Яруллин Р. С.* Метод отсечений с обновлением погружающих множеств и оценки точности решения // Физико-математические науки, Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2013. — Т. 155, № 2. — С. 54—64.
10. *Заботин И. Я., Яруллин Р. С.* Об одном подходе к построению алгоритмов отсечений с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Изв. вузов. Матем. — 2013. — Т. 3, № 2. — С. 74—79.
11. *Заботин Я. И., Фукин И. А.* Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Математика. — 2000. — № 12. — С. 49—54.
12. *Карманов В. Г.* Математическое программирование. — М. : Наука, 1986.
13. *Коннов И. В.* Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. — Казань : Казанский ун-т., 2013.
14. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. — М. : МЦНМО, 2010.

15. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М. : Наука, 1983.

16. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М. : Наука, 1980.

17. *Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М. : Наука, 1975.

18. *Стрекаловский А. С.* Элементы невыпуклой оптимизации. — Новосибирск : Наука, 2003.

Учебное издание

Заботин Игорь Ярославич
Яруллин Рашид Саматович

МЕТОДЫ ОТСЕЧЕНИЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ДОПУСТИМОЙ ОБЛАСТИ