С.И. Соловьёв

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

КАЗАНЬ – 2015

Глава 1

ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

§ 1.1. Собственные колебания струны.

1.1.1. Струна закреплена в двух точках. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны. Пусть имеется струна длины l, растянутая с силой T_0, и занимающая в равновесном положении отрезок $[0, l]$ оси Ox. Обозначим через ρ линейную плотность струны. Предположим, что точки струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Для вывода уравнения в точке $x \in \Omega$ выделим элемент струны $(x, x + \Delta x) \subset \Omega$. На этот элемент струны действуют силы натяжения $\vec{T}(x, t)$ и $\vec{T}(x + \Delta x, t)$, направленные по касательной.

Обозначим через $w(x, t)$ отклонение от положения равновесия точки струны с координатой x в момент времени t. Для проекций сил натяжения на ось Oy имеют место формулы

$$\text{пр}_y \vec{T}(x, t) = -T_0 w_x(x, t),$$

$$\text{пр}_y \vec{T}(x + \Delta x, t) = T_0 w_x(x + \Delta x, t).$$

Используя второй закон Ньютона в проекции на ось Oy, получим

$$\text{пр}_y \vec{T}(x, t) + \text{пр}_y \vec{T}(x + \Delta x, t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x, t),$$

или подробнее

$$T_0 w_x(x + \Delta x, t) - T_0 w_x(x, t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x, t).$$

Поделив на Δx, приходим к соотношению

$$T_0 \frac{w_x(x + \Delta x, t) - w_x(x, t)}{\Delta x} = \rho w_{tt}(x, t).$$

Вычисляя предел при $\Delta x \to 0$, выводим дифференциальное уравнение колебания струны

$$T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0.$$

Поскольку в точках $x = 0$ и $x = l$ струна закреплена, то

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ &w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Будем искать простейшие возможные движения точек струны, при которых каждая точка струны совершает простые гармонические колебания, отличающиеся от колебаний других точек только по амплитуде. Такие движения называются собственными колебаниями и описываются функцией $w(x,t)$ вида

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Из первого уравнения системы получим

$$T_0 u''(x)v(t) = \rho u(x)v''(t).$$

Разделив это равенство на $\rho u(x)v(t)$, выводим

$$\frac{T_0 u''(x)}{\rho u(x)} = \frac{v''(t)}{v(t)} = -\mu.$$

Отсюда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu \rho u(x), \\ &v''(t) + \mu v(t) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\mu}t) + b\sin(\sqrt{\mu}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд. Далее проводится подробный вывод этой системы уравнений.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$u(0)v(t) = 0,$$
$$u(l)v(t) = 0,$$

получим

$$u(0) = u(l) = 0.$$

В результате приходим к следующей задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned}$$

Здесь μ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая μ, собственная функция.

Введем обозначение

$$\lambda = \frac{\mu\rho}{T_0}.$$

Тогда задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0. \end{aligned}$$

1.1.2. Струна закреплена в одной точке. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны со свободной граничной точкой $x = l$ и закрепленной граничной точкой $x = 0$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} &T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ &w(0,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок струны $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$\text{пр}_y \vec{T}(l - \Delta x, t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t).$$

Отсюда

$$-T_0 w_x(l - \Delta x, t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t).$$

Выполняя предельный переход при $\Delta x \to 0$, находим

$$w_x(l,t) = 0.$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0, \\ &w(0,t) = w_x(l,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Будем искать собственные колебания, задаваемые функцией

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Тогда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), \\ &v''(t) + \mu v(t) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\mu}t) + b\sin(\sqrt{\mu}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$u(0)v(t) = u'(l)v(t) = 0,$$

выводим

$$u(0) = u'(l) = 0.$$

В итоге получим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), x \in \Omega, \\ &u(0) = u'(l) = 0. \end{aligned}$$

Здесь μ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая μ, собственная функция.

Обозначим

$$\lambda = \frac{\mu\rho}{T_0}.$$

Тогда задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned} &-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = u'(l) = 0. \end{aligned}$$

1.1.3. Струна с массой в граничной точке. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны с массой. Пусть имеется струна длины l, растянутая с силой T_0, и занимающая в равновесном положении отрезок $[0, l]$ оси Ox. Обозначим через ρ линейную плотность струны. Предположим, что точка струны $x = 0$ закреплена жестко, а точка струны $x = l$ свободна. В точке струны $x = l$ присоединена масса m. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущих пунктов для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$
\begin{aligned}
&T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок струны $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$\text{пр}_y \vec{T}(l - \Delta x, t) = (\rho \Delta x + m)\, w_{tt}(x,t).$$

Отсюда

$$-T_0 w_x(l - \Delta x, t) = (\rho \Delta x + m)\, w_{tt}(x,t).$$

После предельного перехода при $\Delta x \to 0$ находим

$$-T_0 w_x(l,t) = m\, w_{tt}(l,t).$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&-T_0 w_x(l,t) = m\, w_{tt}(l,t), \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

Собственные колебания, описываются функцией $w(x,t)$ вида

$$w(x,t) = u(x) v(t).$$

Из первого уравнения системы получим

$$T_0 u''(x) v(t) = \rho u(x) v''(t).$$

Разделив это равенство на $\rho u(x)v(t)$, выводим

$$\frac{T_0 u''(x)}{\rho u(x)} = \frac{v''(t)}{v(t)} = -\mu.$$

Отсюда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), \\ &v''(t) + \mu v(t) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\mu}t) + b\sin(\sqrt{\mu}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд. Далее проводится подробный вывод этой системы уравнений.

Разделяя переменные в граничном условии закрепления

$$u(0)v(t) = 0,$$

получим

$$u(0) = 0.$$

Разделяя переменные в уравнении движения груза, получим

$$-T_0 u'(l)v(t) = mu(l)v''(t).$$

Поделив последнее уравнение на $v(t)$, выводим

$$-T_0 u'(l) = mu(l)\frac{v''(t)}{v(t)} = -\mu mu(l).$$

Следовательно,

$$T_0 u'(l) = \mu mu(l).$$

Таким образом, получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), \quad x \in \Omega, \\ &u(0) = 0, \\ &T_0 u'(l) = \mu mu(l). \end{aligned}$$

Здесь μ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая μ, собственная функция.

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{\mu\rho}{T_0}, \quad M = \frac{m}{\rho}.$$

Тогда задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned}
&-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,\\
&u(0) = 0,\\
&u'(l) = \lambda M u(l).
\end{aligned}$$

1.1.4. Струна с упруго закрепленной граничной точкой. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны с упруго закрепленной граничной точкой. Пусть имеется струна длины l, растянутая с силой T_0, и занимающая в равновесном положении отрезок $[0, l]$ оси Ox. Обозначим через ρ линейную плотность струны. Предположим, что точка струны $x = 0$ закреплена жестко, а точка струны $x = l$ свободна. В точке струны $x = l$ присоединена пружина жесткости k. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок струны $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$\text{пр}_y \vec{T}(l - \Delta x, t) + F_{\text{упр}} = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t).$$

Отсюда

$$-T_0 w_x(l - \Delta x, t) - k w(l,t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t).$$

После предельного перехода при $\Delta x \to 0$ находим

$$T_0 w_x(l,t) + k w(l,t) = 0.$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&T_0 w_x(l,t) + k w(l,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}
$$

Будем искать собственные колебания, задаваемые функцией

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Тогда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x),\\
&v''(t) + \mu v(t) = 0.
\end{aligned}
$$

Разделяя переменные в граничном условии закрепления

$$u(0)v(t) = 0,$$

получим

$$u(0) = 0.$$

Разделяя переменные в точке упругого закрепления, получим

$$T_0 u'(l)v(t) + k u(l)v(t) = 0.$$

Поделив последнее уравнение на $v(t)$, получим

$$T_0 u'(l) + k u(l) = 0.$$

В результате приходим к следующей задаче на собственные значения

$$
\begin{aligned}
&-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), x \in \Omega,\\
&u(0) = 0,\\
&T_0 u'(l) + k u(l) = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь μ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая μ, собственная функция.

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{\mu\rho}{T_0}, \quad K = \frac{k}{T_0}.$$

Тогда задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned}
&-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,\\
&u(0) = 0,\\
&u'(l) + Ku(l) = 0.
\end{aligned}$$

1.1.5. Струна с массой во внутренней точке. Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях струны с массой. Предположим, что точки струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. В точке струны $x = x^{(0)}$ присоединена масса m. Обозначим $\Omega = (0, x^{(0)}) \cup (x^{(0)}, l)$.

Для вывода уравнения в точке $x \in \Omega$ выделим элемент струны $(x, x + \Delta x) \subset \Omega$. На этот элемент струны действуют силы натяжения $\vec{T}(x,t)$ и $\vec{T}(x + \Delta x, t)$, направленные по касательной.

Обозначим через $w(x,t)$ отклонение от положения равновесия точки струны с координатой x в момент времени t. Для проекций сил натяжения на ось Oy имеют место формулы

$$\text{пр}_y \vec{T}(x,t) = -T_0 w_x(x,t),$$

$$\text{пр}_y \vec{T}(x + \Delta x, t) = T_0 w_x(x + \Delta x, t).$$

Используя второй закон Ньютона в проекции на ось Oy, получим:

$$\text{пр}_y \vec{T}(x,t) + \text{пр}_y \vec{T}(x + \Delta x, t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t),$$

$$T_0 w_x(x + \Delta x, t) - T_0 w_x(x,t) = \rho \Delta x \, w_{tt}(x,t).$$

Обе части последнего равенства поделим на Δx:

$$T_0 \frac{w_x(x + \Delta x, t) - w_x(x,t)}{\Delta x} = \rho w_{tt}(x,t).$$

Перейдем здесь к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате выводим дифференциальное уравнение колебания струны

$$T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0.$$

Поскольку в точках $x = 0$ и $x = l$ струна закреплена, то

$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Для вывода уравнения в точке $x^{(0)}$ рассмотрим участок струны $\left(x^{(0)} - \dfrac{\Delta x}{2}, x^{(0)} + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \in \Omega$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$\text{пр}_y\vec{T}\left(x^{(0)} + \frac{\Delta x}{2}, t\right) + \text{пр}_y\vec{T}\left(x^{(0)} - \frac{\Delta x}{2}, t\right) = (\rho\Delta x + m)\, w_{tt}(x,t),$$

$$T_0 w_x\left(x^{(0)} + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - T_0 w_x\left(x^{(0)} - \frac{\Delta x}{2}, t\right) = (\rho\Delta x + m)\, w_{tt}(x,t).$$

После предельного перехода при $\Delta x \to 0$ находим

$$T_0[w_x]_{x^{(0)}} = m\, w_{tt}(x^{(0)}, t),$$

для $[w_x]_{x^{(0)}} = w_x(x^{(0)} + 0, t) - w_x(x^{(0)} - 0, t)$.

В результате, учитывая условие непрерывности струны, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&T_0 w_{xx}(x,t) = \rho w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0,\\
&[w]_{x^{(0)}} = 0, \quad t > 0,\\
&T_0[w_x]_{x^{(0)}} = m\, w_{tt}(x^{(0)}, t), \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Собственные колебания описываются функцией $w(x,t)$ вида

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Из первого уравнения системы получим

$$T_0 u''(x)v(t) = \rho u(x)v''(t).$$

Разделив это равенство на $\rho u(x)v(t)$, выводим

$$\frac{T_0 u''(x)}{\rho u(x)} = \frac{v''(t)}{v(t)} = -\mu.$$

Отсюда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), \\ &v''(t) + \mu v(t) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\mu}t) + b\sin(\sqrt{\mu}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями и условиями в точках крепления грузов дает систему уравнений для определения амплитуд. Далее проводится подробный вывод этой системы уравнений.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$\begin{aligned} &u(0)v(t) = 0, \\ &u(l)v(t) = 0, \end{aligned}$$

получим

$$u(0) = u(l) = 0.$$

Аналогично условие непрерывности дает

$$[w]_{x^{(0)}} = [u]_{x^{(0)}} v(t) = 0,$$

откуда находим

$$[u]_{x^{(0)}} = 0.$$

Разделяя переменные в уравнении движения груза, выводим

$$T_0[u']_{x^{(0)}} v(t) = m u(x^{(0)}) v''(t),$$

где $v''(t) = -\mu v(t)$. Поделив последнее уравнение на $v(t)$, получим

$$T_0[u']_{x^{(0)}} = m u(x^{(0)}) \frac{v''(t)}{v(t)}.$$

Следовательно,

$$T_0[u']_{x^{(0)}} = m u(x^{(0)}) \mu.$$

В результате приходим к следующей задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} &-T_0 u''(x) = \mu\rho u(x), x \in \Omega, \\ &u(0) = u(l) = 0, \\ &[u]_{x^{(0)}} = 0, \\ &T_0[u']_{x^{(0)}} = -\mu m u(x^{(0)}). \end{aligned}$$

Здесь μ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая μ, собственная функция.

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{\mu\rho}{T_0}, \quad M = \frac{m}{\rho}.$$

Тогда задача на собственные значения примет вид

$$\begin{aligned}
&-u''(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,\\
&u(0) = u(l) = 0,\\
&[u]_{x^{(0)}} = 0,\\
&[u']_{x^{(0)}} = -\lambda M u(x^{(0)}).
\end{aligned}$$

§ 1.2. Собственные колебания стержня.

1.2.1. Стержень закреплен в двух точках. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях стержня. Пусть имеется стержень длины l, задана плотность $\rho(x)$ и модуль Юнга $E(x)$ материала стержня, площадь сечения $S(x)$. Предположим, что точки стержня с координатами $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Для вывода уравнения в точке $x \in \Omega$ выделим элемент стержня $(x, x+\Delta x) \subset \Omega$. На этот элемент стержня действуют силы натяжения $\vec{T}(x,t)$ и $\vec{T}(x+\Delta x, t)$ со стороны оставшихся частей стержня.

Обозначим через $w(x,t)$ смещение сечения стержня с координатой x в момент времени t. По закону Гука справедливы формулы

$$\text{пр}_x\vec{T}(x,t) = -E(x)S(x)w_x(x,t),$$

$$\text{пр}_x\vec{T}(x+\Delta x,t) = E(x+\Delta x)S(x+\Delta x)w_x(x+\Delta x,t).$$

Используя второй закон Ньютона в проекции на ось Ox, получим

$$\text{пр}_y\vec{T}(x,t) + \text{пр}_y\vec{T}(x+\Delta x,t) = \rho(x)S(x)\Delta x\, w_{tt}(x,t)$$

или подробнее

$$E(x+\Delta x)S(x+\Delta x)w_x(x+\Delta x,t) - E(x)S(x)w_x(x,t) =$$

$$= \rho(x)S(x)\Delta x\, w_{tt}(x,t).$$

Поделив на Δx, взяв предел при $\Delta x \to 0$, и добавив граничные условия жесткого закрепления получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Будем искать простейшие возможные движения точек стержня, при которых каждая точка стержня совершает простые гармонические колебания, отличающиеся от колебаний других точек только по амплитуде. Такие движения называются собственными колебаниями и описываются функцией $w(x,t)$ вида

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Из первого уравнения системы получим

$$(E(x)S(x)u'(x))'v(t) = \rho(x)S(x)u(x)v''(t).$$

Разделив это равенство на $\rho(x)S(x)u(x)v(t)$, выводим

$$\frac{(E(x)S(x)u'(x))'}{\rho(x)S(x)u(x)} = \frac{v''(t)}{v(t)} = -\lambda.$$

Отсюда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),\\
&v''(t) + \lambda v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$\begin{aligned}
u(0)v(t) = 0,\\
u(l)v(t) = 0,
\end{aligned}$$

получим

$$u(0) = u(l) = 0.$$

В результате приходим к следующей задаче на собственные значения

$$-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$
$$u(0) = u(l) = 0.$$

Здесь λ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая λ, собственная функция.

1.2.2. Стержень закреплен в одной точке. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях стержня. Пусть имеется стержень длины l, задана плотность $\rho(x)$ и модуль Юнга $E(x)$ материала стержня, площадь сечения $S(x)$. Предположим, что точка $x = 0$ закреплена жестко, а точка $x = l$ свободна. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,$$
$$w(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок стержня $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$-E(l - \Delta x)S(l - \Delta x)w_x(l - \Delta x, t) = \rho(x)S(x)\Delta x\, w_{tt}(x,t).$$

Выполняя предельный переход при $\Delta x \to 0$, находим

$$w_x(l,t) = 0.$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,$$
$$w(0,t) = w_x(l,t) = 0, \quad t > 0.$$

Будем искать собственные колебания, задаваемые функцией

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Тогда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),$$
$$v''(t) + \lambda v(t) = 0.$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$u(0)v(t) = u'(l)v(t) = 0,$$

выводим

$$u(0) = u'(l) = 0.$$

В итоге получим задачу на собственные значения

$$-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),$$
$$u(0) = u'(l) = 0.$$

Здесь λ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая λ, собственная функция.

1.2.3. Стержень с массой в граничной точке. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях стержня. Пусть имеется стержень длины l, задана плотность $\rho(x)$ и модуль Юнга $E(x)$ материала стержня, площадь сечения $S(x)$. Предположим, что точка $x = 0$ закреплена жестко, а точка $x = l$ свободна. В точке стержня $x = l$ присоединена масса m. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,$$
$$w(0,t) = 0, \quad t > 0.$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок стержня $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$-E(l-\Delta x)S(l-\Delta x)w_x(l-\Delta x,t) = (\rho(x)S(x)\Delta x + M)\, w_{tt}(x,t).$$

Выполняя предельный переход при $\Delta x \to 0$, находим

$$-E(l)S(l)w_x(l,t) = Mw_{tt}(l,t).$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&-E(l)S(l)w_x(l,t) = Mw_{tt}(l,t), \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Будем искать собственные колебания, задаваемые функцией

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Тогда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),\\
&v''(t) + \lambda v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$\begin{aligned}
u(0)v(t) &= 0,\\
-E(l)S(l)u'(l)v(t) &= Mu(l)v''(t),
\end{aligned}$$

выводим

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0,\\
-E(l)S(l)u'(l)v(t) &= Mu(l)v''(t)/v(t) = -\lambda Mu(l).
\end{aligned}$$

В итоге получим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),\\
&u(0) = 0,\\
&E(l)S(l)u'(l) = \lambda Mu(l).
\end{aligned}$$

Здесь λ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая λ, собственная функция.

1.2.4. Стержень с упруго закрепленной граничной точкой. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях стержня. Пусть имеется стержень длины l, задана плотность $\rho(x)$ и модуль Юнга $E(x)$ материала стержня, площадь сечения $S(x)$. Предположим, что точка $x = 0$ закреплена жестко, а точка $x = l$ свободна. В точке стержня $x = l$ присоединена пружина жесткости k. Обозначим $\Omega = (0, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Для вывода уравнения в точке $x = l$ рассмотрим участок стержня $(l - \Delta x, l)$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$-E(l-\Delta x)S(l-\Delta x)w_x(l-\Delta x,t) - kw(l,t) = \rho(x)S(x)\Delta x\, w_{tt}(x,t).$$

Выполняя предельный переход при $\Delta x \to 0$, находим

$$-E(l)S(l)w_x(l,t) - kw(l,t) = 0.$$

В результате приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = 0, \quad t > 0,\\
&-E(l)S(l)w_x(l,t) - kw(l,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Будем искать собственные колебания, задаваемые функцией

$$w(x,t) = u(x)v(t).$$

Тогда стандартные рассуждения приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),\\
&v''(t) + \lambda v(t) = 0.
\end{aligned}$$

Общее решение второго уравнения имеет вид $v(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t)$, где a и b – постоянные. Первое уравнение с граничными условиями дает систему уравнений для определения амплитуд.

Разделяя переменные в граничных условиях

$$u(0)v(t) = 0,$$

$$-E(l)S(l)u'(l)v(t) - ku(l)v(t) = 0,$$

выводим

$$u(0) = 0,$$

$$-E(l)S(l)u'(l) - ku(l) = 0.$$

В итоге получим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x),\\
&u(0) = 0,\\
&E(l)S(l)u'(l) + ku(l) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь λ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая λ, собственная функция.

1.2.5. Стержень с массой во внутренней точке. Рассмотрим задачу о малых продольных колебаниях стержня с массой. Предположим, что точки стержня $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. В точке стержня $x = x^{(0)}$ присоединена масса m. Обозначим $\Omega = (0, x^{(0)}) \cup (x^{(0)}, l)$.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта для точек $x \in \Omega$ и $x = 0$, получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x \in \Omega, t > 0,\\
&w(0,t) = w(l,t) = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Для вывода уравнения в точке $x^{(0)}$ рассмотрим участок стержня $\left(x^{(0)} - \dfrac{\Delta x}{2}, x^{(0)} + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \in \Omega$. Применяя второй закон Ньютона для данного участка струны, получим

$$E\left(x^{(0)} + \frac{\Delta x}{2}, t\right) S\left(x^{(0)} + \frac{\Delta x}{2}, t\right) w_x\left(x^{(0)} + \frac{\Delta x}{2}, t\right) -$$

$$-E\left(x^{(0)}-\frac{\Delta x}{2},t\right)S\left(x^{(0)}-\frac{\Delta x}{2},t\right)w_x\left(x^{(0)}-\frac{\Delta x}{2},t\right)=$$
$$=\left(\rho(x)S(x)\Delta x+m\right)w_{tt}(x,t).$$

После предельного перехода при $\Delta x \to 0$ находим

$$[ESw_x]_{x^{(0)}} = m\,w_{tt}(x^{(0)},t),$$

для $[w_x]_{x^{(0)}} = w_x(x^{(0)}+0,t) - w_x(x^{(0)}-0,t)$.

В результате, учитывая условие непрерывности стержня, приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&(E(x)S(x)w_x(x,t))_x = \rho(x)S(x)w_{tt}(x,t), \quad x\in\Omega, t>0,\\
&w(0,t)=w(l,t)=0, \quad t>0,\\
&[w]_{x^{(0)}}=0, \quad t>0,\\
&[ESw_x]_{x^{(0)}} = m\,w_{tt}(x^{(0)},t), \quad t>0.
\end{aligned}$$

Разделяя переменные в уравнении движения груза, выводим

$$[ESu']_{x^{(0)}}v(t) = mu(x^{(0)})v''(t),$$

где $v''(t) = -\lambda v(t)$. Поделив последнее уравнение на $v(t)$, получим

$$[ESu']_{x^{(0)}} = \lambda(x^{(0)})\frac{v''(t)}{v(t)}.$$

Следовательно,

$$[ESu']_{x^{(0)}} = -mu(x^{(0)})\lambda.$$

В результате приходим к следующей задаче на собственные значения

$$\begin{aligned}
&-(E(x)S(x)u'(x))' = \lambda\rho(x)S(x)u(x), \quad x\in\Omega,\\
&u(0)=u(l)=0,\\
&[u]_{x^{(0)}}=0,\\
&[ESu']_{x^{(0)}} = -\lambda M u(x^{(0)}).
\end{aligned}$$

Здесь λ – собственное значение, $u(x)$ – отвечающая λ, собственная функция.