



Научная статья

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2024.3.04

УДК 531/534: [57+61]

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТА НЕГОМОГЕННОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

О.В. Герасимов¹, Е.В. Семёнова¹, Л.Р. Шакирова², Т.В. Балтина¹, Д.В. Бережной¹,
О.А. Саченков^{1,3}

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Российская Федерация

² Казанский государственный медицинский университет, Казань, Российская Федерация

³ Федеральный исследовательский центр Казанского научного центра РАН, Казань, Российская Федерация

О СТАТЬЕ

Получена: 7 сентября 2024
Одобрена: 17 сентября 2024
Принята к публикации: 17 сентября 2024

Ключевые слова:

механические свойства, неомогенные среды, численное моделирование, компьютерная томография, сегментация изображений, цифровой двойник, метод конечных элементов

АННОТАЦИЯ

Определение механических параметров выступает одним из актуальных направлений при расчёте элементов неомогенных сред. Необходимость построения численных моделей в первую очередь обуславливается развитием современных подходов к воссозданию материалов различной композитной структуры. Применение расчётных моделей в клинической практике также позволяет исследовать прочностные показатели объектов биологического происхождения, к особенностям которых можно отнести уникальность структурного распределения материала. Наибольшее распространение в этом случае получили подходы, основанные на применении данных с изображений. В рамках данной работы представлен метод построения матрицы упругих постоянных на основе данных цифрового двойника. В ходе работы выполняется построение изображений с заданной структурой материала, а также извлечение данных из снимков компьютерной томографии натуральных образцов. Усреднение механических показателей выполнялось на основе метода конечных элементов для области квадратной или кубической геометрии, определяющей элементарную ячейку. Проведение расчётов предложенным методом показало сходимость метода с данными аналитического расчёта на примере решения тестовых задач, а также определило качественное соответствие результатов особенностям структурного распределения материала в натуральных образцах. Представленный метод гомогенизации позволяет определять упругие характеристики элемента среды с учётом неоднородных свойств образующего материала.

Введение

Одним из наиболее актуальных направлений в механике деформируемого твёрдого тела выступает вычисление механических характеристик материала,

определённых в заданном объёме среды. Наибольшую трудность представляет моделирование неомогенных образцов, образованных несколькими фазами среды [1–3]. В этом случае необходимым оказывается не только учитывать особенности распределения материала в

© Герасимов Олег Владимирович – н.с., e-mail: valeriy.karasikov@gmail.com

© Семёнова Елена Вячеславовна – н.с., e-mail: elena.semionova2011@gmail.com

© Шакирова Ляйсан Ринатовна – к.м.н., ассистент, e-mail: saleeva.100mat@yandex.ru

© Балтина Татьяна Валерьевна – к.б.н., доцент, с.н.с., e-mail: tvbaltina@kpfu.ru

© Саченков Оскар Александрович – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедры, e-mail: 4works@bk.ru

ID 0000-0002-8554-2938

© Бережной Дмитрий Валерьевич – д.ф.-м.н., доцент, с.н.с., e-mail: Dmitri.Berezhnoi@kpfu.ru

ID 0000-0002-6785-4401

ID 0000-0002-8297-8437

ID 0000-0001-8257-0610

ID 0000-0003-4819-6818

ID 0000-0003-3798-7665



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

пространстве, но также и изменение его механических свойств. На практике разработка методов восстановления упругих параметров материала предполагает расчёт элементов композиционных конструкций, к которым можно отнести как различные слоистые/армированные композиты [4–8], так и продукты аддитивного производства [9–13]. Другим направлением выступает построение моделей для образцов клинической практики, исследование которых в большинстве случаев основано на методе неразрушающего контроля и направлено на прогнозирование поведения системы в условиях воздействия внешних нагрузок [14–16].

К одному из существующих в настоящее время подходов к восстановлению механических свойств материала можно отнести гомогенизацию выделенной области согласно данным цифрового двойника объекта. Построение цифрового двойника выполняется на основе данных с изображений среды, полученных одним из методов инспекции, наибольшее распространение среди которых получило проведение рентгеновской компьютерной томографии. Значения, полученные с такого рода изображений, определяют изменение показателей проницаемости среды в пространстве и могут быть интерпретированы в качестве механических показателей материала согласно количественной шкале рентгеновской плотности Хаунсфилда [17]. Последующая сегментация изображений позволяет выделять различные фазы среды, обладающие уникальными механическими свойствами материала.

В первую очередь к методам гомогенизации можно отнести метод средней длины пересечений, предполагающий построение тензора структуры [18; 19]. Компоненты данного тензора определяют усреднённое направление осей ортотропии. Существующие физические соотношения позволяют использовать тензор структуры в расчётах [20]. К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость как в предварительном вычислении тензора для каждого расчётного элемента среды, так и в определении физических констант, необходимых для решения системы физических соотношений. Другим подходом выступает метод представительных объёмных элементов, предполагающий определение механических параметров на основе результатов вычислительных экспериментов [21–23]. Недостатком подхода выступает необходимость в моделировании каждого микроэлемента среды, что требует большой вычислительной производительности для решения получаемой системы уравнений.

В данной работе предложен новый метод восстановления матрицы упругих постоянных, основанный на проведении расчётов методом конечных элементов с учётом данных с изображений [24–28]. К особенностям метода можно отнести меньшее количество проводимых вычислений относительно существующих аналогичных подходов, а также слабую зависимость результатов относительно степени дискретизации расчётной сетки, что

позволяет избегать трудностей, связанных с восстановлением расчётной области.

Материалы и методы

Численное моделирование образцов из негомогенного материала может быть выполнено на основе метода конечных элементов [29; 30]. Современные подходы к восстановлению трёхмерных изображений расчётной среды позволяют получать цифровые двойники объектов и использовать их для учёта пространственного распределения механических свойств материала при построении численной модели [21; 31; 32]. В качестве метода восстановления изображений может быть использована рентгеновская компьютерная томография, особенности проведения которой позволяют получать данные о распределении механических свойств в виде массива значений, каждое из которых отражает усреднённую проницаемость среды в текущем микроэlemente объёма [17]. Наибольшее распространение получили техники проведения компьютерной томографии, согласно которым дискретизация области сканирования выполняется на основе микроэлементов с геометрией в виде прямоугольного параллелепипеда, представляющего собой один воксель исходного изображения среды. Существующие методы численного моделирования предполагают использование данного вокселя в качестве наименьшей информативной единицы моделирования, что определяет возможность построения сетки на основе гексагонального конечного элемента сплошной среды с линейной аппроксимацией геометрии. Развитие современных подходов к численному моделированию образцов из негомогенных материалов на основе применения методов неразрушающего контроля позволяет формировать подмножества из таких вокселей в одну расчётную единицу (элементарная ячейка) [20; 22; 30], что в значительной степени снижает размерность получаемой системы и, как следствие, приводит к большей скорости вычислений. В этом случае моделирование элемента негомогенной среды предполагает процесс гомогенизации области [21–23; 33–35], что позволяет определять усреднённые по некоторому представительному объёму механические свойства материала.

Таким образом, в трёхмерном пространстве гомогенизация механических свойств выделенного элемента среды объёма V может быть выполнена на основе соотношения, полученного для тензора упругости 4-го ранга $\llbracket C^H \rrbracket$ для V -периодического композитного материала (механические свойства повторяются в каждом выделенном объёме V , который рассматривается в качестве элементарной ячейки) в виде [34; 35]:

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|V|} \int_V \Delta \varepsilon_{pq}^{(ij)} C_{pqrs} \Delta \varepsilon_{rs}^{(kl)} dV, \quad (1)$$

где C – локально изменяющийся тензор упругости кусочно-однородного материала, $[\Delta \varepsilon^{(ij)}]$ – тензор отклонения деформаций для (ij) -го нагружения (например, при $i = j = 0$ нагружение соответствует приложению единичных деформаций вдоль направления оси x_0), определяемый соотношением:

$$[\Delta \varepsilon^{(ij)}] = [\varepsilon^{0(ij)}] - [\varepsilon^{(ij)}], \quad (2)$$

где $[\varepsilon^{0(ij)}]$ – заданные постоянные по объёму V единичные деформации, $[\varepsilon^{(ij)}]$ – локально изменяющиеся деформации, которые могут быть вычислены на основе уравнений Коши:

$$\varepsilon_{pq}^{(ij)} = \frac{1}{2} (\chi_{p,q}^{(ij)} + \chi_{q,p}^{(ij)}). \quad (3)$$

Здесь поле перемещений $\{\chi^{(ij)}\}$ определяется исходя из решения соотношений упругости при заданных единичных деформациях $[\varepsilon^{0(ij)}]$:

$$\int_V \varepsilon_{pq} \left(\{\delta \chi^{(ij)}\} \right) C_{pqrs} \varepsilon_{rs} \left(\{\chi^{(ij)}\} \right) dV = \int_V \varepsilon_{pq} \left(\{\delta \chi^{(ij)}\} \right) C_{pqrs} \varepsilon_{rs}^{0(ij)} dV, \quad (4)$$

где $\{\delta \chi^{(ij)}\}$ – поле виртуальных перемещений. На практике распространение получили методы, основанные на дискретизации области и решении системы (4) одним из численных методов, например, методом конечных элементов, – такой способ принято называть численной гомогенизацией [2; 27; 36–38].

В работе [27] представлен метод, позволяющий восстанавливать упругие свойства среды на основе отклонения деформированного состояния сетки, построенной на элементарной ячейке, исходя из неоднородного распределения механических параметров материала внутри рассматриваемого объёма V . В рамках подхода дискретизация и решение выполняются методом конечных элементов, где каждый микроэлемент объёма описывается отдельным конечным элементом сплошной среды с известными механическими свойствами (например, изотропия). В этом случае построение цифрового двойника расчётной области выполняется на основе сетки вокселей, полученной согласно данным с изображения. Гомогенизация элемента среды может быть проведена на основе уточнения выражения (1) с учётом кусочно-однородных свойств материала, определяя соотношение для матрицы упругости в виде:

$$[D^H] = \frac{1}{|V|} \sum_{k=1}^{N^E} \int_{V_k} [\Delta \varepsilon_k]^T [D_k] [\Delta \varepsilon_k] dV_k, \quad (5)$$

где N^E – количество конечных элементов гомогенизируемой области, $[D_k]$ – матрица упругости, постоянная по объёму k -го конечного элемента V_k , $[\Delta \varepsilon_k]$ – матрица локального отклонения деформаций, определяемая выражением:

$$[\Delta \varepsilon_k] = [I] - [B_k] [\chi_k]. \quad (6)$$

Здесь $[I]$ – единичная матрица, собранная из вектор-столбцов единичных деформаций $\{\varepsilon^{0(ij)}\}$, представленных согласно Нотации Фойгта [26], $[B_k]$ – матрица дифференцирования, зависящая от локальных координат k -го конечного элемента, $[\chi_k]$ – матрица, составленная из вектор-столбцов узловых перемещений $\{\chi_k^{(ij)}\}$. Порядковый номер нагруженного состояния (номер столбца) при составлении матриц $[I]$ и $[\chi_k]$ определяется согласно Нотации Фойгта, исходя из пары индексов (ij) . Таким образом, произведение $[B_k] [\chi_k]$ соответствует деформациям, обусловленным негомогенным распределением материала [27].

Формулировка выражения (5) может быть также переопределена относительно поля перемещений в виде:

$$[D^H] = \frac{1}{|V|} \sum_{k=1}^{N^E} [\Delta \chi_k]^T [K_k] [\Delta \chi_k], \quad (7)$$

где $[K_k]$ – матрица жёсткости k -го конечного элемента, $[\Delta \chi_k]$ – матрица, составленная из вектор-столбцов локального отклонения узловых перемещений, определяемых как:

$$\{\Delta \chi_k^{(ij)}\} = \{\chi_k^{0(ij)}\} - \{\chi_k^{(ij)}\}. \quad (8)$$

Здесь вектор узловых перемещений $\{\chi_k^{0(ij)}\}$ соответствует тензору единичных деформаций $[\varepsilon^{0(ij)}]$, а $\{\chi_k^{(ij)}\}$ – локальному тензору деформаций $[\varepsilon_k^{(ij)}]$.

Проведение расчётов на основе бинаризированной воксельной модели предполагает построение регулярной (ортогональной) конечно-элементной сетки с кусочно-постоянными свойствами среды, что позволяет упростить выражение (7) следующим образом:

$$[D^H] = \frac{1}{|V^{elastic}|} \sum_{k=1}^{N^E_{elastic}} [\Delta \tilde{\chi}_k]^T [\tilde{K}] [\Delta \tilde{\chi}_k], \quad (9)$$

где индекс k проходит по номерам конечных элементов, определяемых упругой фазой среды [29; 30], а $V^{elastic}$ соответствует образованному ими объёму. В этом случае в силу одинаковой геометрии конечных элементов и

неизменных механических свойств материала внутри их объёмов оказываются постоянными как локальная матрица жёсткости $[\tilde{K}]$, так и вектор узловых перемещений $\{\tilde{\chi}^{0(ij)}\}$, что позволяет в значительной мере сократить количество проводимых вычислений при расчёте пористых образцов.

Таким образом, численная гомогенизация представленным методом позволяет выполнять расчёты на основе построения равномерных и неравномерных сеток, интерпретируя данные с цифрового двойника образца в качестве показателей распределения негомогенных механических параметров материала. В этом случае учёт неоднородных свойств среды выполняется согласно значениям отклонения деформаций (перемещений), вычисление которых может быть выполнено методом конечных элементов в рамках заданных граничных условий.

Рассмотрим подробнее определение механических характеристик, используемых в формулах (1), (5) и (7). В силу особенностей представленной гомогенизации, основанной на решении методом конечных элементов, определяющая система уравнений имеет вид:

$$[K][\chi] = [f], \quad (10)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жёсткости, $[\chi]$ – матрица, составленная из глобальных вектор-столбцов узловых перемещений $\{\chi^{(ij)}\}$, $[f]$ – матрица глобальных вектор-столбцов узловых сил $\{f^{(ij)}\}$. Знак Σ определяет сборку глобальной матрицы жёсткости $[K]$ согласно известному правилу суммирования:

$$[K] = \sum_{k=1}^{N^E} [K_k], \quad (11)$$

где вычисление локальных матриц жёсткости $[K_k]$ выполняется согласно формуле:

$$[K_k] = \int_{V_k} [B_k]^T [D_k] [B_k] dV_k, \quad (12)$$

принимая матрицу упругости $[D_k]$ постоянной по объёму отдельного конечного элемента.

Определение в формуле (2) на моделируемой области тензора локально изменяющихся деформаций $[\varepsilon^{(ij)}]$ предполагает вычисление соответствующего глобального вектора узловых сил согласно выражению:

$$\{f^{(ij)}\} = \sum_{k=1}^{N^E} \{f_k^{(ij)}\}, \quad (13)$$

где суммирование определяется правилом сборки, введённым в формуле (11), а вектор узловых сил $\{f_k^{(ij)}\}$

вычисляется для k -го конечного элемента на основе соотношения:

$$\{f_k^{(ij)}\} = \int_{V_k} [B_k]^T [D_k] \{\varepsilon^{0(ij)}\} dV_k. \quad (14)$$

Здесь вектор-столбец $\{\varepsilon^{0(ij)}\}$ соответствует представленному согласно нотации Фойгта тензору единичных деформаций $[\varepsilon^{0(ij)}]$. Дальнейшее решение системы уравнений (10) требует исключения вырожденности путём приложения кинематических граничных условий. В этом случае для каждой схемы нагружения ограничения в перемещениях должны удовлетворять выполнению предельного случая численного моделирования. При однородном заполнении гомогенизуемой области сплошным материалом требуется выполнение равенств:

$$[C^H] = [\tilde{C}], \quad (15)$$

$$[D^H] = [\tilde{D}], \quad (16)$$

где $[\tilde{C}]$ и $[\tilde{D}]$ – соответственно тензор и матрица упругости для однородного по объёму элементарной ячейки материала. Обеспечение выполнения равенств (15) и (16) может быть достигнуто в силу равенства нулю компонент $[\varepsilon^{(ij)}]$ и $\{\chi_k^{(ij)}\}$ в формулах (2) и (8). Вид необходимых граничных условий для решения двухмерной задачи гомогенизации ранее был подробно описан в работах [34, 35] и по аналогии может быть расширен на трёхмерный случай [28]. Таким образом, вычисление в формуле (2) тензора локально изменяющихся деформаций $[\varepsilon^{(ij)}]$ может быть проведено на основе полученного из решения уравнения (10) вектора узловых перемещений $\{\chi^{(ij)}\}$ с учётом вектора узловых сил $\{f^{(ij)}\}$, определяемого выражением (13), в рамках приложения соответствующих методов гомогенизации граничных условий.

Построение в формуле (8) вектора узловых перемещений $\{\chi^{0(ij)}\}$ может быть выполнено аналогично методу вычисления вектора $\{\chi^{(ij)}\}$ относительно вектора узловых сил $\{f^{(ij)}\}$. Отличие компонент векторов $\{\chi^{0(ij)}\}$ и $\{\chi^{(ij)}\}$ обуславливается следующими особенностями метода. В силу приложения постоянных по объёму V единичных деформаций $[\varepsilon^{0(ij)}]$ расчёт соответствующих узловых перемещений $\{\chi^{0(ij)}\}$ может быть выполнен путём локального нагружения каждого конечного элемента. В этом случае материал в рамках отдельного подобъёма принимается однородным с заданными

механическими свойствами, что позволяет определять поле перемещений для k -го конечного элемента на основе равенства:

$$[K_k][\chi_k] = [f_k], \quad (17)$$

Решение полученной системы уравнений (17) относительно локальной матрицы узловых перемещений $[\chi_k]$ также требует исключения вырожденности путём ограничения достаточного количества степеней свободы. В отличие от кинематических граничных условий, используемых при решении системы (10), решение системы (17) не требует выполнения равенств (15) и (16) – ограничения накладываются лишь на подобие условий закрепления для каждого локального нагружения с целью обеспечения корректности вычисления локального отклонения деформаций или перемещений согласно формулам (2) и (8), соответственно. Следует также отметить, что построение численных моделей на основе биаризированных изображений с постоянным шагом дискретизации приводит к равенству решений системы (17), полученных для каждого конечного элемента сетки, соответствующего упругой фазе среды, что подтверждает корректность формулы (9) и позволяет выполнять вычисления однократно.

В настоящем исследовании было предложено применить к расчёту образцов из негомогенных материалов определяющее соотношение (7) совместно с методом взвешенного интегрирования матрицы жёсткости каждого конечного элемента сетки [24; 25]. В этом случае вычисление локальной матрицы жёсткости позволяет учитывать неоднородность материала на макроуровне, моделируя отдельным конечным элементом соответствующий ему объём среды на основе данных цифрового двойника. В отличие от метода, представленного в работах [27; 28], построение локальной матрицы жёсткости предполагает учёт неоднородного распределения механических свойств материала в соответствующем объёме конечного элемента, что исключает возможность упрощения вычислений, определяемых формулой (9). Однако в рамках нового подхода предлагается использовать аппарат взвешенного интегрирования не при расчёте локальной матрицы жёсткости, а при построении вектора узловых сил. Такой подход реализует гомогенизацию области, соответствующей объёму отдельного конечного элемента, что предполагает сведение суммирования в формуле (7) к одному слагаемому. В этом случае расчётные соотношения метода позволяют в дальнейшем опустить этап сборки, определённый формулами (11) и (13). Таким образом, равенство (7) принимает вид:

$$[D_k^H] = \sum_{l=1}^{N^M} \frac{1}{|V_{kl}|} [\Delta\chi_{kl}]^T [K_{kl}] [\Delta\chi_{kl}], \quad (18)$$

где N^M – количество материалов, задействованных объёмом конечного элемента, V_{kl} – доля объёма, занимаемая

l -й фазой среды, $[K_{kl}]$ – локальная матрица жёсткости, соответствующая однородному материалу, определяемому l -й фазой. Матрица локального отклонения узловых перемещений $[\Delta\chi_{kl}]$ выражается через локальную матрицу узловых перемещений $[\chi_{kl}]$, представленную равенством:

$$[\chi_{kl}] = [\chi_{kl}^0] - [\chi_{kl}^{DT}], \quad (19)$$

где локальная матрица узловых перемещений $[\chi_{kl}^{DT}]$ соответствует решению, полученному на основе учёта неоднородности материала согласно данным цифрового двойника, а матрица $[\chi_{kl}^0]$ определяется значениями, соответствующими однородной модели.

Вычисление локальной матрицы узловых перемещений $[\chi_{kl}^{DT}]$ может быть выполнено на основе решения системы уравнений (17). В этом случае моделирование области одним конечным элементом предполагает применение кинематических граничных условий, обеспечивающих наличие ненулевых деформаций. В качестве локальной матрицы узловых сил используется матрица $[f_{kl}^{DT}]$, интегрирование которой выполняется с учётом неоднородного пространственного распределения материала [29; 30]. Матрица $[\chi_{kl}^{DT}]$, вычисленная на основе решения системы (17) с учётом матрицы $[f_{kl}^{DT}]$, соответствует узловым перемещениям, образованным нагружением однородного образца в условиях воздействия сил, соответствующих тензору единичных деформаций $[\varepsilon^{0(ij)}]$ для негомогенной среды, определяемой l -й фазой. Подставляя правую часть равенства (19) в формулу (8), записанную в матричном виде, окончательное выражение для вычисления матрицы локального отклонения узловых перемещений $[\Delta\chi_{kl}]$ представимо как:

$$[\Delta\chi_{kl}] = [\chi_{kl}^{DT}], \quad (20)$$

Рассматривая в качестве моделируемой среды сплошной однородный материал, в формуле (18) под знаком суммы остаётся единственное слагаемое, определяющее матрицу упругости однородного материала. Правая часть соотношения (20), аналогично формуле (8), переписанной для однородного материала в матричном виде, оказывается равна $[\chi_{kl}^0]$, что также приводит к удовлетворению условий постановки задачи, выраженных равенствами (15) и (16). Применение такого подхода на практике позволяет проводить гомогенизацию неоднородных материалов. Восстановление механических свойств многофазных сред может быть реализовано на основе изолированного исследования каждой фазы:

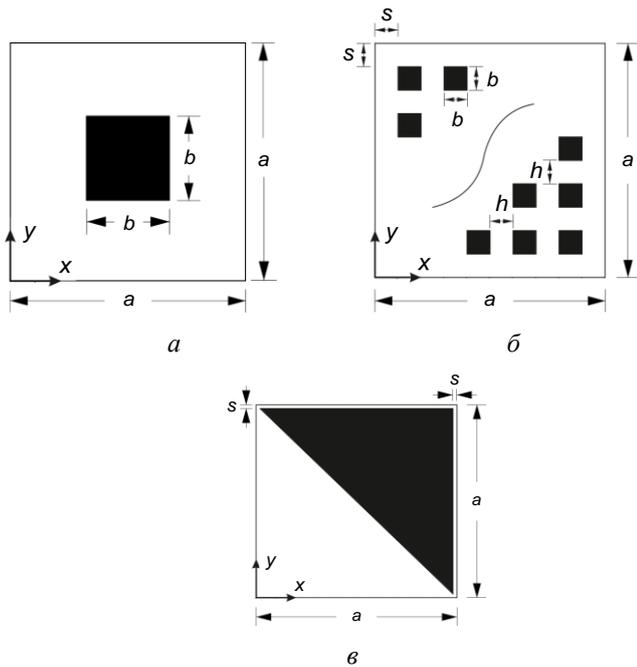


Рис. 1. Моделирование тестовых образцов:

a – прямоугольный вырез; *б* – равномерная пористая структура; *в* – треугольный вырез

последующее суммирование полученных компонент в формуле (18) может быть проведено в силу сплошности материала и непрерывности функций форм конечного элемента [6].

Результаты

Моделирование выполнялось на основе трёхмерного гексагонального восьмиузлового изопараметрического конечного элемента с линейной аппроксимацией [30]. В рамках исследования проводился расчёт тестовых образцов. В первую группу изображений входили данные с известным распределением механических параметров. Вторая группа содержала цифровые двойники, полученные путём извлечения элементов среды из натуральных объектов. Полученные результаты содержали показатели распределения упругого вещества (пористость), а также компоненты матрицы упругости, восстановленные на основе применения представленного метода. Верификация полученных данных для образцов первой группы выполнялась на основе аналитического расчёта согласно соотношениям закона механической смеси [39].

Моделирование неоднородных свойств

Оценка количественного соответствия результатов, полученных разработанным методом на основе формулы (18), проводилась в отношении тестовых образцов моделируемой пористости. Для показательности результатов проводимых вычислений использовалась двумерная постановка задачи (рис. 1). В этом случае использовались бинаризованные данные компьютерной

томографии, в которых за единицу принимался упругий материал, определяющий жёсткость конструкции, а в качестве нуля определялось расположение пустот и пористых образований. Дискретизация области изображения выполнялась с постоянным шагом, что определяло регулярную сетку пикселей. Образующий структуру материал (соответствующий единице) принимался сплошным и изотропным со следующими механическими параметрами: модуль упругости на растяжение/сжатие $E = 200$ ГПа, модуль сдвига $G = 77$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Данные механические показатели были выбраны произвольно и могут быть изменены в рамках постановки конкретной задачи. В силу особенностей метода восстановления матрицы упругих постоянных прикладываемые в рамках решения системы (17) граничные условия выбирались фиксированно для каждого элемента неомогенной среды и использовались лишь для корректной математической постановки задачи: прикладываемые единичные деформации растяжения/сжатия не несут физического смысла, однако приводят к удовлетворению равенств (15) и (16) при рассмотрении сплошных изотропных моделей. В силу особенностей метода построение расчётных сеток предполагало аппроксимацию гомогенизируемой области одним конечным элементом.

Первой задачей выступал расчёт образцов с геометрией в виде квадрата. Рассмотрим численное моделирование объектов с равномерным распределением пористости (рис. 1, *a*, *б*). На рис. 1, *a*, представлена схема центрального прямоугольного выреза. Характеристическим параметром выступал размер стороны квадратного выреза, определяемого чёрным цветом. Соотношение сторон квадратов составляло $a/b = 3$, пористость образца – порядка 11 %. При моделировании размер пикселя соответствовал характеристическому параметру и составлял 1×1 мм. Разрешение изображения, полностью определяемое введёнными зависимостями, составляло 3×3 пикселя, что в дальнейшем устанавливало количество точек интегрирования при вычислении вектора узловых сил [30]. Габариты расчётной области составляли 3×3 мм.

В табл. 1 представлены результаты расчёта, полученные как на основе применения формулы закона механической смеси, так и путём проведения вычислений представленным методом. В силу симметрии моделируемого выреза механические свойства гомогенизируемого элемента соответствовали изотропии с пониженным показателем упругости, в отличие от сплошного образца. Отклонение полученных значений от исходного модуля упругости образующего материала находилось в зависимости от показателя пористости элемента среды и составляло порядка 11 %. Таким образом, результаты показывают высокую сходимость значений численного метода данным аналитического расчёта: погрешность составляла около 0,0002 % и в большей степени объяснялась ограниченной точностью хранения вычислительных данных. Исключение прямоугольного выреза из области приводит к соответствию решения сплошному

Таблица 1

Значения модуля упругости для образца с прямоугольным вырезом, ГПа

Параметр	Образующий	Аналитический	Расчётный
E	200,00	192,59	192,59
G	76,92	74,07	74,07

изотропному материалу и полностью удовлетворяет равенствам (15) и (16), что может быть использовано в дальнейшем при оценке сходимости метода на основе изменения относительной доли содержания упругого вещества в рамках сохранения равномерной пористости материала.

Следующим этапом выступало моделирование равномерного распределения прямоугольных вырезов в заданной квадратной области. На рис. 1, *б* обозначена схема моделирования пористости материала. Приложение равномерно распределённых граничных условий обеспечивалось сплошной внешней границей ширины s . Средняя область геометрии покрывалась одинаковыми квадратными вырезами со стороной b , расстояние между которыми определялось параметром h . В рамках данной тестовой задачи в качестве характеристического параметра использовалось значение b , к которому приравнивались остальные геометрические размеры, определяющие дискретизацию области: $s = h = b$. Таким образом, в качестве исходного изображения использовались бинаризованные данные с разрешением 100×100 пикселей, что определяло размеры внешней границы как $a = 100 \cdot b$. В этом случае пористость элемента среды равнялась 48,02 %. Принимая аналогично предыдущей задаче $b = 1$ мм, габариты области составляли 100×100 мм.

Моделирование равномерного распределения пористости в заданной области аналогично обеспечивало изотропию механических свойств материала. В табл. 2 представлены результаты аналитического и численного расчётов. Отклонение моделируемых значений относительно исходного модуля упругости составляло порядка 48,02 %, что также соответствовало показателю пористости материала. Аналогично результатам расчётов предыдущей модели величина модуля упругости на растяжение/сжатие или сдвиг оказывается в прямой зависимости относительно доли содержания упругого вещества при условии равномерного распределения неоднородных свойств. Погрешность вычислений относительно аналитического метода не превышала 0,0001 %, что также может быть объяснено недостаточной точностью хранения числовых данных. Проведение вычислительных экспериментов на данной модели позволяет оценивать влияние высокого уровня пористости среды на упругие показатели элемента, что при условии равномерного распределения негомогенных свойств материала в совокупности с результатами моделирования центрального прямоугольного выреза позволяет сделать вывод о линейной

Таблица 2

Значения модуля упругости для образца с равномерной пористой структурой, ГПа

Параметр	Образующий	Аналитический	Расчётный
E	200,00	103,96	103,96
G	76,92	39,98	39,98

зависимости решения относительно доли содержания образующего вещества.

Завершающей задачей серии вычислительных экспериментов, направленных на построение заданной неоднородности, выступает моделирование треугольного выреза внутри геометрии расчётной области, что определяет несимметричное распределение материала. На рис. 1, *в*, представлена геометрия выреза, определяемая характеристическим параметром s . Гипотенуза построенного таким образом треугольника лежит на диагонали внешнего квадрата, определяющего габариты области. Принимая соотношение вида $a / s = 100$, разрешение исходного изображения среды также составляло 100×100 пикселей. Доля пустого пространства, определяемого треугольным вырезом, равнялась 45,6 %. Габариты внешней области устанавливались значением параметра $s = 1$ мм и соответствовали 100×100 мм.

В табл. 3 представлены результаты моделирования несимметричного распределения образующей фазы среды. Так как метод основан на вычислении механических параметров для ортотропных материалов с помощью матрицы, обратной к матрице упругости [22], применение такого подхода к расчётным величинам предполагает поворот локальной системы координат гомогенизируемого элемента среды в соответствии с направлением осей ортотропии. Исключая процесс поворота на данном этапе исследований, полученные значения модуля упругости на растяжение/сжатие или сдвиг оказываются равными в направлении Ox и Oy , что объясняется зеркальной симметрией треугольного выреза относительно ортогональных координатных осей. В отличие от двух предыдущих тестовых задач, полученное в рамках данной постановки численное решение показывает только качественное соответствие результатов моделирования несимметричного распределения.

Сопоставительный анализ с аналитическим решением может быть заменён на сравнение результатов с данным расчёта одного из существующих численных подходов и требует дальнейшего развития исследований.

Показательные натурные образцы

Следующим этапом выступало проведение показательных расчётов на образцах биологического происхождения. В качестве исходных изображений применялись трёхмерные снимки костных органов карликовых

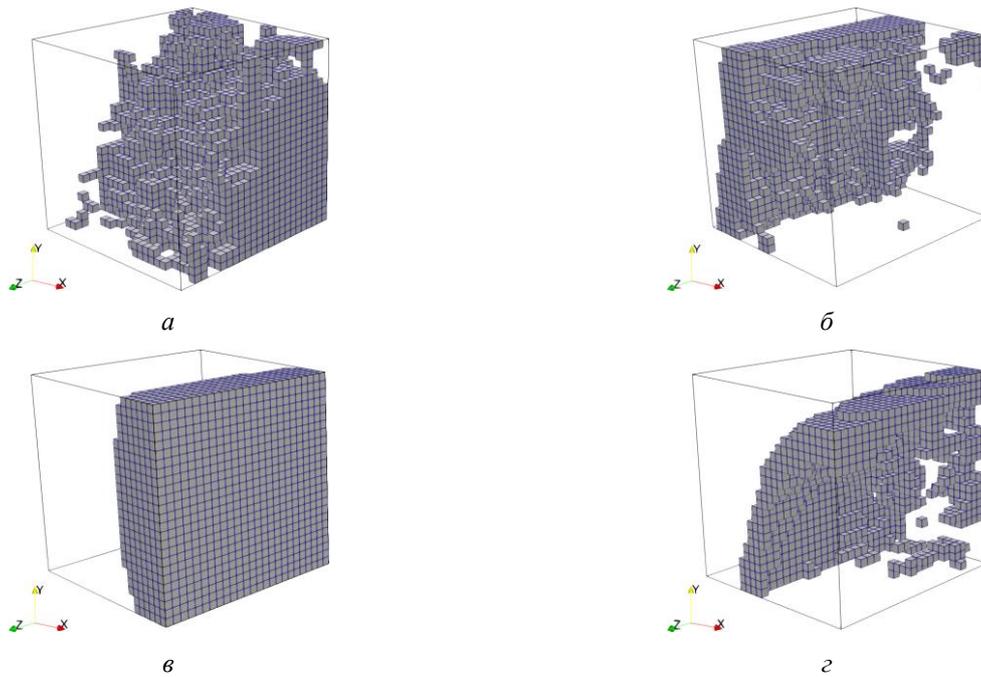


Рис. 2. Элементы сегментированных данных костных органов: *а* – губчатая кость; *б* – кортикальная и губчатая кость; *в* – кортикальная кость; *г* – кортикальная и губчатая кость с большой кривизной внешней стенки органа

Таблица 3

Значения модуля упругости для образца с треугольным вырезом, ГПа

Параметр	Образующий	Расчётный
<i>E</i>	200,00	124,20
<i>G</i>	76,92	60,29

Таблица 4

Относительная доля содержания пустого пространства элементов среды, %

Первый образец	Второй образец	Третий образец	Четвёртый образец
39,37	63,10	68,34	71,81

свиней. Протокол экспериментов, включающий анестезию, хирургическое вмешательство, послеоперационный уход, тестирование и эвтаназию, был одобрен Комитетом по уходу за животными Казанского государственного медицинского университета. Все экспериментальные процедуры проводились в соответствии со стандартами, чтобы свести к минимуму страдания животных и размер экспериментальных групп. Сканирование образцов выполнялось на основе микро-/нанофокусной системы рентгеновского контроля для компьютерной томографии и 2D-инспекции *Phoenix V|tome|X S240* в лаборатории рентгеновской компьютерной томографии Института геологии и нефтегазовых технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. Для первичной обработки данных и создания воксельной модели образца на базе рентгеновских снимков использовалось программное обеспечение *datos|x reconstruction*. Зафиксированный в держателе образец помещался на вращающийся столик камеры компьютерного томографа на оптимальном расстоянии от источника рентгеновского излучения.

Подготовка экспериментальных данных предполагала сегментацию исходных изображений согласно показателям проницаемости среды [4–6]. Результатом сегментации выступало выделение расчётных фаз

костной ткани, включающих как упругое костное вещество, так и материал в порах, влияние которого на образование жёсткости конструкции пренебрежительно мало. Последующее извлечение элементов кубической геометрии основывалось на выборе типичных для костной ткани структурных образований: моделирование проводилось на расчётных образцах с различной долей и распределением упругой костной ткани (рис. 2). В качестве показательных распределений материала рассматривались: губчатая (трабекулярная) кость высокой пористости (см. рис. 2, *а*, первый образец), сочетание кортикальной и губчатой кости на плоской границе органа (см. рис. 2, *б*, второй образец), плотная кортикальная кость (см. рис. 2, *в*, третий образец), сочетание кортикальной и губчатой кости на границе органа с высокими показателями кривизны (см. рис. 2, *г*, третий образец).

Размеры геометрии определялись разрешением элемента изображения и физическим размером вокселя и совпадали для всех подобъёмов среды. Количество вокселей составляло $26 \times 26 \times 26$, размер каждого вокселя – $0,2 \times 0,2 \times 0,2$ мм. Таким образом, габариты области равнялись $5,2 \times 5,2 \times 5,2$ мм. Восстановление механических свойств материала на основе натуральных образцов выбранной структуры предполагало моделирование

Значения расчётных механических параметров элементов среды, ГПа

Параметр	Образующий	Первый образец	Второй образец	Третий образец	Четвёртый образец
E_{xx}	30,00	21,62	11,47	9,81	8,56
E_{yy}	30,00	21,31	11,44	17,14	9,86
E_{zz}	30,00	19,10	11,72	18,23	9,82
G_{xy}	11,54	7,65	4,46	4,76	3,50
G_{yz}	11,54	8,38	4,38	4,78	3,49
G_{xz}	11,54	7,50	4,45	6,99	3,83

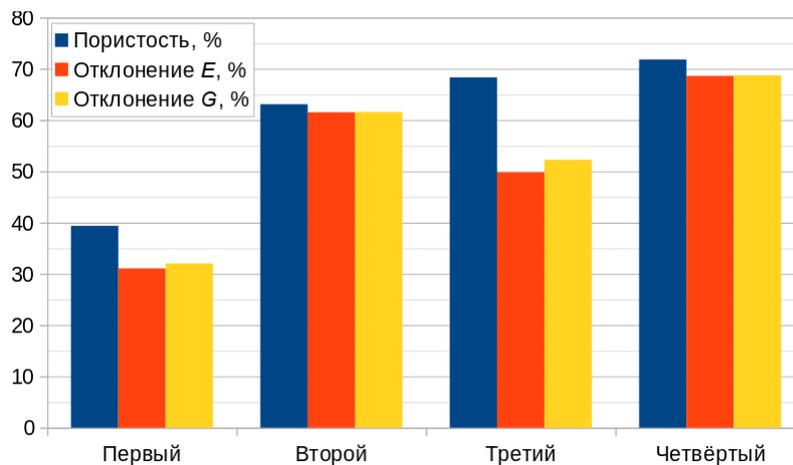


Рис. 3. Зависимость отклонения упругих характеристик от доли содержания материала

распределения упругого материала, значения механических свойств которого принимались постоянными в каждом микрообъёме среды. Таким образом, бинаризация исходных массивов данных проводилась согласно пороговому значению для костной ткани, полученному методом Отцу на основе построения гистограмм изображений [38]. В табл. 4 представлены относительные показатели отсутствия упругого вещества в элементах среды.

В качестве механических параметров образующего костного вещества принимались следующие: модуль упругости $E = 30$ ГПа, модуль сдвига $G = 11,54$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Значения данных показателей соответствуют средним показателям для костной ткани и могут быть уточнены в рамках моделирования определённого типа материала с учётом множества фаз среды [26]. В табл. 5 представлены значения механических параметров в зависимости от направления декартовых координатных осей. В отличие от результатов, полученных для тестовых образцов заданной неоднородности, компоненты модулей упругости и сдвига не равны вдоль направления ортогональных осей. Следует отметить, что аналогично постановке задачи с треугольным вырезом (см. рис. 1, в) вычисление механических параметров на основе обратной матрицы для ортотропных материалов предполагает переход в локальную систему координат, оси которой

сонаправлены с осями ортотропии элемента среды. Представленные в табл. 5 результаты соответствуют механическим показателям материала, полученным без использования матрицы поворота, и в дальнейших исследованиях могут быть пересчитаны на основе определения усреднённого направления осей ортотропии [18; 22].

Результаты показывают влияние объёмного распределения материала на упругие характеристики среды: показатели упругости снижаются при уменьшении количественного содержания образующего материала для всех натуральных образцов. Качественная оценка значений позволяет сделать вывод о влиянии структурного распределения костной ткани: моделирование второго образца показало наибольшие значения модуля упругости в направлении оси Oz ($E_{zz} = 11,72$ ГПа), что в среднем на 2,5 % больше показателей в направлении осей Ox и Oy . С механической точки зрения данный результат может быть объяснён увеличенной прочностью костного органа на растяжение/сжатие вдоль продольной оси, направление которой на элементе снимка совпадает с координатной осью Oz . К другого типа результатам можно отнести данные, полученные для третьего образца: модуль упругости в направлении оси Ox оказывается приблизительно в два раза меньше соответствующих значений вдоль направления осей Oy и Oz , что объясняется

наличием пустой полости в этом направлении. Данные результаты в большей степени соответствуют трансверсальной изотропии. Учёт особенностей такого рода неравномерного распределения материала в области при построении численных моделей позволяет уточнить напряжённо-деформированное состояние образца, полученное на основе конечно-элементного расчёта [30]. Результаты, представленные для первого и четвёртого образцов, позволяют проводить анализ усреднённых упругих характеристик на основе произвольного распределения материала в объёме, исключая наличие чётко выраженных осей структурной направленности вещества.

На рис. 3 представлен график зависимости отклонения значений упругих показателей материала относительно объёмного содержания материала, образующего жёсткость элемента. Синим цветом обозначена доля содержания пустоты (пористость), оранжевым и жёлтым – отклонение среднего арифметического модулей упругости и сдвига от исходных механических параметров образующего материала. Следует выделить результаты, полученные для третьего образца, согласно которым отклонение упругих характеристик относительно доли упругого материала меньше, что объясняется его плотным направленным распределением в выделенном подобъёме (см. рис. 2, в). Для других образцов экспериментальной группы отклонение среднего арифметического механических свойств находится в прямой зависимости относительно заполненности элемента упругой фазой среды.

Обсуждение

Моделирование в рамках работы неоднородных свойств на основе расчёта образцов заданной структуры показало сходимость метода относительно аналитического решения. Выбор определённых механических показателей в качестве исходных использовался для оценки отклонения моделируемых значений. Рассмотрение образцов с равномерным распределением пористости (см. рис. 1, а, б) показало сходимость результатов с данными расчёта, полученными согласно закону механической смеси. Моделирование образцов подобной структуры предполагает расчёт материалов высокой пористости: в клинической практике данными свойствами обладают элементы трабекулярной структуры [3]. Проведение вычислений на образце с треугольным вырезом (см. рис. 1, в) показало необходимость в определении направления осей ортотропии материала для корректной оценки упругих характеристик.

Исследование элементов костной структуры позволило определить качественное соответствие результатов моделирования структурной организации материала. Извлечение элементов изображения, соответствующих граничной области, оказывается актуальной задачей при дискретизации области регулярной

ортогональной сеткой [24–26]. В этом случае каждому конечному элементу соответствует локальная область компьютерной томографии, определяющая соответствующую подобъёму часть костного органа. Таким образом, заполнение элемента среды упругим материалом оказывается произвольным не только в силу неравномерного структурного распределения вещества, но и ввиду геометрических особенностей объекта. Характерным примером подобной дискретизации области выступает моделирование костных органов сложной топологической структуры, например, костей конечностей карликовых свиней [24; 25] или позвончиков собак [26]. Предложенный метод также позволяет проводить вычисления с учётом нескольких фаз материала. Таким образом, сегментация исходных изображений может быть выполнена с выделением не только пустого пространства, но и на основе определения костной ткани различного происхождения (кортикальная, губчатая и др.). Исследования элементов многофазных сред позволяют проводить в том числе расчёты позвоночных столбов, принимая в качестве расчётных костную ткань и материал межпозвоночных дисков [28].

Преимуществами предложенного метода восстановления упругих характеристик материала выступает применение методов неразрушающего контроля, предполагающих учёт неоднородных свойств среды на основе данных с изображений. Реализация такого подхода на практике позволяет проводить множественное нагружение образцов без необходимости в их разрушении. Другим преимуществом метода оказывается возможность применения к моделям, предполагающим дискретизацию расчётной области на основе построения регулярных ортогональных сеток. Задачи такого рода получили распространение при численном моделировании согласно данным компьютерной томографии, определяющих в большинстве случаев равномерную ортогональную сетку пикселей/вокселей. Применение таких сеток в расчётах позволяет избежать сложной процедуры восстановления расчётной геометрии и предоставляет возможности автоматизации проводимых вычислений. Отличительной особенностью рассмотренного метода также выступает возможность определения механических параметров материала напрямую из численной модели, применяя в расчётах вектор узловых сил, построенный с учётом данных с изображений. Данная методика, в отличие от метода представительных объёмных элементов, позволяет избежать дополнительных вычислений, направленных на усреднение полученных величин и в значительной степени снижает количество проводимых расчётов. Следует отметить, что в рамках предложенного метода, аналогично методу построения тензора структуры и методу представительных объёмных элементов, остаётся открытым вопрос определения размера гомогенизируемой ячейки, что устанавливает степень дискретизации расчётной области и в большей мере зависит от разрешающей способности сканирующего устройства.

В качестве направления дальнейших исследований может быть рассмотрен подход, предполагающий расчёт согласно методу, предложенному в [27; 18] работах, моделируя каждый конечный элемент среды на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости. Такой подход также позволит в значительной степени сократить количество проводимых вычислений при высоком разрешении исходных изображений среды.

Заключение

В работе рассмотрен метод восстановления механических параметров материала на основе построения матрицы упругих постоянных с учётом данных цифрового двойника объекта. В ходе исследований получены

результаты расчёта как тестовых образцов заданной структурной неоднородности материала, так и элементов натуральных образцов с произвольным объёмным распределением вещества. Результаты показали сходимость полученных показателей к аналитическому решению в расчётных тестовых задачах и качественное соответствие структурным показателям при моделировании натуральных экземпляров. Представленный метод позволяет получать механические свойства напрямую из численной модели, избегая ряда дополнительных вычислений, необходимых для проведения расчётов на основе аналогичных подходов. Применение такого метода на практике позволяет выполнять построение матрицы упругих постоянных для элементов негомогенных сред и использовать полученные значения при дальнейших расчётах.

Список литературы

1. Исследование прочности эндопротеза тазобедренного сустава из полимерного материала / Л.Б. Маслов, А.Ю. Дмитрюк, М. А. Жмайло, А.Н. Коваленко. // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, №4. – С. 19–33. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2022.4.02
2. Multislice computed tomography in the complex assessment of deformities of long tubular bones of the lower extremities: prospective cohort study / A. Bagirov, P. Suvarly, E. Ogaryov, A. Yeltsin, D. Mininkov, A. Tagizade // N.N. Priorov Journal of Traumatology and Orthopedics. – 2023. – Vol. 29. – P. 269–277. DOI: 10.17816/vto111559
3. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo / G. Vanlenthe, H. Hagenmuller, M. Bohner, S. Hollister, L. Meinel, R. Muller // Biomater. – 2007. – Vol. 28, no. 15. – P. 2479–2490. DOI: 10.1016/j.biomaterials.2007.01.017
4. Численное исследование влияния степени недопокрытия вертлужного компонента, подкрепленного винтом, на несущую способность эндопротеза тазобедренного сустава / П.В. Большаков, Р.М. Тихилов, А.В. Мазуренко, Ю.Г. Коноплев, Р.Д. Пряжеский, О.А. Саченков // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 1. – С. 19–30. DOI: 10.15593/RJBiomech/2018.1.02
5. Kasiviswanathan, V. Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2–2) multiferroic composites / V. Kasiviswanathan, A. Arockiarajan // Sens. Actuator. – 2015. – Vol. 236. – P. 380–393. DOI: 10.1016/j.sna.2015.11.010
6. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns / S.M. Mohammadi, M. Komeili, A.B. Phillion, A.S. Milani // Comput. Struct. – 2016. – Vol. 163. – P. 29–40. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.10.002
7. Vahterova, Y.A. Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials / Y.A. Vahterova, Y.N. Min // TURCOMAT. – 2021. – Vol. 12 (2). – P. 2703–2708. DOI: 10.17762/turcomat.v12i2.2295
8. Vilchevskaya, E. Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix / E. Vilchevskaya, I. Sevostianov // int. J. Eng. Sci. – 2015. – Vol. 94. – P. 139–149. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2015.05.006
9. Пилотное исследование потери устойчивости на сжатие решетчатого эндопротеза с помощью рентгеновской томографии / К.Н. Акифьев, Н.В. Харин, Е.О. Стаценко, О.А. Саченков, П.В. Большаков // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 4. – С. 40–49. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2023.4.03
10. Исследование пористости образца с флюид насыщенными закрытыми пораами под действием внешней нагрузки / Н.В. Харин, К.Н. Акифьев, Е.О. Стаценко, Е.В. Семенова, О.А. Саченков, П.В. Большаков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2024. — Т. 3 (114). – С. 70–91. EDN: SAQEVV
11. Bolshakov, P. Structural design method for constructions: simulation, manufacturing and experiment / P. Bolshakov, N. Kharin, R. Kashapov, O. Sachenkov // Materials. – 2021. – Vol. 14 (20). – 6064. DOI: 10.3390/ma14206064
12. Overcoming the limitation of in-situ microstructural control in laser additive manufactured Ti–6Al–4V alloy to enhanced mechanical performance by integration of synchronous induction heating / W. Fan, H. Tan, F. Zhang, Z. Feng, Y. Wang, L.-C. Zhang, X. Lin, W. Huang // Journal of Materials Science & Technology. – 2021. – Vol. 94. – P. 32–46. DOI: 10.1016/j.jmst.2021.02.069
13. Laser Additive Manufacturing on Metal Matrix Composites: A Review / N. Li, W. Liu, Y. Wang, Z. Zhao, T. Yan, G. Zhang, H. Xiong // Chin. J. Mech. Eng. – 2021. – Vol. 34, iss. 3. – P. 38. DOI: 10.1186/s10033-021-00554-7
14. Большаков, П.В. Моделирование разрушения неоднородного тела методом конечных элементов с использованием данных компьютерной томографии / П.В. Большаков, О.А. Саченков // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 2. – С. 248–258. DOI: 10.15593/RzhBiomeh/2020.2.12
15. Полянский, Р.К. Клинико-экспериментальное обоснование использования межпозвонковых имплантатов из углесталла в шейном отделе позвоночного столба у собак: диссертация канд. вет. наук: 06.02.04 / ПКП. – М., 2016. – 118 с.
16. Intervertebral disc degeneration in the dog. Part 1: Anatomy and physiology of the intervertebral disc and characteristics of intervertebral disc degeneration / N. Bergknot, L.A. Smolders, G.C.M. Grinwis, R. Hagman, A.S. Lagerstedt,

- H.A.W. Hazewinkel, M.A. Tryfonidou, B.P. Meij // *Vet. J.* – 2013. – Vol. 195 (3). – P. 282–291. DOI: 10.1016/j.tvjl.2012.10.024
17. Clinical Importance of Hounsfield Unit in Computed Tomography of Sub-Axial Cervical Vertebral Body / S. Choi, Y.-K. Park, J.H. Kim, H. Moon, W.-K. Kwon, C. Ham // *Asian Journal of Pain.* – 2022. – Vol. 8, no. 2. DOI: 10.35353/ajp.2022.00059
 18. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, А.А. Заборских. // *Российский журнал биомеханики.* – 2011. – Т.15, № 4. – С. 78–93.
 19. Fabric-elasticity relationships of tibial trabecular bone are similar in osteogenesis imperfecta and healthy individuals / M. Simon, M. Indermaur, D. Schenk, S. Hosseinibatabaei, B.M. Willie, P. Zysset // *Bone.* – 2022. – Vol. 155. – 116282. DOI: 10.1016/j.bone.2021.116282
 20. Bone Volume Fraction and Fabric Anisotropy Are Better Determinants of Trabecular Bone Stiffness Than Other Morphological Variables / G. Maquer, S. Musy, J. Wandel, T. Gross, P. Zysset // *Journal of Bone and Mineral Research.* – 2014. – Vol. 30. DOI: 10.1002/jbmr.2437
 21. Методика определения ортотропных свойств костного органа по данным компьютерной томографии / Н.В. Харин, О.В. Герасимов, П.В. Большаков, А.А. Хабибуллин, А.О. Федянин, М.Э. Балтин, Т.В. Балтина, О.А. Саченков // *Российский журнал биомеханики.* – 2019. – Т. 23, №3. – С. 460–468. DOI: 10.15593/RzhBiomeh/2019.3.11
 22. Carniel, T.A. On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles / T.A. Carniel, B. Klahr, E.A. Fancello. // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* – 2019. – Vol. 91. – P. 131–138. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2018.12.003
 23. Hollister, S.J. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites / S.J. Hollister, N. Kikuchi // *Comput. Mech.* – 1992. – Vol. 10, no. 2. – P. 73–95. DOI: 10.1007/BF00369853
 24. Определение механических свойств костной ткани численно-цифровым методом на основе данных компьютерной томографии / О.В. Герасимов, Р.Р. Рахматулин, Т.В. Балтина, О.А. Саченков // *Российский журнал биомеханики.* – 2023. – Т. 27, № 3. – С. 53–66. DOI: 10.15593/RzhBiomech/2023.3.04
 25. Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии / О.В. Герасимов, Р.Р. Рахматулин, Т.В. Балтина, О.А. Саченков // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение.* – 2023. – Т. 8 (761). – С. 3–15. DOI: 10.18698/0536-1044-2023-8-3-15
 26. Оценка напряжённого состояния позвоночных столбов собак на основе данных компьютерной томографии / О.В. Герасимов, К.Р. Шарафутдинова, В.С. Караман, Г.Т. Салеева, О.А. Саченков // *Российский журнал биомеханики.* – 2024. – Т. 28, № 1. – С. 40–53. DOI: 10.15593/RzhBiomeh/2024.1.03
 27. Andreassen, E. How to determine composite material properties using numerical homogenization / E. Andreassen, C.S. Andreasen // *Computational Materials Science.* – 2014. – Vol. 83. – P. 488–495. DOI: 10.1016/j.commatsci.2013.09.006
 28. Dong, G. A 149 Line Homogenization Code for Three-Dimensional Cellular Materials Written in MATLAB / G. Dong, Y. Tang, Y.F. Zhao // *J. Eng. Mater. Technol.* – 2019. – Vol. 141 (1). – 011005. – DOI: 10.1115/1.4040555
 29. Patient-Specific Bone Organ Modeling Using CT Based FEM / O. Gerasimov, N. Kharin, E. Statsenko, D. Mukhin, D. Berezhnoi, O. Sachenkov // *Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* – 2021. – Vol. 141. DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2_10
 30. Bone Stress-Strain State Evaluation Using CT Based FEM / O.V. Gerasimov, N.V. Kharin, A.O. Fedyanin, P.V. Bolshakov, M.E. Baltin, E.O. Statsenko, F.O. Fadeev, R.R. Islamov, T.V. Baltina, O.A. Sachenkov // *Front. Mech. Eng.* – 2021. – Vol. 7. – 688474. DOI: 10.3389/fmech.2021.688474
 31. Microstructure Characterization and Reconstruction in Python: MCRpy / P. Seibert, A. Raßloff, K. Kalina, M. Ambati, M. Kästner // *IMMI.* – 2022. – Vol. 11. – P. 1–17. DOI: 10.1007/s40192-022-00273-4
 32. Deep learning-based inverse design of three-dimensional architected cellular materials with the target porosity and stiffness using voxelized Voronoi lattices / X. Zheng, T.-T. Chen, X. Jiang, M. Naito, I. Watanabe // *STAM.* – 2022. – Vol. 24. DOI: 10.1080/14686996.2022.2157682
 33. Guedes, J.M. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods / J.M. Guedes, N. Kikuchi // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 1990. – Vol. 83, iss. 2. – P. 143–198. DOI: 10.1016/0045-7825(90)90148-F
 34. Hassani, B. A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations / B. Hassani, E. Hinton // *Computers & Structures.* – 1998. – Vol. 69, iss. 6. – P. 719–738. DOI: 10.1016/S0045-7949(98)00132-1
 35. Hassani, B. A review of homogenization and topology optimization I – homogenization theory for media with periodic structure / B. Hassani, E. Hinton. // *Computers & Structures.* – 1998. – Vol. 69, iss. 6. – P. 707–717. DOI: 10.1016/S0045-7949(98)00131-X
 36. Helnwein, P. Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and fourth-order tensors / P. Helnwein // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* — 2001. – Vol. 190, iss. 22–23. – P. 2753–2770. DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00263-2
 37. Mazur, K. A new finite element with variable Young's modulus / K. Mazur, M. Krawczuk, L. Dąbrowski // *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* – 2023. – Vol. 39 (7). – e3712. DOI: 10.1002/cnm.3712
 38. Nina, O. A recursive Otsu thresholding method for scanned document binarization / O. Nina, B. Morse, W. Barrett // *WACV.* – 2011. – P. 307–314. DOI: 10.1109/WACV.2011.5711519
 39. Fedotov, A. Prediction of effective elasticity moduli of porous composite materials / A. Fedotov // *Proceedings of Higher Schools. Powder Metallurgy and Functional Coatings.* – 2015. – no. 1. – P. 32. DOI: 10.17073/1997-308X-2015-1-32-37

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому федеральному университету по государственному заданию в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2023-0009.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

CT-BASED METHOD FOR DETERMINING THE ELASTIC PROPERTIES OF AN INHOMOGENEOUS MEDIUM ELEMENT

O.V. Gerasimov¹, E.V. Semenova¹, L.R. Shakirova², T.V. Baltina¹, D.V. Berezhnoy¹,
O.A. Sachenkov^{1,3}

¹Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation

²Kazan State Medical University, Kazan, Russian Federation

³Federal Research Center of the Kazan Scientific Center RAS, Kazan, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 7 September 2024
Approved: 17 September 2024
Accepted for publication: 17 September 2024

Key words:

mechanical properties, inhomogeneous media, numerical modeling, computed tomography, image segmentation, digital twin, finite element method

ABSTRACT

The determination of mechanical parameters is one of the relevant directions in the calculation of inhomogeneous media elements. The need to build numerical models is primarily due to the development of modern approaches to the reconstruction of materials of various composite structures. The use of computational models in clinical practice also makes it possible to study the strength characteristics of objects of biological origin, the features of which include the uniqueness of the material structural distribution. The most widespread approaches in this case are based on the use of image data. Within the framework of this work, a method for constructing an elasticity matrix based on digital twin data is presented. During the work, images with a given material structure are constructed, as well as data extraction from CT scans of full-scale samples. The averaging of mechanical parameters was performed on the basis of the finite element method for the area of square or cubic geometry defining the unit cell. The calculations performed by the proposed method showed the convergence of the method with the analytical calculation data on the example of solving test problems, and also determined the qualitative correspondence of the results to the features of the structural distribution of the material in full-scale samples. The presented homogenization method makes it possible to determine the elastic characteristics of a medium element, taking into account the inhomogeneous properties of the forming material.
