Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2021, № 8, с. 1–11 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

А.М. БИКЧЕНТАЕВ, Х. ФАУАЗ

РАЗНОСТИ И КОММУТАТОРЫ ИДЕМПОТЕНТОВ В C^*-АЛГЕБРАХ

Аннотация. Установлено подобие некоторых трипотентов и идемпотентов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Получены новые результаты о разностях и коммутаторах идемпотентов P и Q. В унитальном случае с разностью $P-Q$ нами связана разность $A_{P,Q}$ другой пары идемпотентов. Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ — идеал определения следа φ. Если $P-Q\in\mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q}\in\mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q})=\varphi(P-Q)\in\mathbb{R}$. В некоторых случаях это позволило установить равенство $\varphi(P-Q)=0$. Получены новые тождества для пар идемпотентов и для пар изоклинных проекторов. Доказано, что каждый оператор $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim\mathcal{H}=\infty$, представляется в виде суммы не более чем пятидесяти коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Показано, что коммутатор идемпотента и произвольного элемента из алгебры $\mathcal{A}$ не может быть ненулевым идемпотентом. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim\mathcal{H}=\infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T=\sum_{k=1}^{4}[A_k,B_k]$, где $A_k,B_k\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, идемпотент, трипотент, изоклинные проекторы, коммутатор, подобие, C^*-алгебра, след, определитель.

УДК: 517.98

DOI:

Введение

Пусть P,Q — идемпотенты в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Различные свойства (обратимость, фредгольмовость, ядерность, положительность и др.) разности $X=P-Q$ были исследованы в работах [1]–[6]. Каждый трипотент ($A=A^3$) является разностью $P-Q$ некоторых идемпотентов P и Q с $PQ=QP=0$ ([7], предложение 1). Поэтому трипотенты наследуют некоторые свойства идемпотентов [8]. Если X является ядерным оператором, то следы всех нечетных степеней X совпадают:

$$\mathrm{tr}(P-Q)=\mathrm{tr}((P-Q)^{2n+1})=\dim\ker(X-I)-\dim\ker(X+I)\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

где I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Если X является компактным оператором, то правая часть (1) дает естественную “регуляризацию” для следа и показывает, что это всегда является целым числом [9], [6]. В ([10], теорема 3) установлен C^*-аналог утверждения: пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ – идеал определения следа φ и трипотенты $P,Q\in\mathcal{A}$; если $P-Q\in\mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P-Q)\in\mathbb{R}$.

Поступила в редакцию 04.09.2020, после доработки 04.09.2020. Принята к публикации 24.12.2020.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

Пары идемпотентов играют важную роль в квантовом эффекте Холла (the Quantum Hall Effect, [11]). Для идемпотентов P, Q, R с ядерными $P-Q$ и $Q-R$ из равенства $\mathrm{tr}(P-Q) = \mathrm{tr}(P-R) + \mathrm{tr}(R-Q)$ и (1) имеем

$$\mathrm{tr}((P-Q)^3) = \mathrm{tr}((P-R)^3) + \mathrm{tr}((R-Q)^3). \tag{2}$$

Физическое понимание аддитивности в (2) приходит из интерпретации $\mathrm{tr}((P-Q)^3)$ как *проводимости Холла* (the Hall conductance). Аддитивность (кубического) уравнения в (2) может быть рассмотрена как вариант закона Ома (the Ohm's law) об аддитивности проводимости [12]. В ([13], теорема 1) получен C^*-аналог квантового эффекта Холла и доказана вещественность следа разностей широкого класса симметрий из C^*-алгебры (см. следствия 2 и 3 в [13]). Для C^*-подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ X \in \mathcal{A} : \ X = \sum\nolimits_{n\geq 1} [X_n, \, X_n^*] \quad \text{для} \quad (X_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \right\},$$

ряд $\|\cdot\|$-сходится. В ([14], теорема 2.6) доказано, что $\mathcal{A}_0$ совпадает с нуль-пространством всех конечных следов на $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$; для широкого класса C^*-алгебр, содержащего все W^*-алгебры, можно обойтись конечными суммами указанного вида [15]. Если $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, то 1) $QP \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ тогда и только тогда, когда $[P, \, Q]$ отображает подпространство $P\mathcal{H}$ в подпространство $\mathrm{Ker}\, Q$ ([16], гл. II, задача 241); 2) P и Q *эквивалентны* тогда и только тогда, когда $P - Q = [X, Y]$ и $P + Q = XY + YX$ для некоторых $X, Y \in \mathcal{A}$ ([17], с. 97). В [18] в терминах конечных сумм коммутаторов описаны унитальные C^*-алгебры, на которых нет конечных нетривиальных следов.

В этой работе установлено подобие некоторых трипотентов и идемпотентов (теоремы 1 и 2). Получены новые результаты о разностях и коммутаторах идемпотентов P и Q. В унитальном случае с разностью $P-Q$ нами связана разность $A_{P,Q}$ другой пары идемпотентов. Если $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ (теорема 3). В некоторых случаях это позволило установить равенство $\varphi(P-Q) = 0$ (следствие 3). Получены новые тождества для пар идемпотентов и для пар изоклинных проекторов (лемма 6, теорема 5). Доказано, что каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, представляется в виде суммы не более чем 50 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (теорема 6). Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то $\{[P, X] : \ P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}, \ X \in \mathcal{A}\} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{id}} = \{0\}$ (теорема 7). Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = \infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T = \sum_{k=1}^4 [A_k, B_k]$, где $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы (теорема 8). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с $P = P^2$, $X = [A, P]$. Тогда (i) если $k \in \mathbb{N}$ нечетно, то X^k является коммутатором; (ii) если $n \in \mathbb{N}$ нечетно, то $\det(X) = 0$ (следствие 6).

1. Определения и обозначения

Для алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{tri}}$ будем обозначать ее подмножества идемпотентов ($P^2 = P$) и трипотентов ($P^3 = P$) соответственно. Для $A, B \in \mathcal{A}$ определим их коммутатор $[A, B] = AB - BA$. Если $\mathcal{A}$ унитальна, то через I обозначим единицу алгебры $\mathcal{A}$ и пусть $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Формула $S_P = 2P - I$ устанавливает биекцию между множествами $\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$.

C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Для C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ и $\mathcal{A}^+$ будем обозначать ее подмножества проекторов ($P^2 = P = P^*$), эрмитовых и положительных элементов соответственно. Проекторы $P, Q \in \mathcal{A}$ называются *изоклинными* (с углом $\theta \in (0, \pi/2)$), если $PQP = \cos^2\theta\, P$ и $QPQ = \cos^2\theta\, Q$. Если $A \in \mathcal{A}$, то $|A| = \sqrt{A^*A} \in \mathcal{A}^+$. Для унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ будем обозначать ее подмножества унитарных и обратимых элементов соответственно.

W^*-алгеброй называется C^*-алгебра $\mathcal{A}$, имеющая преддвойственное банахово пространство $\mathcal{A}_*$: $\mathcal{A} \simeq (\mathcal{A}_*)^*$. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $*$-алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, то проектор $P \wedge Q$ определяется равенством $(P \wedge Q)\mathcal{H} = P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$, а $P \vee Q = (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})^{\perp}$ проектирует на $\overline{\mathrm{lin}(P\mathcal{H} \cup Q\mathcal{H})}$. Любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (Гельфанд–Наймарк; см. [19], теорема 3.4.1).

Следом на C^*-алгебре $\mathcal{A}$ называется такое отображение $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty]$, что $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{A}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{A}$. Для следа φ определим

$$\mathfrak{M}_{\varphi}^{+} = \{X \in \mathcal{A}^+ : \ \varphi(X) < +\infty\}, \quad \mathfrak{M}_{\varphi}^{\mathrm{sa}} = \mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\mathfrak{M}_{\varphi}^{+}, \quad \mathfrak{M}_{\varphi} = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}_{\varphi}^{+}.$$

Ограничение $\varphi|_{\mathfrak{M}_{\varphi}^{+}}$ корректно продолжается по линейности до функционала на $\mathfrak{M}_{\varphi}$, который будем обозначать той же буквой φ. W^*-алгебра называется *собственно бесконечной*, если на ней нет ненулевых нормальных конечных следов.

2. Разности и коммутаторы идемпотентов в C^*-алгебрах

Пусть $\mathcal{A}$ — W^*-алгебра, $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ и $A = PQ$. Тогда существует симметрия $S \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ такая, что $SAS^{-1} = A^*$, см. ([20], гл. 4, упражнение 4.4). Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что $SAS^{-1} = A^*$, где оператор S сильно обратим в том смысле, что 0 не лежит в замыкании числового образа S. Тогда A подобен некоторому $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$, см. [21].

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$. Если A и B подобны, то A и A^* также подобны.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ такой, что $A = T^{-1}BT$. Тогда $B = TAT^{-1}$ и для $S = T^*T \in \mathcal{A}^+$ имеем

$$A^* = (T^{-1}BT)^* = T^*B(T^{-1})^* = T^*B(T^*)^{-1} = T^*TAT^{-1}(T^*)^{-1} = SAS^{-1}.$$

□

Теорема 1. *Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{tri}}$. Тогда A и A^* подобны.*

Доказательство. В силу теоремы 3 из [8] каждый $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{tri}}$ подобен некоторому трипотенту $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$. Теперь нужное утверждение вытекает из леммы 1. □

Следующая лемма принадлежит математическому фольклору.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Если $PQ = Q$ и $QP = P$ (соответственно $PQ = P$ и $QP = Q$), то P и Q подобны.*

Доказательство. Положим

$$T = I - P + Q, \ \ S = I + P - Q.$$

Тогда $TS = ST = I$ и $S = T^{-1}$. Очевидно, $SPS^{-1} = Q$ (соответственно $TPT^{-1} = Q$). □

В условиях леммы 2 имеем $S_Q(P-Q)S_Q = Q - P$ и если $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с нечетным $n \in \mathbb{N}$, то определитель $\det(P-Q) = 0$ в силу теоремы об определителе произведения матриц и соотношения $\det(S_Q) \in \{-1, 1\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Существует единственное разложение $P = \widetilde{P} + Z$, где $\widetilde{P} \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ и нильпотент $Z \in \mathcal{A}$ с $Z^2 = 0$, причем $Z\widetilde{P} = 0$, $\widetilde{P}Z = Z$ ([22], теорема 1.3).

Теорема 2 (ср. с [23], лемма 16)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $P = \widetilde{P} + Z$ — описанное выше разложение. Тогда P, $\widetilde{P}$, P^* подобны.*

Доказательство. Поскольку $Z\widetilde{P} = 0$ и $\widetilde{P}Z = Z$, имеем $P\widetilde{P} = \widetilde{P}$ и $\widetilde{P}P = P$. Поэтому P и $\widetilde{P}$ подобны в силу леммы 2. Поскольку $\widetilde{P} \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$, идемпотенты P и P^* подобны в силу леммы 1. □

Следствие 1. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра. Для $S \in \mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны:
(i) $S \in \mathcal{A}^{\mathrm{sym}}$;
(ii) $S = TUT^{-1}$ для некоторых $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ и $U \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} \cap \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$.

Доказательство. (i)⇒(ii) Если $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, то $P = T\widetilde{P}T^{-1}$ для некоторого $T \in \mathcal{A}^{\mathrm{inv}}$ в силу теоремы 2 или ([23], лемма 16). Поэтому

$$S_P = 2P - I = 2T\widetilde{P}T^{-1} - I = T(2\widetilde{P} - I)T^{-1},$$

т. е. можно выбрать $U = 2\widetilde{P} - I$. □

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Положим

$$A_{P,Q} = S_Q P S_Q - S_P Q S_P.$$

Имеем $A_{Q,P} = A_{P^\perp,Q^\perp} = -A_{P,Q}$, $A_{P^\perp,Q} = -A_{P,Q^\perp} = I - S_P Q S_P - S_Q P S_Q$ и $A_{P,Q}(P-Q) = (P-Q)A_{P,Q}$. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра и $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $P = \widetilde{P} + Z$ — описанное выше разложение. Тогда $A_{\widetilde{P},P} = 3P - 3\widetilde{P} = 3Z$.

Лемма 3. *Пусть J — идеал в унитальной алгебре $\mathcal{A}$, $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda \neq -\mu$. Тогда*
(i) *если $P - Q \in J$, то $A_{P,Q} \in J$;*
(ii) *имеем $P, Q \in J \Leftrightarrow \lambda P + \mu Q \in J$.*

Доказательство. (i). Имеем

$$A_{P,Q} = S_P(P-Q)S_P + S_Q(P-Q)S_Q - (P-Q) = 4QPQ - 4PQP + (P-Q). \tag{3}$$

В частности, $QPQ - PQP \in J$.
(ii), “⇐”. Имеем

$$P = \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)} P(\lambda P + \mu Q)\Big(\frac{\lambda+\mu}{\mu} I - Q\Big) \in J.$$

□

Из (3) видно, что если $\{PQ, QP\} \cap \{0\} \neq \varnothing$ (или $\{P, Q\} \cap \{I\} \neq \varnothing$), то $A_{P,Q} = P - Q$.

Теорема 3. *Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$. Если $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Напомним, что $\mathfrak{M}_\varphi$ является идеалом в $\mathcal{A}$, причем $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ для всех $X \in \mathfrak{M}_\varphi$, $Y \in \mathcal{A}$ (см. [19], гл. 6, упражнение 6). В силу п. (i) леммы 3 получаем $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Поскольку

$$\varphi(S_P(P-Q)S_P) = \varphi(S_Q(P-Q)S_Q) = \varphi(P-Q),$$

имеем $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$ в силу линейности продолжения φ на $\mathfrak{M}_\varphi$, (3) и теоремы 3 из [10]. □

Следствие 2. В условиях п. (i) теоремы 3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем
$$\varphi(A_{P,Q}^{2n+1}) = \varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из ([13], теорема 1) и (1) получаем
$$\varphi(A_{P,Q}^{2n+1}) = \varphi(A_{P,Q}) = \varphi(4QPQ - 4PQP + P - Q) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R},$$
поскольку $QPQ - PQP \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi(QPQ - PQP) = 0$ (см. шаг 2 доказательства теоремы 1 из [13]). $\square$

Отметим, что п. (i) следующей теоремы обобщает п. (i) теоремы 3.2 из [24].

Теорема 4. *Пусть φ — след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$.*
(i) *Если $X \in \mathcal{A}^{\rm tri}$, $Y \in \mathcal{A}$ и $[X,Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi([X,Y]) = 0$.*
(ii) *Если $X, Y \in \mathcal{A}$ и $[X,Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$.*
(iii) *Если $X, Y \in \mathcal{A}$ и $X - Y \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и $\varphi([X^k, Y^n]) = 0$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. (i). Шаг 1. Пусть $X \in \mathcal{A}^{\rm id}$. Поскольку
$$XY - 2XYX + YX = X[X,Y] - [X,Y]X \in \mathfrak{M}_\varphi,$$
утверждение следует из представления
$$[X,Y] = X(XY - 2XYX + YX) - (XY - 2XYX + YX)X$$
и линейности продолжения φ на $\mathfrak{M}_\varphi$.

Шаг 2. Пусть $X \in \mathcal{A}^{\rm tri}$ и $X = P - Q$ с $P, Q \in \mathcal{A}^{\rm id}$ и $PQ = QP = 0$ (см. предложение 1 в [7]). Тогда $X^2 = P + Q \in \mathcal{A}^{\rm id}$ и
$$[P,Y] + [Q,Y] = [X^2, Y] = X[X,Y] + [X,Y]X \in \mathfrak{M}_\varphi.$$
По условию, $[P,Y] - [Q,Y] = [X,Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$. Из двух последних соотношений имеем $[P,Y], [Q,Y] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и в силу шага 1 и линейности продолжения φ на $\mathfrak{M}_\varphi$ получаем
$$\varphi([X,Y]) = \varphi([P,Y]) - \varphi([Q,Y]) = 0 - 0 = 0.$$

(ii) Воспользуемся методом математической индукции. Для всех $k \geq 2$ имеем
$$[X^k, Y] = X[X^{k-1}, Y] + [X,Y]X^{k-1} \in \mathfrak{M}_\varphi.$$
Для всех $n \geq 2$ получаем
$$[X^k, Y^n] = Y[X^k, Y^{n-1}] + [X^k, Y]Y^{n-1} \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

(iii) Шаг 1. Методом математической индукции покажем, что $X^k - Y^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $X^{k-1} - Y^{k-1} \in \mathfrak{M}_\varphi$. Тогда
$$X^k - Y^k = X^{k-1}(X - Y) + (X^{k-1} - Y^{k-1})Y \in \mathfrak{M}_\varphi,$$
что и требовалось.

Шаг 2. Из представления
$$X^k Y^n - Y^n X^k = (X^k - Y^k)Y^n - Y^n(X^k - Y^k)$$
следует $[X^k, Y^n] \in \mathfrak{M}_\varphi$ и
$$\varphi([X^k, Y^n]) = \varphi((X^k - Y^k)Y^n) - \varphi(Y^n(X^k - Y^k)) = 0$$
для всех $k, n \in \mathbb{N}$ в силу линейности продолжения φ на $\mathfrak{M}_\varphi$. $\square$

Пример 1. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $PQ = Q$ и $QP = P$. Тогда $PQP = P$ и $QPQ = Q$; имеем $(P+Q)^k = 2^k(P+Q)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $(P-Q)^2 = 0$. Поэтому для $\mathcal{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ в силу теоремы об определителе произведения матриц получаем $\det(P+Q) = \det(P-Q) = 0$.

Для идемпотентов

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{C})^{\mathrm{id}}$$

имеем $PQP = P$ и $QPQ = Q$, но $\{PQ, QP\} \cap \{P, Q\} = \varnothing$.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Положим*

$$A = (1-\lambda)P + (\lambda^{-1} - \lambda - 1 + \lambda^2)PQ + \lambda QP + (\lambda^2 - \lambda^4)Q, \quad B = (1-\lambda)Q + (2\lambda^{-1} - 1)PQ.$$

Если $PQP = \lambda^2 P$ и $QPQ = \lambda^2 Q$, то идемпотенты P и A (соответственно, Q и B) подобны. Имеем $(\lambda P - \lambda^{-1}QP)^2 = (\lambda Q - \lambda^{-1}PQ)^2 = 0$.

Доказательство. Положим

$$T = I + \lambda^{-1}PQ - \lambda Q, \quad S = I - \lambda^{-1}PQ + \lambda Q.$$

Тогда $TS = ST = I$ и $S = T^{-1}$. Имеем $SPS^{-1} = A$ и $TQT^{-1} = B$, поэтому $A, B \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Равенства $(\lambda P - \lambda^{-1}QP)^2 = (\lambda Q - \lambda^{-1}PQ)^2 = 0$ легко проверяются. $\square$

Следствие 3. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Если $PQP = P$ и $QPQ = Q$, то идемпотенты P и QP (соответственно Q и PQ) подобны. Имеем $(P - QP)^2 = (Q - PQ)^2 = 0$.

В условиях леммы 4 имеем $A_{P,Q} = (1 - 4\lambda^2)(P - Q)$ и если φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и $P - Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, то $\varphi(P - Q) = 0$. Если $\mathcal{A}$ — унитальная $*$-алгебра и $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, то $PQ = Q \Leftrightarrow Q^{*\perp}P^{*\perp} = P^{*\perp}$.

Лемма 5. *Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ и $PQP = P$, то $QP = P$, т. е. $P \leq Q$.*

Доказательство. Поскольку $Q \cdot PQP = QP \cdot QP = QP$, имеем

$$(P - QP)^2 = Q^\perp P Q^\perp P = 0.$$

Умножив это соотношение слева на проектор P, получаем $(PQ^\perp P)^2 = 0$. Поскольку $PQ^\perp P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^+$, имеем $0 = PQ^\perp P = |Q^\perp P|^2$, т. е. $|Q^\perp P| = 0$ и $Q^\perp P = 0$. $\square$

Пример 2. Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная C^*-алгебра, проекторы $P, Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ изоклинны с некоторым углом $\theta \in (0, \pi/2)$. Тогда $(\cos^2\theta\, P - QP)^2 = 0$ и

$$A_{P,Q} = (1 - 4\cos^2\theta)(P - Q), \tag{4}$$

для $\theta = \pi/3$ имеем $A_{P,Q} = 0$. Напомним, что

$$P \vee Q = \frac{1}{\sin^2\theta}(P - Q)^2, \tag{5}$$

(см. [25], гл. 2, §10, п. 10.5 (iii)). Следовательно, $P \vee Q \in \mathcal{A}$,

$$A_{P,Q}^2 = (1 - 4\cos^2\theta)^2 \sin^2\theta\, P \vee Q,$$

$$\sin(P - Q) = \frac{\sin(\sin\theta)}{\sin\theta}(P - Q), \quad \cos(P - Q) = I + (\cos(\sin\theta) - 1)\, P \vee Q,$$

$$\sinh(P - Q) = \frac{\sinh(\sin\theta)}{\sin\theta}(P - Q), \quad \cosh(P - Q) = I + (\cosh(\sin\theta) - 1)\, P \vee Q$$

и $\exp(P-Q)=\sinh(P-Q)+\cosh(P-Q)$. Соотношение
$$(P-Q)^4=(P-Q)^2-|PQ-QP|^2 \tag{6}$$
(см. доказательство предложения 1 в [10]) и (5) дают
$$|[P,Q]|=\sin\theta\cos\theta\, P\vee Q.$$

Если J — левый (или правый) идеал в $\mathcal{A}$ и $P-Q\in J$, то $P\vee Q\in J$ в силу равенства (5). Поэтому проекторы $P=P\vee Q\cdot P$ и $Q=P\vee Q\cdot Q$ лежат в J. Ясно, что
$$P-Q\in J\Leftrightarrow (P-Q)^2\in J\Leftrightarrow |[P,Q]|\in J\Leftrightarrow P\vee Q\in J\Leftrightarrow P,Q\in J.$$

Если $\mathcal{A}=\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, то из теоремы об определителе произведения матриц и (5) получаем
$$\det(P-Q)=\begin{cases}0, & \text{если } P\vee Q\neq I;\\ \pm\sin^n\theta, & \text{если } P\vee Q=I.\end{cases}$$

Следствие 4. Пусть φ — след на унитальной C^*-алгебре $\mathcal{A}$ и проекторы $P,Q\in\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ изоклинны с некоторым углом $\theta\in(0,\pi/2)$. Если $P-Q\in\mathfrak{M}_\varphi$, то $P,Q\in\mathfrak{M}_\varphi$, и из теоремы 3 и равенства (4) имеем $0=\varphi(P-Q)=\varphi(P)-\varphi(Q)$. Из равенства (5) получаем $\varphi(P\vee Q)=\varphi(P)+\varphi(Q)=2\varphi(P)$.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра и $P,Q\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Тогда*
(i) $(P-Q)^4+(P+Q)^4=2(P+Q)^2+2(PQ+QP)^2$;
(ii) $(P-Q)^2+(P+Q)^2=2(P+Q)$;
(iii) *если $\mathcal{A}$ унитальна, то* $[P,Q]=(I-P-Q)(P-Q)=-(P-Q)(I-P-Q)$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра и проекторы $P,Q\in\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ изоклинны с некоторым углом $\theta\in(0,\pi/2)$. Тогда $\sin^4\theta\, P\vee Q+(P+Q)^4=(2+\cos^2\theta)(P+Q)^2$, где $(P+Q)^2=2(P+Q)-\sin^2\theta\, P\vee Q$.*

Доказательство следует из леммы 6 и равенства (5).

Лемма 7. (i) *Если $\mathcal{A}$ — собственно бесконечная W^*-алгебра, то каждый коммутатор $[A,B]$ $(A,B\in\mathcal{A})$ представляется в виде суммы не более чем 25 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{A}$.*

(ii) *Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim\mathcal{H}=\infty$, то каждый коммутатор $[A,B]$ операторов $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$ с $\|A\|<1$, $\|B\|<1$ представляется в виде суммы не более чем 2025 коммутаторов проекторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. (i) В силу ([26], теорема 4) имеем
$$A=P_1+\ldots+P_5,\ \ B=Q_1+\ldots+Q_5$$
с некоторыми $P_k,Q_k\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $k=1,\ldots,5$.

(ii) Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim\mathcal{H}=\infty$, то каждый оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$ с $\|T\|<1$ представляется в виде
$$T=5(P_1+P_2+P_3+P_4)-5P_5-8P_6-12P_7$$
с $P_1,\ldots,P_7\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ ([27], замечание 4). □

Теорема 6. *Каждый оператор $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim\mathcal{H}=\infty$, представляется в виде суммы не более чем 50 коммутаторов идемпотентов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. Каждый оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ представляется в виде суммы двух коммутаторов ([28], следствие 2 из задачи 186). Далее работает п. (i) леммы 7, поскольку $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ является собственно бесконечной W^*-алгеброй. □

Теорема 7. *Если $\mathcal{A}$ — алгебра, то* $\{[P,X]:\ P\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}},\ X\in\mathcal{A}\}\cap\mathcal{A}^{\mathrm{id}}=\{0\}$. *Вообще говоря,* $\{[P,Q]:\ P,Q\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}}\}\cap\mathcal{A}^{\mathrm{tri}}\neq\{0\}$.

Доказательство. Пусть $P\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}}$, $X\in\mathcal{A}$ и

$$[P,X]^2=[P,X]. \tag{7}$$

Умножив обе части (7) слева и справа на идемпотент P, получаем

$$PXPXP=PX^2P. \tag{8}$$

Далее, умножив обе части (7) справа на P, с учетом (8) имеем $PXP=XP$. Умножив обе части (7) слева на P, с учетом (8) имеем $PX=PXP$. Следовательно, $[P,X]=0$ и $\{[P,X]:\ P\in\mathcal{A}^{\mathrm{id}},\ X\in\mathcal{A}\}\cap\mathcal{A}^{\mathrm{id}}=\{0\}$.

Числа

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \ b=\sqrt{a-a^2}=\sqrt{\sqrt{5}-2}$$

удовлетворяют условию $2a-b^2=1$. В алгебре $\mathcal{A}=\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ для идемпотентов

$$P=\begin{pmatrix}1 & b^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}a & b\\ b & 1-a\end{pmatrix}$$

имеем $[P,Q]^2=\mathrm{diag}(1,1)=I$, т. е. $[P,Q]\in\mathcal{A}^{\mathrm{sym}}\subset\mathcal{A}^{\mathrm{tri}}\setminus\{0\}$. □

Каждый оператор из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim\mathcal{H}=\infty$, представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов ([29]; [30], теорема). Поэтому каждый косоэрмитов оператор ($A^*=-A$) из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов ([24], теорема 5.1). Следующая теорема была анонсирована первым автором без доказательства в ([24], с. 12, утверждение I).

Теорема 8. *Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim\mathcal{H}=\infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T=\sum_{k=1}^{4}[A_k,B_k]$, где $A_k,B_k\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ косоэрмитовы.*

Доказательство. Воспользуемся следствием 2 из ([28], задача 186): каждый оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы двух коммутаторов: $T=[A,B]+[C,D]$ с $A,B,C,D\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $T=-T^*$ и $T=[A,B]+[C,D]$. Тогда

$$T=\frac{T-T^*}{2}=\frac{AB-BA+A^*B^*-B^*A^*+CD-DC+C^*D^*-D^*C^*}{2}. \tag{9}$$

Для каждого $Y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ операторы $Y-Y^*$, $i(Y+Y^*)$ являются косоэрмитовыми, где $i\in\mathbb{C}$ и $i^2=-1$. Легко проверить, что

$$[A-A^*,B-B^*]+[i(B+B^*),i(A+A^*)]=2AB-2BA+2A^*B^*-2B^*A^*.$$

Поэтому

$$\frac{AB-BA+A^*B^*-B^*A^*}{2}=\left[\frac{A-A^*}{2},\frac{B-B^*}{2}\right]+\left[\frac{i(B+B^*)}{2},\frac{i(A+A^*)}{2}\right], \tag{10}$$

$$\frac{CD-DC+C^*D^*-D^*C^*}{2}=\left[\frac{C-C^*}{2},\frac{D-D^*}{2}\right]+\left[\frac{i(D+D^*)}{2},\frac{i(C+C^*)}{2}\right]. \tag{11}$$

Подставляем правые части (10) и (11) в (9) и завершаем доказательство. □

Следствие 5. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim\mathcal{H}=\infty$, то каждый косоэрмитов оператор $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представляется в виде суммы $T=\sum_{k=1}^{4}[C_k,D_k]$, *где* $C_k,D_k\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{sa}}$.

Доказательство. Положим $C_k=iB_k$, $D_k=iA_k$ для $k=1,2,3,4$. □

Если $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$, то из (6) имеем (см. также [4], предложение 3)

$$|PQ - QP|^2 = (P - Q)^2 - (P - Q)^4 \leq (P - Q)^2. \tag{12}$$

Теорема 9. *Пусть φ — точный след на W^*-алгебре $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$ и $P \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$. Для $X = [A, P]$ имеем $S_P X = -X S_P$. Если $X^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для некоторого нечетного $k \in \mathbb{N}$, то $\varphi(X^k) = 0$. Если еще $P = P^*$, то $[|X|, P] = 0$ и для $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ с $X^2 \in \mathfrak{M}_\varphi$ имеем $\varphi(X^2) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.*

Доказательство. Очевидно $X S_P = -S_P X$. Для $U \in \mathcal{A}$ и $V \in \mathfrak{M}_\varphi$ имеем $\varphi(UV) = \varphi(VU)$ (см. [19], гл. 6, упражнение 6). Поэтому, если $X^k \in \mathfrak{M}_\varphi$ для некоторого нечетного $k \in \mathbb{N}$, то $\varphi(X^k) = 0$ (ср. с [5], теорема 2.26). Если еще $P = P^*$, то $X^* S_P = -S_P X^*$ и $S_P X^* S_P = -X^*$. Поэтому $|X|^2 = S_P |X|^2 S_P$, т. е. $|X|^2 S_P = S_P |X|^2$ и $|X|^2 P = P |X|^2$. Теперь в силу спектральной теоремы имеем $|X| P = P |X|$.

Пусть $A, P \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$, $X = [A, P]$ и $X^2 \in \mathfrak{M}_\varphi$ с $\varphi(X^2) = 0$. Так как $X^2 = -|X|^2$, из (12) получаем

$$0 = \varphi(X^2) = \varphi(-|X|^2) = -\varphi(|X|^2) = -\varphi((A - P)^2 - (A - P)^4). \tag{13}$$

Поскольку $(A - P)^2 - (A - P)^4 \geq 0$ (напомним, что $\|A - P\| \leq 1$) и след φ точен, из (13) имеем $(A - P)^2 - (A - P)^4 = 0$, т. е. $(A - P)^2 = |A - P|^2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$. Следовательно, оператор $U = A - P$ является частичной изометрией в $\mathcal{H}$. Поэтому $UU^*U = U$ ([28], следствие 3 из задачи 98). Из равенства $(A - P)^3 = A - P$ получаем $PAP = APA$. Следовательно, $PAP \leq A$ и $AP = PA$ в силу ([31], предложение 2.1). $\square$

Следствие 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $A, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ с $P = P^2$, $X = [A, P]$.

(i) Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно, то X^k является коммутатором.

(ii) Если $n \in \mathbb{N}$ нечетно, то $\det(X) = 0$.

Доказательство. Известно, что для $T \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ следующие условия эквивалентны: 1) T унитарно эквивалентна матрице с нулевой диагональю; 2) след $\mathrm{tr}(T) = 0$; 3) T является коммутатором; 4) $\mathrm{tr}(|I + zT|) \geq n$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Доказательство эквивалентности 1)$\Leftrightarrow$2) см. в ([16], гл. II, задача 209); эквивалентности 2)$\Leftrightarrow$3) см. в ([28], задача 182); эквивалентности 2)$\Leftrightarrow$4) установлены (в теореме 4.8 [32]).

(i) Используем эквивалентность 2)$\Leftrightarrow$3).

(ii) Поскольку $S_P^2 = I$ и $\det(S_P) \in \{-1, 1\}$ в силу теоремы об определителе произведения матриц, к равенству $S_P X = -X S_P$ с $X = [A, P]$ применяем теорему об определителе произведения матриц. $\square$

Литература

[1] Koliha J.J., Rakočević V. *Invertibility of the difference of idempotents*, Linear Multilinear Algebra **51** (1), 97–110 (2003).

[2] Koliha J.J., Rakočević V., Straškraba I. *The difference and sum of projectors*, Linear Algebra Appl. **388**, 279–288 (2004).

[3] Koliha J.J., Rakočević V. *Fredholm properties of the difference of orhogonal projections in a Hilbert space*, Integral Equat. Oper. Theory **52** (1), 125–134 (2005).

[4] Бикчентаев А.М. *След и разности идемпотентов в C^*-алгебрах*, Матем. заметки **105** (5), 647–655 (2019).

[5] Бикчентаев А.М. *Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана*, Матем. заметки **100** (4), 492–503 (2016).

[6] Kalton N.J. *A note on pairs of projections*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **3** (2), 309–311 (1997).

[7] Bikchentaev A.M., Yakushev R.S. *Representation of tripotents and representations via tripotents*, Linear Algebra Appl. **435** (9), 2156–2165 (2011).

[8] Bikchentaev A.M. *Tripotents in algebras: invertibility and hyponormality*, Lobachevskii J. Math. **35** (3), 281–285 (2014).

[9] Avron J., Seiler R., Simon B. *The index of a pair of projections*, J. Funct. Anal. **120** (1), 220–237 (1994).

[10] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^*-алгебрах*, Сиб. матем. журн. **58** (2), 243–250 (2017).

[11] Bellissard J., van Elst A., Schulz-Baldes H. *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect. Topology and physics*, J. Math. Phys. **35** (10), 5373–5451 (1994).

[12] Gesztesy F. (coordinating Editor) *From Mathematical Physics to Analysis: a walk in Barry Simon's Mathematical Garden,* II, Notices Amer. Math. Soc. **63** (8), 878–889 (2016).

[13] Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C^*-алгебрах и квантовый эффект Холла*, ТМФ **195** (1), 75–80 (2018).

[14] Cuntz J., Pedersen G.K. *Equivalence and traces on C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **33** (2), 135–164 (1979).

[15] Fack T. *Finite sums of commutators in C^*-algebras*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32** (1), 129–137 (1982).

[16] Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ* (Наука, М., 1969).

[17] Davidson K.R. *C^*-algebras by examples.* Fields Institute Monographs (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1996).

[18] Pop C. *Finite sums of commutators*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (10), 3039–3041 (2002).

[19] Мерфи Дж. *C^*-алгебры и теория операторов* (Факториал, М., 1997).

[20] Strătilă Ş, Zsidó L. *Lectures on von Neumann algebras* (Abacus Press, England, 1979).

[21] Williams J.P. *Operators similar to their adjoints*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1), 121–123 (1969).

[22] Koliha J.J. *Range projections of idempotents in C^*-algebras*, Demonstratio Math. **24** (1), 91–103 (2001).

[23] Kaplansky I. *Modules over operator algebras*, Amer. J. Math. **75** (4), 839–858 (1953).

[24] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов,* III. *Коммутаторы в C^*-алгебрах*, Матем. сборник **199** (4), 3–20 (2008).

[25] Шерстнев А.Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла* (Физматлит, М., 2008).

[26] Pearcy C., Topping D.M. *Sums of small numbers of idempotents*, Mich. Math. J. **14** (4), 453–465 (1967).

[27] Paszkiewicz A. *Any selfadjoint operator is a finite linear combination of projectors*, Bull. L'Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. **28** (7–8), 337–345 (1980).

[28] Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах* (Мир, М., 1970).

[29] Бикчентаев А.М. *О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов*, ДАН **393** (4), 444–447 (2003).

[30] Бикчентаев А.М. *О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов*, Сиб. матем. журн. **46** (1), 32–45 (2005).

[31] Бикчентаев А.М. *Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана*, Сиб. матем. журн. **51** (6), 1228–1236 (2010).

[32] Бикчентаев А.М. *О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана*, Тр. МИАН **293**, 73–82 (2016).

Айрат Мидхатович Бикчентаев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Хаттаб Фауаз

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: khattab1058@hotmail.com

A.M. Bikchentaev and Kh. Fawwaz

Differences and commutators of idempotents in C^*-algebras

Abstract. We establish similarity between some tripotents and idempotents on a Hilbert space $\mathcal{H}$ and obtain new results on differences and commutators of idempotents P and Q. In the unital case, the difference $P-Q$ is associated with the difference $A_{P,Q}$ of another pair of idempotents. Let φ be a trace on a unital C^*-algebra $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M}_\varphi$ be the ideal of definition of the trace φ. If $P-Q \in \mathfrak{M}_\varphi$, then $A_{P,Q} \in \mathfrak{M}_\varphi$ and $\varphi(A_{P,Q}) = \varphi(P-Q) \in \mathbb{R}$. In some cases, this allowed us to establish the equality $\varphi(P-Q) = 0$. We obtain new identities for pairs of idempotents and for pairs of isoclinic projections. It is proved that each operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H} = \infty$, can be presented as a sum of no more than 50 commutators of idempotents from $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. It is shown that the commutator of an idempotent and an arbitrary element from an algebra $\mathcal{A}$ cannot be a nonzero idempotent. If $\mathcal{H}$ is separable and $\dim \mathcal{H} = \infty$, then each skew-Hermitian operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ can be represented as a sum $T = \sum_{k=1}^{4} [A_k, B_k]$, where $A_k, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ are skew-Hermitian.

Keywords: Hilbert space, linear operator, idempotent, tripotent, isoclinic projections, commutator, similarity, C^*-algebra, trace, determinant.

Airat Midkhatovich Bikchentaev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Khattab Fawwaz

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` khattab1058@hotmail.com