Г. Г. Амосов, А. М. Бикчентаев, В. Ж. Сакбаев, О крайних точках множеств в пространствах операторов и пространствах состояний, *Труды МИАН*, 2024, том 324, 10–23

DOI: 10.4213/tm4376

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2024, т. 324, с. 10–23

О крайних точках множеств в пространствах операторов и пространствах состояний[*]

Г. Г. Амосов[а], А. М. Бикчентаев[б], В. Ж. Сакбаев[в]

Поступило 10.09.2023; после доработки 10.09.2023; принято к публикации 19.09.2023

К 80-летию академика А.С. Холево

Получено представление множества квантовых состояний барицентрами неотрицательных нормированных конечно аддитивных мер на единичной сфере $S_1(\mathcal{H})$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$. В терминах свойств меры на $S_1(\mathcal{H})$ найдены условия принадлежности ее барицентра множеству крайних точек совокупности квантовых состояний и множеству нормальных состояний. Дана характеризация унитарных элементов унитальной C*-алгебры в терминах крайних точек. Исследованы крайние точки $\mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ единичного шара $\mathcal{E}^1$ нормированного идеального пространства операторов $\langle\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ на $\mathcal{H}$. Если $U \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ для некоторого унитарного оператора $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $V \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ для всех унитарных операторов $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Построены квантовые корреляции, отвечающие сингулярным состояниям на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство; линейный оператор; C*-алгебра; алгебра фон Неймана; нормированное идеальное пространство операторов; квантовое состояние; конечно аддитивная мера; барицентр; крайняя точка; квантовые корреляции, порожденные состоянием.

DOI: https://doi.org/10.4213/tm4376

ВВЕДЕНИЕ

Исследование крайних точек нормированных пространств является важнейшей задачей функционального анализа. В предлагаемой работе мы будем иметь дело с тремя разными аспектами этой задачи. Сначала мы исследуем крайние точки единичного шара пространства положительных непрерывных линейных функционалов на алгебре всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Конечно, прежде всего нас будут интересовать сингулярные крайние точки, т.е. такие, которые не являются векторными состояниями. Второй рассматриваемый нами вопрос — описание крайних точек единичного шара нормированного идеального пространства, представляющего собой специального вида подпространство C*-алгебры. Наконец, третий вопрос — исследование квантовых корреляций, отвечающих сингулярным состояниям на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[*]Работа второго автора выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

[а]Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия.

[б]Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, Казань, Россия.

[в]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия.

✉ gramos@mi-ras.ru (Г.Г. Амосов), Airat.Bikchentaev@kpfu.ru (А.М. Бикчентаев), fumi2003@mail.ru (В.Ж. Сакбаев).

Квантовым состоянием называется неотрицательный нормированный непрерывный линейный функционал на банаховом пространстве всех ограниченных линейных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (см. [8, п. 2.3.2]). Множество квантовых состояний $\Sigma(\mathcal{H})$, как пересечение единичной сферы с положительным конусом в пространстве непрерывных линейных функционалов на банаховом пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, в силу теоремы Алаоглу представляет собой выпуклый компакт в *-слабой топологии (см. [9, гл. V, § 4]). Поэтому в силу теоремы Крейна–Мильмана множество квантовых состояний совпадает с замыканием в *-слабой топологии множества своих крайних точек.

Для описания множества крайних точек совокупности квантовых состояний можно использовать барицентрические разложения состояния в интеграл Петтиса по неотрицательной нормированной на единицу мере на множестве чистых векторных состояний (см. [8, разд. 4.1], а также [4, 5]). Реализуемый в настоящей работе подход расширяет возможности изложенных в [8] методов, поскольку использует не только счетно аддитивные, но и конечно аддитивные меры. Каждое состояние на алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ может быть (неединственным образом) задано как интеграл Петтиса по мере на единичной сфере гильбертова пространства $\mathcal{H}$, точки которой задают чистые векторные состояния.

Мы вводим на множестве мер на единичной сфере отношение эквивалентности: класс эквивалентности объединяет все меры, имеющие общий барицентр. Установлена биекция между множеством состояний и множеством классов эквивалентности конечно аддитивных неотрицательных нормированных мер на единичной сфере гильбертова пространства. Крайние точки пересечения единичной сферы с положительным конусом в пространстве конечно аддитивных мер образуют двузначные меры, принимающие лишь два значения 0, 1 (см. [18]). Установлено, что если состояние является крайней точкой множества квантовых состояний, то класс мер, имеющих барицентром заданное состояние, содержит двузначную меру. Но барицентр мер из класса эквивалентности, содержащего двузначную меру, может не быть крайней точкой множества квантовых состояний. Высказывается гипотеза, что для того, чтобы барицентр класса эквивалентности мер являлся крайней точкой множества состояний, достаточно, чтобы множество крайних точек пересечения класса эквивалентности с конусом неотрицательных мер состояло из двузначных мер.

Решен вопрос о принадлежности барицентра конечно аддитивной меры на единичной сфере пространства $\mathcal{H}$ множеству нормальных состояний. Критерием такой принадлежности является условие на конечно аддитивную меру, состоящее в том, что с точностью до произвольного числа $\varepsilon > 0$ мера сосредоточена на некотором компактном в пространстве $\mathcal{H}$ подмножестве K_ε единичной сферы. Условие полученного критерия нормальности состояния подобно условию псевдососредоточенности счетно аддитивной меры на компакте (см. [8, п. 4.1.2]).

Таким образом, получено описание квантовых состояний с помощью неотрицательных нормированных мер на единичной сфере гильбертова пространства. Отметим, что тем самым решена задача описания динамики нормальных квантовых состояний посредством описания эволюции вероятностных распределений, обсуждаемая в [3].

Установлен критерий унитарности произвольного элемента унитальной C*-алгебры, и исследованы свойства множества крайних точек единичного шара нормированного идеального пространства (НИП) на $\mathcal{H}$. Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$. Если $U \in \operatorname{extr}(\mathcal{E}^1)$ для некоторого унитарного оператора $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $V \in \operatorname{extr}(\mathcal{E}^1)$ для всех унитарных операторов $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Изучение свойств множества квантовых корреляций позволило недавно решить ряд задач теории операторных алгебр, остававшихся открытыми еще со второй половины 1970-х годов [13, 2]. Важную роль в этой теории занимает построение факторов фон Неймана $\mathcal{M}$ типа II_1. Для построения множества корреляций необходимо рассматривать пару, включающую как сам фактор $\mathcal{M}$, так и его коммутант $\mathcal{M}'$. С помощью представления Гельфанда–Наймарка–Сигала по крайней точке в множестве сингулярных квантовых состояний мы строим как сами факторы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$, так и отвечающие им квантовые корреляции.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахово пространство всех действующих в пространстве $\mathcal{H}$ ограниченных линейных операторов, снабженное операторной нормой. Пусть $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$ — банахово пространство, сопряженное пространству $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Для произвольного множества M через 2^M обозначим σ-алгебру всех подмножеств множества M, через $B(M)$ — банахово пространство ограниченных комплекснозначных функций на M, наделенное sup-нормой, через $\mathrm{ba}(M)$ — банахово пространство комплекснозначных конечно аддитивных мер ограниченной вариации на измеримом пространстве $(M, 2^M)$, норма каждой меры из которого равна значению вариации меры на множестве M. Через $\mathrm{ba}^+(M)$ обозначим конус неотрицательных мер в пространстве $\mathrm{ba}(M)$.

Для произвольного нормированного пространства $\mathcal{X}$ единичную сферу в нем обозначим через $S_1(\mathcal{X})$, и пусть $\mathcal{X}^1$ — единичный шар в $\mathcal{X}$. Множество крайних точек множества K в линейном пространстве $\mathcal{L}$ обозначим через $\mathrm{extr}(K)$. C*-алгеброй называется комплексная банахова *-алгебра $\mathcal{A}$ такая, что $\|A^*A\| = \|A\|^2$ для всех $A \in \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{A}^+$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ — множества всех обратимых элементов, положительных элементов и унитарных элементов из $\mathcal{A}$ соответственно. Если $X \in \mathcal{A}$, то $|X| = \sqrt{X^*X} \in \mathcal{A}^+$. Любую C*-алгебру можно реализовать как C*-подалгебру в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (см. [14, теорема 3.4.1]).

*-Линеал $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженный нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, называется *нормированным идеальным пространством* (далее — НИП) на $\mathcal{H}$, если

(1) $\|A^*\|_{\mathcal{E}} = \|A\|_{\mathcal{E}}$ для всех $A \in \mathcal{E}$;

(2) для любых $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{E}$ таких, что $|A| \le |B|$, имеем $A \in \mathcal{E}$ и $\|A\|_{\mathcal{E}} \le \|B\|_{\mathcal{E}}$.

Понятие НИП на $\mathcal{H}$ обобщает симметрично нормированные идеалы операторов на $\mathcal{H}$, изучавшиеся, например, в [11, 16]. Если гильбертово пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, то любое НИП на $\mathcal{H}$ симметрично по составу элементов (см. [11, гл. III, § 2]). Если $\mathcal{E}$ — наследственная C*-подалгебра в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|\rangle$ есть НИП на $\mathcal{H}$. Если $\mathcal{A}$ является C*-алгеброй или НИП на $\mathcal{H}$, то

$$X \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{A})) \ \Leftrightarrow\ X^* \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{A})) \qquad \text{и} \qquad X \in \mathrm{extr}(\mathcal{A}^1) \ \Leftrightarrow\ X^* \in \mathrm{extr}(\mathcal{A}^1).$$

Любой положительный линейный функционал ρ на C*-алгебре $\mathcal{A}$ определяет полуторалинейную форму

$$(A, B)_\rho = \rho(B^*A), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Процедура факторизации и пополнения алгебры $\mathcal{A}$ по такой форме приводит к гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ и $*$-представлению π алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathfrak{H}$, называемому представлением Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС), см. [7]. Важнейшим источником для построения алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$ разных типов является замыкание образа представления ГНС алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. С другой стороны, сама алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ может порождаться парой факторов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ (фактором называется алгебра $\mathcal{M}$, для которой $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{\mathbb{C}\mathrm{I}\}$). При этом состояние ρ будет определять корреляции между наблюдаемыми, принадлежащими $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ соответственно.

2. КРАЙНИЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассматривается задача описания множества крайних точек совокупности $\Sigma(\mathcal{H})$ состояний квантовой системы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Множество $\Sigma(\mathcal{H})$ представляет собой пересечение единичной сферы $S_1((\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*)$ с конусом $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*_+$ неотрицательных элементов пространства, сопряженного банахову пространству ограниченных линейных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, наделенному операторной нормой. Следовательно, множество $\Sigma(\mathcal{H})$ является выпуклым и (согласно теореме Алаоглу, см. [9]) компактным в пространстве $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$, наделенном *-слабой топологией. Через $\Sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$ и $\Sigma_{\mathrm{n}}(\mathcal{H})$ обозначим множества чистых векторных и нормальных состояний соответственно.

Частичное описание множества крайних точек совокупности квантовых состояний дано в работе [4], в которой показано, что для произвольного состояния $\rho \in \Sigma(\mathcal{H})$ найдется такая мера $\mu_\rho \in S_1(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))) \cap \mathrm{ba}^+(S_1(\mathcal{H})) \equiv S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, что

$$\rho(\mathbf{A}) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_u(\mathbf{A})\, d\mu_\rho(u) = \int\limits_{\Sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})} \rho(\mu \circ f^{-1})\,(d\rho) \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

где $f\colon S_1(\mathcal{H}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$ — функция, действующая по правилу $u \to \rho_u$. При выполнении последнего условия будем говорить, что состояние ρ является барицентром меры $\mu \circ f^{-1}$ (меры μ_ρ). В таком случае также говорят, что состояние ρ равно интегралу Петтиса от функции $f\colon S_1(\mathcal{H}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$ по мере μ_ρ. В [4] установлено, что если $\rho \in \mathrm{extr}(\Sigma(\mathcal{H}))$, то ρ можно представить как барицентр некоторой двузначной меры $\mu\colon 2^{S_1(\mathcal{H})} \to \{0,1\}$.

При этом в [4] было отмечено, что различные меры могут представлять одно состояние, что счетно аддитивные меры представляют только нормальные состояния, а также то, что если мера сосредоточена на множестве векторов ортонормированного базиса и является двузначной, то соответствующее ей состояние является крайней точкой множества состояний $\Sigma(\mathcal{H})$.

Дадим описание множества крайних точек совокупности квантовых состояний. Для этого на пространстве мер $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$ введем отношение барицентрической эквивалентности $\sim$:

$$\mu \sim \nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\mu(e) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\nu(e) \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{2.1}$$

Интегралы в (2.1) представляют собой интегралы Петтиса от векторнозначной функции со значениями в пространстве $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$. Введенное отношение $\sim$ является, очевидно, отношением эквивалентности на пространстве $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$.

Приведем пример двух эквивалентных мер. Рассмотрим две последовательности $\{e_k\}$ и $\{f_k\}$ векторов единичной сферы $S_1(\mathcal{H})$ такие, что последовательность $\{\|e_k - f_k\|_{\mathcal{H}}\}$ бесконечно мала и строго монотонна. Тогда если $\mathcal{F}$ — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ и $\nu_{\mathcal{F}}$ — порожденная ультрафильтром $\mathcal{F}$ двузначная мера (см. [4]), то меры μ_e и μ_f, определяемые равенствами $\mu_{e,f}(A) = \nu_{\mathcal{F}}(\{n \in \mathbb{N}\colon e_n, f_n \in A\})$, $A \subset S_1(\mathcal{H})$, различны как элементы пространства $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$ и эквивалентны.

Множество

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \mu \in \mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))\colon \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\mu(e) = 0 \ \ \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \right\}$$

является линейным подпространством в пространстве мер $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$.

Фактор-пространство $\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H})) = \mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))/{\sim}$ является линейным пространством. Для каждого $\widehat{\mu} \in \widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H}))$ положим

$$\rho_{\widehat{\mu}}(\mathbf{A}) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\widehat{\mu}(e) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\mu(e), \qquad \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{2.2}$$

где $\mu \in \widehat{\mu}$. По определению отношения эквивалентности правая часть (2.2) не зависит от выбора представителя $\mu \in \widehat{\mu}$.

На пространстве $\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H}))$ вводится отношение частичного порядка $\geq$:

$$\widehat{\mu} \geq \widehat{\nu} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\widehat{\mu}(e) \geq \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e(\mathbf{A})\, d\widehat{\nu}(e) \quad \forall \mathbf{A} \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^+.$$

Обозначим через M_1^+ множество

$$\left\{\widehat{\mu}\in\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H})):\ \widehat{\mu}\cap S_1^+(\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H})))\neq\varnothing\right\}\equiv\left\{\widehat{\mu}\in\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H})):\ \widehat{\mu}\geq 0,\ \int\limits_{S_1(\mathcal{H})}\rho_e(\mathbf{I})\,d\widehat{\mu}(e)=1\right\}.$$

Теорема 2.1. *Отображение*

$$\int:\ \widehat{\mu}\to\int\limits_{S_1(\mathcal{H})}\rho_e\,d\widehat{\mu}(e)\equiv\rho_{\widehat{\mu}} \tag{2.3}$$

является биекцией множества M_1^+ *на* $\Sigma(\mathcal{H})$, *сохраняющей выпуклые комбинации.*

Доказательство. Любой элемент $\widehat{\mu}$ пространства $\widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H}))$ определяет линейный функционал $\rho_{\widehat{\mu}}$ на пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ посредством равенства (2.2). При этом если $\widehat{\mu}\in M_1^+$, то функционал $\rho_{\widehat{\mu}}$ неотрицателен и $|\rho_{\widehat{\mu}}(\mathbf{A})|=\left|\int_{S_1(\mathcal{H})}\rho_e(\mathbf{A})\,d\mu_1(e)\right|$, где $\mu_1\in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$; в частности, $\rho_{\widehat{\mu}}(\mathbf{I})=1$. Следовательно, $|\rho_{\widehat{\mu}}(\mathbf{A})|\leq\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ и функционал $\rho_{\widehat{\mu}}$ является непрерывным неотрицательным нормированным линейным функционалом на пространстве $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. $\int(M_1^+)\subset\Sigma(\mathcal{H})$ и отображение (2.3) сохраняет выпуклые комбинации.

Если $\widehat{\mu}\neq\widehat{\nu}$, то в силу (2.1) существует элемент $\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что $\rho_{\widehat{\mu}}(\mathbf{A})\neq\rho_{\widehat{\nu}}(\mathbf{A})$; значит, отображение (2.3) инъективно.

Согласно [4] для любого $\rho\in\Sigma(\mathcal{H})$ существует мера $\mu_\rho\in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ такая, что $\rho=$ $=\int_{S_1(\mathcal{H})}\rho_e\,d\mu_\rho(e)$. Следовательно, $\rho=\int_{S_1(\mathcal{H})}\rho_e\,d\widehat{\mu}(e)$ для класса $\widehat{\mu}$, содержащего меру μ_ρ. Значит, отображение (2.3) сюръективно. $\square$

Следствие 2.1. *Отображение* (2.3) *является биекцией множества* $\mathrm{extr}(M_1^+)$ *на множество* $\mathrm{extr}(\Sigma(\mathcal{H}))$.

Если состояние ρ является образом класса мер $\widehat{\mu}$ при биективном отображении (2.3), то будем писать $\rho=\rho_\mu$ и $\widehat{\mu}=\rho_{\widehat{\mu}}$. Кроме того, будем писать $\rho_{\widehat{\mu}}=\rho_\mu$ при произвольном выборе меры μ из класса $\widehat{\mu}$.

Дадим описание крайних точек множества M_1^+ классов неотрицательных нормированных мер. Как известно (см. [18]), множеством крайних точек симплекса мер $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ являются двузначные меры (т.е. меры, порожденные ультрафильтрами).

Теорема 2.2. *Если элемент* $m\in M_1^+$ *является крайней точкой множества* M_1^+, *то класс эквивалентности* m *содержит двузначную меру.*

Лемма 2.1. *Пусть* $\widehat{\mu}\in\mathrm{extr}(M_1^+)$. *Пусть* $\mu\in\widehat{\mu}$ *и существует такое множество* $A_1\subset S_1(\mathcal{H})$, *что* $\mu(A_1)=a_1\in(0,1)$. *Тогда если* $\mu_1(A)=\frac{1}{a_1}\mu(A\cap A_1)$, $A\in 2^{S_1(\mathcal{H})}$, *то* $\mu_1\sim\mu$.

Доказательство. Положим $\nu_1(A)=\mu(A\cap A_1)$, $\nu_2(A)=\mu(A\setminus A_1)$, $A\in 2^{S_1(\mathcal{H})}$. Тогда

$$\mu=a_1\mu_1+(1-a_1)\mu_2,\qquad\text{где}\quad \mu_1=\frac{1}{a_1}\nu_1,\quad \mu_2=\frac{1}{1-a_1}\nu_2.$$

Из того, что μ — крайняя точка множества M_1^+, следует, что $\mu_1\sim\mu_2\sim\mu$. $\square$

Значит, класс $\widehat{\mu}$ может быть представлен любым элементом μ_1, сосредоточенным на любом множестве $A_1\in 2^{S_1(\mathcal{H})}$ таком, что $\mu(A_1)>0$.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ — совокупность ортогональных проекторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\widehat{\mu}$ — *крайняя точка множества* M_1^+. *Тогда класс* $\widehat{\mu}$ *содержит двузначную меру, порожденную ультрафильтром подмножеств множества* $S_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Пусть $\mu\in\widehat{\mu}$. Рассмотрим совокупность

$$\mathcal{A}_1=\left\{A_1\in 2^{S_1(\mathcal{H})}:\ \mu(A_1)>0\right\}$$

подмножеств $S_1(\mathcal{H})$, частично упорядоченную по включению. Тогда система множеств $\mathcal{A}_1$ обладает следующими из свойств, характеризующих ультрафильтр:

- $\varnothing \notin \mathcal{A}_1$;
- $B \in S_1(\mathcal{H}),\ B \notin \mathcal{A}_1 \ \Rightarrow\ S_1(\mathcal{H}) \setminus B \in \mathcal{A}_1$;
- $A \in \mathcal{A}_1,\ B \supset A \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{A}_1$.

Однако не выполняется следующее свойство:

- $A \in \mathcal{A}_1,\ B \in \mathcal{A}_1 \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{A}_1$,

поскольку неизвестно, может ли мера μ принимать положительные значения на двух дизъюнктных множествах. Чтобы решить этот вопрос, покажем, что в совокупности множеств $\mathcal{A}_1$ существуют максимальные линейно упорядоченные по включению цепи.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ цепей из элементов частично упорядоченного отношением включения множества $\mathcal{A}_1$. Множество $\mathcal{E}$ частично упорядочивается отношением включения между элементами множества $\mathcal{E}$. Согласно теореме Хаусдорфа $\mathcal{E}$ имеет максимальный элемент $\mathcal{C}_1$.

Тогда если $A_1, A_2 \in \mathcal{C}_1$, то хотя бы одно из условий $A_1 \subset A_2$, $A_2 \subset A_1$ выполнено, поскольку элементы цепи $\mathcal{C}_1$ линейно упорядочены отношением включения.

Максимальность цепи $\mathcal{C}_1$ означает, что для произвольного элемента $A \in \mathcal{C}_1$ (для которого $\mu(A) > 0$) и для произвольного разбиения множества A на два дизъюнктных подмножества A', A'' одно и только одно из подмножеств A', A'' входит в цепь $\mathcal{C}_1$. Поскольку $\mu(A') + \mu(A'') = \mu(A) > 0$, хотя бы одно из множеств A', A'' принадлежит семейству $\mathcal{A}_1$. Так как цепь множеств $\mathcal{C}_1$ линейно упорядочена по включению, то оба множества A', A'' не могут входить в цепь $\mathcal{C}_1$. Хотя бы одно из множеств A', A'' должно быть элементом цепи $\mathcal{C}_1$, ибо иначе цепь $\mathcal{C}_1$ не является максимальной цепью в $\mathcal{A}_1$.

Максимальная цепь $\mathcal{C}_1$ линейно упорядоченных по включению подмножеств совокупности $\mathcal{A}_1$ образует ультрафильтр $\mathcal{F}$ подмножеств множества $S_1(\mathcal{H})$ таким образом, что $B \in \mathcal{F}$, если и только если B содержит некоторое множество из $\mathcal{C}_1$. Тогда

- $\varnothing \notin \mathcal{C}_1$;
- $A \in \mathcal{C}_1,\ B \supset A \ \Rightarrow\ B \in \mathcal{C}_1$;
- $B \subset S_1(\mathcal{H}),\ B \notin \mathcal{C}_1 \ \Rightarrow\ S_1(\mathcal{H}) \setminus B \in \mathcal{C}_1$ (ибо $S_1(\mathcal{H}) \in \mathcal{C}_1$, и потому одно и только одно из двух множеств B, $S_1(\mathcal{H}) \setminus B$ входит в цепь $\mathcal{C}_1$);
- $A \in \mathcal{C}_1,\ B \in \mathcal{C}_1 \ \Rightarrow\ A \cap B \in \mathcal{C}_1$ (ибо если $A, B \in \mathcal{C}_1$, то либо $A \subset B$, либо $A \supset B$).

Таким образом, любая мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ определяет некоторый ультрафильтр $\mathcal{F}$ подмножеств, на которых μ принимает положительные значения.

Для каждого $A \in \mathcal{F}$ определим меру $\mu_A = (\mu(A))^{-1}\nu_A$, где $\nu_A(B) = \mu(A \cap B)$, $B \in 2^{S_1}$. По условию леммы 2.2 класс $\widehat{\mu}$ — крайняя точка множества M_1^+, и $\mu \in \widehat{\mu}$ по предположению. Поэтому согласно лемме 2.1 имеем $\mu_A \sim \mu$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Следовательно, для любого $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ существует предел $\lim_{\mathcal{F}} \rho_{\mu_A}(\mathbf{P}) = \rho_\mu(\mathbf{P})$. Но тогда $\rho_{\mu_{\mathcal{F}}}(\mathbf{P}) = \rho_\mu(\mathbf{P})$ для любого $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, где $\mu_{\mathcal{F}}(A) = 1$ при всех $A \in \mathcal{F}$. Значит, $\mu_{\mathcal{F}} \in \widehat{\mu}$ и двузначная мера $\mu_{\mathcal{F}}$ эквивалентна мере μ. Таким образом, любая крайняя точка множества M_1^+ представляет собой класс эквивалентности мер, содержащий двузначную меру. $\square$

Замечание 2.1. Утверждение в обратную сторону несправедливо: хотя класс $\widehat{\mu}$ содержит двузначную меру $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, тем не менее класс $\widehat{\mu}$ может не быть крайней точкой множества M_1^+.

Пример. Пусть $\mathcal{E} = \{e_k\}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве E, и пусть $\mathcal{F} = \{f_k\}$ — система единичных векторов пространства E, заданная равенствами $f_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть F — ультрафильтр на множестве натуральных чисел и

$\nu_{\mathcal{F}}$ — соответствующая ему двузначная мера на $\mathbb{N}$. Тогда меры $\mu_F = \nu_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}$, $\mu_E = \nu_{\mathcal{F}} \circ e^{-1}$ и δ_{e_1} двузначные и соответственно являются крайними точками множества $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$. Однако нетрудно проверить, что $\rho_{\mu_F} = \frac{1}{2}(\rho_{\mu_E} + \rho_{e_1})$; следовательно, класс эквивалентности $\widehat{\mu}$ содержит как двузначную меру μ_F, так и меру $\frac{1}{2}(\mu_E + \delta_{e_1})$ и потому не является крайней точкой множества M_1^+.

Каждый класс эквивалентности $\widehat{\mu} \in M_1^+$ как множество в пространстве $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$ является выпуклым и (пред)компактным в *-слабой топологии (поскольку является подмножеством $S_1(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))))$. Если $\rho \in \mathrm{extr}(\Sigma(\mathcal{H}))$, то класс меры μ_ρ содержит двузначную меру, но не все входящие в класс $\widehat{\mu}_\rho$ меры двузначные. Например, если $e \in S_1(\mathcal{H})$ и $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, сходящийся к точке e, то класс $\widehat{\mu}_\rho$ содержит отрезок $\{a\delta_e + (1-a)\mu_{\mathcal{F}} : a \in [0,1]\}$.

Для каждого $\widehat{\mu} \in M_1^+$ множество $\widehat{\mu}$ не является компактом в пространстве $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$, наделенном $*$-слабой топологией, порожденной функционалами из банахова пространства $B(S_1(\mathcal{H}))$ ограниченных функций, снабженного sup-нормой. Действительно, $\widehat{\mu}$ представимо в виде $\mu + \mathcal{N}$, где

$$\mathcal{N} = \big\{\nu \in \mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})) \colon\ \nu(\mathbf{A}) = 0 \ \ \forall \mathbf{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\big\}$$

— линейное подпространство. Но единичная сфера банахова пространства $\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$ является компактом в $*$-слабой топологии, поэтому $\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ — компакт в $*$-слабой топологии.

Лемма 2.3. *Если $\nu \in \mathrm{extr}\big(\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))\big)$, где $\widehat{\mu}$ — крайняя точка множества M_1^+, то мера ν является двузначной.*

Доказательство. Так как $\nu \in \mathrm{extr}(\widehat{\mu})$, то из соотношений $\nu = a\nu_1 + (1-a)\nu_2$, $\nu_1, \nu_2 \in \widehat{\mu}$, $a \in (0,1)$, следует, что $\nu_1 = \nu_2$.

Предположим, что существуют меры $\lambda_1, \lambda_2 \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ и число $b \in (0,1)$ такие, что $\nu = b\lambda_1 + (1-b)\lambda_2$. Докажем, что тогда выполнено условие $\lambda_1 = \lambda_2$, т.е. мера ν является крайней точкой множества $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ и, следовательно, двузначна.

Предположим от противного, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда если λ_1 не эквивалентна λ_2, то $\widehat{\mu} = b\widehat{\lambda}_1 + (1-b)\widehat{\lambda}_2$, $\widehat{\lambda}_1 \neq \widehat{\lambda}_2$, но это противоречит условию $\widehat{\mu} \in \mathrm{extr}(M_1^+)$.

Если же меры λ_1 и λ_2 эквивалентны, то они также эквивалентны и мере ν, т.е. $\nu, \lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$. Тогда из условия $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следует, что μ не является крайней точкой множества $\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, а это противоречит условию леммы.

Таким образом, из условия $\nu = b\lambda_1 + (1-b)\lambda_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ и $b \in (0,1)$, следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Значит, $\nu \in \mathrm{extr}\big(S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))\big)$; следовательно, мера ν является двузначной. $\square$

Теорема 2.3. *Условие $\widehat{\mu} \in \mathrm{extr}(M_1^+)$ эквивалентно следующему условию: множество $\mathrm{extr}\big(\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))\big)$ содержит только двузначные меры.*

Доказательство. Необходимость установлена в лемме 2.3, докажем достаточность. Для этого докажем, что если $\widehat{\mu} \notin \mathrm{extr}(M_1^+)$, то множество $\mathrm{extr}\big(\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))\big)$ содержит меру, не являющуюся двузначной.

Пусть $\widehat{\mu} \notin \mathrm{extr}(M_1^+)$. Тогда $\widehat{\mu} = \alpha\widehat{\mu}_1 + (1-\alpha)\widehat{\mu}_2$, где $\widehat{\mu}_{1,2} \in \widehat{\mathrm{ba}}(S_1(\mathcal{H}))$, $\widehat{\mu}_{1,2} \neq \widehat{\mu}$. Поэтому если $\mu_j \in \mathrm{extr}\big[\widehat{\mu}_j \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))\big]$, $j = 1,2$, то $\mu_{\mathcal{F}} \sim \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, $\mu_{1,2} \nsim \mu_{\mathcal{F}}$. Из последнего соотношения следует, что $\mu_1 \nsim \mu_2$; значит, существует такое множество $D \subset S_1(\mathcal{H})$, что $0 < (\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2)(D) < 1$. Тогда если

$$\nu_1 = \frac{1}{a}\big(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2\big)\big|_D, \qquad \nu_2 = \frac{1}{1-a}\big(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2\big)\big|_{D^\perp},$$

где $a = (\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2)(D) \in (0,1)$ и $D^\perp = S_1(\mathcal{H}) \setminus D$, то $\nu_1, \nu_2 \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, причем $\nu_1(S_1(\mathcal{H}) \setminus D) = 0 = \nu_2(D)$ и

$$\widehat{\mu} \ni a\nu_1 + (1-a)\nu_2.$$

Пусть

$$\mathcal{M}_\mu^a = \{a\mu_1 + (1-a)\mu_2 \in \widehat{\mu}\colon\ \mu_{1,2} \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))),\ \mu_2(D) = 0 = \mu_1(D^\perp)\}.$$

Множество $\mathcal{M}_\mu^a$ выпукло и в силу теоремы Банаха–Алаоглу является компактным в топологии τ_B, порожденной всеми ограниченными функциями на $S_1(\mathcal{H})$. Следовательно, оно содержит свои крайние точки.

Лемма A. *Если $a\nu_1 + (1-a)\nu_2 \in \mathrm{extr}(\mathcal{M}_\mu^a)$, то мера ν_1 не разлагается в выпуклую комбинацию двух мер из $S_1(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$.*

Доказательство. Если $\nu_1 = \beta m_1 + (1-\beta)m_2$ при некоторых $m_1, m_2 \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, то $m_1(D^\perp) = 0 = m_2(D^\perp)$ и, кроме того,

$$a\nu_1 + (1-a)\nu_2 = \beta(am_1 + (1-a)\nu_2) + (1-\beta)(am_2 + (1-a)\nu_2),$$

а это противоречит тому, что $a\nu_1 + (1-a)\nu_2 \in \mathrm{extr}(\mathcal{M}_\mu^a)$. □

Пусть ν^* — крайняя точка выпуклого множества $\mathcal{M}_\mu^a$, компактного в топологии τ_B. Тогда ν^* имеет вид $\nu^* = a\nu_1^* + (1-a)\nu_2^*$, где $\nu_2^*(D) = 0 = \nu_1^*(D^\perp)$, $\nu_1^*, \nu_2^* \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$.

Докажем, что ν^* является крайней точкой множества $\widehat{\mu} \cap S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$.

Предположим противное. Тогда для меры $a\nu_1^* + (1-a)\nu_2^* \in \mathrm{extr}(\mathcal{M}_\mu^a)$ выполнено условие

$$a\nu_1^* + (1-a)\nu_2^* = b\lambda_1 + (1-b)\lambda_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))),$$

так что $\lambda_1, \lambda_2 \in \widehat{\mu}$, $b \in (0,1)$. Поэтому

$$\frac{1}{a} b\lambda_1\big|_D + \frac{1}{a}(1-b)\lambda_2\big|_D = a\nu_1^*.$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, можно считать, что $\lambda_1|_D \neq \lambda_2|_D$ (случай $\lambda_1|_{D^\perp} \neq \lambda_2|_{D^\perp}$ рассматривается аналогично). Тогда если $\lambda_1(D)\lambda_2(D) \neq 0$, то мера ν_1 разлагается в выпуклую комбинацию двух мер из $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$, что в силу леммы A приводит к противоречию. В силу полученного противоречия $\lambda_1(D)\lambda_2(D) = 0$. Значит, либо $a = b$, либо $a = 1-b$. Следовательно, $a\nu_1 + (1-a)\nu_2 \in \mathrm{extr}(S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))) \cap \widehat{\mu})$ и в множестве $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))) \cap \widehat{\mu}$ существует крайняя точка, не являющаяся двузначной мерой. □

Замечание 2.2. Для каждого $\mathbf{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ совокупность множеств $\mathcal{A}_\mathbf{P} = \{f_\mathbf{P}^{-1}(B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, где $f_\mathbf{P}(e) = (\mathbf{P}e, e)$, $e \in S^1(\mathcal{H})$, является σ-алгеброй. Пусть $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ есть σ-алгебра, порожденная семейством множеств $\bigcup_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}} \mathcal{A}_\mathbf{P}$. Тогда меры $\mu, \nu \in \mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}))$ являются эквивалентными, если и только если их сужения на алгебру $\mathcal{A}_\mathcal{P}$ совпадают. Значит, множества M_1^+ и $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}), \mathcal{A}_\mathcal{P}))$ изоморфны, а отображение (2.3) задает биекцию множества $S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H}), \mathcal{A}_\mathcal{P}))$ на множество квантовых состояний $\Sigma(\mathcal{H})$.

Охарактеризуем классы мер, барицентрами которых являются нормальные состояния. Напомним, что мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ *внутренне регулярна*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset S_1(\mathcal{H})$, что $\mu(S_1(\mathcal{H}) \setminus K) < \varepsilon$.

Лемма 2.4. *Если мера μ внутренне регулярна, то состояние ρ_μ нормальное.*

Доказательство. Выберем некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть множество $K \subset S_1(\mathcal{H})$ компактно в пространстве $\mathcal{H}$ и $\mu(S_1(\mathcal{H}) \setminus K) < \varepsilon$. Пусть $\{f_1, \dots, f_m\} \subset S_1(\mathcal{H})$ — некоторая ε-сеть множества K. Тогда существует конечномерный ортогональный проектор $\mathbf{P}_m$ на подпространство $\mathrm{span}(f_1, \dots, f_m)$ такой, что

$$\rho_\mu(\mathbf{P}_m) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} (\mathbf{P}_m e, e)\, d\mu(e) \geq \int\limits_K (\mathbf{P}_m e, e)\, d\mu(e) \geq \mu(K)\sqrt{1-\varepsilon^2} > (1-\varepsilon)^{3/2}.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то (см. [15, теорема 9.2]) состояние ρ_μ является нормальным. □

Если состояние ρ нормальное (и даже чистое векторное), то не всякая мера $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$ обязана быть внутренне регулярной. Например, пусть $\rho = \rho_u$, $u \in S_1(\mathcal{H})$, и пусть $\{e_k\}$ — последовательность единичных векторов, образующих всюду плотное множество в сфере $S_1(\mathcal{H})$. Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр, порожденный системой множеств $\mathbb{N}_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} \colon \|e_k - u\|_\mathcal{H} < \varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Пусть F — ультрафильтр, содержащий фильтр $\mathcal{F}$. Тогда $u = \lim_F e_k$, $\mu_F \in \widehat{\mu}_{\rho_u}$, но ультрафильтр F не должен быть сосредоточен на компактах.

Определение 2.1. Меру $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ назовем *нормальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset S_1(\mathcal{H})$, что $\mu(O_\varepsilon(K_\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$. (Здесь $O_\varepsilon(K_\varepsilon) = \{y \in S_1(\mathcal{H}) \colon \inf_{x\in K_\varepsilon} \|x - y\|_\mathcal{H} < \varepsilon\}$.)

Замечание 2.3. Если $\dim \mathcal{H} < \infty$, то любая мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ нормальна.

Замечание 2.4. Нормальность конечно аддитивной меры $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ является аналогом псевдососредоточенности счетно аддитивной меры на $S_1(\mathcal{H})$.

Лемма 2.5. *Если ρ_u — векторное состояние, то любая мера $\mu \in \widehat{\mu}_{\rho_u}$ нормальная.*

Доказательство. Докажем, что $\mu(O_\varepsilon(u)) = 1$ для каждого $\varepsilon > 0$. Предположим от противного, что $\mu(S_1(\mathcal{H}) \setminus O_\varepsilon(u)) = \delta > 0$. Тогда

$$1 = \rho_u(\mathbf{P}_u) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} |(u,e)|^2\, d\mu(e) \le \mu(O_\varepsilon(u)) + \mu(S_1(\mathcal{H}) \setminus O_\varepsilon(u))\sqrt{1-\varepsilon^2} < 1.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение леммы 2.5. $\square$

Лемма 2.6. *Если ρ — нормальное состояние конечного ранга, то любая мера $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$ нормальная.*

Доказательство. В силу леммы 2.5 существует компакт K, состоящий из конечного числа точек сферы $S_1(\mathcal{H})$, такой, что $\mu(O_\varepsilon(K)) = 1$ для любого $\varepsilon > 0$ и любой $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$. $\square$

Лемма 2.7. *Если ρ — нормальное состояние, то любая мера $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$ нормальная.*

Доказательство. Нормальное состояние ρ представимо неотрицательным ядерным оператором с единичным следом (см. [15]). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют конечная ортонормированная система векторов $\{u_1, \ldots, u_m\}$, неотрицательные числа $p_1, \ldots, p_m, p_0$ и нормальное состояние r такие, что

$$\rho = \sum_{k=1}^m p_k \rho_{u_k} + p_0 r = (1-p_0)\rho' + p_0 r \qquad \text{и} \qquad p_0 \in \Big(0, \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Тогда в силу теоремы 2.1 имеем $\widehat{\mu}_\rho = (1-p_0)\widehat{\mu}_{\rho'} + p_0\widehat{\mu}_r$, причем любая мера из $\widehat{\mu}_{\rho'}$ нормальная в силу леммы 2.6. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то и любая мера из $\widehat{\mu}_\rho$ нормальная. $\square$

Лемма 2.8. *Если мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ нормальная, то состояние ρ_μ нормальное.*

Доказательство. Выберем некоторое число $\varepsilon > 0$. Тогда существует компакт $K \subset S_1(\mathcal{H})$ такой, что $\mu(O_\varepsilon(K)) > 1 - \varepsilon$. Пусть $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset S_1(\mathcal{H})$ — некоторая ε-сеть компакта K, и пусть $\mathbf{P}$ — ортогональный проектор на линейное подпространство $\mathrm{span}(f_1, \ldots, f_m)$. Тогда

$$\rho_\mu(\mathbf{P}) = \int\limits_{S_1(\mathcal{H})} (\mathbf{P}e, e)\, d\mu(e) \ge \int\limits_{O_\varepsilon(K)\cap S_1(\mathcal{H})} (\mathbf{P}e, e)\, d\mu(e) \ge$$
$$\ge (1-\varepsilon) \inf_{O_\varepsilon(K)\cap S_1(\mathcal{H})} (\mathbf{P}e, e) \ge (1-\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечномерный ортогональный проектор $\mathbf{P}$, что $\rho_\mu(\mathbf{P}) > 1 - \varepsilon$. Значит (см. [15]), состояние ρ_μ является нормальным. $\square$

Следствие 2.2. *Если мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ нормальная, то любая мера из класса $\widehat{\mu}$ является нормальной.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \widehat{\mu}$ и μ — нормальная мера. В силу леммы 2.8 имеем $\rho_\mu \in \in \Sigma_{\mathrm{n}}(\mathcal{H})$. По теореме 2.1 имеем $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}_{\rho_\mu}$. В силу леммы 2.7 любая мера $\mu \in \widehat{\mu}$ нормальная. □

Следствие 2.3. *Если пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, то всякая счетно аддитивная мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ нормальна, а ее барицентр ρ_μ является нормальным состоянием.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу сепарабельности $\mathcal{H}$ существует счетная ε-сеть $\{f_k\}$ единичной сферы $S_1(\mathcal{H})$. Мера μ счетно аддитивна, поэтому существует такой номер N, что $\mu\big(\bigcup_{j=1}^N O_\varepsilon(f_j) \cap S_1(\mathcal{H})\big) > 1 - \varepsilon$. Следовательно, мера μ является нормальной. □

Из лемм 2.7, 2.8 и следствия 2.2 вытекает

Теорема 2.4. *Состояние ρ является нормальным тогда и только тогда, когда любая мера $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$ нормальная.*

Следствие 2.4. *Состояние ρ является крайней точкой множества нормальных состояний тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widehat{\mu}_\rho$ состоит из нормальных мер и содержит двузначную меру. При этом любая такая нормальная двузначная мера либо сосредоточена в одной точке, либо определяет неглавный ультрафильтр, сходящийся к точке по норме пространства $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из теорем 2.2 и 2.4. Двузначная мера $\mu \in \widehat{\mu}_\rho$ может быть либо счетно аддитивна, либо чисто конечно аддитивна. Если мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ счетно аддитивна и двузначна, то она является мерой, сосредоточенной в некоторой точке $S_1(\mathcal{H})$ (см. [18]). Если мера $\mu \in S_1^+(\mathrm{ba}(S_1(\mathcal{H})))$ конечно аддитивна и двузначна, то она определяет ультрафильтр $\digamma_\mu = \mu^{-1}(\{1\})$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку мера является нормальной, существует компакт $K_\varepsilon \subset S_1(\mathcal{H})$, покрываемый конечной ε-сетью $\{f_1, \dots, f_m\}$, такой, что $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$. Так как мера μ двузначна, то $\mu(K_\varepsilon) = 1$; более того, существует элемент $f_\varepsilon \in \{f_1, \dots, f_m\}$ такой, что $\mu(\overline{O}_\varepsilon(f_\varepsilon)) = 1$. Следовательно, существует последовательность вложенных замкнутых шаров, на которых мера μ принимает единичное значение. Значит, неглавный ультрафильтр $\digamma_\mu$ сходится к точке на $S_1(\mathcal{H})$ по норме пространства $\mathcal{H}$. □

3. КРАЙНИЕ ТОЧКИ ЕДИНИЧНОГО ШАРА НОРМИРОВАННОГО ИДЕАЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА НА $\mathcal{H}$

В этом разделе установлен критерий унитарности произвольного элемента унитальной C*-алгебры и исследованы свойства множеств крайних точек единичных шаров НИП на $\mathcal{H}$.

Предложение 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитальная* C*-*алгебра. Для произвольного элемента $A \in \mathcal{A}$ следующие условия эквивалентны*:

(i) $A \in \mathcal{A}^{-1}$ *и* $A, A^{-1} \in \mathcal{A}^1$;

(ii) $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{A}^1)$ *и* $\mathrm{dist}(A, \mathcal{A}^{-1}) < 1$;

(iii) $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$.

Доказательство. Пусть I — единица алгебры $\mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Ясно, что $|A|^2 \le |A| \le I$. Имеем

$$I = |AA^{-1}| = \sqrt{(A^{-1})^* A^* A A^{-1}} \ge (A^{-1})^* \sqrt{A^* A}\, A^{-1} = (A^{-1})^* |A| A^{-1}$$

в силу неравенства Ф. Хансена [12] для операторной монотонной функции $f(t) = \sqrt{t}$, $t \ge 0$. Умножив обе части неравенства $I \ge (A^{-1})^* |A| A^{-1}$ слева на элемент A^* и справа на элемент A, с учетом равенства $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ получаем $|A|^2 \ge |A|$. Таким образом, $|A|^2 \ge |A| \ge |A|^2$ и $|A|^2 = |A|$, т.е. элемент $|A|$ является ортогональным проектором. Поскольку $|A|$ — обратимый проектор, имеем $|A| = I$. Аналогично проверяется, что $|A^*| = I$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Для любого элемента $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ имеем $A^{-1} = A^*$, поэтому $\|A^{-1}\| = \|A^*\| = \|A\|$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Если $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{A}^1)$, то $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{dist}(A, \mathcal{A}^{-1}) < 1$ (см. [6, proposition]).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Имеем равенство $\mathrm{extr}(\mathcal{A}^1) = \{V \in \mathcal{A}\colon (I - V^*V)\mathcal{A}(I - VV^*) = \{0\}\}$ (см. [17, Ch. I, Theorem 10.2(ii)]). $\square$

Лемма 3.1. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$ и даны операторы $A \in \mathcal{E}$ и $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда $XAY \in \mathcal{E}$ и выполнено неравенство $\|XAY\|_{\mathcal{E}} \le \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \|A\|_{\mathcal{E}}$.*

Доказательство. Поскольку $X^*X \le \|X\|^2 I$, имеем

$$|XA|^2 = A^* \cdot X^*X \cdot A \le A^* \cdot \|X\|^2 I \cdot A = \|X\|^2 A^*A$$

и $|XA| \le \|X\| \cdot |A|$ в силу операторной монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}$, $t \ge 0$. Далее заметим, что $\|AY\|_{\mathcal{E}} = \|Y^*A^*\|_{\mathcal{E}}$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$, оператор $A \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$ обратим слева (или справа) и $A_{\mathrm{l}}^{-1} \in \mathcal{E}^1$ (соответственно $A_{\mathrm{r}}^{-1} \in \mathcal{E}^1$). Тогда оператор A лежит в $\mathcal{E}^1$. При этом если оператор A обратим и $I \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$, то $A^{-1} \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$.*

Доказательство. Поскольку оператор A^2 лежит в $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$, имеем $A = A^2 A_{\mathrm{l}}^{-1} \in \mathcal{E}^1$ (соответственно $A = A_{\mathrm{r}}^{-1} A^2 \in \mathcal{E}^1$) в силу леммы 3.1.

Если $A^{-1} \notin \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$, то $A^{-1} = \frac{1}{2}(S + T)$ с некоторыми операторами $S, T \in \mathcal{E}^1$, $S \ne T$. Тогда $I = A^{-1}A = \frac{1}{2}(SA + TA)$, где $SA, TA \in \mathcal{E}^1$ (см. лемму 3.1). Покажем, что $SA \ne TA$. Предполагая, что $SA = TA$, получаем $S = SA \cdot A^{-1} = TA \cdot A^{-1} = T$ — противоречие. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$, оператор $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ и натуральное число $n \ge 2$ таковы, что оператор $B := A^{n-1}$ обратим и $B^{-1} \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^1$. Если $A^n \in \mathcal{E}^1$, то $A^n \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$.*

Доказательство. Если $A^n \notin \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$, то $A^n = \frac{1}{2}(S + T)$ с некоторыми операторами $S, T \in \mathcal{E}^1$, $S \ne T$. Тогда $A = A^n B^{-1} = \frac{1}{2}(SB^{-1} + TB^{-1})$, где $SB^{-1}, TB^{-1} \in \mathcal{E}^1$ (см. лемму 3.1). Покажем, что $SB^{-1} \ne TB^{-1}$. Предполагая, что $SB^{-1} = TB^{-1}$, получаем $S = SB^{-1} \cdot B = TB^{-1} \cdot B = T$ — противоречие. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$ и оператор $A \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^1 \cap \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ обратим. Тогда $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и*

(i) *если $A^{-1} \in \mathcal{E}^1$, то $A^{-1} \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$;*

(ii) *если $A = U|A|$ — полярное разложение и $U \in \mathcal{E}^1$, то $U \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$.*

Доказательство. Если НИП $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ содержит обратимый слева (или справа) оператор, то $I \in \mathcal{E}$ в силу леммы 3.1, т.е. $\mathcal{E}$ совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(i) Если $A^{-1} \notin \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$, то $A^{-1} = \frac{1}{2}(S + T)$ с некоторыми операторами $S, T \in \mathcal{E}^1$, $S \ne T$. Тогда $A = AA^{-1}A = \frac{1}{2}(ASA + ATA)$, где $ASA, ATA \in \mathcal{E}^1$ (см. лемму 3.1). Покажем, что $ASA \ne ATA$. Предполагая, что $ASA = ATA$, получаем $S = A^{-1} \cdot ASA \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot ATA \cdot A^{-1} = T$ — противоречие.

(ii) Поскольку $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, имеем $U \in \mathcal{E}$. Если $U \notin \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$, то $U = \frac{1}{2}(S + T)$ с некоторыми операторами $S, T \in \mathcal{E}^1$, $S \ne T$. Тогда $A = U|A| = \frac{1}{2}(S|A| + T|A|)$, где $S|A|, T|A| \in \mathcal{E}^1$ (см. лемму 3.1). Оператор $|A|$ также обратим. Предположим, что $S|A| = T|A|$. Тогда $S = S|A| \cdot |A|^{-1} = T|A| \cdot |A|^{-1} = T$ — противоречие. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}\rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$ и дан оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда*

(i) *$A \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1) \;\Leftrightarrow\; VAW \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ для всех унитарных операторов $V, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;*

(ii) *если пространство $\mathcal{H}$ конечномерно, то $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1) \;\Leftrightarrow\; |A| \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$.*

Доказательство. (i) Пусть оператор $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ и $VAW = \frac{1}{2}(S+T)$ с некоторыми операторами $S, T \in \mathcal{E}^1$, $S \neq T$. Тогда

$$A = V^* \cdot VAW \cdot W^* = \frac{V^*SW^* + V^*TW^*}{2}, \qquad \text{где} \quad V^*SW^*, V^*TW^* \in \mathcal{E}^1$$

(см. лемму 3.1). Покажем, что $V^*SW^* \neq V^*TW^*$. Предполагая, что $V^*SW^* = V^*TW^*$, получаем $S = V \cdot V^*SW^* \cdot W = V \cdot V^*TW^* \cdot W = T$ — противоречие.

(ii) Пусть $A \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ и $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — унитарный оператор такой, что $A = U|A|$. Если $|A| = \frac{1}{2}(S+T)$, где $S, T \in \mathcal{E}^1$, то $US, UT \in \mathcal{E}^1$ в силу леммы 3.1 и $A = \frac{1}{2}(US + UT)$. Поэтому $A = US = UT$. Умножив эти равенства слева на U^*, получаем $|A| = S = T$, т.е. $|A| \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$. Обратная импликация проверяется аналогичным образом. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$. Если $U \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ для некоторого унитарного оператора $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $V \in \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$ для всех унитарных операторов $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Доказательство. В утверждении (i) теоремы 3.2 положим $A = U$, $V = V$ и $W = U^*$. Таким образом, если $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^{\mathrm{u}} \cap \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1) \neq \varnothing$, то $(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^{\mathrm{u}} \subseteq \mathrm{extr}(\mathcal{E}^1)$. $\square$

Если C*-алгебра $\mathcal{A}$ унитальна и множество $\mathcal{A}^{-1}$ плотно в $\mathcal{A}$, то $\mathrm{extr}(\mathcal{A}^1) = \mathcal{A}^{\mathrm{u}}$ (см. [6, p. 100]). Пусть пространство $\mathcal{H}$ бесконечномерно. Наследственная C*-подалгебра $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ компактных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ не унитальна, поэтому $\mathrm{extr}((\mathcal{C}(\mathcal{H}))^1) = \varnothing$ в силу [17, Ch. I, Theorem 10.2(i)]; $\langle \mathcal{C}(\mathcal{H}), \|\cdot\| \rangle$ является НИП на $\mathcal{H}$. О множествах крайних точек единичных шаров некоторых конкретных НИП на $\mathcal{H}$ см. [10] и цитируемую там литературу.

Следующие два утверждения доказываются аналогично теореме 3.2 и следствию 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$ и дан оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда*

(i) $A \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E})) \ \Leftrightarrow \ VAW \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E}))$ *для всех унитарных операторов $V, W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;*

(ii) *если пространство $\mathcal{H}$ конечномерно, то $A \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E})) \ \Leftrightarrow \ |A| \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E}))$.*

Следствие 3.2. *Пусть $\langle \mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \rangle$ — НИП на $\mathcal{H}$. Если $U \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E}))$ для некоторого унитарного оператора $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, то $V \in \mathrm{extr}(S_1(\mathcal{E}))$ для всех унитарных операторов $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

4. КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ КРАЙНИМИ ТОЧКАМИ МНОЖЕСТВА СИНГУЛЯРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Пусть алгебра всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ порождается некоторым фактором фон Неймана $\mathcal{M}$ и его коммутантом $\mathcal{M}'$, так что $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{M} \vee \mathcal{M}'$. Предположим, что существуют два набора разложений единицы $P^{(k)} = \big(P_j^{(k)}\big)$ и $Q^{(l)} = \big(Q_m^{(l)}\big)$, принадлежащие факторам $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ соответственно. Фиксируем состояние $\rho \in (\mathcal{B}(\mathcal{H}))^*$. Тогда можно определить матрицу квантовых корреляций по формуле

$$\alpha_{jm}^{(kl)} = \rho\big(P_j^{(k)} Q_m^{(l)}\big). \tag{4.1}$$

В силу того, что ортогональные проекторы из наборов $P_j^{(k)}$ и $Q_m^{(l)}$ попарно коммутируют, можно отождествить разложения единицы $P^{(k)}$ и $Q^{(l)}$ с квантовыми наблюдаемыми с дискретным спектром. В этом случае матрица (4.1) определяет квантовые корреляции между наблюдаемыми. Изучение множества таких квантовых корреляций является сложной математической задачей и связано с решением старых гипотез в теории операторных алгебр [13, 2]. Нашей целью будет определение квантовых корреляций в случае, когда ρ является сингулярным квантовым состоянием, заданным неглавным ультрафильтром.

Пусть $\mathcal{F}$ — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, определяемый двузначной мерой ν, $e = (e_n)$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и

$\rho_{\mathcal{F},e}$ — крайняя точка множества сингулярных состояний, определяемая формулой

$$\rho_{\mathcal{F},e}(A) = \int\limits_{\mathbb{N}} (Ae_n, e_n)\, d\nu(n). \tag{4.2}$$

Определение 4.1. Говорят, что ультрафильтр $\mathcal{F}$ имеет *базу*, состоящую из множеств X_n, если для любого $X \in \mathcal{F}$ найдется $X_n \subset X$.

Пример. Всюду ниже мы будем использовать ультрафильтр $\mathcal{F}$ с базой, состоящей из множеств $X_n = \{2^n k\colon k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 4.2. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество всех проекторов P, для которых найдется такое $X \in \mathcal{F}$, что $|(Pe_k, e_k)| = 2^{-n}$, $k \in X$.

Легко видеть, что $\rho_{\mathcal{F},e}(P) = 2^{-n}$, $P \in \mathcal{P}_n$.

Предложение 4.1. *В $\mathcal{P}_n$ существует 2^n попарно коммутирующих проекторнозначных разложений единицы $P^{(k)}$ и $Q^{(l)}$,*

$$\sum_{j=1}^{2^n} P_j^{(k)} = \sum_{m=1}^{2^n} Q_m^{(l)} = I, \qquad 1 \le k, l \le 2^n,$$

со свойством

$$\bigl(P_j^{(k)} Q_m^{(l)} e_s, e_s\bigr) = \frac{1}{4^n}, \qquad s \in X,$$

где множество X задано в определении 4.2.

Доказательство. Семейство проекторов с заданными свойствами нетрудно построить в гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^{4n}$. Действительно, матрицы строятся по 2^n взаимонесмещенным ортонормированным базисам, так что на диагонали у них стоят $\frac{1}{2^n}$. Как известно, существует $N+1$ семейств проекторов требуемого вида в пространстве размерности $N = 2^n$. Единственный базис, для которого у соответствующих матриц проекторов стоят на диагонали единицы или нули, не используется. Продемонстрируем это для $n = 1$. В этом случае мы должны построить матрицы размера 4×4. Положим

$$P_{1,2}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac12 & \pm\frac12 & 0 & 0 \\ \pm\frac12 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & \pm\frac12 \\ 0 & 0 & \pm\frac12 & \frac12 \end{pmatrix}, \qquad Q_{1,2}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \pm\frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \pm\frac12 \\ \pm\frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \pm\frac12 & 0 & \frac12 \end{pmatrix},$$

$$P_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac12 & \pm\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ \pm\frac{i}{2} & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & \pm\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & \pm\frac{i}{2} & \frac12 \end{pmatrix}, \qquad Q_{1,2}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac12 & 0 & \pm\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \pm\frac{i}{2} \\ \pm\frac{i}{2} & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \pm\frac{i}{2} & 0 & \frac12 \end{pmatrix}.$$

Для пространств большей размерности нужно взять всевозможные тензорные произведения матриц $P_j^{(l)}$ и $Q_m^{(k)}$, $1 \le j, m, l, k \le 2$. Теперь достаточно взять представление полученных разложений единицы в бесконечномерном пространстве $\mathcal{H}$, являющееся бесконечной прямой суммой проекторов в $\mathbb{C}^{4n}$. $\square$

Рассмотрим представление Гельфанда–Наймарка–Сигала π, связанное с состоянием $\rho_{\mathcal{F},e}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, в котором состояние $\rho_{\mathcal{F},e}$ становится векторным, так что

$$\rho_{\mathcal{F},e}(A) = (\pi(A)\Omega, \Omega)_{\mathfrak{H}}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \Omega \in \mathfrak{H}, \quad \|\Omega\| = 1.$$

Обозначим через $\mathcal{M}_F$ алгебру фон Неймана, порожденную разложениями единицы $\pi(P^{(k)})$, где $P^{(k)}$ построены при доказательстве предложения 4.1.

Теорема 4.1. *Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}_F$ является фактором типа* II_1, *а состояние на ней, определяемое вектором* Ω, *является следом.*

Доказательство. Как уже было сказано, наборы проекторов $P^{(k)}$ могут быть отождествлены с квантовыми наблюдаемыми. Такие наблюдаемые можно получить, взяв линейную комбинацию проекторов с некоторыми коэффициентами, определяющими спектр наблюдаемой. В частности, если в качестве спектра выступают числа $\lambda = \epsilon_1 \dots \epsilon_k$, где ϵ_j дается выбором одного из двух значений $\sqrt{-1}$, получаем в качестве наблюдаемой оператор, унитарно эквивалентный тензорному произведению k матриц Паули в пространстве $\mathbb{C}^2$. Таким образом, можно считать, что фактор $\mathcal{M}_F$ порождается не разложениями единицы, а унитарными операторами, представляющими собой тензорные произведения операторов Паули. Произведение (композиция) таких операторов не выводит нас из данного класса. Осталось заметить, что сужение состояния $\rho_{\mathcal{F},e}$ на оператор, унитарно эквивалентный тензорному произведению матриц Паули в указанном выше смысле, дает нуль, если хотя бы в одной клетке стоит матрица, унитарно эквивалентная σ_x или σ_y, и дает ± 1 в противном случае. Такое состояние является следовым. Свойство фактора для алгебры $\mathcal{M}_F$ наследуется из аналогичного свойства, присутствующего в конечномерном пространстве. $\square$

Замечание 4.1. Аналогичное утверждение можно доказать для фактора $\mathcal{M}'_F$, порожденного разложениями единицы $Q^{(l)}$.

Замечание 4.2. В работах [4, 5] была высказана гипотеза, что все крайние точки множества состояний имеют вид (4.2). Отрицательное решение данной гипотезы в предположении справедливости континуум-гипотезы было дано в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akemann C., Weaver N.* $\mathcal{B}(H)$ has a pure state that is not multiplicative on any masa // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2008. V. 105, N 14. P. 5313–5314.
2. *Amosov G.* Remark on negative solution to the Tsirelson conjecture about quantum correlations // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2362, N 1. Pap. 060001.
3. *Амосов Г.Г., Манько В.И.* Эволюция вероятностных мер, связанных с квантовыми системами // ТМФ. 2005. Т. 142, №2. С. 365–370.
4. *Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж.* Об аналогах спектрального разложения квантового состояния // Мат. заметки. 2013. Т. 93, №3. С. 323–332.
5. *Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж.* Геометрические свойства систем векторных состояний и разложение состояний в интегралы Петтиса // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, №4. С. 1–14. Math-Net
6. *Berntzen R.* Extreme points of the closed unit ball in C^*-algebras // Colloq. Math. 1997. V. 74, N 1. P. 99–100.
7. *Blackadar B.* Operator algebras: Theory of C*-algebras and von Neumann algebras. Berlin: Springer, 2006. (Encycl. Math. Sci.; V. 122).
8. *Браттели У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика: C^*- и W^*-алгебры. Группы симметрий. Разложение состояний. М.: Мир, 1982.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *De Jager P., Conradie J.* Extreme point methods in the study of isometries on certain noncommutative spaces // Glasg. Math. J. 2022. V. 64, N 2. P. 462–483.
11. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
12. *Hansen F.* An operator inequality // Math. Ann. 1980. Bd. 246, N 3. S. 249–250.
13. *Ji Z., Natarajan A., Vidick T., Wright J., Yuen H.* MIP* = RE // Commun. ACM. 2021. V. 64, N 11. P. 131–138.
14. *Мерфи Дж.* C*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.
15. *Шерстнев А.Н.* Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008.
16. *Simon B.* Trace ideals and their applications. 2nd ed. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2005. (Math. Surv. Monogr.; V. 120).
17. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Berlin: Springer, 2002. (Encycl. Math. Sci.; V. 124).
18. *Yosida K., Hewitt E.* Finitely additive measures // Trans. Am. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 46–66.